

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik I

08. 09. 2017

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben:

Klausur Aerodynamik I

Fragenteil, Biot-Savart, Tropfentheorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
 - $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
 - $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
 - $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
 - $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
 - $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
 - $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
 - $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
 - $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
 - $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
 - $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax + b)$
 - $\int \frac{x}{ax + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax + b)$
 - $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax + b$
 - $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
 - $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
 - $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
 - $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
 - $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
 - $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
 - $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
 - $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
 - $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
 - Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
 - $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

1. Wozu dient die Prandtl-Glauert Regel und was sind die Voraussetzungen für ihre Gültigkeit?
2. Gilt das d'Alembertsche Paradoxon in Strömungen mit einer Machzahl $Ma = 0.5$? Begründen Sie Ihre Antwort.
3. Die Zhukhovski-Abbildungsfunktion lautet:

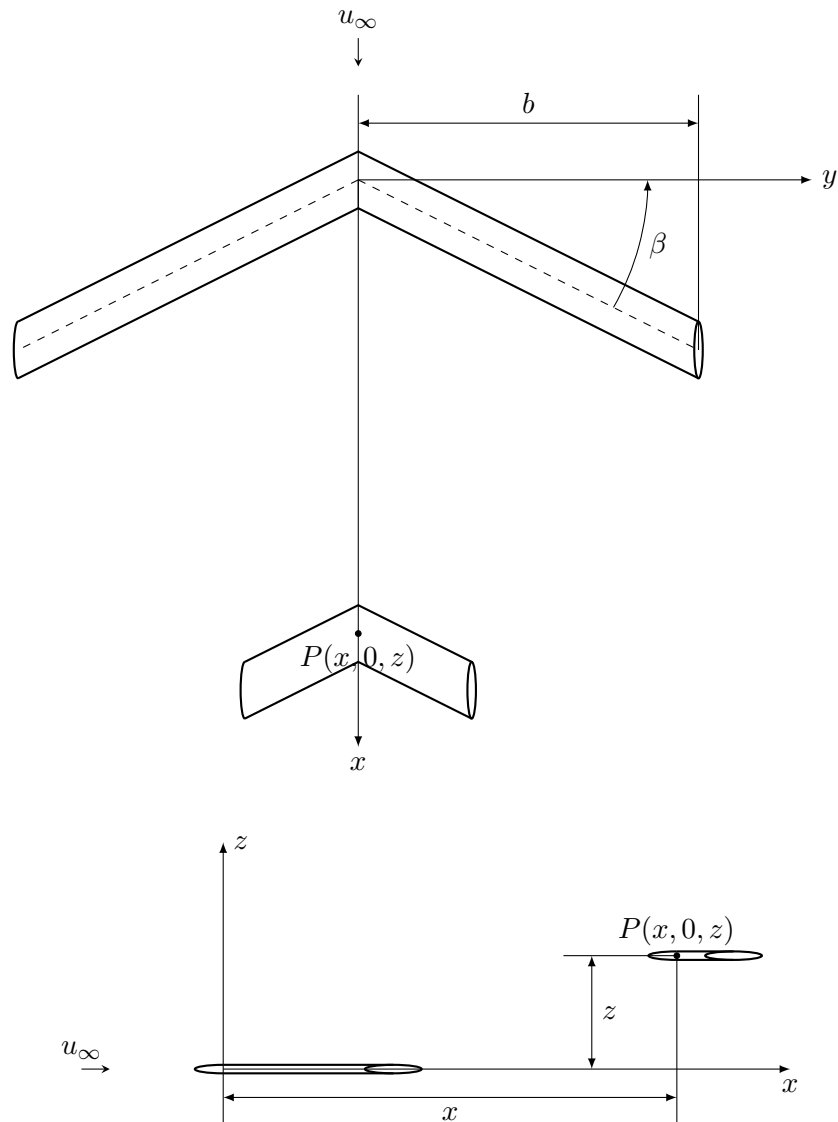
$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}. \quad (1)$$

Zeigen Sie, dass diese Abbildungsfunktion einen parallel angeströmten Kreiszyylinder mit dem Radius a auf eine doppelt durchlaufene Strecke (Platte) der Länge $4a$ in der ζ -Ebene abbildet. Erläutern Sie kurz die Auswirkungen einer Verschiebung des Kreiszyinders in x - bzw. y - Richtung auf die abgebildete Kontur in der ζ -Ebene.

