....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

28. 02. 2020

1. Aufgabe (11 Punkte)

Die Energiegleichung für zweidimensionale, stationäre Strömungen mit konstanten Stoffgrößen λ, η und c_p lautet

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$
$$+ \eta \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Im Folgenden wird diese Energiegleichung für eine Grenzschichtströmung betrachtet.

a) Schreiben Sie die gegebene Energiegleichung in dimensionsloser Form und berücksichtigen Sie bei der Einführung der dimensionslosen Größen den Bezug zur Grenzschichtströmung.

b) Vereinfachen Sie die in Teil a) entdimensionierte Gleichung für eine Grenzschichtströmung unter Berücksichtigung der Impulsgleichung einer Grenzschichtströmung in y - Richtung.

c) Bestimmen Sie mit der Methode der Differentialgleichungen alle relevanten Kennzahlen, die sich aus der in Teil b) vereinfachten Gleichung ergeben.

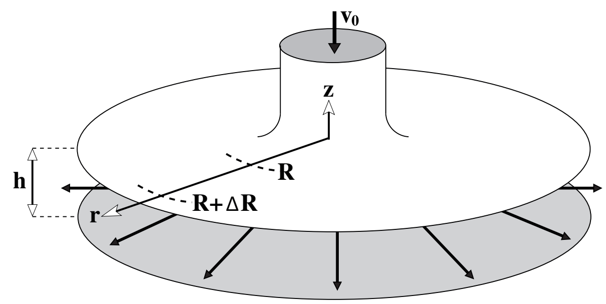
d) Drücken Sie die erhaltene(n) Kennzahl(en) durch eine oder mehrere in der Strömungsmechanik häufig verwendete Kennzahl(en) aus.

Gegeben:

- Alle nötigen Referenzgrößen
- $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$
- Grenzschichtdicke $\delta = \sqrt{\dfrac{\nu x}{u}}$

2. Aufgabe (10 Punkte)

Zwischen zwei horizontalen Platten (Abstand h) strömt ein inkompressibles Fluid stationär ausschließlich in radialer Richtung nach außen. Der Druck ändert sich zwischen dem Radius R und dem Radius $R + \Delta R$ nichtlinear um Δp. Im Folgenden wird das radiale Intervall $[R, R + \Delta R]$ betrachtet.



Die Kontinuitätsgleichung und die radiale Impulsgleichung lauten:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right], \tag{2}$$

wobei v_r die radiale und v_z die axiale Geschwindigkeit darstellen.

a) Vereinfachen Sie die Gleichungen (1) und (2) für das oben gegebene Problem.

Nehmen Sie für alle weiteren Aufgabenteile an, dass es sich bei dem oben beschriebenen Problem um eine schleichende Strömung handelt, d.h. es gilt $Re = \dfrac{\rho v_0 \Delta R}{\eta} \ll 1$.

b) Vereinfachen Sie das Ergebnis von Teil a) unter Berücksichtigung von $Re \ll 1$ weiter und zeigen Sie, dass $\dfrac{\partial p}{\partial r} = \eta\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$ gilt.

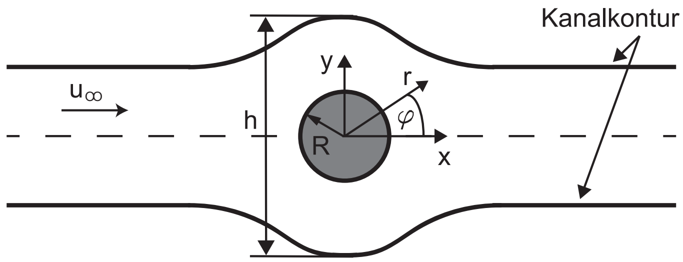
c) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsverlauf $v_r(r, z)$. Beachten Sie dazu den unten gegebenen Hinweis.

Gegeben: $R, \Delta R, h, \Delta p, v_0, \rho, \eta$

Hinweise:

- $h = \mathcal{O}(\Delta R)$.
- Der Druck stellt sich so ein, dass $ReEu = \mathcal{O}(1)$ gilt.
- zu Teil c): $\dfrac{\partial p}{\partial r} = \eta\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$ lässt sich umformen zu $\dfrac{dp}{dr} = \dfrac{\eta}{r}\dfrac{d^2(r v_r)}{dz^2}$, wobei gilt $\eta\dfrac{d^2(r v_r)}{dz^2} = konst.$

3. Aufgabe (12 Punkte)



In einem Windkanal mit flexiblen Seitenwänden soll die Umströmung eines Kreiszylinders mit dem Radius R untersucht werden. Um den Einfluss der Windkanalwände auf die Zylinderumströmung zu minimieren, werden die Seitenwände so eingestellt, dass sie dem potentialtheoretischen Verlauf zweier Stromlinien entsprechen. Die entsprechende Stromfunktion lautet

$$\Psi = u_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) r \sin(\varphi).$$

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponenten $v_r(r,\varphi)$ und $v_\varphi(r,\varphi)$.

b) Leiten Sie die Koordinaten r_s, φ_s des/der Staupunkte(s) her.

c) Bestimmen Sie die obere Wandkontur $r_w(\varphi)$.

d) Bestimmen Sie den Druckbeiwert auf der oberen Wandkontur an der Position der maximalen Kanalbreite h.

