....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

21. 08. 2017

1. Aufgabe

a) $\vec{\omega} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) \quad \text{mit} \quad w = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$

$$\left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = \left(\vec{\omega}^T \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = \begin{pmatrix} \cancel{\omega_x} \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\omega_y} \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z \frac{\cancel{\partial u}}{\cancel{\partial z}} \\ \cancel{\omega_x} \frac{\partial v}{\partial x} + \cancel{\omega_y} \frac{\partial v}{\partial y} + \omega_z \frac{\cancel{\partial v}}{\cancel{\partial z}} \\ \cancel{\omega_x} \frac{\partial w}{\partial x} + \cancel{\omega_y} \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z \frac{\cancel{\partial w}}{\cancel{\partial z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit vereinfacht sich die Wirbeltransportgleichung zu:

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \nu \nabla^2 \omega_z$$

b)

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial z^2}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right)$$

c)

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} \Rightarrow \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = a$$

Da $\omega_z = a =$ konst. $\neq f(x, y, t)$ ist die Wirbeltransportgleichung mit $0 = 0$ erfüllt.

d)

$$K = \frac{\nu c_p \rho}{\lambda} = 1$$

e) Prandtlzahl: Verhältnis aus der in einer Strömung durch Reibung erzeugten Wärme zur fortgeleiteten Wärme

2. Aufgabe

a) $\frac{h_1}{L} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{h_1}{L}\right)^2 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad Re_L \frac{h_1^2}{L^2} \ll 1$

$$\overline{x} = \frac{x}{L}, \quad \overline{y} = \frac{y}{h_1}, \quad \overline{u} = \frac{u}{u_W}, \quad \overline{v} = \frac{v}{u_W}\frac{L}{h_1}, \quad \overline{p} = \frac{p}{\rho u_W^2}$$

x-Impuls: $\rho\left(\frac{u_W^2}{L}\,\overline{u}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \frac{u_W^2 h_1}{L h_1}\,\overline{v}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right) = -\frac{\rho u_W^2}{L}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} + \eta\left(\frac{u_W}{L^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{u_W}{h_1^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} = -\left(\overline{u}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right) + \frac{\eta}{\rho u_W L}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{L^2}{h_1^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} = \frac{1}{Re_L}\frac{L^2}{h_1^2}\left[\cancel{-Re_L\frac{h_1^2}{L^2}}\left(\overline{u}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right) + \cancel{\frac{h_1^2}{L^2}}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} = \frac{1}{Re_L}\underbrace{\frac{L^2}{h_1^2}}_{\gg 1}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}, \qquad \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} = \frac{1}{Re_L}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2} \quad \text{(gegeben)}$$

- Reibungskräfte sind sehr viel größer als Trägheitskräfte ($Re_L \frac{h_1^2}{L^2} \ll 1$).
- Die Änderung der Schubspannung in y-Richtung ist sehr viel größer als die Änderung der Normalspannung in x-Richtung ($\frac{h_1^2}{L^2} \ll 1$).
- Die Änderung des Druckes in y-Richtung kann gegenüber der Änderung des Druckes in x-Richtung vernachlässigt werden, da $\frac{L^2}{h_1^2} \gg 1$ ist.

b) Dimensionsbehaftete vereinfachte x-Impulsgleichung: $\quad \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Integration in y-Richtung

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}y + C_1 \quad \Rightarrow \quad u(y) = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

RB: $\quad u(y=0) = u_W \quad \rightarrow \quad C_2 = u_W$

$$u(y = h(x)) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{h(x)}\left(\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{h^2(x)}{2} + u_W\right)$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = u_W\left(1 - \frac{y}{h(x)}\right) - \frac{h^2(x)}{2\eta}\left(\frac{y}{h(x)} - \frac{y^2}{h^2(x)}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\dot{V} = h(x)B\int_0^1 u(x,y)\; d\left(\frac{y}{h(x)}\right)$$

$$\dot{V} = u_W h(x)B\left[\frac{y}{h(x)} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h(x)}\right)^2\right]_0^1 + \frac{h^3(x)}{2\eta}\frac{dp}{dx}B\left[\frac{1}{3}\left(\frac{y}{h(x)}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h(x)}\right)^2\right]_0^1$$

