....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

12. 08. 2016

1. Aufgabe

a) Einflussgrößen: $R[m], L[m], \Delta p[\frac{kg}{ms^2}], v_m[\frac{m}{s}], \rho[\frac{kg}{m^3}], \eta[\frac{kg}{ms}] \Rightarrow k = 6$
Grunddimensionen: $[m], [kg], [s] \Rightarrow r = 3$
Anzahl der Kennzahlen: $m = k - r = 3$
Wiederkehrende Variable: $\rho[\frac{kg}{m^3}], R[m], v_m[\frac{m}{s}]$

$K_1 = \Delta p \cdot \rho^\alpha \cdot R^\beta \cdot v_m^\gamma$
$kg: 1 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1$
$m: -1 - 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow 2 + \beta + \gamma = 0$
$s: -2 - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -2$
$\Rightarrow \beta = 0$
$K_1 = \dfrac{\Delta p}{\rho v_m^2} = Eu$

$K_2 = \eta \cdot \rho^\alpha \cdot R^\beta \cdot v_m^\gamma$
$kg: 1 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1$
$m: -1 - 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow 2 + \beta + \gamma = 0$
$s: -1 - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -1$
$\Rightarrow \beta = -1$
$K_2 = \dfrac{\eta}{\rho v_m R} = \dfrac{1}{Re_R}$

$K_3 = L \cdot \rho^\alpha \cdot R^\beta \cdot v_m^\gamma$
$kg: 0 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
$m: 1 - 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \Rightarrow 1 + \beta + \gamma = 0$
$s: 0 - \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = -1$
$\Rightarrow \beta = 0$
$K_3 = \dfrac{L}{R}$

b) ausgebildete Strömung: $\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$
stationäre Strömung: $\dfrac{\partial v_r}{\partial t} = 0 \quad \dfrac{\partial v_z}{\partial t} = 0$

Kontinuitätsgleichung: $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ und Randbedingungen $\Rightarrow$ $v_r = 0$
Impulsgleichungen:

$$\varrho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\varrho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = 0$$

c) 1) Variablen des Problems: geometrische Größen r, z, mechanische Größen v_z, p und die Stoffgröße η.

2) Dimensionslose Größen:

$$\bar{r} = \frac{r}{R} \qquad \bar{z} = \frac{z}{L} \qquad \bar{v_z} = \frac{v_z}{v_m} \qquad \bar{p} = \frac{p}{\Delta p_{ref}} \qquad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_{ref}}$$

3) Einsetzen:

$$\Rightarrow -\frac{\Delta p_{ref}}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{\eta} \eta_{ref} v_m}{R^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v_z}}{\partial \bar{r}} \right) = 0$$

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\eta_{ref} v_m L}{\Delta p_{ref} R^2} \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v_z}}{\partial \bar{r}} \right) = 0$$

$$\frac{\eta_{ref} v_m L}{\Delta p_{ref} R^2} = K_I = \frac{1}{Eu} \frac{1}{Re_R} \frac{L}{R}$$

2. Aufgabe

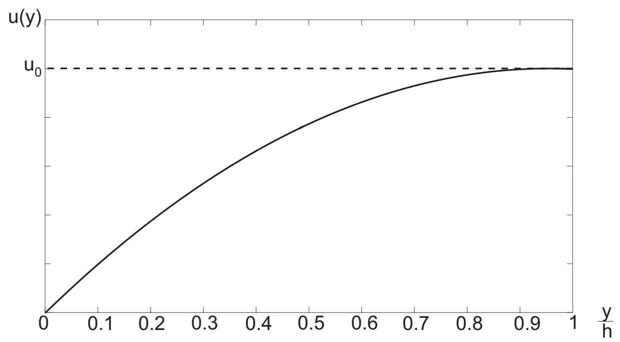
a) $\frac{dp}{dx} = \eta \frac{d^2u}{dy^2} \Rightarrow \eta \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{\Delta p}{L} \Leftrightarrow u(y) = \frac{\Delta p}{2\eta L} y^2 + C_1 y + C_2$

Randbedingungen:

