....

(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

06. 03. 2018

1. Aufgabe

a) Einführung dimensionsloser Variablen mit $\mathcal{O}(1)$:

$$\bar{r} = \frac{r}{D}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_{ref}}, \quad \bar{v}_r = \frac{v_r}{v_{z,ref}}\frac{L}{D}, \quad \bar{v}_z = \frac{v_z}{v_{z,ref}} \tag{1}$$

in r - Impulsgleichung einsetzen:

$$\bar{v}_r v_{z,ref}\frac{D}{L}\frac{\partial\left(\bar{v}_r v_{z,ref}D/L\right)}{\partial\left(\bar{r}D\right)} + \bar{v}_z v_{z,ref}\frac{\partial\left(\bar{v}_r v_{z,ref}D/L\right)}{\partial\left(\bar{z}L\right)} =$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\bar{p}p_{ref}\right)}{\partial\left(\bar{r}D\right)} + \nu\left(\frac{\partial}{\partial\left(\bar{r}D\right)}\left(\frac{1}{\bar{r}D}\frac{\partial}{\partial\left(\bar{r}D\right)}\left(\bar{r}D\bar{v}_r v_{z,ref}\frac{D}{L}\right)\right) + \frac{\partial^2\left(\bar{v}_r v_{z,ref}D/L\right)}{\partial\left(\bar{z}^2L^2\right)}\right)$$

$$\bar{v}_r\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial\bar{r}} + \bar{v}_z\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial\bar{z}} = -\underbrace{\frac{p_{ref}L^2}{D^2v_{z,ref}^2\rho}}_{K_1}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{r}} + \underbrace{\frac{\nu L}{D^2v_{z,ref}}}_{K_2}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{r}\bar{v}_r\right)\right) + \underbrace{\frac{\nu}{Lv_{z,ref}}}_{K_3}\frac{\partial^2\bar{v}_r}{\partial\bar{z}^2} \tag{2}$$

in z - Impulsgleichung einsetzen:

$$\bar{v}_r v_{z,ref}\frac{D}{L}\frac{\partial\left(\bar{v}_z v_{z,ref}\right)}{\partial\left(\bar{r}D\right)} + \bar{v}_z v_{z,ref}\frac{\partial\left(\bar{v}_z v_{z,ref}\right)}{\partial\left(\bar{z}L\right)} =$$
$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\bar{p}p_{ref}\right)}{\partial\left(\bar{z}L\right)} + \nu\left(\frac{1}{\bar{r}D}\frac{\partial}{\partial\left(\bar{r}D\right)}\left(\bar{r}D\frac{\partial}{\partial\left(\bar{r}D\right)}\left(\bar{v}_z v_{z,ref}\right)\right) + \frac{\partial^2\left(\bar{v}_z v_{z,ref}\right)}{\partial\left(\bar{z}^2L^2\right)}\right)$$

$$\bar{v}_r\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\bar{r}} + \bar{v}_z\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\bar{z}} = -\underbrace{\frac{p_{ref}}{\rho v_{z,ref}^2}}_{K_4}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}} + \underbrace{\frac{\nu L}{D^2v_{z,ref}}}_{K_2}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{v}_z\right)\right) + \underbrace{\frac{\nu}{Lv_{z,ref}}}_{K_3}\frac{\partial^2\bar{v}_z}{\partial\bar{z}^2} \tag{3}$$

b)

$$K_1 = \frac{p_{ref}L^2}{D^2v_{z,ref}^2\rho} = \frac{p_{ref}}{\rho v_{z,ref}^2}\cdot\frac{L^2}{D^2} = \text{Euler-Zahl}\cdot\text{Geometriefaktor} \tag{4}$$

$$K_2 = \frac{\nu}{Dv_{z,ref}}\cdot\frac{L}{D} = \frac{1}{\text{Reynolds-Zahl}}\cdot\text{Geometriefaktor} \tag{5}$$