4. Beschreiben Sie kurz die grundlegende Idee eines Panelverfahrens und nennen Sie den Vorteil eines Panelverfahrens gegenüber der Skelett- bzw. Tropfentheorie. Welche potentialtheoretischen Elementarlösungen muss ein Panelverfahren besitzen, um einen Körper mit Auftrieb zu berechnen?
5. Zeigen Sie anhand des Crocco'schen Wirbelsatzes drei Fälle, für die eine 3-dimensionale stoßfreie Strömung isentrop ist.

2. Aufgabe: Biot-Savart (17 Punkte)

Der Einfluss eines rückwärts gepfeilten Flügels auf das Höhenleitwerk eines Flugzeugs soll untersucht werden. Der Flügel besitzt die Zirkulation Γ_1 , das hintere Höhenleitwerk die Zirkulation Γ_2 .



1. Skizzieren Sie das vollständige Wirbelsystem für den Hauptflügel und das Höhenleitwerk. Gehen Sie davon aus, dass beide Flügel Auftrieb erzeugen.
2. Berechnen Sie die durch das Wirbelsystem des Hauptflügels induzierten Geschwindigkeitskomponenten w_x, w_y und w_z im Punkt $P(x, 0, z)$.
Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die Zirkulation Γ_1 über den Hauptflügel konstant ist.
3. Wie verändert sich der Auftrieb am Höhenleitwerk qualitativ durch die vom Wirbelsystem des Hauptflügels induzierte Geschwindigkeit? Wie wirkt sich der veränderte Anstellwinkel auf das Nickmoment aus?

Gegeben: $\Gamma_1, \Gamma_2, b, \beta, u_\infty$

Hinweis: $w = \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$

3. Aufgabe: Tropfentheorie (18 Punkte)

Ein geschlossener Profiltropfen mit der Profiltiefe l wird durch Überlagerung der parallelen Anströmung u_∞ mit der Quellen-Senken-Verteilung:

$$\begin{aligned}q_1(X) &= \frac{2}{25} u_\infty (11 - 58X + 72X^2) & 0 \leq X \leq X_s \\q_2(X) &= 0.4 u_\infty (1 - 2X) & X_s \leq X \leq 1,\end{aligned}$$

erzeugt.

1. Für welche Art von Strömungen kann die Tropfentheorie eingesetzt werden?
2. Wie lautet der Schließungsansatz für einen geschlossenen Profiltropfen? Welches Verhältnis leitet sich daraus für die integralen Stärken von Quelle und Senke ab?
3. Ermitteln Sie die Gleichung der Oberseite des Profiltropfens $Z^{(t)}(X)$. Durch welche Eigenschaft der Funktion $Z^{(t)}(X)$ wird die Schließbedingung aus 2.) automatisch erfüllt?
4. Leiten Sie die Beziehung für die dimensionslose induzierte Axialstörgeschwindigkeit $u_a(X) = u(X)/u_\infty$ her und bestimmen Sie diese für das gegebene Profil. Verwenden Sie dazu den folgenden Ansatz für die induzierte Geschwindigkeit:

$$dv_{ind} = \frac{q(x)dx}{2\pi r}.$$

5. Bestimmen Sie unter Vernachlässigung der vertikalen Störgeschwindigkeit $w_a(X)$ die Verteilung des Druckbeiwertes $c_p(X)$ dieses Profils bei der Machzahl $Ma_\infty = 0.6$, nehmen Sie dabei die dimensionslose induzierte Axialstörgeschwindigkeit $u_a(X)$ aus Aufgabenteil 4.) als gegeben an.