$u(y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$u(y=h) = u_0 \Rightarrow u_0 = \frac{\Delta p}{2\eta L} h^2 + C_1 h \Leftrightarrow C_1 = \frac{u_0}{h} - \frac{\Delta p}{2\eta L} h$

$\Rightarrow u(y) = \frac{\Delta p}{2\eta L} y^2 + \left(\frac{u_0}{h} - \frac{\Delta p}{2\eta L} h \right) y$



b) Kontinuität: Volumenverdrängung durch Quader: $\dot{V}_Q$ und $\dot{V} = 2a \cdot \int_0^h u(y,\eta) dy$

$\Rightarrow \dot{V}_Q = 2a \cdot \int_0^h u(y,\eta) dy$

$\Rightarrow \frac{\dot{V}_Q}{2a} = \int_0^h \left(\frac{\Delta p}{2\eta L} y^2 + \left(\frac{u_0}{h} - \frac{\Delta p}{2\eta L} h \right) y \right) dy$

$\Leftrightarrow \frac{\dot{V}_Q}{2a} = \frac{\Delta p h^3}{6\eta L} + \left(\frac{u_0}{h} - \frac{\Delta p h}{2\eta L} \right) \frac{h^2}{2}$

mit $\dot{V}_Q = -u_0 \cdot a \cdot b \Rightarrow \eta = \frac{\Delta p h^3}{6 u_0 L (b+h)}$

c) $F_R = \tau_W \cdot A$ mit $A = 2aL$ und $\tau_W = \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}$

$\Rightarrow \tau_W = \eta \left. \left(\frac{\Delta p}{\eta L} y + \frac{u_0}{h} - \frac{\Delta p h}{2\eta L} \right) \right|_{y=0}$

$\Leftrightarrow \tau_W = \eta \frac{u_0}{h} - \frac{\Delta p h}{2L}$

$\Rightarrow \tau_W = \frac{\Delta p h}{2L} \left(\frac{h}{3(b+h)} - 1 \right)$

$\Rightarrow F_R = \Delta p a h \left(\frac{h}{3(b+h)} - 1 \right)$

3. Aufgabe

a) $F(z) = az^2 + \frac{E}{2\pi} \ln z \quad \text{mit} \quad z = x + iy = re^{i\Theta}$

$F(z) = a(x+iy)^2 + \frac{E}{2\pi} \ln(re^{i\Theta})$

$F(z) = a(x^2 + 2ixy - y^2) + \frac{E}{2\pi}(\ln r + i\Theta)$

mit $\quad F(z) = \Phi + i\Psi \Rightarrow \Psi = 2axy + \frac{E}{2\pi}\Theta$

mit $\quad x = r\cos(\Theta) \quad$ und $\quad y = r\sin(\Theta)$

$\Rightarrow \Psi = 2ar^2 \cos(\Theta)\sin(\Theta) + \frac{E}{2\pi}\Theta = ar^2 \sin(2\Theta) + \frac{E}{2\pi}\Theta$

$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} = \frac{1}{r}\left(ar^2 \cos(2\Theta)2 + \frac{E}{2\pi}\right)$

$v_\Theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -2ar\sin(2\Theta)$

Staupunkte: $v_r = v_\Theta = 0$

$\Rightarrow 2ar^2\cos(2\Theta) + \frac{E}{2\pi} = 0 \quad I. \quad$ und $\quad -2ar\sin(2\Theta) = 0 \quad II.$

$r \neq 0$ (Singularität) aus $II.: \quad \Theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \ldots$

aus $I.: \quad 2ar^2\cos(2\Theta) + \frac{E}{2\pi} = 0, \Leftrightarrow 4ar^2\pi \underbrace{\cos(2\Theta)}_{=\pm 1 \text{für} \Theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \ldots} + E = 0$

$\Rightarrow 4\pi a r^2 = \mp E \Leftrightarrow r^2 = \mp \frac{E}{4\pi a} \quad$ ($-$nicht sinnvoll)

$\Rightarrow r_{St} = \sqrt{\frac{E}{4a\pi}}, \quad \Theta_{St} = \frac{\pi}{2}$, 1 Staupunkt

