

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik I

13. 02. 2018

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Klausur Aerodynamik I

Fragenteil, Konforme Abbildungen, Tropfentheorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x}{ax + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax + b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (12 Punkte)

1. Worin unterscheidet sich ein Windkanal Göttinger Bauart im Wesentlichen von einem Eiffel-Kanal?
2. Nennen Sie die Voraussetzungen für eine Profilberechnung mit der Skelett-Theorie.
3. Nennen Sie die Helmholtz'schen Wirbelsätze.
4. Leiten Sie aus der allgemeinen Form des Biot-Savart'schen Gesetzes

$$\vec{V} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{\|\vec{r}\|^3}$$

die Gleichung für die gerade endliche Wirbellinie her.

5. Beschreiben Sie kurz die Funktionsweise der Particle-Image Velocimetry (PIV).
6. Nennen Sie drei Einflussfaktoren auf die Genauigkeit der PIV.
7. Wozu dient die Prandtl-Glauert-Regel?

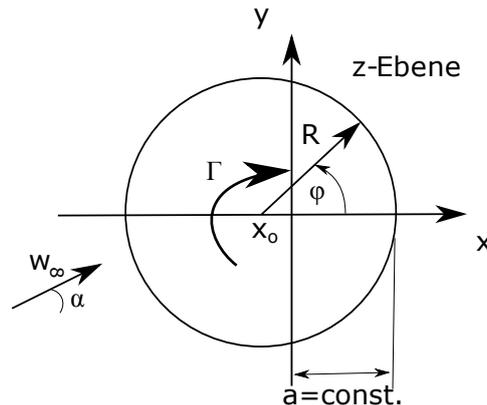
2. Aufgabe: Konforme Abbildungen (19 Punkte)

1. Welche Eigenschaft besitzt eine konforme Abbildung und wie muss ein Körper beschaffen sein, damit das Strömungsfeld um ihn mit Hilfe der konformen Abbildung berechnet werden kann? Für welche Art von Strömungen kann die Methode der konformen Abbildungen verwendet werden?

Der Bildkreis $z = -\varepsilon a + R e^{i\varphi}$ mit Radius R und Mittelpunkt $z_0 = x_0 = -\varepsilon a$ wird mit der Zhukovski-Abbildungsfunktion

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

in der ζ -Ebene abgebildet. Für den Radius des Kreiszyinders gilt: $R = a(1 + \varepsilon)$, mit $a = \text{konstant}$.



2. Bestimmen Sie mit Hilfe der Abbildungsfunktion von Zhukovski die Parameterdarstellung des in der ζ -Ebene liegenden Profils: $\frac{\xi}{a} = f(\varepsilon, \varphi)$ und $\frac{\eta}{a} = g(\varepsilon, \varphi)$.
3. Zeigen Sie, dass sich die Darstellung aus Aufgabenteil 2 unter der Annahme eines schlanken Profils ($\varepsilon^2 \approx 0$) in folgende Form überführen lässt:

$$\frac{\xi}{a} = 2(\cos\varphi - \varepsilon \sin^2\varphi) \quad \frac{\eta}{a} = 2\varepsilon \sin\varphi(1 - \cos\varphi)$$

Der betrachtete Kreiszyinder mit der Zirkulation Γ befindet sich in einer Parallelströmung. Dabei bildet die Anströmgeschwindigkeit mit Betrag w_∞ den Winkel α mit der x -Achse.

4. Stellen Sie für diesen Fall die komplexe Strömungsfunktion $F(z)$ in der z -Ebene auf.
5. Berechnen Sie die konjugiert komplexe Geschwindigkeitsverteilung $\bar{w}_z(z)$ in Abhängigkeit der gegebenen Größen und der Zirkulation Γ . Zeichnen Sie qualitativ die Umströmung des Kreiszyinders in der z -Ebene und die des zugehörigen Profils in der ζ -Ebene für den Fall, dass die Kutta'sche Abflussbedingung an der Hinterkante des Profils erfüllt ist.
6. Bestimmen Sie die Zirkulation Γ so, dass die Kutta'sche Abflussbedingung an der Hinterkante des Profils erfüllt ist.

Gegeben: $w_\infty, \alpha, a, \varepsilon \ll 1$

Hinweis:

Näherungsformel für $x \ll 1$: $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$

Anströmung: $F_1(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$

Dipol: $F_2(z) = \frac{M}{2\pi z}$ mit $M = 2\pi(u_\infty + iv_\infty)R^2$

Potentialwirbel: $F_3(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z)$

3. Aufgabe: Tropfentheorie (19 Punkte)

Die Oberseite des Profiltropfens, für den die Druckverteilung gesucht wird, ist durch die Gleichung

$$Z^{(t)}(X) = 0.02\sqrt{X - X^2}(23 - 36X + 16X^2)$$

beschrieben ($X = \frac{x}{l}, Z^{(t)} = \frac{z^{(t)}}{l}$). Der Fouriersche Reihenansatz nach Riegels lautet:

$$Z^{(t)}(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\varphi).$$

Der Profiltropfen wird ohne Anstellung mit u_∞ angeströmt.

