AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen

Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik I

21. 02. 2017

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S IC H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben:

Klausur Aerodynamik I

Fragenteil, Biot-Savart, Tropfentheorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan(\frac{x}{2}) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan(\frac{x}{2}) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\Big(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\Big)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x}{ax + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \Big[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 ln(X)\Big]$

  mit $X = ax + b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^\pi \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \left\{ \begin{array}{rl} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{array} \right\}$
- $\int_0^\pi \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \left\{ \begin{array}{rl} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{array} \right\}$
- Glauert-Integral

  $$\int_0^\pi \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx =$

  $\frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall \quad |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (12 Punkte)

1. Erklären Sie für ein Tragflügelprofil mit scharfer Hinterkante die Entstehung der Zirkulation
   (a) beim Anfahrwirbel
   (b) beim gebundenen Wirbel
   (c) bei den freien Wirbeln.

2. Zeigen Sie, dass die Strömung hinter einem gekrümmten Verdichtungsstoß rotationsbehaftet ist. Argumentieren Sie mit den Aussagen des Croccoschen Wirbelsatzes für stationäre, isoenergetische Strömungen. Gehen Sie von einem zweidimensionalem Problem aus.

3. Die Druckverteilung c_p um ein Profil bei M_∞ soll mit Hilfe einer benannten Vergleichsströmung $(\overline{c_p}, \overline{M}_\infty = 0)$ ermittelt werden. Hierzu ist die linearisierte Störpotentialgleichung

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = 0$$

   sowie folgende Transformationsvorschrift gegeben:

$$\overline{x} = x \quad \overline{y} = t_1 y \quad \overline{u}_\infty = u_\infty \quad \overline{q}_\infty = q_\infty; \quad \overline{\phi}' = \frac{t_2{}'}{\phi}.$$

   (a) Nennen Sie mindestens zwei Bedingungen, unter denen die oben gegebene linearisierte Störpotentialgleichung <u>*nicht*</u> gültig ist.

   (b) Leiten Sie mit Hilfe der linearisierten Störpotentialgleichung und der gegebenen Transfomrationsvorschrift den Zusammenhang zwischen der Druckverteilung des vorhandenen und des transformierten Profils $c_p = f(\overline{c_p}, M_\infty)$ her. Bestimmen Sie dazu zunächst die Transformationsfaktoren t_1 und t_2.

2. Aufgabe: Biot-Savart (18 Punkte)

Bei einer Regatta fahren zwei Segelboote schräg hintereinander versetzt um den Sieg. Die starren Segel der Boote können vereinfacht als Tragflügel betrachtet werden und erzeugen (neben Widerstand und Krängung) einen Vortrieb in Fahrtrichtung der Bootsrümpfe. Das Segel von Boot I besitzt die Zirkulation Γ_1, das von Boot II die Zirkulation Γ_2. Die Auswirkungen der Wirbelsysteme auf die beiden Boote soll mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes untersucht werden.

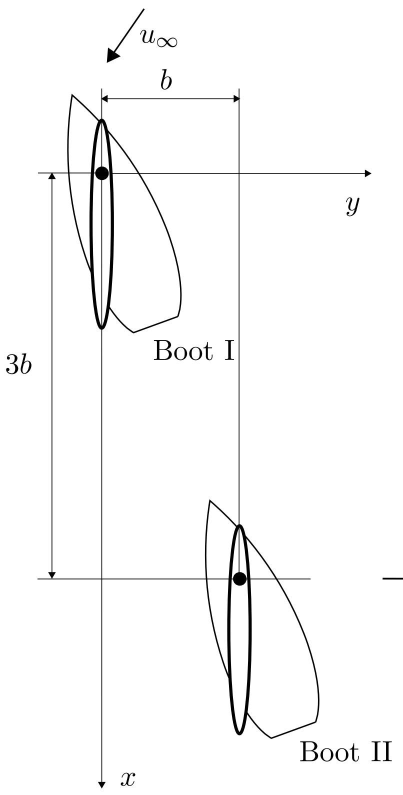


Abbildung 1: Draufsicht

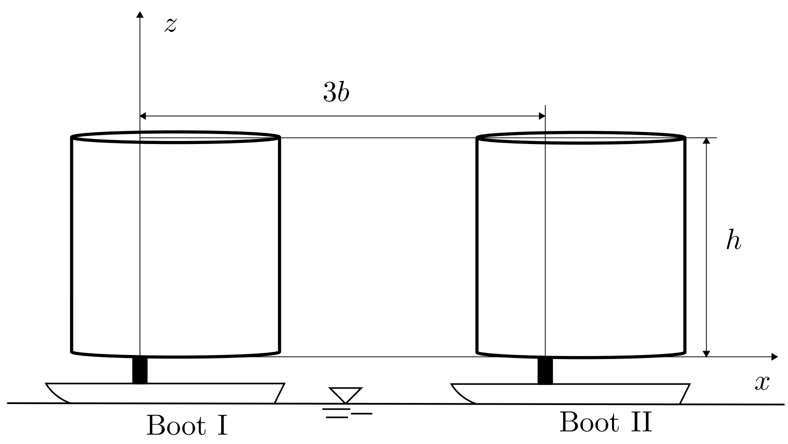


Abbildung 2: Seitenansicht

1. Skizzieren Sie das vollständige Wirbelsystem der beiden Boote.
2. Leiten Sie aus der allgemeinen Biot-Savart Gleichung

