

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

30. 08. 2016

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben:

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Traglinientheorie, Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

1. Nennen Sie zwei Möglichkeiten, um eine laminare Profilgrenzschicht bei einer konstanten Reynoldszahl aufrechtzuerhalten.
2. Nennen Sie vier Faktoren, die das Auftreten von Ablösung an Profilen sowie die Form dieser Ablösung beeinflussen.
3. Unter welchen Voraussetzungen ist die Skelett-Theorie gültig? Erklären Sie weiterhin die Vorgehensweise.
4. Eine Profilmströmung soll bei subsonischer Anströmung und kleinen Anstellwinkeln auf ihren Widerstandsbeiwert hin numerisch untersucht werden. Suchen Sie hierfür das am besten geeignete der folgenden Verfahren heraus und begründen Sie, warum die anderen weniger geeignet sind.
 - (a) lineare Potentialtheorie
 - (b) Euler-Gleichungen gekoppelt mit Grenzschichtgleichungen
 - (c) Navier-Stokes-Gleichungen
5. Erläutern Sie kurz den Unterschied zwischen einem expliziten und einem impliziten Gleichungssystem (mittels Gleichungen), wie sie bei der Diskretisierung von Zeitableitungen auftreten.
6. Welchen Effekt hat die Pfeilung eines Tragflügels und welcher Nachteil ist u.a. damit verbunden?

2. Aufgabe: Traglinientheorie (18 Punkte)

Mit Hilfe der Prandtlschen Traglinientheorie soll die Geometrie eines Flügels optimiert werden, um die strukturelle Belastung an der Flügelwurzel zu reduzieren.

Der unverwundene Flügel eines Sportflugzeuges im stationären Geradeausflug weist eine elliptische Auftriebsverteilung auf.

1. Nennen Sie die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Prandtlschen Traglinientheorie und skizzieren Sie sorgfältig den Flügelgrundriss des untersuchten Flügels.
2. Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten A_n der Zirkulationsverteilung $\Gamma(\varphi)$ unter der Annahme, dass der Auftrieb ausschließlich vom Flügel erzeugt wird.

Um das maximal zulässige Biegemoment an der Flügelwurzel $M_{W,max}$ nicht zu überschreiten, wird im Folgenden der Flügel geometrisch verwunden. Die sich einstellende Zirkulationsverteilung kann vereinfacht durch $\Gamma(\varphi) = 2bu_\infty (A_1 \sin(\varphi) + A_2 \sin(2\varphi) + A_3 \sin(3\varphi))$ ausgedrückt werden.

3. Bestimmen Sie zunächst die unbekanntenen Fourier-Koeffizienten A_1 und A_2 unter der Annahme, dass sich das Gesamtgewicht des Flugzeuges nicht ändert und weiterhin ein stationärer Geradeausflug stattfinden soll. Bestimmen Sie anschließend A_3 so, dass an der Flügelwurzel $M_{W,max}$ vorliegt. Leiten Sie dafür zunächst eine Beziehung für das Wurzelbiegemoment in Abhängigkeit der unbekanntenen Koeffizienten A_1, A_2 und A_3 her.
4. Bestimmen Sie für den geometrisch verwundenen Flügel den induzierten Anstellwinkel $\alpha_i(\varphi)$. Leiten Sie dazu zunächst ausgehend vom allgemeinen Fourierreihenansatz eine Beziehung für die induzierte Abwindgeschwindigkeit $w_i(\varphi)$ her.
5. Bewerten Sie den modifizierten Flügel bezüglich seines induzierten Widerstandes (ohne Rechnung).

Gegeben: Gesamtmasse $m = konst.$, Flügelspannweite b , Erdbeschleunigung g , u_∞ , ρ_∞ , $M_{W,max}$.