1. Erläutern Sie genauer die Unterschiede zwischen Tropfen- und Skelett-Theorie hinsichtlich Auftriebs-, Widerstandsverhalten und Schlankheit der zu untersuchenden Profile.
2. Geben Sie eine geeignete Transformation der Koordinate X in einen Winkel φ für den Profiltropfen an und bestimmen Sie damit für den gegebenen Profiltropfen $Z^{(t)}(\varphi)$.
3. Bestimmen Sie die Konstanten b_n der Fourier-Reihe für den obigen Profiltropfen.
4. Bestimmen Sie die dimensionslose induzierte Vertikalstörgeschwindigkeit w_a in Abhängigkeit von φ .
5. Bestimmen Sie mit Hilfe des Riegels-Faktors κ und dem Reihenansatz nach Riegels einen allgemeinen Ausdruck für die Gesamtgeschwindigkeit auf der Profilkontur $V_k(\varphi)$ durch Überlagerung der Axialstörgeschwindigkeit $u(\varphi)$ mit der freien Anströmung u_∞ . Geben Sie auch eine Gleichung für den Riegels-Faktor an. Bestimmen Sie anschließend die Gesamtgeschwindigkeit $V_k(\varphi)$ auf der Profilkontur für den obigen Profiltropfen.
6. Bestimmen Sie den Druckbeiwert $c_p(\varphi)$ auf der Oberfläche des gegebenen Profiltropfens.

Gegeben: u_∞ .

Hinweis:

Störgeschwindigkeiten:

$$u(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$
$$w(X) = \pm \frac{1}{2} q(X)$$

Winkelbeziehungen:

$$\sin(3\varphi) = 3\sin(\varphi) - 4\sin^3(\varphi)$$
$$\cos(3\varphi) = 4\cos^3(\varphi) - 3\cos(\varphi)$$

Lösung 2. Aufgabe: Konforme Abbildungen (19 Punkte) (LÖSUNG)

1. (a) Die konforme Abbildung ist winkelerhaltend.
- (b) Es muss sich bei dem Körper um ein einfach geschlossenes Gebiet handeln (keine Lücken etc.)
- (c) Zweidimensionale Potentialströmung (d.h. reibungsfrei, drehungsfrei, inkompressibel).

2.

$$z = -\varepsilon a + Re^{i\varphi}, \quad R = a(1 + \varepsilon)$$

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

$$\zeta = -\varepsilon a + Re^{i\varphi} + \frac{a^2}{-\varepsilon a + Re^{i\varphi}} = -\varepsilon a + R\cos\varphi + iR\sin\varphi + \frac{a^2}{-\varepsilon a + R\cos\varphi + iR\sin\varphi}$$

$$\begin{aligned} \zeta &= -\varepsilon a + R\cos\varphi + iR\sin\varphi + \frac{a^2(-\varepsilon a + R\cos\varphi - iR\sin\varphi)}{(-\varepsilon a + R\cos\varphi)^2 + R^2\sin^2\varphi} \\ &= a \left(-\varepsilon + (1 + \varepsilon)\cos\varphi + i(1 + \varepsilon)\sin\varphi + \frac{-\varepsilon + (1 + \varepsilon)\cos\varphi - i(1 + \varepsilon)\sin\varphi}{(-\varepsilon + (1 + \varepsilon)\cos\varphi)^2 + (1 + \varepsilon)^2\sin^2\varphi} \right) \end{aligned}$$

Nenner des letzten Terms:

$$\begin{aligned} (-\varepsilon + (1 + \varepsilon)\cos\varphi)^2 + (1 + \varepsilon)^2\sin^2\varphi &= \varepsilon^2 - 2\varepsilon(1 + \varepsilon)\cos\varphi + (1 + \varepsilon)^2\cos^2\varphi + (1 + \varepsilon)^2\sin^2\varphi \\ &= \varepsilon^2 - 2\varepsilon(1 + \varepsilon)\cos\varphi + (1 + \varepsilon)^2 \\ &= 1 + 2\varepsilon(1 + \varepsilon)(1 - \cos\varphi) \end{aligned}$$

$$\frac{\xi}{a} = [-\varepsilon + (1 + \varepsilon)\cos\varphi] \left[1 + \frac{1}{1 + 2\varepsilon(1 + \varepsilon)(1 - \cos\varphi)} \right]$$

$$\frac{\eta}{a} = (1 + \varepsilon)\sin\varphi \left[1 - \frac{1}{1 + 2\varepsilon(1 + \varepsilon)(1 - \cos\varphi)} \right]$$