$$\vec{V} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{\|\vec{r}\|^3} \tag{1}$$

   die Formel für die durch einen Stabwirbel induzierte Geschwindigkeit her:

$$|V_i| = \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos\varphi_1 - cos\varphi_2) \tag{2}$$

3. Berechnen Sie die durch das Wirbelsystem des Segels (mit Γ_1) des ersten Bootes induzierten Geschwindigkeitskomponenten w_x, w_y und w_z als Funktion der Masthöhe z auf das zweite Boot an der Position $x = 3b$, $y = b$ im Bereich $0 < z < h$.
4. Welche Auswirkungen hat die induzierte Geschwindigkeit auf den Vortrieb von Boot II?

Gegeben: Γ_1, Γ_2, b, h, u_∞
Hinweis: Der Einfluss der Wasseroberfläche und der Bootsrümpfe auf die Wirbelverteilung kann vernachlässigt werden.

3. Aufgabe: Tropfentheorie (20 Punkte)

1. Leiten Sie mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung den allgemeinen Zusammenhang zwischen der Quellverteilung $q(X)$ und der Form des Profiltropfens $Z^{(t)}(X)$ her.

Gegeben ist die Gleichung eines Profiltropfens ohne Anstellwinkel, welcher in einer Parallelströmung mit der Anströmgeschwindigkeit u_∞ liegt.

$$Z^{(t)} = C \cdot (2sin(\varphi) - sin(2\varphi)), \quad cos(\varphi) = 2X - 1, \quad X = \frac{x}{l}, \quad Z^{(t)} = \frac{z^{(t)}}{l}$$

2. Ermitteln Sie die Gleichung des Profils in Abhängigkeit von X und der Konstanten C.
3. Bestimmen Sie die Konstante C unter der Bedingung, dass die maximale Dicke dieses Profiltropfens der eines NACA-0024 Profils entsprechen soll und ermitteln Sie die Position X_d dieser maximalen Dicke.
4. Bestimmen Sie die Winkel an der Vorder- und Hinterkante und skizzieren Sie das Profil.
5. Bestimmen Sie die dimensionslose induzierte Vertikalgeschwindigkeit $w_a = w/u_\infty$ in X-Koordinaten und in φ-Koordinaten.
6. Bestimmen Sie die dimensionslose induzierte Axialgeschwindigkeit $u_a = u/u_\infty$ in X-Koordinaten und in φ-Koordinaten.

Hinweis: Reihenansatz nach Riegels für die Gleichung des Profiltropfens:

$$Z^{(t)}(\varphi) = \pm\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} b_n sin(n \cdot \varphi).$$

Störgeschwindigkeiten:

$$u(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 q(X')\frac{dX'}{X - X'}$$

$$w(X) = \pm\frac{1}{2}q(X)$$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (12 Punkte)

1. (3 Punkte)
(a) Bei der Bewegung des Tragflügels aus der Ruhe kann unmittelbar nach der Anfahrt die Strömung als reibungslos ohne Zirkulation betrachtet werden, bei der ein Umströmen der Hinterkante vorliegt. Nach der Kutta'schen Abflussbedingung kommt es zu einer Verlagerung des Staupunktes von der Oberseite an die Hinterkante. Dies führt infolge der Reibung zu einem Anfahrwirbel mit der Zirkulation Γ.

(b) Die Drehrichtung des Anfahrwirbels sei im Gegenuhrzeigersinn.
Nach dem Satz von Thomson $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$, der besagt, dass bei einer reibungsfreien, inkompressiblen Strömung keine Zirkulation erzeugt werden kann, muss eine Zirkulation im Uhrzeigersinn um das Profil existieren.

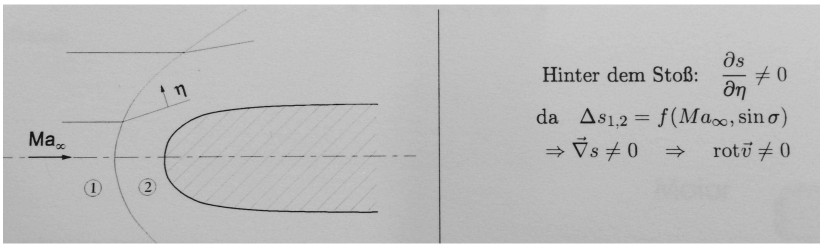
(c) Beim Tragflügel endlicher Spannweite gleichen sich die Druckunterschiede zwischen Ober- und Unterseite des Flügels an dessen Enden an. Es entsteht eine Umströmung der Flügelenden, die sich hinter dem Tragflügel zu Wirbeln aufrollt.