$$\dot{V} = \frac{u_W h(x)B}{2} - \frac{h^3(x)B}{12\eta}\frac{dp}{dx}$$

c) $$\frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_W}{h^2(x)} - \frac{12\eta\dot{V}}{h^3(x)B}$$

$$\int_{p_1}^{p} dp = \int_0^x \left(\frac{6\eta u_W}{h^2(x)} - \frac{12\eta\dot{V}}{h^3(x)B}\right) dx \quad \text{mit} \quad h(x) = h_1 e^{\frac{-x}{5L}}$$

$$\Rightarrow p(x) = p_1 + \frac{6\eta u_W}{h_1^2}\int_0^x e^{\frac{2x}{5L}}\,dx - \frac{12\eta\dot{V}}{h_1^3 B}\int_0^x e^{\frac{3x}{5L}}\,dx$$

$$\Rightarrow p(x) = p_1 + \frac{5L}{2}\frac{6\eta u_W}{h_1^2}\left[e^{\frac{2x}{5L}}\right]_0^x - \frac{5L}{3}\frac{12\eta\dot{V}}{h_1^3 B}\left[e^{\frac{3x}{5L}}\right]_0^x$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = p_1 + \frac{15\eta u_W L}{h_1^2}\left(e^{\frac{2x}{5L}} - 1\right) - \frac{20\eta L\dot{V}}{h_1^3 B}\left(e^{\frac{3x}{5L}} - 1\right)$$

3. Aufgabe

a) Das Strömungsbild setzt sich zusammen aus einer Parallelströmung, einem Wirbel in mathematisch positiver Richtung im Ursprung und einer Senke im Ursprung.

$$F(z) = u_\infty z - \frac{E}{2\pi}\ln(z) - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln(z)$$

mit $E > 0$ und $\Gamma > 0$

$$F(r,\varphi) = u_\infty r e^{i\varphi} - \frac{E}{2\pi}\ln(re^{i\varphi}) - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln(re^{i\varphi})$$

bzw. $F(r,\varphi) = u_\infty r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)) - \frac{E}{2\pi}\ln(r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi))) - \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln(r(\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)))$

Sofern die Kombination aus den Vorzeichen der Elementarfunktionen und der Konstanten der Elementarfunktionen anders als hier gewählt wurde, z.B.

$$F(z) = u_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln(z) + \frac{\Gamma}{2\pi} i \ln(z)$$

mit $E < 0$ und $\Gamma < 0$, ergeben sich im Verlauf der Aufgabe abweichende Ergebnisse, die dennoch als richtig bewertet wurden.

b)

$$F(r,\varphi) = \Phi + i\Psi$$

Stromfunktion $\Psi = \text{Im}(F(r,\varphi))$

$$\Psi = u_\infty r\sin(\varphi) - \frac{E}{2\pi}\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln(r)$$

Potentialfunktion $\Phi = \text{Re}(F(r,\varphi))$

$$\Phi = u_\infty r\cos(\varphi) - \frac{E}{2\pi}\ln(r) + \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi$$

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \qquad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

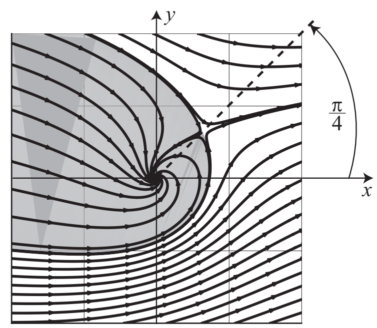
$$v_r = u_\infty\cos(\varphi) - \frac{E}{2\pi}\frac{1}{r} \qquad v_\varphi = -u_\infty\sin(\varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

c) Staupunkte $v_r = v_\varphi = 0$

$$\Rightarrow v_r = u_\infty\cos(\varphi) - \frac{E}{2\pi}\frac{1}{r} = 0, \quad v_\varphi = -u_\infty\sin(\varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0$$

Mit $\Gamma = E \Rightarrow \sin(\varphi) \overset{!}{=} \cos(\varphi) \Rightarrow \varphi_{s1} = \frac{\pi}{4}, \varphi_{s2} = \frac{5}{4}\pi$
Da $E = \Gamma > 0$ sowie $r > 0$ und $u_\infty > 0$, ist nur $\varphi_{s1} = \frac{\pi}{4}$ eine Lösung.
$r_s = \frac{E}{\sqrt{2}\pi u_\infty}$

d) Stromlinienbild



e) Der Bereich, in dem die Piraten keine Chance haben, dem Strudel zu entgehen, ist im Stromlinienbild grau markiert.