Hinweise:

$$w_i(\varphi) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}$$

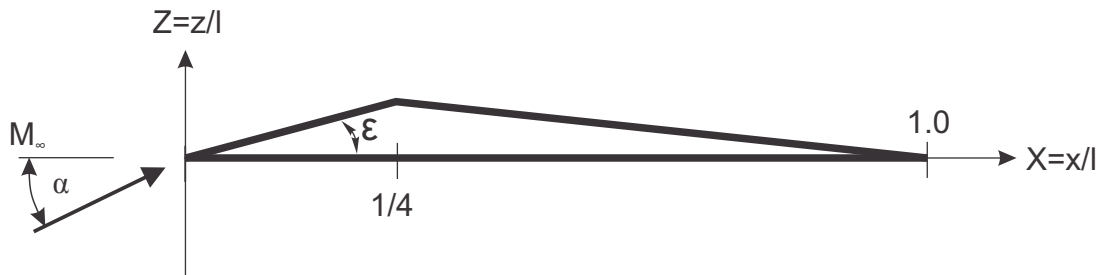
$$\Gamma(\varphi) = 2bu_\infty \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi)$$

$$y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$$

$$\int \sin(nx) \cdot \sin(px) d\varphi = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4n} \sin(2nx) & n = p \\ \frac{\sin[(n-p)x]}{2(n-p)} - \frac{\sin[(n+p)x]}{2(n+p)} & n \neq p \end{cases}$$

3. Aufgabe: Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie (17 Punkte)

Gegeben ist das dargestellte Profil mit gerader Unterseite.



1. Unter Anwendung der Skelett-Theorie für einen inkompressiblen Fall:
 - (a) Berechnen Sie den Auftriebsbeiwert c_l des untersuchten Profils in Abhängigkeit vom Anstellwinkel α und dem vorderen Keilöffnungswinkel ε
2. Nun wird das selbe Profil bei den Machzahlen $Ma_1 = 0.6$ und $Ma_2 = 3$ unter Anwendung linearisierter Potentialtheorie untersucht. Berücksichtigen Sie ggf. die für die inkompressible Strömung erhaltenen Ergebnisse.
 - (a) Berechnen Sie den Auftriebsbeiwert c_{l1} und den Widerstandsbeiwert c_{d1} des Profils für die Machzahl $Ma_1 = 0.6$.
 - (b) Berechnen Sie den Auftriebsbeiwert c_{l2} und den Widerstandsbeiwert c_{d2} des Profils für die Machzahl $Ma_2 = 3.0$.
 - (c) Berechnen Sie die Lage des Neutralpunktes X_N des Profils für die Machzahl $Ma_2 = 3.0$.
Diskutieren Sie anschließend kurz, was das Ergebnis für die flugdynamische Stabilität im Überschall im Vergleich zum Unterschall bedeutet.

Gegeben: Anstellwinkel α , Sehnenlänge l , Keilöffnungswinkel ε , $Ma_1 = 0.6$, $Ma_2 = 3$.

Hinweise:

$$\gamma(\varphi) = 2V_\infty \cdot \left(A_0 \cdot \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi) \right)$$

$$-w_a(\varphi) = -\frac{w}{V_\infty} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

$$-\frac{w}{V_\infty} = \alpha - \frac{dZ}{dX} \quad \frac{u}{V_\infty} = \pm \frac{\gamma(X)}{V_\infty}$$

$$c_p|_{Ma_\infty < 0.8} = \frac{c_{pik}}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}} \quad \text{und} \quad c_p|_{Ma_\infty > 1.2} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$$

1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte) (LÖSUNG)

1. 2 Punkte:

Laminarhaltung durch Formgebung (Laminarprofile), Absaugung der Grenzschicht

2. 2 Punkte:

Anstellwinkel, Reynoldszahl, Machzahl, Nasenradius, Profloberfläche, Pfeilung, Absaugung, Ausblasen ...

3. 4 Punkte:

Voraussetzungen:

Sehr dünne Profile, kleine Anstellwinkel, inkompressibel, stationär, reibungsfrei und rotationsfrei.

Vorgehensweise:

Entlang der Skelettlinie werden Wirbel angeordnet und durch Überlagerung mit einer Translationsgeschwindigkeit geeignete Profilkonturen erzeugt. Die Profilschneide fällt mit der x-Achse zusammen. Für sehr schwach gewölbte Profile wird die Wirbelverteilung statt auf der Skelettlinie auf der Profilschneide angeordnet.