2. (3 Punkte)
Croccoscher Wirbelsatz:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} h_0 = T\vec{\nabla} s + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

stationär und isoenergetisch:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad \vec{\nabla} h_0 = 0 \quad \Rightarrow T\vec{\nabla} s = -\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$



3. (6 Punkte)
Linearisierte Störpotentialgleichung/Ähnlichkeitsregeln:
(a) In der gegebenen Form nicht gültig bei großen Anstellwinkeln, großen Störungen, transsonischen und hypersonischen Strömungen.

(b) Gegebene Strömung:

$$(1 - M_\infty^2)\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = 0$$

Vergleichsströmung:

$$\frac{\partial^2 \overline{\phi}'}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{\phi}'}{\partial \overline{y}^2} = 0$$

Transformation des Potentials:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial x} = \frac{\partial \phi'}{\partial \overline{x}}\frac{\partial \overline{x}}{\partial x} + \frac{\partial \phi'}{\partial \overline{y}}\frac{\partial \overline{y}}{\partial x} = \frac{\partial \phi'}{\partial \overline{x}} = t_2 \frac{\partial \overline{\phi}'}{\partial \overline{x}}$$

$$\frac{\partial \phi'}{\partial y} = \frac{\partial \phi'}{\partial \overline{x}}\frac{\partial \overline{x}}{\partial y} + \frac{\partial \phi'}{\partial \overline{y}}\frac{\partial \overline{y}}{\partial y} = t_1 \frac{\partial \phi'}{\partial \overline{y}} = t_1 t_2 \frac{\partial \overline{\phi}'}{\partial \overline{y}}$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial x^2} = t_2 \frac{\partial^2 \overline{\phi}'}{\partial \overline{x}^2}$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial y^2} = t_1^2 t_2 \frac{\partial^2 \overline{\phi}'}{\partial \overline{y}^2}$$

Einsetzen in die Störpotentialgleichung liefert:

$$(1 - M_\infty^2) t_2 \frac{\partial^2 \overline{\phi}'}{\partial \overline{x}^2} + t_1^2 t_2 \frac{\partial^2 \overline{\phi}'}{\partial \overline{y}^2} = 0 \quad t_1 = \sqrt{|1 - M_\infty^2|}$$

Bestimmung der Transfomrationsfaktors t_2 andhand der kinematischen Randbedingung:

$$\frac{\partial y_b}{\partial x} = \frac{v'}{u_\infty} = \frac{1}{u_\infty} \frac{\partial \phi'}{\partial y} = \frac{t_1 t_2}{\overline{u}_\infty} \frac{\partial \overline{\phi}'}{\partial \overline{y}} = t_1 t_2 \frac{\partial \overline{y}_b}{\partial \overline{x}} \stackrel{!}{=} t_1^2 t_2 \frac{\partial y_b}{\partial x}$$

Daraus folgt:

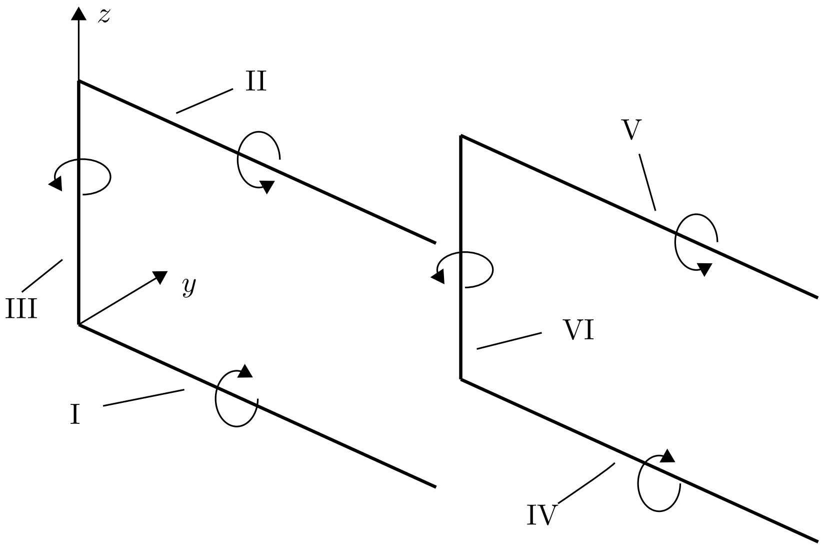
$$t_2 = \frac{1}{t_1^2} = \frac{1}{|1 - M_\infty^2|}$$