$$K_3 = \frac{\nu}{Lv_{z,ref}} = \frac{\nu}{Dv_{z,ref}}\cdot\frac{D}{L} = \frac{1}{\text{Reynolds-Zahl}}\cdot\frac{1}{\text{Geometriefaktor}} \tag{6}$$

$$K_4 = \frac{p_{ref}}{\rho v_{z,ref}^2} = \text{Euler-Zahl} \tag{7}$$

c) Umformen von Gleichung (2) ergibt

$$Re\frac{D^2}{L^2}\left(\bar{v}_r\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial\bar{r}}+\bar{v}_z\frac{\partial\bar{v}_r}{\partial\bar{z}}\right)=-Eu\cdot Re\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{r}}+\frac{D}{L}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{r}\bar{v}_r\right)\right)+\frac{D^3}{L^3}\frac{\partial^2\bar{v}_r}{\partial\bar{z}^2}.$$

Es gilt $\frac{D}{L}\ll 1$ und $Re\frac{D}{L}\ll 1$ bzw. $Re\frac{D^2}{L^2}\ll 1$, folglich vereinfacht sich die Gleichung zu

$$\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{r}}=0. \tag{8}$$

Umformen von Gleichung (3) ergibt

$$Re\frac{D}{L}\left(\bar{v}_r\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\bar{r}}+\bar{v}_z\frac{\partial\bar{v}_z}{\partial\bar{z}}\right)=-Eu\cdot Re\frac{D}{L}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}}+\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{v}_z\right)\right)+\frac{D^2}{L^2}\frac{\partial^2\bar{v}_z}{\partial\bar{z}^2}.$$

Mit $\frac{D^2}{L^2}\ll 1$ und $Re\frac{D}{L}\ll 1$ vereinfacht sich die Gleichung zu

$$Eu\cdot Re\frac{D}{L}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{v}_z\right)\right) \tag{9}$$

$$\frac{D^2p_{ref}}{L\nu v_{z,ref}}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial}{\partial\bar{r}}\left(\bar{v}_z\right)\right). \tag{10}$$

d) Ausgebildete Strömung $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}=0$
Die Kontinuitätsgleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rv_r\right)=0\Rightarrow\left(rv_r\right)=konst. \tag{11}$$

An der Wand $r=\frac{D}{2}$ gilt die Haftbedingung, d.h. $v_r\left(\frac{D}{2}\right)=0\Rightarrow v_r(r)=0$, da r variabel.

2. Aufgabe

a) Zweidimensionale, stationäre, schleichende Strömung $\Rightarrow$ der Druck p besitzt nur eine Abhängigkeit von x, d.h. $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$:

$$\frac{dp}{dx} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Integration in y-Richtung:

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx} y + C_1 \quad \Rightarrow \quad u(y) = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

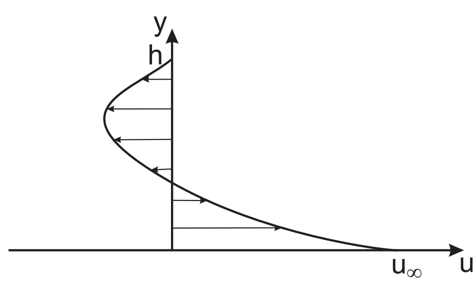
Randbedingungen:

$$u(y=0) = u_\infty \quad \Rightarrow \quad C_2 = u_\infty$$

$$u(y=h) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{h}\left(\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{h^2(x)}{2} + u_\infty\right)$$

$$\Rightarrow u(x,y) = u_\infty\left(1 - \frac{y}{h}\right) + \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx} y\,(y-h)$$

b) Skizze des Geschwindigkeitsverlaufes:



Der Geschwindigkeitsverlauf ist für beide Zustände gleich, da von einer stationären, ausgebildeten Strömung ausgegangen wird und daher eine Rückströmung vorliegen muss.