Gegeben: $X_s = 0.5$, $Ma_\infty = 0.6$

Hinweis:

$$X = \frac{x}{l}, \quad Z^{(t)} = \frac{z^{(t)}}{l}$$

$$q(X) = 2u_\infty \frac{\partial Z^{(t)}}{\partial X}$$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

1. Die Prandtl-Glauert Regel ist eine Korrektur für inkompressible Daten bezüglich der Kompressibilitätseffekte. Voraussetzungen sind schlanke Körper, geringe Anstellwinkel, reibungsfreie und drehungsfreie Strömung. Weiterhin ist die Prandtl-Glauert Regel lediglich bis maximal $Ma \approx 0.7$ gültig.
2. Das d'Alembertsche Paradoxon gilt für eine reibungsfreie Strömung unabhängig von der Machzahl, da der Druckwiderstand lediglich durch die Oberflächendruckverteilung bestimmt ist und der Druckbeiwert nach der Prandtl-Glauert Regel lediglich durch einen konstanten Faktor skaliert wird. Damit bleibt der integrierte Druckbeiwert wie im inkompressiblen Fall gleich Null.
3. Mit der Zhukhovski-Abbildungsfunktion $\zeta = \frac{z^2+a^2}{z}$ erhält man unter Verwendung der Exponentialdarstellung $z = x + iy = r \cdot e^{i\phi}$

$$\zeta = \frac{r^2 \cdot e^{2i\phi} + a^2}{r} e^{-i\phi} \quad (2)$$

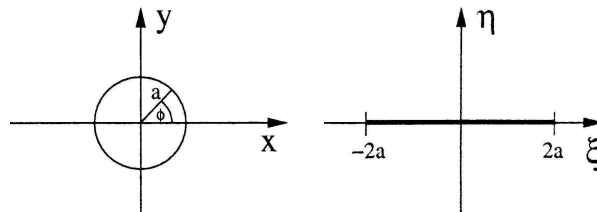
und mit der Euler'schen Relation $z = x + iy = r \cdot e^{i\phi} = r(\cos\phi + i\sin\phi)$

$$\zeta = r(\cos\phi + i\sin\phi) + \frac{a^2}{r}(\cos\phi - i\sin\phi). \quad (3)$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginäranteil ergibt

$$\xi = \left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\phi \quad \text{und} \quad \eta = \left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\phi. \quad (4)$$

Für einen Kreis mit dem Radius $r = a$ folgt daraus $\xi = 2a\cos\phi$ und $\eta = 0$.



Durch eine Verschiebung des Kreises entlang der x -Achse wird die Dickenverteilung variiert. Eine Verschiebung entlang der y -Achse verändert die Wölbung des Profils.

4. Beschreibung:
 - Die Oberfläche des Körpers ist eine Quellen- bzw. Wirbelfläche. Die Bestimmung der Quellen- bzw. Wirbelstärke erfolgt so, dass die Kontur eine Stromfläche wird.
 - Vorteile:
 - Im Gegensatz zur Tropfentheorie bzw. Skeletttheorie können beliebige Geometrien behandelt werden, da die Voraussetzungen der linearen Theorie (schlanke Körper) entfallen.

potentialtheoretische Elementarlösungen:

-Potentialwirbel

5. Der Crocco'sche Wirbelsatz lautet

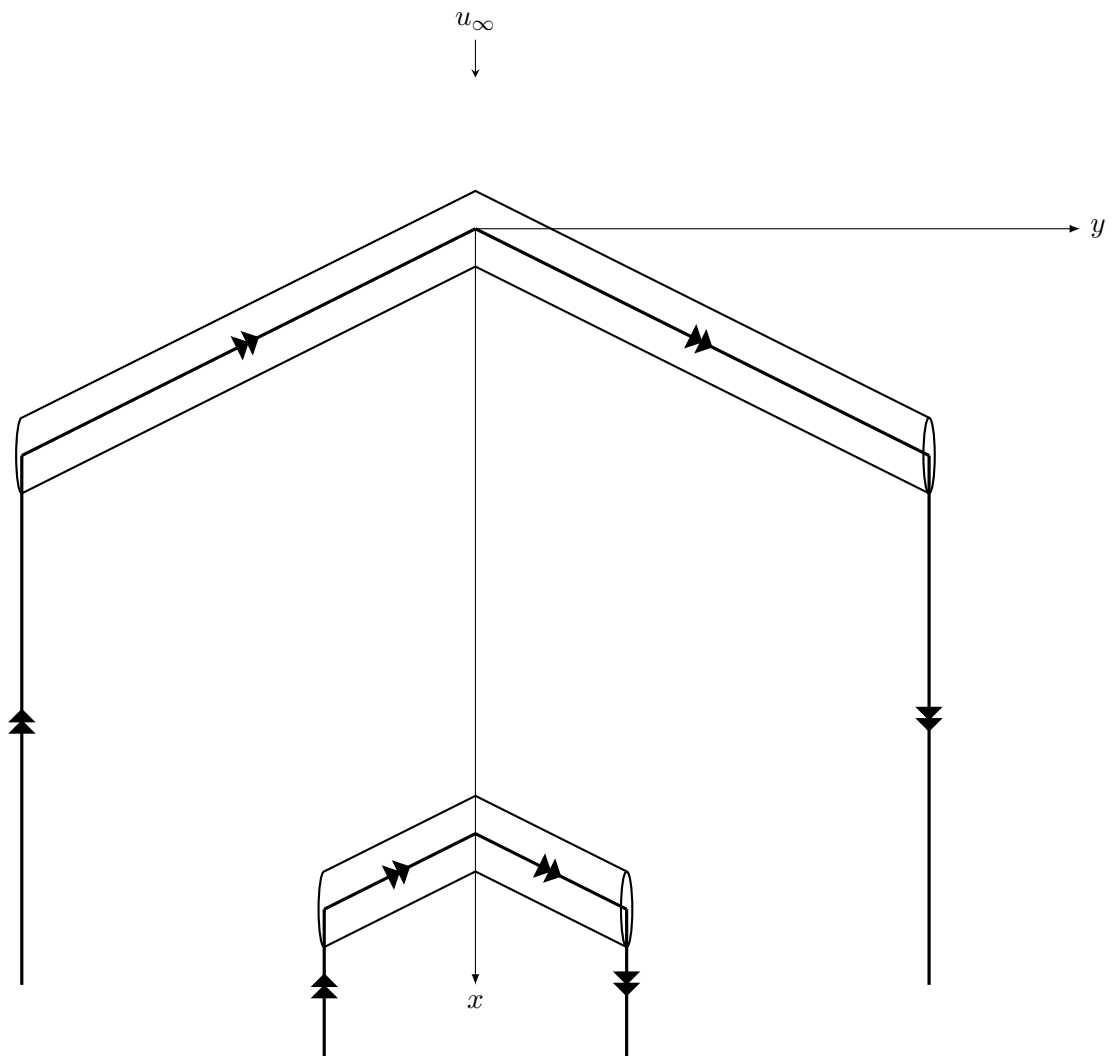
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} h_0 = T \vec{\nabla} s + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

Eine 3-dimensionale stoßfreie Strömung ist isentrop, falls diese stationär ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$), isoenergetisch ($\vec{\nabla} h_0$) und der Term $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$ zu Null wird.

- Fall1: Die Strömung ist rotationsfrei. Somit gilt für die Wirbelstärke $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v} = 0$ und damit auch $\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = 0$.
- Fall2: Entlang von Stromlinien. Aus $T\vec{\nabla}s = -\vec{v} \times \vec{\omega}$ lässt sich entnehmen, dass der Gradient der Entropie in die Richtung des Vektors $-\vec{v} \times \vec{\omega}$ zeigt. Dieser ist jedoch orthogonal zu \vec{v} und somit zur Stromlinie, woraus folgt, dass sich die Entropie lediglich orthogonal zur Stromlinie ändert.
- Fall3: Beltramie Strömung, z.B. Rohrströmung mit axialem Wirbel oder freie Wirbel hinter einem Tragflügel. Falls $\vec{\omega} \parallel \vec{v}$ folgt $\vec{v} \times \vec{\omega} = 0$.