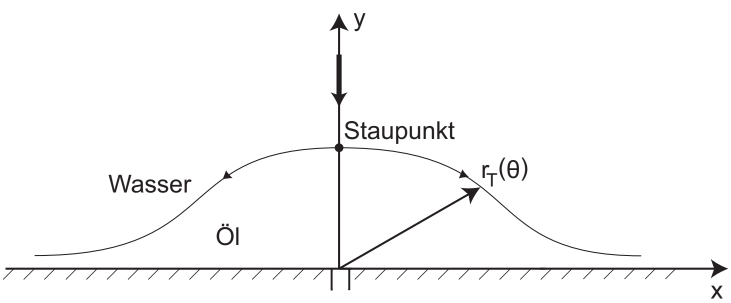
b) $\Psi_{St} = ar_{St}^2 \sin(2\Theta_{St}) + \frac{E}{2\pi}\Theta_{St} = \frac{E}{4}$

Trennungslinie entspricht Stromlinie durch Staupunkt

$\Psi = \Psi_{St} = \frac{E}{4} = ar^2\sin(2\Theta) + \frac{E}{2\pi}\Theta$

$\Leftrightarrow r_T(\Theta) = \sqrt{\frac{E}{a\sin(2\Theta)}\left(\frac{1}{4} - \frac{\Theta}{2\pi}\right)}$

Skizze:



c) Reibungsfreiheit & Drehungsfreiheit

4. Aufgabe

a) Konti:

$$U_0H_0 = U(x)H(x) \Rightarrow U(x) = \frac{U_0H_0}{H(x)} = \frac{U_0H_0}{H_0 + \frac{c}{L}x}$$

mit $U(x = L) = \frac{U_0}{2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{c}{H_0}} \Leftrightarrow c = H_0$$

$$U(x) = \frac{U_0}{1 + \frac{x}{L}}$$

Impulsgleichung der reibungsfreien Außenströmung:

$$\frac{dp}{dx} = -\varrho U \frac{dU}{dx} \text{ mit } \frac{dU}{dx} = -\frac{U_0/L}{(1 + \frac{x}{L})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \varrho \frac{U_0^2}{L(1 + \frac{x}{L})^3}$$

b)

$$\frac{\partial(\frac{u}{U})}{\partial(\frac{y}{\delta})} = a_1 + 2a_2(\frac{y}{\delta}) + 3a_3(\frac{y}{\delta})^2$$

$$\frac{\partial^2(\frac{u}{U})}{\partial(\frac{y}{\delta})^2} = 2a_2 + 6a_3(\frac{y}{\delta})$$

1.RB.:

$$\frac{y}{\delta} = 0 : u = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

2.RB.:

$$\frac{y}{\delta} = 1 : u = U \Rightarrow 1 = a_1 + a_2 + a_3$$

3.RB:

$$\frac{y}{\delta} = 0 : \frac{dp}{dx} = \eta \frac{U}{\delta^2} \frac{\partial^2(\frac{u}{U})}{\partial(\frac{y}{\delta})^2}|_{\frac{y}{\delta}=0} \Rightarrow \eta \frac{U_0}{\delta^2} 2a_2 = \varrho \frac{U_0^2}{L(1 + \frac{x}{L})^2}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\varrho\delta^2}{2\eta} \frac{U_0}{L(1 + \frac{x}{L})^2}$$

4.RB:

$$\frac{y}{\delta} = 1 : \frac{\partial(\frac{u}{U})}{\partial(\frac{y}{\delta})}|_{\frac{y}{\delta}=1} = 0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3$$

$$\Rightarrow \text{ mit } a_1 = 1 - a_2 - a_3 \Rightarrow 1 + a_2 + 2a_3 = 0$$

$$\Rightarrow a_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\varrho\delta^2}{4\eta} \frac{U_0}{L(1 + \frac{x}{L})^2}$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{3}{2} - \frac{\varrho\delta^2}{4\eta} \frac{U_0}{L(1 + \frac{x}{L})^2}$$

c) Ablösung:

$$\frac{\partial u(x = L, y = 0)}{\partial y} = 0 = a_1(L)$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{\varrho\delta^2}{4\eta}\frac{U_0}{4L} \Rightarrow \frac{L^2}{\delta^2} = \frac{LU_0\varrho}{24\eta}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{\delta} = \sqrt{\frac{Re_L}{24}}$$

d) turbulenter Umschlag, bewegte Wand, Absaugung, Ausblasen, Stolperdraht, usw.