c) Der Volumenstrom $\dot{V}$ durch den Spalt ist Null, da die Dichtung ein Abfließen des Öls verhindert: $\quad \dot{V} = b\int_0^h u(y)dy \equiv 0$

$$\Rightarrow \dot{V} = b\left[\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y^2 h}{2}\right) + u_\infty\left(y - \frac{y^2}{2h}\right)\right]_0^h = \frac{1}{2}bh\left(u_\infty - \frac{h^2}{6\eta}\frac{dp}{dx}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{6u_\infty\eta}{h^2}$$

Integration in x-Richtung: $\quad \int_0^x \frac{dp}{dx}dx = \int_0^x \frac{6u_\infty\eta}{h^2}dx$

Randbedingung: $\quad p(x=0) = p_a$

$$\Rightarrow p(x) = p_a + \frac{6u_\infty\eta}{h^2}x$$

d) Tragkraft des Lagers durch Integration der Druckverteilung entlang der Lagerlänge L und der Kammerlänge k:

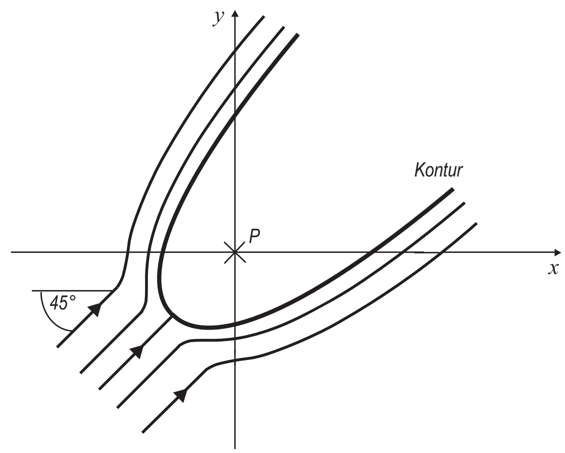
$$F_T = b\int_0^{L+k} (p(x) - p_a)\,dx = b\int_0^{L} (p(x) - p_a)\,dx + b\int_L^{L+k} (p_K - p_a)\,dx$$

$$p_K = p(x = L) = \frac{6u_\infty L\eta}{h^2} + p_a$$

$$\Rightarrow F_T = \frac{3bu_\infty L\eta}{h^2}\,(L + 2k)$$

3. Aufgabe

a) Skizze vom Körper und dem umgebenden Strömungsfeld:



b) komplexe Potentialfunktion:

$$F(z) = (u_\infty - iu_\infty)\, z + \frac{E}{2\pi} ln\,(z) \text{ mit } E > 0$$

c)

$$\begin{aligned}
F(z) &= (u_\infty - iu_\infty) \cdot (x + iy) + \frac{E}{2\pi} ln\left(re^{i\varphi}\right) \\
F(z) &= u_\infty x + u_\infty iy - iu_\infty x + u_\infty y + \frac{E}{2\pi}\left(ln\,(r) + i\varphi\right) \\
F(z) &= \underbrace{u_\infty x + u_\infty y + \frac{E}{2\pi} ln\,(r)}_{Re} + i \underbrace{\left(u_\infty y - u_\infty x + \frac{E}{2\pi}\varphi\right)}_{Im}
\end{aligned}$$

Stromfunktion: $\Psi(x, y) = Im(F(z)) = u_\infty y - u_\infty x + \frac{E}{2\pi} arctan\left(\frac{y}{x}\right)$
Geschwindigkeitskomponenten:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= \frac{\partial \Psi}{\partial y} = u_\infty + \frac{E}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} \\
v(x, y) &= -\frac{\partial \Psi}{\partial x} = u_\infty + \frac{E}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

d) Im Staupunkt gilt $u = v = 0$, d.h.