Gegeben: u_∞, R, h

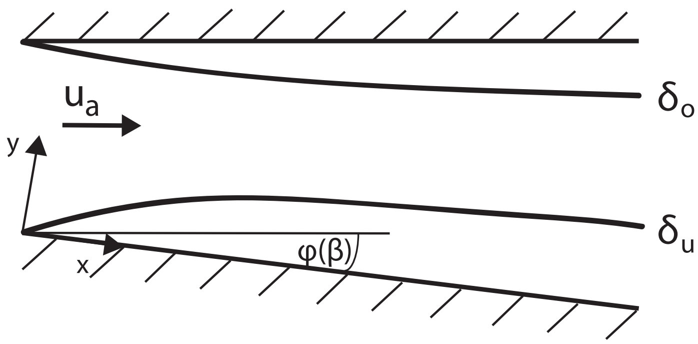
Hinweise:

- $z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$
- $v_r(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}, \quad v_\varphi(r,\varphi) = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}$
- Die maximale Breite des Windkanals beträgt h.
- Um eine Verblockung zu vermeiden, ist der Radius des Kreiszylinders R deutlich kleiner als die Kanalbreite h.
- Winkeltabelle:

φ	0	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	-1

4. Aufgabe (12 Punkte)

In einem Experiment wird untersucht, wie sich die Änderung des Öffnungswinkels eines Diffusors auf die sich ausbildende Grenzschicht auswirkt. Dafür wird die obere Wandkontur horizontal fixiert, während die Steigung der unteren Wandkontur m über den Parameter β variiert werden kann.



Das Geschwindigkeitsprofil in der laminaren, inkompressiblen Grenzschicht kann an der unteren, angewinkelten Wandkontur durch den Polynomansatz

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0(x) + a_1(x)\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

angenährt werden. Außerhalb der Grenzschicht kann die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung durch das Potenzgesetz

$$u_a(x) = bx^m, \quad \text{mit} \quad m = \frac{\beta}{2-\beta}, \quad -2 \le \beta < 0$$

beschrieben werden, während die Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung, die senkrecht zur unteren Platte verläuft, vernachlässigt werden kann.

a) Bestimmen Sie den Druckgradienten $\frac{dp}{dx}(x)$ in Abhängigkeit von dem Steigungsparameter β. Verwenden Sie dazu die Euler-Gleichung in x-Richtung, d.h. die Impulsgleichung unter Vernachlässigung der Reibungskräfte.

b) Weisen Sie nach, dass die Grenzschicht ablösegefährdet ist.

c) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht $\frac{u(x,y)}{u_a(x)}$ als Funktion von der Grenzschichtdicke $\delta(x)$ und dem Steigungsparameter β.

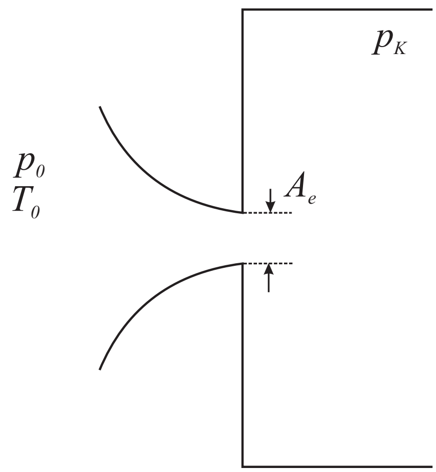
d) Bestimmen Sie die fiktive Grenzschichtdicke an der Ablösestelle $\delta(x_{AB})$ unter der Annahme, dass die Grenzschichttheorie nach der Ablösestelle gültig ist.

Gegeben: $\eta, \rho, b > 0, -2 \le \beta < 0$

Hinweis:

Grenzschichtgleichung (x-Impulsgleichung): $u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

5. Aufgabe (9 Punkte)



Durch eine konvergente Düse strömt Luft aus der Umgebung in einen großen Kessel.

a) Was wird im Rahmen der Gasdynamik als kritischer Zustand bezeichnet? Leiten Sie das kritische Druckverhältnis p^*/p_0 her und untersuchen Sie unter Berücksichtigung der gegebenen Größen, ob bei dem oben beschriebenen Problem ein kritischer Zustand eintritt.

b) Bestimmen Sie den Massenstrom durch die Düse.

Gegeben:

$p_0,\ T_0,\ \gamma = 1,4$ (Luft), $R,\ A_e,\ \dfrac{p_K}{p_0} = 0,7$

Hinweise:

- $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$
- Isentropenbeziehung: $\dfrac{T_a}{T_b} = \left(\dfrac{p_a}{p_b}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\dfrac{\rho_a}{\rho_b}\right)^{\gamma-1}$

6. Aufgabe (6 Punkte)

a) Was besagt der Satz von Thomson in Bezug auf die Zirkulation entlang einer sich mit dem Fluid bewegten, geschlossenen Kurve? Geben Sie an, unter welchen Voraussetzungen der Satz von Thomson gültig ist.

b) Was versteht man unter dem d'Alembertschen Paradoxon?

c) Begründen Sie mit Hilfe des Zusammenhangs zwischen der Phasengeschwindigkeit c, der Wellenlänge λ und der mittleren Wassertiefe H

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\right)}$$

für Schwerewellen, warum Wasserwellen orthogonal zum Küstenverlauf auf den Strand zulaufen, sofern die Wassertiefe unabhängig vom Küstenverlauf konstant abnimmt. Sie können annehmen, dass die Kleinwinkelnäherung auch für den Tangens Hyperbolicus $tanh$ gilt.

d) Untenstehendes Diagramm zeigt den Verlauf des Widerstandsbeiwertes c_D eines umströmten Zylinders als Funktion der Reynoldszahl Re. Erklären Sie, wie der Abfall des Widerstandsbeiwertes zwischen den Punkten D und E zustande kommt.