....

(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

06. 03. 2018

1. Aufgabe (11 Punkte)

Die Düse eines 3D-Druckers der Länge L besitzt einen kreisförmigen Querschnitt mit dem Durchmesser D, wobei $D \ll L$. Die durchfließende Kunststoffschmelze kann mit den folgenden Gleichungen in Zylinderkoordinaten beschrieben werden

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) \right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) \tag{2}$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r}(v_z) \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right). \tag{3}$$

Die z-Koordinate entspricht der Strömungsrichtung des Fluides durch die Düse, r definiert die radiale Koordinate.

a) Bestimmen Sie mit der Methode der Differentialgleichungen alle relevanten Kennzahlen, die sich aus den gegebenen Impulsgleichungen in radialer und in Strömungsrichtung ergeben. Wählen Sie die Bezugsgrößen derart, dass die dimensionslosen Variablen und deren Ableitungen von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ sind.

b) Drücken Sie die erhaltene(n) Kennzahl(en) durch eine oder mehrere in der Strömungsmechanik häufig verwendete Kennzahl(en) aus. Beachten Sie dabei die für Rohrströmungen charakteristische Geometriegröße.

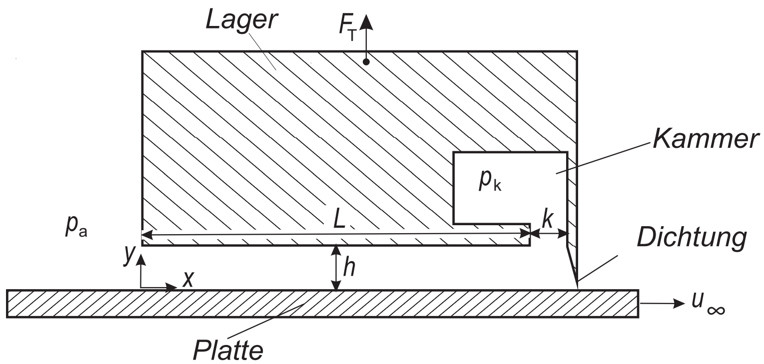
c) Vereinfachen Sie die dimensionslosen Impulsgleichungen aus a) mittels einer Größenordnungsabschätzung der einzelnen Terme unter der Annahme, dass eine schleichende Strömung vorliegt.

d) Welche Aussage ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung, wenn der Einlauf der Düse L so lang ist, dass eine ausgebildete Strömung vorliegt?

Gegeben: $D, L, \rho, \nu, v_{z,ref}, p_{ref}$

Hinweise: $D \ll L, \mathcal{O}(p) = \mathcal{O}(p_{ref})$, es können konstante Stoffwerte angenommen werden

2. Aufgabe (11 Punkte)



Die Skizze zeigt einen Teil einer Schleifmaschine. Zwischen dem ruhenden Lager und der mit konstanter Geschwindigkeit u_∞ bewegten, horizontal liegenden Platte befindet sich ein konstanter, mit Öl (Viskosität η) gefüllter Spalt (Länge L, Höhe h, Breite b). Der Spalt, für den $h \ll L$ gilt, mündet an seiner rechten Seite in eine Kammer (Länge des Durchlasses k), die mit einer ölundurchlässigen Dichtung versehen ist. Am linken Spaltende herrscht der Druck p_a.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$ im Spalt in Abhängigkeit vom Druckgradienten.

b) Skizzieren Sie qualitativ den Geschwindigkeitsverlauf $u(x, y)$ über der Spalthöhe $0 \leq y \leq h$ für den Fall, dass die Kammer nicht mit Öl gefüllt ist und für den Fall, dass sie komplett mit Öl gefüllt ist.

Im Folgenden wird angenommen, dass die Kammer vollständig mit Öl gefüllt ist.

c) Bestimmen Sie die Druckverteilung $p(x)$ im Spalt ($0 \leq x \leq L$).

d) Berechnen Sie die Tragkraft F_T des Lagers.