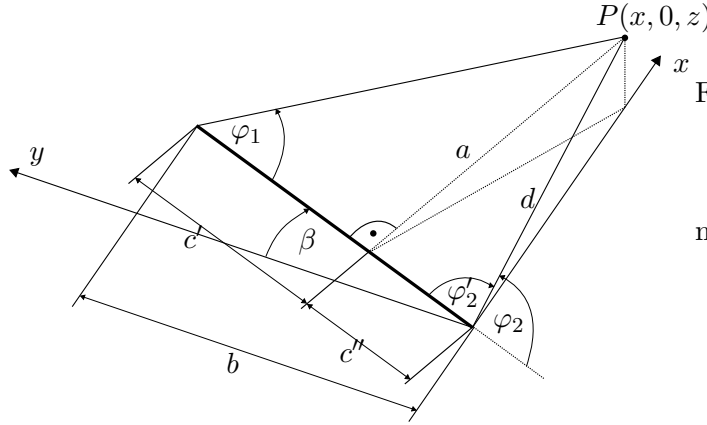
Lösung 2. Aufgabe: LÖSUNG Biot-Savart (17 Punkte)

1. Vereinfachtes Wirbelsystem:



2. Wie verändert sich der Auftrieb am Höhenleitwerk qualitativ durch die vom Wirbelsystem des Hauptflügels induzierte Geschwindigkeit? Wie wirkt sich der veränderte Anstellwinkel auf das Nickmoment aus?

Gebunder Wirbel:



$$d = \sqrt{x^2 + z^2}$$

$$a = \sqrt{(x \cos \beta)^2 + z^2}$$

$$c = c' + c'' = b / \cos \beta$$

$$c'' = x \sin \beta$$

$$c' = c - c'' = b / \cos \beta - x \sin \beta$$

Für die induzierte Geschwindigkeit gilt:

$$w_I(z) = \frac{\Gamma_1}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

mit

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= \frac{c'}{\sqrt{a^2 + c'^2}} \\ &= \frac{b / \cos \beta - x \sin \beta}{\sqrt{(x \cos \beta)^2 + z^2 + (b / \cos \beta - x \sin \beta)^2}} \end{aligned}$$

und

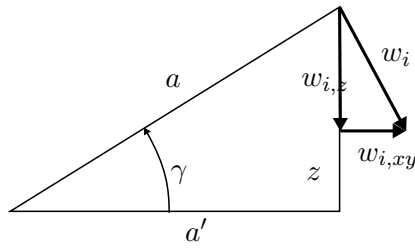
$$\cos \varphi'_2 = \frac{c''}{d} = \frac{x \sin \beta}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$\cos \varphi_2 = \cos(\pi - \varphi'_2) = -\frac{x \sin \beta}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

$$\Rightarrow w_I(x, z) = \frac{\Gamma_1}{4\pi \sqrt{(x \cos \beta)^2 + z^2}} \left(\frac{b / \cos \beta - x \sin \beta}{\sqrt{(x \cos \beta)^2 + z^2 + (b / \cos \beta - x \sin \beta)^2}} + \frac{x \sin \beta}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right)$$

Aufteilen der induzierten Geschwindigkeiten in die gefragten Komponenten:

Der gebundene Wirbel induziert Komponenten in alle drei Richtungen, zuerst Zerlegung in xy und z -Richtung:



$$w_{I,xy} = w_I \sin \gamma = w_I \frac{z}{a} = w_I \frac{z}{\sqrt{(x \cos \beta)^2 + z^2}}$$

$$w_{I,z} = -w_I \cos \gamma = -w_I \frac{a'}{a} = -w_I \frac{x \cos \beta}{\sqrt{(x \cos \beta)^2 + z^2}}$$