4. 3 Punkte:

(a) ungeeignet, da der Widerstandsbeiwert gesucht wird (Reibung).

(b) am besten geeignet, da durch die GS-Gleichungen die Reibung erfasst wird und die Anstellwinkel klein sind (keine Ablösung).

(c) zwar geeignet, aber aufwendiger als die mit den Grenzschichtgleichungen gekoppelten Euler-Gleichungen.

5. 2 Punkte:

explizit:

die Lösung zum Zeitpunkt $n + 1$ hängt nur von Größen der vorherigen, d.h. bekannten Zeitpunkte ($n, n - 1, \dots$) ab.

$$\vec{Q}_{n+1} = f(\vec{Q}_n, \vec{Q}_{n-1}, \dots)$$

implizit:

die Lösung zum Zeitpunkt $n + 1$ hängt auch von Größen des Zeitpunktes $n + 1$ ab.

$$\vec{Q}_{n+1} = f(\vec{Q}_{n+1}, \vec{Q}_n, \vec{Q}_{n-1}, \dots)$$

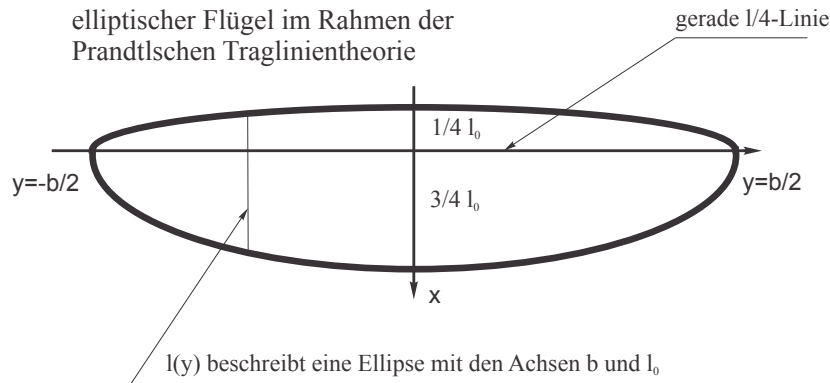
6. 2 Punkte:

Die Pfeilung bewirkt eine Reduzierung der Kompressibilitätseffekte (effektive Machzahl: $M_\infty \cos \varphi_c$).
Nachteil der Pfeilung ist die Verringerung des Auftriebs: $v_\infty \cos \varphi_c < v_\infty \rightarrow C_L \downarrow$

2. Aufgabe: (LÖSUNG) Prandtl'sche Traglinientheorie (18 Punkte)

1. Voraussetzungen:

- Ungepfeilter Flügel (gerade 1/4-Linie) mittlerer bis großer Streckung.
- inkompressible Strömung sowie kleine Wölbung, Profildicke und Anstellwinkel.



2. Es liegt eine elliptische Zirkulationsverteilung vor, d.h. $A_1 \neq 0$ und $A_n = 0 \forall n \geq 2$. Im stationären Horizontalflug gleicht der Auftrieb der Gewichtskraft, $F_L = m g$. Nach dem Satz von Kutta-Zhukovski kann der Auftrieb durch folgende Integration ermittelt werden:

$$F_L = \rho_\infty u_\infty \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y) dy$$

mit $dy = \frac{b}{2} \sin(\varphi) d\varphi$ folgt:

$$\begin{aligned} m g = F_L &= \rho_\infty u_\infty \frac{b}{2} \int_0^\pi \Gamma(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi \\ &= \rho_\infty u_\infty^2 b^2 A_1 \int_0^\pi \sin^2(\varphi) d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \rho_\infty u_\infty^2 b^2 A_1 \end{aligned}$$

Es ergibt sich für den gesuchten Koeffizienten A_1 :

$$A_1 = \frac{2 m g}{\pi \rho_\infty u_\infty^2 b^2}$$

3. Da das Gesamtgewicht des Flugzeugs unverändert ist und der Auftrieb ausschließlich durch den Koeffizienten A_1 beeinflusst wird, ist A_1 identisch zu Unterpunkt 2.