3. Mit der Näherungsformel für x und $\varepsilon^2 \approx 0$:

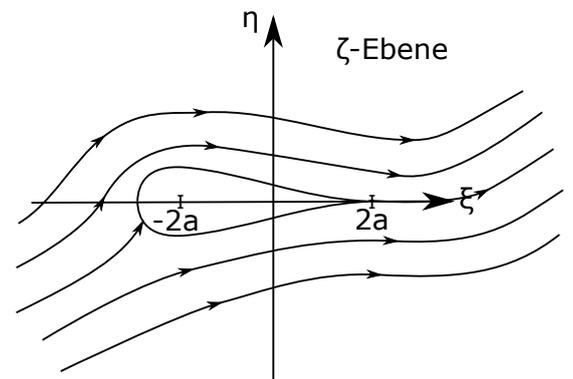
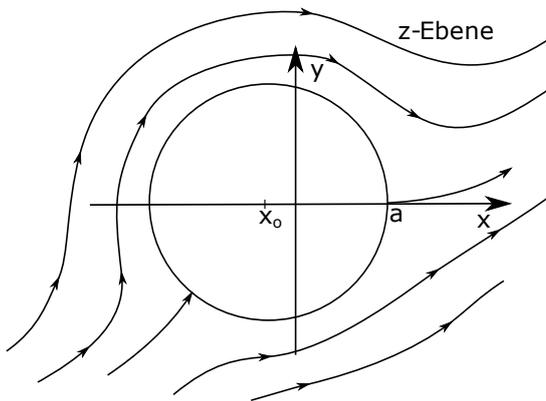
$$\begin{aligned} \frac{\xi}{a} &\approx [-\varepsilon + (1 + \varepsilon)\cos\varphi] [1 + (1 - 2\varepsilon(1 + \varepsilon)(1 - \cos\varphi))] \\ &= [-\varepsilon + (1 + \varepsilon)\cos\varphi] [2 - 2\varepsilon(1 - \cos\varphi) + 2\varepsilon^2(1 - \cos\varphi)] \\ &\approx 2(1 + \varepsilon)\cos\varphi - 2\varepsilon - 2\varepsilon(1 + \varepsilon)\cos\varphi(1 - \cos\varphi) \\ &= 2\cos\varphi + 2\varepsilon\cos\varphi - 2\varepsilon - 2\varepsilon\cos\varphi + 2\varepsilon\cos^2\varphi - 2\varepsilon^2\cos\varphi(1 - \cos\varphi) \\ &\approx 2[\cos\varphi - \varepsilon + \varepsilon\cos^2\varphi] \\ &= 2[\cos\varphi - \varepsilon\sin^2\varphi] \\ \frac{\eta}{a} &\approx (1 + \varepsilon)\sin\varphi(1 - (1 - 2\varepsilon(1 + \varepsilon)(1 - \cos\varphi))) \\ &= 2\varepsilon(1 + \varepsilon)^2\sin\varphi(1 - \cos\varphi) \\ &\approx 2\varepsilon\sin\varphi(1 - \cos\varphi) \end{aligned}$$

4. Kombination aus Anströmung mit Winkel α , Dipol und Potentialwirbel, jeweils verschoben um den Vektor vom Ursprung zum Kreismittelpunkt $z_0 = -\varepsilon a$:

$$\begin{aligned} F(z) &= w_\infty e^{-i\alpha}(z - z_0) + w_\infty e^{i\alpha} \frac{R^2}{z - z_0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) \\ &= w_\infty e^{-i\alpha}(z + \varepsilon a) + w_\infty e^{i\alpha} \frac{a^2(1 + \varepsilon)^2}{z + \varepsilon a} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z + \varepsilon a) \end{aligned}$$

5.

$$\bar{w}_z(z) = \frac{dF}{dz} = w_\infty e^{-i\alpha} - w_\infty e^{i\alpha} \frac{a^2(1 + \varepsilon)^2}{(z + \varepsilon a)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z + \varepsilon a)}$$



6. Die Kutta Bedingung besagt, dass es an einer unendlich dünnen Hinterkante nicht zur Umströmung kommt und das Fluid glatt abfließt. In der ζ -Ebene muss somit die Geschwindigkeit an der Hinterkante $\bar{w}_\zeta(z = a)$ endlich sein. Betrachtet man jedoch den Kreiszyylinder in der z -Ebene, so befindet sich an der Stelle $z=a$ ein Staupunkt, womit die Bedingung $\bar{w}_z(z = a) = 0$ erfüllt sein muss.