Gegeben: u_∞, L, h, k, b, η, p_a

Hinweise:

- Für die stationäre, schleichende Strömung lautet die x- Impulsgleichung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

- $h \ll L$.
- Die Spaltströmung kann als zweidimensional, laminar und voll ausgebildet angesehen werden, Effekte an der Stelle $x = 0$ sind zu vernachlässigen.

3. Aufgabe (12 Punkte)

Einer Parallelströmung mit $u_\infty = v_\infty > 0$ wird eine Quelle im Punkt P $(x_p = 0, y_p = 0)$ überlagert. Die Strömung kann als zweidimensional angenommen werden.

a) Skizzieren Sie die Kontur des sich ergebenden Körpers sowie das den Körper umgebende Strömungsfeld in einem kartesischen Koordinatensystem.

b) Geben Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ und das/die Vorzeichen der Konstanten der verwendeten Elementarfunktion(en) an.

c) Leiten Sie aus der Stromfunktion $\Psi(x, y)$ die Geschwindigkeitskomponenten $u(x, y)$ und $v(x, y)$ her.

d) Leiten Sie die Koordinaten x_s, y_s des Staupunktes her.

e) Berechnen Sie den Stromfunktionswert Ψ_K der Konturstromlinie. Bestimmen Sie anschließend den Volumenstrom $\Delta\dot{V}$ zwischen der Konturstromlinie mit dem Stromfunktionswert Ψ_K und der benachbarten Stromlinie mit dem Stromfunktionswert $\Psi_B = E\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right)$ in Abhängigkeit von der Einheitsbreite b.

Gegeben: u_∞, E

Bekannte komplexe Potentialfunktionen:

Potentialwirbel:	$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
Quelle/Senke:	$F(z) = \frac{E}{2\pi}\ln z$
Dipol:	$F(z) = \frac{M}{2\pi z}$
Staupunktströmung:	$F(z) = \alpha z^2$
Parallelströmung:	$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$

Hinweise:

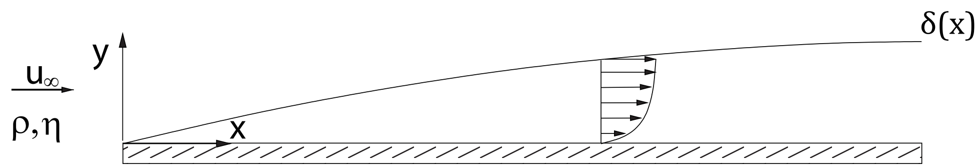
- $z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- $u(x, y) = \dfrac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v(x, y) = -\dfrac{\partial\Psi}{\partial x}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{x\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)}, \quad \dfrac{\partial}{\partial x}\left(arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\right) = -\dfrac{y}{x^2\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)}$
- Winkeltabelle:

φ	0	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\sin\varphi$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

4. Aufgabe (11 Punkte)

Eine ebene Platte wird parallel zur Oberfläche mit einem inkompressiblen, Newtonschen Fluid (Dichte ρ, Viskosität η) mit der konstanten Geschwindigkeit u_∞ angeströmt. Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht entlang der Oberseite der ebenen Platte soll durch ein Polynom zweiten Grades angenähert werden

$$\frac{u(x,y)}{u_\infty} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 .$$



a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2.

b) Bestimmen Sie die Grenzschichtdicke $\delta(x)$.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung am Grenzschichtrand v_δ.