Da laut Aufgabenstellung ein stationärer Geradeausflug gefordert ist, muss die Zirkulationsverteilung symmetrisch sein. Damit ergibt sich für den antimetrischen Anteil A_2 :

$$A_2 = 0$$

Das gesamte Biegemoment an der Wurzel ergibt sich durch die Integration des Biegemomentenverlaufs

$$dM_W(y) = dL(y) y$$

über der Halbspannweite der rechten Tragfläche (von $0 \leq y \leq \frac{b}{2}$). Mittels der Koordinatentransformation $y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$ und der Auftriebsverteilung $dL(\varphi) = \frac{b}{2} \rho_\infty u_\infty \Gamma(\varphi) \sin(\varphi) d\varphi$ folgt:

$$\begin{aligned}
 dM_W(\varphi) &= -dL(\varphi) \frac{b}{2} \cos(\varphi) \\
 &= -\frac{b^2}{4} \rho_\infty u_\infty \Gamma(\varphi) \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \\
 &= -\frac{b^3}{2} \rho_\infty u_\infty^2 \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi) \sin(\varphi) \cos(\varphi) d\varphi \\
 &= -\frac{b^3}{4} \rho_\infty u_\infty^2 \sum_{n=1}^N A_n \cdot \sin(n\varphi) \sin(2\varphi) d\varphi
 \end{aligned}$$

Für das Wurzelbiegemoment ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
 M_w &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dM_W(\varphi) d\varphi \\
 &= -\frac{b^3}{4} \rho_\infty u_\infty^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [A_1 \sin(\varphi) \sin(2\varphi) + A_2 \sin^2(2\varphi) + A_3 \sin(3\varphi) \sin(2\varphi)] d\varphi \\
 &= -\frac{b^3}{4} \rho_\infty u_\infty^2 \left[A_1 \left(\frac{\sin(-\varphi)}{-2} - \frac{\sin(3\varphi)}{6} \right) + A_2 \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{8} \sin(4\varphi) \right) + A_3 \left(\frac{\sin(\varphi)}{2} - \frac{\sin(5\varphi)}{10} \right) \right] \Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= \frac{b^3}{4} \rho_\infty u_\infty^2 \left(\frac{2}{3} A_1 - \frac{\pi}{4} A_2 + \frac{2}{5} A_3 \right)
 \end{aligned}$$

Mit $A_2 = 0$ folgt für den Koeffizienten A_3 :

$$\begin{aligned}
 A_3 &= \frac{5}{2} \left(\frac{4M_{W,max}}{b^3 \rho_\infty u_\infty^2} - \frac{2}{3} A_1 \right) \\
 &= \frac{10}{\rho_\infty u_\infty^2 b^2} \left(\frac{M_{W,max}}{b} - \frac{m g}{3\pi} \right)
 \end{aligned}$$

4. Laut Hinweis gilt:

$$w_i(y) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}$$

mit der Substitution $y = -\frac{b}{2} \cos(\varphi)$ ergibt sich:

$$w_i(\varphi) = \frac{1}{2\pi b} \int_0^\pi \frac{d\Gamma}{d\varphi'} \frac{d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')}$$

mit:

$$\frac{d\Gamma}{d\varphi'} = 2b u_\infty \sum_{n=1}^N A_n n \cos(n\varphi)$$

folgt:

$$w_i(\varphi) = \frac{u_\infty}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=1}^N A_n n \frac{\cos(n\varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi'$$

Die Lösung des Glauert-Integral liefert:

$$w_i(\varphi) = -u_\infty \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

Für den induzierten Anstellwinkel $\alpha_i(\varphi)$ folgt somit:

$$\alpha_i(\varphi) = \arctan\left(\frac{-w_i(\varphi)}{u_\infty}\right) \approx \frac{-w_i(\varphi)}{u_\infty} = \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

Für den vorliegenden Flügel gilt somit:

$$\begin{aligned}\alpha_i(\varphi) &= A_1 + 3A_3 \frac{\sin(3\varphi)}{\sin(\varphi)} \\ &= \frac{2mg}{\pi\rho_\infty u_\infty^2 b^2} + \frac{30}{\rho_\infty u_\infty^2 b^2} \left(\frac{M_{W,max}}{b} - \frac{mg}{3\pi} \right) \frac{\sin(3\varphi)}{\sin(\varphi)}\end{aligned}$$

5. Da die Zirkulationsverteilung nicht mehr elliptisch ist, ist der induzierte Widerstand im Vergleich zur ursprünglichen Flügelgeometrie erhöht.