5. Aufgabe

a) 1. Energiegleichung:

$$c_pT + \frac{u^2}{2} = c_pT^* + \frac{u^{*2}}{2}$$

mit $u^* = c^*$ und Schallgeschwindigkeit $c^2 = \gamma RT$

$$c^2 + \frac{\gamma-1}{2}u^2 = c^{*2} + \frac{\gamma-1}{2}c^{*2} = \frac{\gamma+1}{2}c^{*2}, \text{d.h.}$$

$$\frac{1}{M^2} + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{\gamma+1}{2}\frac{1}{M^{*2}}$$

$$M^{*2} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2} \Leftrightarrow M^* = \left(\frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

b) über den Stoß gilt: $M_2^* = \frac{1}{M_1^*}, \quad c_1^* = c_2^*$

$$u_2 = M_2^* \cdot c^* = M_2^* \cdot \frac{u_1}{M_1^*} = \frac{u_1}{M_1^{*2}}$$

$$u_1 = M_1\sqrt{\gamma RT_1}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{M_1\sqrt{\gamma RT_1}}{M_1^{*2}}$$

$$\Rightarrow u_2 = M_1\sqrt{\gamma RT_1}\frac{\left(\gamma - 1 + \frac{2}{M_1^2}\right)}{(\gamma+1)}$$

Energiesatz: $T_{01} = c_pT_2 + \frac{u_2^2}{2} \Rightarrow T_2 = T_{01} - \frac{u_2^2}{2\gamma R}(\gamma-1)$

$$\Rightarrow T_2 = T_{01} - \frac{M_1^2T_1}{2(\gamma+1)^2}\left(\gamma - 1 + \frac{2}{M_1^2}\right)^2(\gamma-1)$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1\left(1 + \frac{M_1^2}{2}(\gamma-1)\right) - \frac{M_1^2T_1}{2(\gamma+1)^2}\left(\gamma - 1 + \frac{2}{M_1^2}\right)^2(\gamma-1)$$

c) $u_3 = 0,9 \cdot u_2$

Konti: $\varrho_2u_2A_2 = \varrho_3u_3A_3 \quad \rightarrow \quad A_3 = A_2\frac{u_2}{u_3}\frac{\varrho_2}{\varrho_3}$

Energiegleichung: $\frac{u_3^2}{2} + c_pT_3 = \frac{u_2^2}{2} + c_pT_2$

$$\frac{T_3}{T_2} = 1 + (1-0,9^2)\frac{u_2^2}{2\gamma RT_2}(\gamma-1)$$

Mit $\frac{\varrho_3}{\varrho_2} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

$$A_3 = \frac{A_2}{0.9} \cdot \left[1 + 0,19\frac{u_2^2}{2\gamma RT_2}(\gamma-1)\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

6. Aufgabe

a) Druck- und Reibungskräfte

b) $\delta(x) \sim \sqrt{x}$

c) Wenn die Ähnlichkeit bezüglich der Machzahl im Versuch eingehalten wird
$M = \frac{u}{c} = \frac{u_\infty}{\sqrt{\gamma R \frac{T_\infty}{T_0} T_0}}$, mit $\frac{T_\infty}{T_0} = f(M)$
ist damit die Reynoldszahl bei vorgegebener Modelllänge gesetzt $Re = \frac{u_\infty L}{\nu}$.

d) $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$

e) Bei inkompressiblen Strömungen sind Dichteänderungen gegenüber den Geschwindigkeitsänderungen zu vernachlässigen.
Als Kriterium kann die Machzahl dienen: $M < 0,3$ inkompressible Strömung