Damit folgt für den Druckbeiwert:

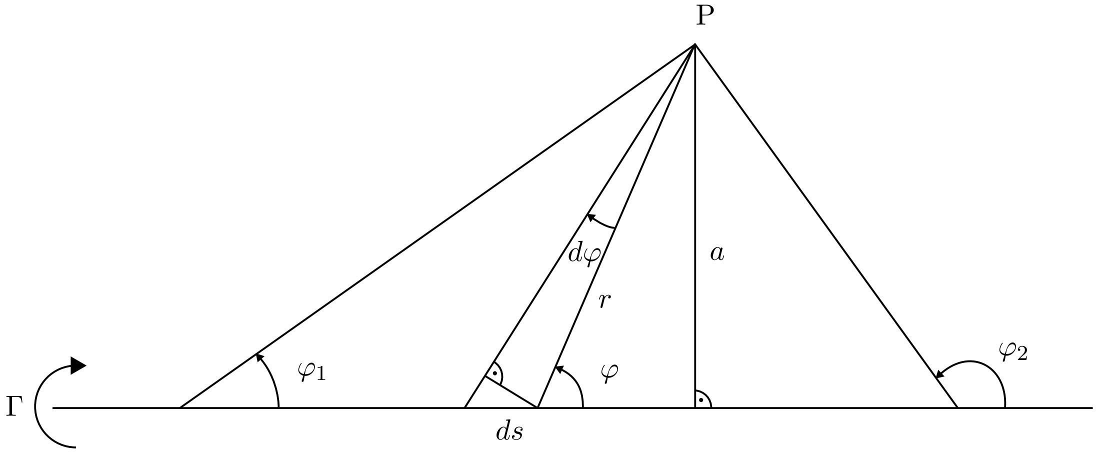
$$c_p = -\frac{2u'}{u_\infty} = -\frac{2}{u_\infty} \frac{\partial \phi'}{\partial x} = -\frac{2t_2}{\overline{u}_\infty} \frac{\partial \overline{\phi}'}{\partial \overline{x}} = \frac{\overline{c}_p}{|1 - M_\infty^2|}$$

Lösung 2. Aufgabe: Biot-Savart (18 Punkte)

1. vereinfachte Wirbelsysteme der beiden Boote:



2. Herleitung:

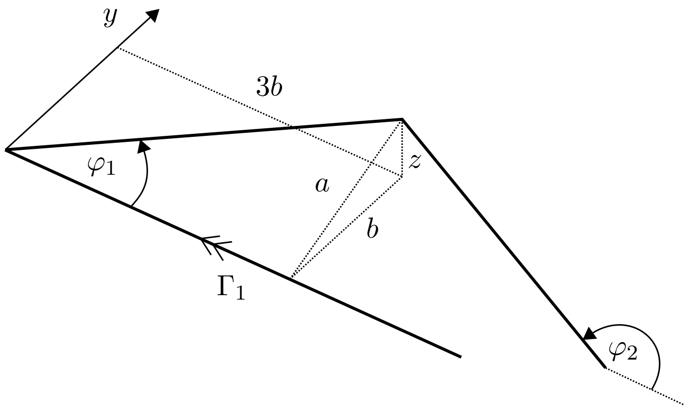


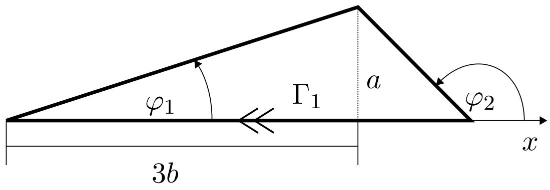
$$\vec{r} \times d\vec{s} = \|\vec{r}\| \cdot \|d\vec{s}\| \cdot \sin\varphi = a \cdot ds \qquad \text{(Fläche Parallelogramm)}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{a}{r} = \frac{rd\varphi}{ds}$$
$$\rightarrow \frac{ds}{r^2} = \frac{d\varphi}{a} \quad \text{und} \quad a = r\sin(\varphi)$$

$$|\vec{V}_i| = \frac{\Gamma}{4\pi}\oint \frac{|\vec{r} \times d\vec{s}|}{|\vec{r}|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_S \frac{a \cdot ds}{r^3} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_S \frac{r\sin\varphi ds}{r^3}$$
$$\frac{\Gamma}{4\pi}\int_S \frac{\sin\varphi ds}{r^2} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin\varphi d\varphi}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi d\varphi$$
$$|\vec{V}_i| = \frac{\Gamma}{4\pi a}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

3. Betrachtung des Wirbelsystems des ersten Bootes (I,II,III) und der Einfluss auf den Mast des zweiten Bootes. Wirbel I (unterer freier Wirbel):





mit $a = \sqrt{b^2 + z^2}$.