3. Aufgabe: (LÖSUNG) Skelett-Theorie und linearisierte Potentialtheorie (17 Punkte)

1. (a) Aus dem Satz von Kutta-Zhukhovski folgt für die zweidimensionale Auftriebskraft

$$\hat{L} = \rho V_\infty \Gamma = \rho V_\infty \int_0^l \gamma(x) dx = \rho V_\infty l \int_0^1 \gamma(X) dX \quad , \text{ wobei } X = x/l.$$

Für den Auftriebskoeffizienten c_l ergibt sich:

$$c_l = \frac{\hat{L}}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2 l} = \frac{2 \int_0^1 \gamma(X) dX}{V_\infty}$$

Eingesetzt $\gamma(\varphi)$ mit $dX = -\frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi$ aus der Substitution $X = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$ ergibt

$$\begin{aligned} c_l &= \frac{1}{V_\infty} \int_0^\pi \gamma(\varphi) \sin \varphi d\varphi = 2 \int_0^\pi \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi + A_1 \sin^2 \varphi + A_2 \sin(2\varphi) \sin \varphi \right) d\varphi \\ &= 2 \int_0^\pi \left(A_0 (1 - \cos \varphi) + A_1 \sin^2 \varphi + A_2 \sin(2\varphi) \sin \varphi \right) d\varphi \\ &= \pi(2A_0 + A_1) \end{aligned}$$

Berechnung der ersten zwei Koeffizienten der Birnbaum-Ackermann-Verteilung:

$$\alpha - \frac{dZ}{dX} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi)$$

$$\int_0^\pi \alpha \cdot \cos(p\varphi) d\varphi - \int_0^\pi \frac{dZ}{dX} \cdot \cos(p\varphi) d\varphi = \int_0^\pi \left(A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cdot \cos(n\varphi) \right) \cdot \cos(p\varphi) d\varphi$$

$$\begin{aligned} p = 0 \quad : \quad \Rightarrow \quad A_0 &= \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{dX} d\varphi \\ p = 1 \quad : \quad \Rightarrow \quad A_1 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{dX} \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Da die Skelett-Linie keine stetig differenzierbare Funktion ist, müssen die Integrale in zwei Bereiche mit den folgenden Stützstellen (entsprechend der Substitution $X = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$) aufgeteilt werden:

$$\begin{aligned} X = 0 &\quad \hat{=} \quad \cos \varphi = -1 \quad \hat{=} \quad \varphi = \pi \\ X = \frac{1}{4} &\quad \hat{=} \quad \cos \varphi = 0 \quad \hat{=} \quad \varphi = \frac{2}{3}\pi \\ X = 1 &\quad \hat{=} \quad \cos \varphi = 1 \quad \hat{=} \quad \varphi = 0 \end{aligned}$$

Die Steigung der Skelettlinie im vorderen Bereich ist:

$$\left. \frac{dZ}{dX} \right|_I = \tan(\varepsilon/2) \approx \varepsilon/2$$

Für den hinteren Bereich ergibt sich die Steigung der Skelettlinie aus der geometrischen Beziehung für die relative Profildicke:

$$\frac{1}{4}\tan(\varepsilon) = \frac{d}{l} = \frac{3}{4}\tan(\varepsilon_{HK}) \quad \Rightarrow \quad \tan(\varepsilon_{HK}) = \frac{1}{3}\tan(\varepsilon)$$

$$\frac{dZ}{dX}|_{II} = -\tan(\varepsilon_{HK}/2) \approx -\varepsilon/6$$

Für den Koeffizienten A_0 ergibt sich:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{dX} d\varphi = \alpha - \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{2\pi/3} (-\varepsilon/6) d\varphi + \int_{2\pi/3}^\pi (\varepsilon/2) d\varphi \right) = \alpha - \varepsilon/18$$