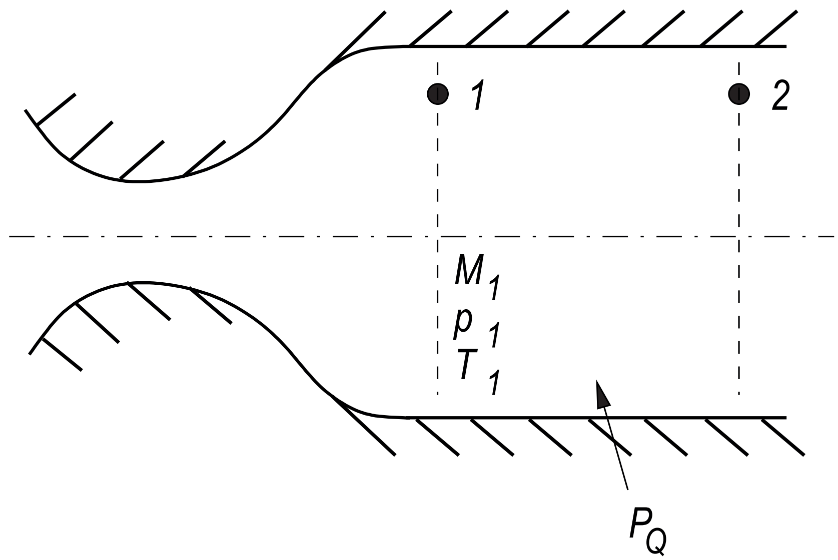
Gegeben: η, ρ, u_∞

Hinweise:

- von Kármánsche Integralbeziehung: $\dfrac{d\delta_2}{dx} + \dfrac{1}{u_\infty}\dfrac{du_\infty}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) = \dfrac{\tau_W}{\rho u_\infty^2}$
- Die Strömung kann als stationär angenommen werden.

5. Aufgabe (7 Punkte)

Ein kompressibles Gas strömt durch eine Lavaldüse in ein Rohr mit konstantem Querschnitt A. Im Austrittsquerschnitt der Düse wird der Zustand '1' mit M_1, p_1 und T_1 erreicht. Die Strömung wird in dem Rohrabschnitt von '1' nach '2' durch die Wärmeleistung P_Q aufgeheizt.



a) Leiten Sie das Verhältnis $\frac{T_0}{T}$ in Abhängigkeit von der Machzahl her.

b) Bestimmen Sie die Wärmeleistung P_Q in Abhängigkeit von $\frac{T_{02}}{T_{01}}$.

Gegeben: $M_1, p_1, T_1, A, \gamma, R$

Hinweise:

- $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$
- Das Gas kann als ideales Gas betrachtet werden.

6. Aufgabe (8 Punkte)

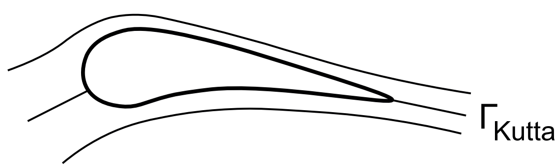
a) Schreiben Sie die Gleichung für die stationäre Massenerhaltung eines kompressiblen Fluids $\dfrac{\partial \rho u}{\partial x} + \dfrac{\partial \rho v}{\partial y} = 0$ in Nabla-Operatorschreibweise.

b) Zeigen Sie anhand des Verhältnisses der kritischen Machzahl vor einem senkrechten Verdichtungsstoß $M_1^\star$ zur kritischen Machzahl hinter dem Stoß $M_2^\star$, dass hinter einem senkrechten Verdichtungsstoß stets eine subsonische Strömung vorliegt. Beziehen Sie den Zusammenhang zwischen der Machzahl M und der kritischen Machzahl $M^\star$

$$M^{\star^2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + \frac{2}{M^2}}$$

in Ihre Begründung ein.

c) Die Skizze zeigt das drehungsfreie Strömungsbild eines Profils mit scharfer Hinterkante. Die rechtsdrehende Zirkulation Γ_{Kutta} erfüllt die Kuttasche Abflussbedingung. Wo befindet sich der hintere Staupunkt bei einer Zirkulation $\Gamma > \Gamma_{Kutta}$? Begründen Sie, ob diese Profilumströmung realistisch ist.



d) Welcher Zusammenhang muss zwischen der Amplitude einer zweidimensionalen Welle an der freien Oberfläche eines Fluides und der mittleren Fluidtiefe gelten, damit die Theorie der Schwerewellen angewendet werden kann?

e) Ergibt sich für einen positiven Druckgradienten in einer stationären, kompressiblen Strömung in Hauptströmungsrichtung $\dfrac{dp}{dx}$ unter Berücksichtigung der Euler-Gleichung eine beschleunigte oder eine verzögerte Strömung? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie die eindimensionale Euler-Gleichung aufschreiben und daraus den Strömungszustand herleiten.