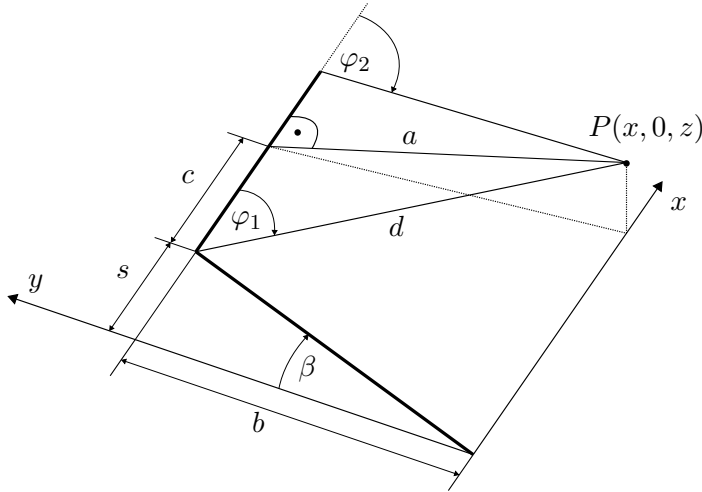
mit $a' = x \cos \beta$. Weitere Zerlegung der xy Komponente:

$$w_{I,x} = w_{I,xy} \cos \beta$$

$$\Rightarrow w_{I,x} = \frac{\Gamma_1 z}{4\pi ((x \cos \beta)^2 + z^2)} \left(\frac{b / \cos \beta - x \sin \beta}{\sqrt{(x \cos \beta)^2 + z^2 + (b / \cos \beta - x \sin \beta)^2}} + \frac{x \sin \beta}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right)$$

$$\Rightarrow w_{I,z} = -\frac{\Gamma_1 x \cos \beta}{4\pi ((x \cos \beta)^2 + z^2)} \left(\frac{b / \cos \beta - x \sin \beta}{\sqrt{(x \cos \beta)^2 + z^2 + (b / \cos \beta - x \sin \beta)^2}} + \frac{x \sin \beta}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right)$$

Freier Wirbel:



$$s = b \tan \beta$$

$$a = \sqrt{b^2 + z^2}$$

$$c = x - s = x - b \tan \beta$$

$$d = \sqrt{c^2 + a^2} = \sqrt{(x - b \tan \beta)^2 + b^2 + z^2}$$

Für die induzierte Geschwindigkeit gilt:

$$w_{II}(x, z) = \frac{\Gamma_1}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

mit

$$\cos \varphi_2 = \cos \pi = -1$$

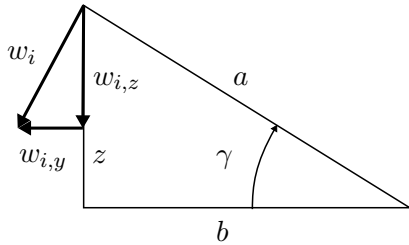
$$\cos \varphi_1 = \frac{c}{d} = \frac{x - b \tan \beta}{\sqrt{(x - b \tan \beta)^2 + b^2 + z^2}}$$

und

$$\Rightarrow w_{II}(x, z) = \frac{\Gamma_1}{4\pi \sqrt{b^2 + z^2}} \left(\frac{x - b \tan \beta}{\sqrt{(x - b \tan \beta)^2 + b^2 + z^2}} + 1 \right)$$

Aufteilen der induzierten Geschwindigkeiten in die gefragten Komponenten:

Der freie Wirbel induziert nur Komponenten in y und z Richtung, die z -Komponente ergibt sich zu:



$$w_{II,z} = -w_{II} \cos \gamma = -w_{II} \frac{b}{\sqrt{b^2 + z^2}}$$

$$w_{II,z} = -\frac{\Gamma_1 b}{4\pi (b^2 + z^2)} \left(\frac{x - b \tan \beta}{\sqrt{(x - b \tan \beta)^2 + b^2 + z^2}} + 1 \right)$$

Endergebnis mit Anteilen der zwei gebundenen und der zwei freien Wirbel:

$$\Rightarrow w_x = \frac{\Gamma_1 z}{2\pi ((x \cos \beta)^2 + z^2)} \left(\frac{b / \cos \beta - x \sin \beta}{\sqrt{(x \cos \beta)^2 + z^2 + (b / \cos \beta - x \sin \beta)^2}} + \frac{x \sin \beta}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right)$$

$$\Rightarrow w_y = 0$$

$$\Rightarrow w_z = -\frac{\Gamma_1}{2\pi} \left[\frac{x \cos \beta}{((x \cos \beta)^2 + z^2)} \left(\frac{b / \cos \beta - x \sin \beta}{\sqrt{(x \cos \beta)^2 + z^2 + (b / \cos \beta - x \sin \beta)^2}} + \frac{x \sin \beta}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right) + \frac{b}{(b^2 + z^2)} \left(\frac{x - b \tan \beta}{\sqrt{(x - b \tan \beta)^2 + b^2 + z^2}} + 1 \right) \right]$$

3. Durch die induzierte Abwärtsgeschwindigkeit verringert sich der Anstellwinkel bzw. wird negativ. Dadurch sinkt der Auftrieb und am Höhenleitwerk und das Nickmoment um die z -Achse steigt.