Für den Koeffizienten A_1 ergibt sich:

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{dX} \cos\varphi d\varphi = -\frac{2}{\pi} \left(\int_0^{2\pi/3} (-\varepsilon/6) \cos\varphi d\varphi + \int_{2\pi/3}^\pi (\varepsilon/2) \cos\varphi d\varphi \right) \\ &= -\frac{2}{\pi} \left([(-\varepsilon/6) \sin\varphi]_0^{2\pi/3} + [(\varepsilon/2) \sin\varphi]_{2\pi/3}^\pi \right) \\ &= -\frac{2}{\pi} \left((-\varepsilon/6) \cdot (\sqrt{3}/2 - 0) + (\varepsilon/2) \cdot (0 - \sqrt{3}/2) \right) = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{3}\pi} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Auftriebsbeiwert zu:

$$c_l = 2\pi\alpha + 2\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{18} \right)$$

2. (a) Für den Fall mit $Ma_1 = 0.6$ ergibt sich der Auftriebsbeiwert aus der Prandtl-Glauert-Regel und dem in Teil 1 bestimmten Wert für den inkompressiblen Fall zu:

$$\begin{aligned} c_l|_{Ma_1=0.6} &= \frac{1}{\sqrt{1 - Ma_1^2}} c_l|_{Ma_1=0} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.6^2}} \left(2\pi\alpha + 2\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{18} \right) \right) = \frac{1}{0.8} \left(2\pi\alpha + 2\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{18} \right) \right) \\ &= 2.5\pi\alpha + 2.5\varepsilon \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{18} \right) \end{aligned}$$

Für den Fall mit $Ma_1 = 0.6$ besitzt das Profil keinen Widerstandsbeiwert (D'Alembert'sches Paradoxon):

$$c_w|_{Ma_1=0.6} = 0$$

- (b) Mit den absoluten lokalen Strömungsänderungswinkeln β_i entlang des Profilskeletts und dem Hinweis $c_p|_{Ma_\infty > 1.2} = \pm \frac{2\beta_i}{\sqrt{Ma_\infty^2 - 1}}$ ergibt sich für den Auftriebsbeiwert bei $Ma_2 = 3.0$:

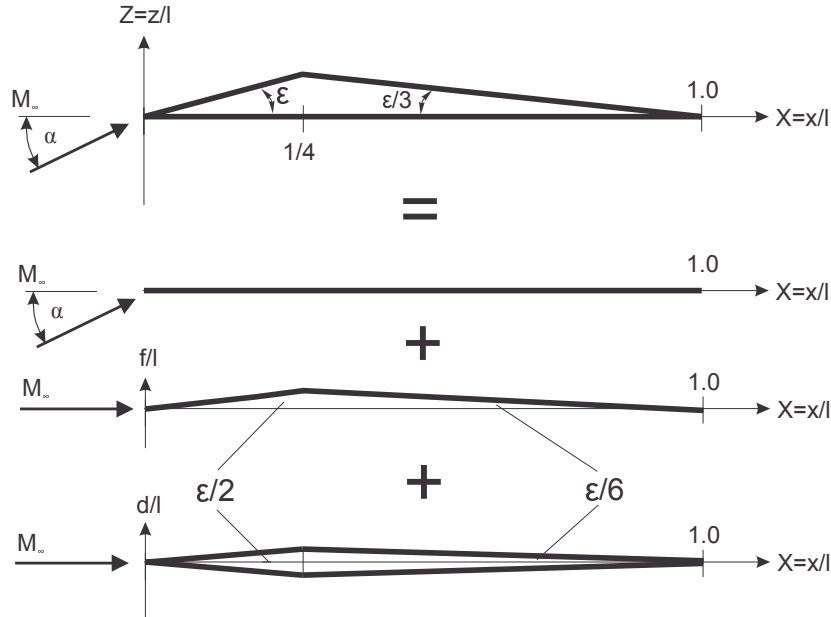
$$c_{l2} = \int_0^1 \Delta c_p dX = \frac{2}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} \left(\alpha - \frac{1}{4}(-(\alpha - \varepsilon)) - \frac{3}{4}(-(\alpha + \frac{1}{3}\varepsilon)) \right) = \frac{4\alpha}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{8}}$$