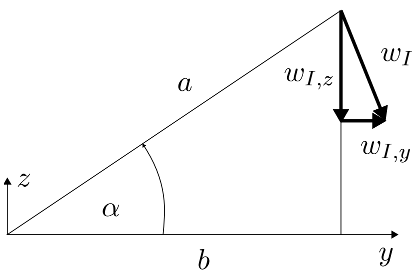
Für die induzierte Geschwindigkeit gilt:

$$w_I(z) = \frac{\Gamma_1}{4\pi a}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

mit

$$\cos\varphi_2 = \cos\pi = -1$$
$$\cos\varphi_1 = \frac{3b}{\sqrt{(3b)^2 + b^2 + z^2}}$$
$$\Rightarrow w_I(z) = \frac{\Gamma_1}{4\pi\sqrt{b^2+z^2}}\left(\frac{3b}{\sqrt{10b^2+z^2}} + 1\right)$$

Aufteilen der induzierten Geschwindkeit in die Komponenten:

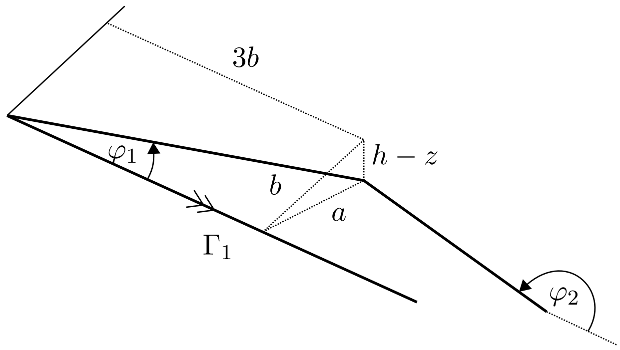


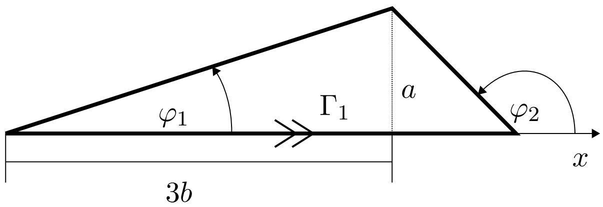
Der freie Wirbel induziert nur Komponenten in y und z Richtung: $\rightarrow w_{I,x}(z) = 0$. Die anderen beiden Komponenten ergeben sich zu:

$$w_{I,y}(z) = w_I \sin\alpha = w_I \frac{z}{\sqrt{b^2+z^2}}$$
$$w_{I,z}(z) = -w_I \cos\alpha = -w_I \frac{b}{\sqrt{b^2+z^2}}$$

$$w_{I,y}(z) = \frac{\Gamma_1 z}{4\pi(b^2+z^2)}\left(\frac{3b}{\sqrt{10b^2+z^2}} + 1\right)$$
$$w_{I,z}(z) = -\frac{\Gamma_1 b}{4\pi(b^2+z^2)}\left(\frac{3b}{\sqrt{10b^2+z^2}} + 1\right)$$

Wirbel II (oberer freier Wirbel):





mit $a = \sqrt{b^2 + (h-z)^2}$

Für die induzierte Geschwindigkeit gilt:

$$w_{II}(z) = \frac{\Gamma_1}{4\pi a}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

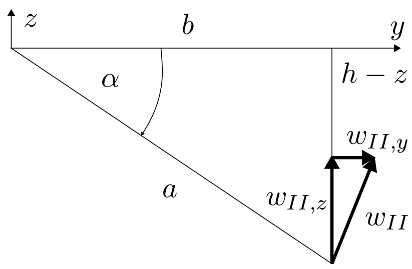
mit

$$\cos\varphi_2 = \cos\pi = -1$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{3b}{\sqrt{(3b)^2 + b^2 + (h-z)^2}}$$

$$\Rightarrow w_{II}(z) = \frac{\Gamma_1}{4\pi\sqrt{b^2 + (h-z)^2}}\left(\frac{3b}{\sqrt{10b^2 + (h-z)^2}} + 1\right)$$

Aufteilen der induzierten Geschwindkeit in die Komponenten:



Der freie Wirbel induziert nur Komponenten in y und z Richtung: $\rightarrow w_{II,x}(z) = 0$. Die anderen beiden Komponenten ergeben sich zu:

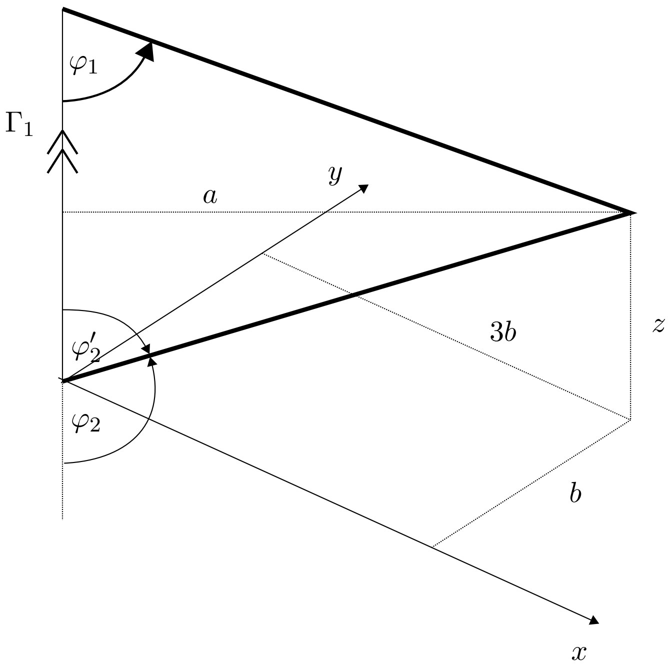
$$w_{II,y}(z) = w_{II}\sin\alpha = w_{II}\frac{h-z}{\sqrt{b^2 + (h-z)^2}}$$

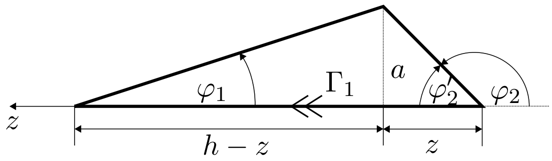
$$w_{II,z}(z) = w_{II}\cos\alpha = w_{II}\frac{b}{\sqrt{b^2 + (h-z)^2}}$$

$$w_{II,y}(z) = \frac{\Gamma_1(h-z)}{4\pi(b^2 + (h-z)^2)}\left(\frac{3b}{\sqrt{10b^2 + (h-z)^2}} + 1\right)$$

$$w_{II,z}(z) = \frac{\Gamma_1 b}{4\pi(b^2 + (h-z)^2)}\left(\frac{3b}{\sqrt{10b^2 + (h-z)^2}} + 1\right)$$

Wirbel III (gebundener Wirbel):





mit $a = \sqrt{(3b)^2 + b^2} = \sqrt{10}b$.

Für die induzierte Geschwindigkeit gilt:

$$w_{III}(z) = \frac{\Gamma_1}{4\pi a}(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

mit

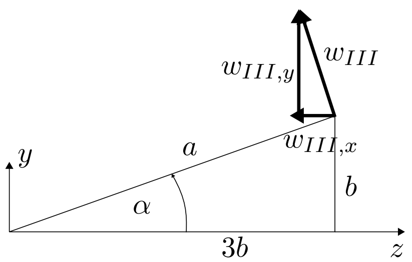
$$\cos\varphi_2 = \cos(\pi - \varphi_2') = -\cos(\varphi_2')$$

$$\cos\varphi_2' = \frac{z}{\sqrt{10b^2 + z^2}}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{h - z}{\sqrt{10b^2 + (h-z)^2}}$$

$$\Rightarrow w_{III}(z) = \frac{\Gamma_1}{4\pi\sqrt{10}b}\left(\frac{h-z}{\sqrt{10b^2 + (h-z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{10b^2 + z^2}}\right)$$

Aufteilen der induzierten Geschwindkeit in die Komponenten:



Der gebundene Wirbel induziert nur Komponenten in x und y Richtung: $\rightarrow$ $w_{III,z}(z) = 0$. Die anderen beiden Komponenten ergeben sich zu:

$$w_{III,x}(z) = -w_{III}\sin\alpha = -w_{III}\frac{b}{\sqrt{b^2 + (3b)^2}} = -w_{III}\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$w_{III,y}(z) = w_{III}\cos\alpha = w_{III}\frac{3b}{\sqrt{b^2 + (3b)^2}} = w_{III}\frac{3}{\sqrt{10}}$$

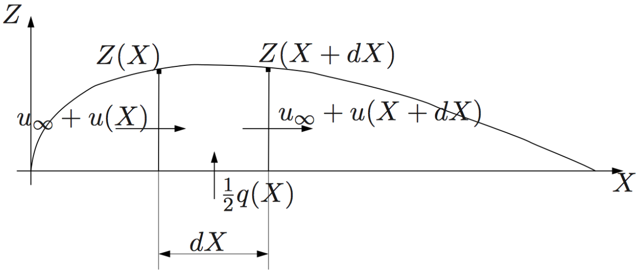
$$w_{III,x}(z) = -\frac{\Gamma_1}{40\pi b}\left(\frac{h-z}{\sqrt{10b^2 + (h-z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{10b^2 + z^2}}\right)$$

$$w_{III,y}(z) = \frac{3\Gamma_1}{40\pi b}\left(\frac{h-z}{\sqrt{10b^2 + (h-z)^2}} + \frac{z}{\sqrt{10b^2 + z^2}}\right)$$

4. Durch die induzierte Geschwindigkeitskomponente in positive y-Richtung verringert sich der Anstellwinkel des Windes zum Segel. Der Auftrieb und damit auch der Vortrieb des Bootes wird geringer, das Boot würde zurückfallen.