Lösung 3. Aufgabe: Tropfentheorie (18 Punkte)

1. Die Tropfentheorie wird auf inkompressible, 2-dimensionale Strömungen angewandt, die wegen der ausschließlichen Berücksichtigung von Quellen- und Senkenpotentialen keine resultierende Zirkulation um das zu beschreibende Profil erzeugen.
2. Schließungsansatz:

$$\int_0^1 q(X) dX = 0$$

Es muss gewährleistet sein, dass die integralen Stärken der Quellen- und Senkenverteilung gleich sind.

3. Laut Hinweis gilt:

$$q(X) = 2u_\infty \frac{\partial Z^{(t)}}{\partial X}$$

Bestimmung der Profilgeometrie für $0 \leq X \leq X_s$:

$$\frac{\partial Z_1^{(t)}}{\partial X} = \frac{1}{2u_\infty} q_1(X) = \frac{1}{2u_\infty} \frac{2}{25} u_\infty (11 - 58X + 72X^2)$$

$$Z_1^{(t)}(X) = \int \frac{1}{25} (11 - 58X + 72X^2) dX$$

$$Z_1^{(t)}(X) = \frac{1}{25} (11X - 29X^2 + 24X^3) + C$$

Aus den Randbedingungen für einen geschlossenen Tropfen mit $Z(t)(X=0) = 0$ folgt $C = 0$

$$\rightarrow Z_1^{(t)}(X) = \frac{1}{25} (11X - 29X^2 + 24X^3)$$

Bestimmung der Profilgeometrie für $X_s \leq X \leq 1$:

$$\frac{\partial Z_2^{(t)}}{\partial X} = \frac{1}{2u_\infty} q_2(X) = \frac{1}{2u_\infty} 0.4u_\infty (1 - 2X)$$

$$Z_2^{(t)}(X) = \int 0.2(1 - 2X) dX$$

$$Z_2^{(t)}(X) = 0.2(X - X^2) + C$$

Aus den Randbedingungen für einen geschlossenen Tropfen mit $Z(t)(X=1) = 0$ folgt $C = 0$

$$\rightarrow Z_2^{(t)}(X) = 0.2(X - X^2)$$

Um zu zeigen, dass die Profilgeometrie stetig ist, werden die Funktionen an der Schnittstelle X_s ausgewertet.

$$Z_1^{(t)}(X_s) = \frac{1}{25} (11X - 29X^2 + 24X^3) = \frac{1}{25} \left(\frac{11}{2} - \frac{29}{4} + \frac{24}{8} \right) = 0.05 = 0.2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = Z_2^{(t)}(X_s)$$

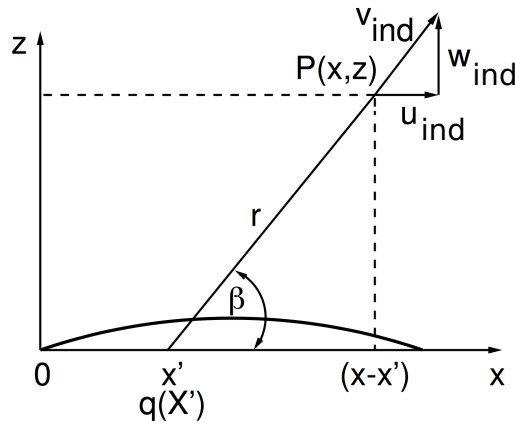
Aufgrund der obigen Randbedingungen und der Stetigkeit des Profils ist die Schließungsbedingung automatisch erfüllt!

$$\int_0^1 q(X) dX = 2u_\infty \left((Z_2^{(t)}(X=1) - Z_2^{(t)}(X=X_s)) + (Z_1^{(t)}(X=X_s) - Z_1^{(t)}(X=0)) \right) = 0$$

4. Die induzierte Axialstörgeschwindigkeit läßt sich aus der Quell-/Senkenverteilung mit

$$dv_{ind} = \frac{q(x)dx}{2\pi r}$$

herleiten.