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= u_\infty + \tfrac{E}{2\pi}\tfrac{x}{x^2+y^2} \stackrel{!}{=} 0 \\
v(x, y) &= u_\infty + \tfrac{E}{2\pi}\tfrac{y}{x^2+y^2} \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

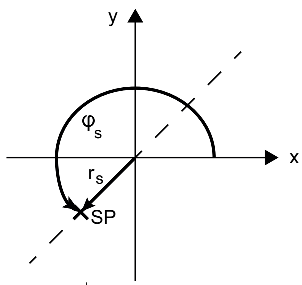
Subtraktion der Gleichungen ergibt

$$\frac{E}{2\pi}\frac{y-x}{x^2+y^2}=0\Rightarrow x=y.$$

Einsetzen von $x=y$ in eine der Ausgangsgleichungen liefert

$$u_\infty+\frac{E}{2\pi}\frac{1}{2x}=0\Rightarrow x_s=y_s=-\frac{E}{4\pi u_\infty}=-\frac{E}{4\pi u_\infty}.$$

e) Die Konturstromlinie geht durch den Staupunkt, d.h. $\Psi_K=\Psi(x_s,y_s)=\Psi(r_s,\varphi_s)$.



$$\begin{aligned}\varphi_s &= \frac{5}{4}\pi\\ r_s &= \sqrt{x_s^2+y_s^2}=\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{E}{\pi u_\infty}\end{aligned}$$

Stromfunktion in Polarkoordinaten (mit $u_\infty=u_\infty$):

$$\Psi(r,\varphi)=u_\infty r sin(\varphi)-u_\infty r cos(\varphi)+\frac{E}{2\pi}\varphi$$

Stromfunktionswert entlang der Kontur:

$$\Psi_K(r_s,\varphi_s)=u_\infty\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{E}{\pi u_\infty}sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)-u_\infty\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{E}{\pi u_\infty}cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)+\frac{E}{2\pi}\frac{5}{4}\pi=\frac{5}{8}E$$

Volumenstrom zwischen Ψ_K und Ψ_B:

$$\Delta\dot{V}=b\left(\Psi_B-\Psi_K\right)=bE\left(\frac{1}{\pi}-\frac{1}{8}\right)$$

4. Aufgabe

a) 1. Randbedingung: Haftbedingung: $\dfrac{y}{\delta} = 0 \rightarrow u = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

2. Randbedingung: Grenzschichtrand: $\dfrac{y}{\delta} = 1 \rightarrow u = u_\infty \Rightarrow a_1 + a_2 = 1$

3. Randbedingung: Wandbindungsgleichung: $\dfrac{y}{\delta} = 0 \rightarrow \eta \left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

$\Rightarrow a_1 = 1$

b) Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht: $\dfrac{u(x,y)}{u_\infty} = \dfrac{y}{\delta}$

Die von Kármánsche Integralbeziehung vereinfacht sich aufgrund von $u_\infty =$ konst. zu

$$\frac{\mathrm{d}\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2}$$

Impulsverlustdicke:

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_2}{\delta(x)} &= \int_0^1 \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\
\Rightarrow \frac{\delta_2}{\delta(x)} &= \int_0^1 \frac{y}{\delta(x)}\left(1 - \frac{y}{\delta(x)}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) \\
\Rightarrow \frac{\delta_2}{\delta(x)} &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^3\right]_0^1 = \frac{1}{6} \\
\rightarrow \delta_2 &= \frac{1}{6}\cdot\delta(x) \Rightarrow \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{1}{6}\frac{d\delta(x)}{dx}
\end{aligned}$$

Wandschubspannung:

$$\tau_W = \eta \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\eta u_\infty}{\delta(x)}$$

$\dfrac{d\delta_2}{dx}$ und τ_W in von Kármánsche Integralbeziehung einsetzen:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6}\frac{d\delta(x)}{dx} &= \frac{\eta u_\infty}{\delta(x)\rho u_\infty^2} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{6}\delta(x) d\delta &= \frac{\eta dx}{\rho u_\infty} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{12}\delta^2(x) &= \frac{\eta}{\rho u_\infty} x \\
\Leftrightarrow \delta(x) &= \sqrt{12}\cdot\sqrt{\frac{\eta x}{\rho u_\infty}}
\end{aligned}$$

c) Konti: $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{2} u_\infty y \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{12\eta}} x^{-\frac{3}{2}} \\
\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} u_\infty y \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{12\eta}} x^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Integration von 0 bis $\delta(x)$:

$$\begin{aligned}
v_\delta &= \int_0^{\delta(x)} \frac{1}{2} u_\infty y \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{12\eta}} x^{-\frac{3}{2}} \, dy \\
v_\delta &= \frac{1}{4} u_\infty \sqrt{\frac{\rho u_\infty}{12\eta}} x^{-\frac{3}{2}} \delta^2(x) \\
v_\delta &= 3 \sqrt{\frac{\eta u_\infty}{12\rho x}}
\end{aligned}$$