Lösung 3. Aufgabe: Tropfentheorie (20 Punkte)

1. Bestimmung der Quellverteiung:
   Bilanz: $\dot{V}_{ein} = \dot{V}_{aus}$



$$(u_\infty + u)Z^{(t)} + \frac{1}{2}q(X)dX = (u_\infty + u + \frac{\partial u}{\partial X}dX)(Z^{(t)} + \frac{\partial Z^{(t)}}{\partial X}dX)$$

$$u_\infty Z^{(t)} + uZ^{(t)} + \frac{1}{2}q(X)dX = u_\infty Z^{(t)} + uZ^{(t)} + \frac{\partial u}{\partial X}dXZ^{(t)} + u_\infty \frac{\partial Z^{(t)}}{\partial X}dX + u\frac{\partial Z^{(t)}}{\partial X}dX + \frac{\partial u}{\partial X}dX\frac{\partial Z^{(t)}}{\partial X}dX$$

Linearisierung (keine Terme 2. Ordnung):

$$\frac{1}{2}q(X) = \frac{\partial u}{\partial X}Z^{(t)} + u_\infty \frac{\partial Z^{(t)}}{\partial X} + u\frac{\partial Z^{(t)}}{\partial X}$$

Produktregel:

$$\frac{1}{2}q(X) = \frac{\partial}{\partial X}\left[(u_\infty + u)Z^{(t)}\right] \quad \text{mit:} \quad u_\infty >> u$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}q(X) = \frac{\partial}{\partial X}\left[u_\infty Z^{(t)}\right]$$

$$q(X) = 2u_\infty \frac{\partial Z^{(t)}}{\partial X}$$

2. Gleichung des Profils:

$$Z^{(t)} = C \cdot (2sin(\varphi) - sin(2\varphi))$$

   Mit $sin(2\varphi) = 2sin(\varphi)cos(\varphi)$ folgt:

$$Z^{(t)}(\varphi) = C \cdot (2sin(\varphi) - 2sin(\varphi)cos(\varphi))$$

   Transformation:

$$sin(\varphi) = \sqrt{1 - cos^2(\varphi)} = \sqrt{1 - (2X - 1)^2} = 2\sqrt{X(1 - X)}$$

$$Z^{(t)}(X) = C \cdot (4\sqrt{X - X^2} - 4\sqrt{X - X^2}(2X - 1))$$

$$Z^{(t)}(X) = 8C\sqrt{X - X^2}(1 - X)$$

3. Bestimmung der Konstante C:
   NACA 0024 bedeutet: 24% maximale Dicke $\Rightarrow d_{max}/\text{l}=0.24 \Rightarrow Z^{(t)}_{max} = 0.5 \cdot d_{max}/\text{l}=0.12$
   Z_{max} liegt bei $\frac{dZ^{(t)}}{dX} = 0$

$$\frac{dZ^{(t)}}{dX} = \frac{d}{dX}\left(8C\sqrt{X - X^2}(1 - X)\right) = 8C\frac{d}{dX}\left(\sqrt{X - X^2}(1 - X)\right)$$

$$\frac{dZ^{(t)}}{dX} = 8C\left(\frac{(1 - 2X)(1 - X)}{2\sqrt{X - X^2}} - \sqrt{X - X^2}\right) = 8C\left(\frac{1 - X - 2X + 2X^2 - 2X + 2X^2}{2\sqrt{X - X^2}}\right)$$

$$\frac{dZ^{(t)}}{dX} = 4C\left(\frac{4X^2 - 5X + 1}{\sqrt{X - X^2}}\right)$$

$\frac{dZ^{(t)}}{dX} = 0$ für

$$X^2 - \frac{5}{4}X + \frac{1}{4} = 0$$

$$X_{1,2} = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} - \frac{1}{4}} = \frac{5}{8} \pm \frac{3}{8}$$

Nullstellen bei: $X_1 = 1$ (Hinterkante) und bei $X_2 = 1/4$
Damit folgt:

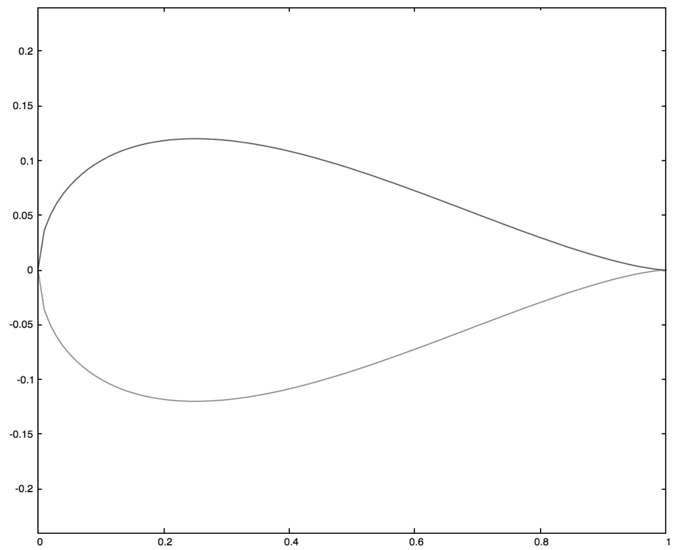
$$Z^{(t)}(X_2) = 8C\sqrt{X_2 - X_2^2}(1 - X_2) = 0.12$$

$$\frac{3\sqrt{3}C}{2} = \frac{12}{100} \Rightarrow C = \frac{2}{25\sqrt{3}}$$

4. Skizze des Profils, Winkel an der Vorder- und Hinterkante:

$$\tau_v = arctan(\frac{dZ^{(t)}(X=0)}{dX}) = arctan(\infty) \Rightarrow \tau_v = 90^\circ$$

$$\tau_H = arctan(\frac{dZ^{(t)}(X=1)}{dX}) = arctan(0) \Rightarrow \tau_H = 0^\circ$$



5. Vertikalstörgeschwindigkeit:

$$w(X) = \pm\frac{1}{2}q(X)$$

$$q(X) = 2u_\infty\frac{dZ^{(t)}}{dX}$$

$$w_a(X) = \frac{w}{u_\infty} = \pm\frac{dZ^{(t)}}{dX}$$

$$w_a(X) = 4C\left(\frac{4X^2 - 5X + 1}{\sqrt{X - X^2}}\right)$$

Mit $cos(\varphi) = 2X - 1$ und $sin(\varphi) = 2\sqrt{X - X^2}$

$$w_a(\varphi) = \pm 8C\frac{(cos^2(\varphi) - \frac{1}{2}cos(\varphi) - \frac{1}{2})}{sin(\varphi)}$$

6. Axialstörgeschwindigkeit:

$$u(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 q(X')\frac{dX'}{X-X'}$$

Mit $q(X') = 2u_\infty \frac{dZ^{(t)}}{dX'}$ und $\frac{dZ^{(t)}}{dX'} = \frac{dZ^{(t)}}{d\varphi'} \cdot \frac{d\varphi'}{dX'}$
Transformation:

$$X = \frac{1}{2}(1+cos(\varphi)) \quad X' = \frac{1}{2}(1+cos(\varphi')) \quad \frac{d\varphi'}{dX'} = \frac{-2}{sin(\varphi')}$$

$$\frac{dZ^{(t)}}{d\varphi'} = C(2cos(\varphi') - 2cos(2\varphi'))$$

$\int_0^1 \Rightarrow \int_\pi^0 \Rightarrow -\int_0^\pi$

$$u(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2u_\infty \frac{dZ^{(t)}}{d\varphi'} \cdot \frac{d\varphi'}{dX'} \frac{-\frac{1}{2}sin(\varphi')d\varphi'}{\frac{1}{2}(cos(\varphi) - cos(\varphi'))}$$

$$u(\varphi) = -\frac{2Cu_\infty}{\pi}\int_0^\pi (cos(\varphi) - cos(2\varphi'))\frac{-2}{sin(\varphi')}\frac{-\frac{1}{2}sin(\varphi')d\varphi'}{\frac{1}{2}(cos(\varphi) - cos(\varphi'))}$$

$$u(\varphi) = -\frac{4Cu_\infty}{\pi}\int_0^\pi \frac{(cos(\varphi) - cos(2\varphi'))}{(cos(\varphi) - cos(\varphi'))}d\varphi'$$

$$u(\varphi) = -\frac{4Cu_\infty}{\pi}\int_0^\pi \frac{cos(\varphi)}{(cos(\varphi) - cos(\varphi'))}d\varphi' + \frac{4Cu_\infty}{\pi}\int_0^\pi \frac{(cos(2\varphi')}{(cos(\varphi) - cos(\varphi'))}d\varphi'$$

$$u(\varphi) = -\frac{4Cu_\infty}{\pi}(-\pi + \pi\frac{sin(2\varphi')}{\varphi'}) = -4Cu_\infty(\frac{sin(2\varphi')}{sin(\varphi')} - 1)$$

$$u(\varphi) = -4Cu_\infty(\frac{2sin(\varphi')cos(\varphi')}{sin(\varphi')} - 1) = -4Cu_\infty(2cos(\varphi') - 1)$$

$$u_a(\varphi) = -4Cu_\infty(2cos(\varphi') - 1)$$

Mit $cos(\varphi) = 2X - 1$

$$u_a(X) = -4C(4X - 3)$$