Im Rahmen der linearisierten Potentialtheorie ergibt sich der Widerstandsbeiwert bei $Ma_2 = 3$ zu:

$$c_{w2} = \int_0^1 \Delta c_p \cdot \beta_i dX = \frac{2}{\sqrt{Ma_2^2 - 1}} \left(\alpha^2 + \frac{1}{4}(\alpha - \varepsilon)^2 + \frac{3}{4}(\alpha + \frac{1}{3}\varepsilon)^2 \right) = \frac{4\alpha^2 + 2/3\varepsilon^2}{\sqrt{8}}$$

Alternativ:

Im Rahmen der linearisierten Potentialtheorie lässt sich die Strömung um das gewölbte Keilprofil durch die Superposition der Strömungen um seine Sehne, Skelettlinie sowie Dickenverteilung beschreiben.



Für den Auftrieb ist nur der Anstellwinkel der Sehne α_0 Relevant. Somit ergibt sich mit dem Hinweis $c_{p,linTheorie} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma^2-1}}$ und $\alpha_0 = \alpha$ als Anstellwinkel der Sehne bezogen auf die Hauptströmungsrichtung für den Auftriebsbeiwert

$$c_{l2} = \int_0^1 \Delta c_p dX = \frac{4\alpha_0}{\sqrt{Ma_2^2-1}} = \frac{4\alpha}{\sqrt{8}}$$

Der Widerstandsbeiwert ergibt sich unter Berücksichtigung jeweiliger Änderungswinkel β_i der Strömung und des Hinweises $c_{p,linTheorie} = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{Ma^2-1}}$ aus der Summe des Auftriebsanteils, Wölbungsanteils sowie Dickenanteils zu

$$c_d = \frac{4}{\sqrt{Ma_1^2-1}} \left[\alpha^2 + \frac{1}{4}(\epsilon/2)^2 + \frac{3}{4}(\epsilon/6)^2 + \frac{1}{4}(\epsilon/2)^2 + \frac{3}{4}(\epsilon/6)^2 \right] = \frac{4\alpha^2 + 2/3\epsilon^2}{\sqrt{Ma_1^2-1}}$$

(c) Aus der Äquivalenz des Momentenhaushalts folgt

$$c_{m0} = c_{m_{LE}} + X_N \cdot c_l$$

Abgeleitet nach c_l mit $\frac{\partial c_{m0}}{\partial c_l} = 0$ (nach der Definition des Neutralpunktes) ergibt sich

$$X_N = -\frac{\partial c_{m_{LE}}}{\partial c_l} = -\frac{\partial c_{m_{LE}}}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial c_l}$$

Der benötigte Momentenbeiwert um die Profilverderrkante ergibt sich aus der Betrachtung der resultierenden Kräfte und deren Hebelarme für die drei einzelne Profildsegmente

$$c_{m_{LE}} = \int_0^1 c_p(X) X dX = -\frac{2}{\sqrt{Ma_\infty^2-1}} \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{8}(\alpha - \epsilon) + \frac{5}{8}(\alpha + \epsilon/3) \right) = -\frac{(\frac{5}{2}\alpha + \frac{\epsilon}{6})}{\sqrt{8}}$$

Mit dem Ergebnis aus 2(b) für $c_{l2} = \frac{4\alpha}{\sqrt{8}}$ folgt:

$$X_{N2} = \frac{5/2}{4} = \frac{5}{8}$$

Im Unterschall befindet sich der Neutralpunkt bei $X_N \approx \frac{1}{4}$. Somit findet im Überschall eine Verschiebung des Neutralpunktes nach hinten, was zur Erhöhung der natürlichen Stabilität führt, da insgesamt der Abstand zum Schwerpunkt, der aus Stabilitätsgründen vor dem Neutralpunkt liegt, zunimmt.