4. Aufgabe

Längs angeströmte ebene Platte $\Rightarrow \quad \dfrac{du_a}{dx} = 0, \quad u_a = u_\infty = konst.$

v. Kármánsche Integralbeziehung: $\dfrac{d\delta_2}{dx} = -\dfrac{\tau(y=0)}{\rho u_\infty^2} = \dfrac{\tau_W}{\rho u_\infty^2} = \dfrac{1}{2}c_f$

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) d\frac{y}{\delta} = \delta \int_0^1 \xi^{1/7}\left(1 - \xi^{1/7}\right) d\xi$$

$$= \delta \int_0^1 \left(\xi^{1/7} - \xi^{2/7}\right) d\xi = \delta \left[\frac{7}{8}\xi^{8/7} - \frac{7}{9}\xi^{9/7}\right]_0^1 = \frac{7}{72}\delta$$

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} \overset{!}{=} \frac{1}{2}c_f = \frac{1}{2}\frac{c}{Re_\delta^{1/4}} = \frac{1}{2}\frac{c\eta^{1/4}}{(\rho u_\infty)^{1/4}}\frac{1}{\delta^{1/4}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{72}\delta^{1/4}\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2}c\left(\frac{\eta}{\rho u_\infty}\right)^{1/4}$$

d.h. $\dfrac{7}{72}\dfrac{4}{5}\delta^{5/4} = \dfrac{1}{2}c\left(\dfrac{\eta}{\rho u_\infty}\right)^{1/4} x + K_1$

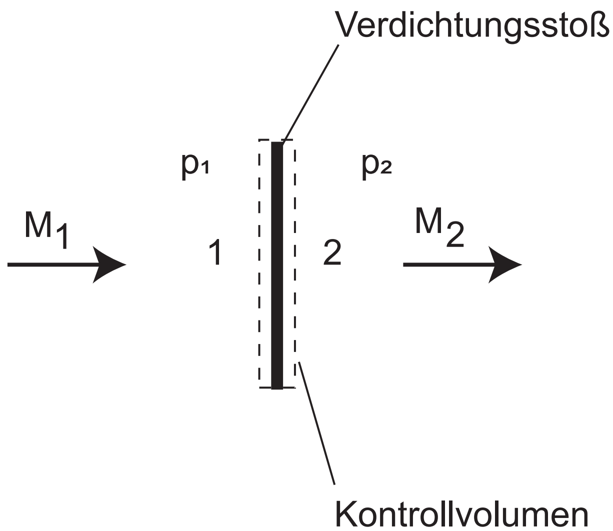
Randbedingung: $\delta(x=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = 0$

$$\delta^{5/4} = \frac{45}{7}c\left(\frac{\eta}{\rho u_\infty}\right)^{1/4} x$$

$$\delta(x) = \left(\frac{45}{7}c\right)^{4/5}\left(\frac{\eta}{\rho u_\infty}\right)^{1/5} x^{4/5}$$

5. Aufgabe

a) Impulssatz



$$-\rho_1 u_1^2 A + \rho_2 u_2^2 A = (p_1 - p_2)\, A \quad (*)$$

$$\text{Mit} \quad M = \frac{u}{c}, \quad p = \rho R T \quad \text{und} \quad c^2 = \gamma R T$$

$$\rho u^2 = \rho \frac{u^2}{c^2} c^2 = \rho M^2 \gamma R T = p M^2 \gamma$$

$$(*) \Rightarrow -p_1 M_1^2 \gamma + p_2 M_2^2 \gamma = p_1 - p_2$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + M_1^2 \gamma}{1 + M_2^2 \gamma}$$