Es gilt:

$$r = \sqrt{Z^2 + (X - X')^2} \quad \text{sowie} \quad du_{ind} = \frac{X - X'}{r} dv_{ind}$$

somit folgt für die in Punkt P induzierte Axialstörgeschwindigkeit $u(X, Z)$:

$$u(X, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{q(X')(X - X')dX'}{Z^2 + (X - X')^2}$$

für dünne Profile $Z \rightarrow 0$ kann der Term umgeschrieben werden

$$u(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

bzw.

$$u_a(X) = \frac{u(X)}{u_\infty} = \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

Für den gegebenen Profiltropfen folgt:

$$\begin{aligned} u_a(X) &= \frac{1}{2\pi u_\infty} \left(\int_0^{X_s} q_1(X') \frac{dX'}{X - X'} + \int_{X_s}^1 q_2(X') \frac{dX'}{X - X'} \right) \\ u_a(X) &= \frac{11}{25\pi} \int_0^{X_s} \frac{dX'}{X - X'} - \frac{58}{25\pi} \int_0^{X_s} \frac{X' dX'}{X - X'} + \frac{72}{25\pi} \int_0^{X_s} \frac{X'^2 dX'}{X - X'} \\ &+ \frac{0.2}{\pi} \int_{X_s}^1 \frac{dX'}{X - X'} - \frac{0.4}{\pi} \int_{X_s}^1 \frac{X' dX'}{X - X'} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_a(X) &= \frac{11}{25\pi} [-\ln |X - X'|]_0^{X_s} - \frac{58}{25\pi} [-X' - X \ln |X - X'|]_0^{X_s} \\
&- \frac{72}{25\pi} [0.5(X - X') - 2X(X - X') + X^2 \ln |X - X'|]_0^{X_s} \\
&+ \frac{0.2}{\pi} [-\ln |X - X'|]_{X_s}^1 - \frac{0.4}{\pi} [-X' - X \ln |X - X'|]_{X_s}^1 \\
u_a(X) &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{11}{25} \ln \left| \frac{X}{X - X_s} \right| + \frac{58}{25} \left[X_s + X \ln \left| \frac{X - X_s}{X} \right| \right] \right] \\
&- \frac{72}{25\pi} \left[-0.5X_s + 2XX_s + X^2 \ln \left| \frac{X - X_s}{X} \right| \right] \\
&+ \frac{1}{\pi} \left[-0.2 \ln \left| \frac{X - 1}{X - X_s} \right| + 0.4 \left[(1 - X_s) + X \ln \left| \frac{X - 1}{X - X_s} \right| \right] \right]
\end{aligned}$$

5. Die Verteilung des Druckbeiwertes $c_p(X)$ bei der Machzahl $Ma_\infty = 0.6$ wird nach der Prandtl-Glauert-Regel aus dem Druckbeiwert im inkompressiblen Fall bestimmt $c_p(X)|_{Ma=0}$. Unter Vernachlässigung der vertikalen Störgeschwindigkeit gilt für den inkompressiblen Fall ($Ma = 0$) die Bernoulli-Gleichung:

$$p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 = p(X) + \frac{\rho}{2}(u_\infty + u(X))^2$$

$$c_p(X)|_{Ma=0} = \frac{p(X) - p_\infty}{\frac{\rho}{2}u_\infty^2} = \frac{-2u_\infty u(X) - u^2(X)}{u_\infty^2} \approx -\frac{2u(X)}{u_\infty} = -2u_a(X)$$

$$\rightarrow c_p(X)|_{Ma=0.6} = \frac{1}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}} c_p(X)|_{Ma=0} = -\frac{2}{\sqrt{1 - 0.6^2}} u_a(X)$$