5. Aufgabe

a) Energiegleichung, angewendet auf den Ruhezustand: $h_0 = h + \frac{u^2}{2}$

$$\begin{aligned} \text{mit } h = c_p T \quad &\Rightarrow \quad c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2} \\ \text{mit } c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad &\Rightarrow \quad \frac{\gamma R T_0}{\gamma - 1} = \frac{\gamma R T}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} \\ &\quad\;\; \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2}\frac{\gamma - 1}{\gamma R T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \end{aligned}$$

b) $P_Q = \dot{m}(h_{02} - h_{01}) = \dot{m} c_p (T_{02} - T_{01}) = \dot{m} c_p T_{01} (\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1)$

$T_{01} = T_1 \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)$

Massenstrom: $\dot{m} = \rho_1 u_1 A$

mit $\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1}$

folgt $\dot{m} = \frac{p_1}{R T_1} M_1 \sqrt{\gamma R T_1} A$

$$\rightarrow P_Q = \frac{p_1}{R \cancel{T_1}} M_1 \sqrt{\gamma R T_1} A c_p \cancel{T_1} (1 + \frac{\gamma - 1}{2} {M_1}^2)(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1)$$

$$\rightarrow P_Q = \frac{p_1}{\cancel{R}} M_1 \sqrt{\gamma R T_1} A \frac{\gamma \cancel{R}}{\gamma - 1} (1 + \frac{\gamma - 1}{2} {M_1}^2)(\frac{T_{02}}{T_{01}} - 1)$$

6. Aufgabe

a) $\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

b) Vor dem Verdichtungsstoß ist die Strömung immer supersonisch, d.h. $M_1 > 1$. Entsprechend des Zusammenhangs zwischen der Machzahl und der kritischen Machzahl gilt für die kritische Machzahl vor dem Stoß $M_1^\star > 1$, da $\left(\gamma - 1 + \frac{2}{M_1^2}\right) < (\gamma + 1)$.
Das Verhältnis der kritischen Machzahlen vor und hinter dem senkrechten Verdichtungsstoß lautet

$$M_2^\star = \frac{1}{M_1^\star}.$$

Für $M_1^\star > 1$ gilt

$$M_2^\star = \frac{1}{M_1^\star} < 1,$$

sodass sich für die Machzahl hinter dem Stoß M_2 aus dem Zusammenhang zwischen der Machzahl und der kritischen Machzahl $M_2 < 1$ ergibt, da $\left(\gamma - 1 + \frac{2}{M_2^2}\right) \overset{!}{>} (\gamma + 1)$. Es herrscht folglich hinter dem senkrechten Verdichtungsstoß stets subsonische Strömung.

c) Sofern $\Gamma > \Gamma_{Kutta}$, befindet sich der hintere Staupunkt auf der Profilunterseite. Diese Umströmung impliziert eine unendliche Geschwindigkeit, die nicht realistisch ist.

d) Damit die Theorie der Schwerewellen angewendet werden kann, muss die Amplitude a der Welle deutlich kleiner sein als die mittlere Wassertiefe H ($\frac{a}{H} \ll 1$), d.h. die lokale Fluidtiefe weicht nur geringfügig von der ungestörten Fluidtiefe ab.

e) Aus der Euler-Gleichung

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \tag{12}$$

folgt für einen positiven Druckgradienten $\frac{dp}{dx}$, dass $\frac{dU}{dx} < 0$. Somit liegt eine verzögerte Strömung vor.