b) Zustand ’1’: Anströmung, Zustand ’2’: stromab des Verdichtungsstoßes

$$c_p = \frac{p_{02} - p_1}{\frac{\rho_1}{2} u_1^2} = \frac{2 p_1}{\rho_1 u_1^2} \left(\frac{p_{02}}{p_1} - 1 \right)$$

$$\text{aus a)} \quad \rho_1 u_1^2 = p_1 M_1^2 \gamma$$

$$\Rightarrow c_p = \frac{2}{M_1^2 \gamma} \left(\frac{p_{02}}{p_2} \frac{p_2}{p_1} - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow c_p = \frac{2}{M_1^2 \gamma} \left(\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \cdot \frac{1 + \gamma M_1^2}{1 + \gamma M_2^2} - 1 \right)$$

$$= 2\left(\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\cdot\frac{\frac{1}{\gamma M_1^2}+1}{1+\gamma M_2^2}-\frac{1}{\gamma M_1^2}\right)\quad(**)$$

$$\lim_{M_1\to\infty} M_1^* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$$

$$M_2^* = \frac{1}{M_1^*} \Rightarrow \lim_{M_1\to\infty} M_2^* = \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

$$M_2^{*2} = \frac{\gamma+1}{(\gamma-1)+\frac{2}{M_2^2}} \Leftrightarrow M_2 = \sqrt{\frac{2}{1-\gamma+\frac{\gamma+1}{M_2^{*2}}}}$$

$$\Rightarrow \lim_{M_1\to\infty} M_2 = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

$$(**) \Rightarrow c_p = 2\left(\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}}\right)$$

6. Aufgabe

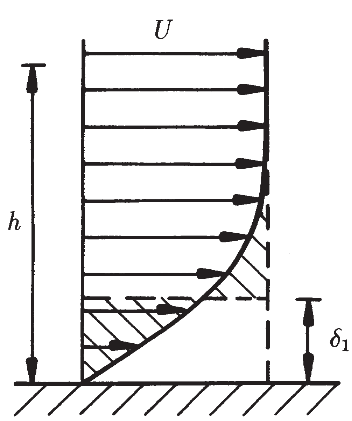
a) Mit dem Buckingham'schen $\Pi-$Theorem erhält man die maximale Anzahl von Kennzahlen eines physikalischen Problems. Da bei der Formulierung der DGL noch weitere Informationen berücksichtigt werden, die das physikalische Problem spezifizieren, ist die Anzahl der Kennzahlen, die mit der Methode der DGL'en erhalten werden, klei- ner oder gleich der Anzahl der Kennzahlen, die durch das Buckingham'sche $\Pi-$Theorem erhalten werden.

b) Die Knudsenzahl (misst das Verhältnis der mittleren freien Weglänge der Gasmoleküle zu einer geometrischen Bezugslänge. Sie ist somit ein Maß für die Dichte der Gasströmung).

c) Kuttasche Abströmbedingung: Die scharfe Hinterkante eines Tragflügels wird nicht umströmt, sondern die anliegende Strömung fließt dort glatt ab. In einer anliegenden Strömung über einen zwei- dimensionalen Körper mit einer scharfen Hinterkante baut sich eine Zirkulation auf, die gerade so groß ist, dass der hintere Staupunkt in der Hinterkante liegt.

   In einer subsonischen Potentialströmung ist die mathematische Lösung der Umströmung einer scharfen Kante möglich. Somit ist in der drehungsfreien Strömung zur Erfüllung der Kutta-Bedingung die notwendige Zirkulation einzubringen.

d) Die Verdrängungsdicke δ_1 entspricht dem Abstand, um den ein Körper in einer hypothetisch reibungsfreien Strömung aufgedickt werden muss, so dass der gleiche Massenstrom wie in der reibungsbehafteten Strömung auftritt. Somit wird δ_1 derart bestimmt, dass die beiden schraffierten Bereiche in der Skizze die gleiche Fläche aufweisen.



e) Nein, weil die Blasiuslösung nur für laminare Strömungen mit Reynoldszahlen kleiner der kritischen Reynoldszahl $Re_{krit} \approx 5 \cdot 10^5$ gilt.