$$\begin{aligned} \bar{w}_z(a) &= w_\infty e^{-i\alpha} - w_\infty e^{i\alpha} \frac{a^2(1 + \varepsilon)^2}{(a + \varepsilon a)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(a + \varepsilon a)} \\ &= w_\infty (e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}) + \frac{i\Gamma}{2\pi a(1 + \varepsilon)} \\ &= w_\infty (\cos\alpha - i\sin\alpha - \cos\alpha - i\sin\alpha) + \frac{i\Gamma}{2\pi a(1 + \varepsilon)} \\ &= -2iw_\infty \sin\alpha + \frac{i\Gamma}{2\pi a(1 + \varepsilon)} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Zirkulation Γ :

$$\Gamma = 4\pi a(1 + \varepsilon)w_\infty \sin\alpha$$

Lösung 3. Aufgabe: Tropfentheorie (19 Punkte) (LÖSUNG)

1. Im Gegensatz zur Skeletttheorie werden bei der Tropfentheorie Verdrängungseffekte berücksichtigt, während bei der Skeletttheorie Effekte, die durch Wölbung des Profils hervorgerufen werden, berücksichtigt werden. Die Skeletttheorie kann somit Auftrieb für schlanke Profile beschreiben, während die Tropfentheorie Verdrängungseffekte ohne Auftrieb behandelt. Der Widerstand wird aufgrund der Potentialströmung nicht mit einbezogen. Mit der Skeletttheorie und der Tropfentheorie können nicht dieselben Profile erzeugt werden.
2. Mit der Transformation:

$$X = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)$$

$$\text{Nase: } X = 0 \hat{=} \varphi = \pi$$

$$\text{HK: } X = 1 \hat{=} \varphi = 0$$

folgt:

$$Z^{(t)}(\varphi) = 0.02\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos\varphi) - \frac{1}{4}(1 + \cos\varphi)^2} (23 - 18(1 + \cos\varphi) + 4(1 + \cos\varphi)^2)$$

$$Z^{(t)}(\varphi) = 0.02\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2\varphi} (9 - 10\cos\varphi + 4\cos^2\varphi) = 0.01 \sin\varphi (9 - 10\cos\varphi + 4\cos^2\varphi)$$

$$Z^{(t)}(\varphi) = 0.01(9\sin\varphi - 10\sin\varphi \cos\varphi + 4\sin\varphi \cos^2\varphi) = 0.01(9\sin\varphi - 5\sin(2\varphi) + 4\sin\varphi(1 - \sin^2\varphi)),$$

mit Hinweis:

$$Z^{(t)}(\varphi) = 0.01(10\sin\varphi - 5\sin(2\varphi) + \sin(3\varphi)) = 0.1\sin\varphi - 0.05\sin(2\varphi) + 0.01\sin(3\varphi)$$

$$3. Z^{(t)}(\varphi) = \frac{1}{2}b_1 \sin\varphi + \frac{1}{2}b_2 \sin(2\varphi) + \frac{1}{2}b_3 \sin(3\varphi) + \dots = 0.1\sin\varphi - 0.05\sin(2\varphi) + 0.01\sin(3\varphi)$$

$$\Rightarrow b_1 = 0.2, b_2 = -0.1, b_3 = 0.02 \text{ und } b_n = 0 \text{ für } n > 3$$

4. Vertikalstörgeschwindigkeit w :

$$w(X) = \pm \frac{1}{2}q(X) \text{ und } q(X) = 2u_\infty \frac{dZ^{(t)}}{dX}$$

$$\Rightarrow \frac{w(\varphi)}{u_\infty} = \pm \frac{dZ^{(t)}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dX} \text{ und } \frac{d\varphi}{dX} = -\frac{2}{\sin\varphi}$$

$$\frac{w(\varphi)}{u_\infty} = \mp \frac{0.2\cos\varphi - 0.2\cos(2\varphi) + 0.06\cos(3\varphi)}{\sin\varphi}$$

5. Riegels-Faktor:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dZ}{dX}\right)^2}}$$

Die Geschwindigkeit auf der Kontur ergibt sich mit Hilfe des Riegels-Faktors aus:

$$\begin{aligned} V_k(X) &= \frac{1}{\kappa} u_{ges} = \frac{1}{\kappa} (u_\infty + u) \\ \Rightarrow V_k(X) &= \frac{1}{\kappa} \left(u_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'} \right) \\ &= \frac{u_\infty}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dZ}{dX'} \frac{dX'}{X - X'} \right) \end{aligned}$$

Koordinatentransformation $X = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$:

$$\kappa(\varphi) = \sqrt{1 + \left(\frac{-2dZ}{\sin \varphi d\varphi} \right)^2}$$

$$V_k(\varphi) = \frac{u_\infty}{\kappa(\varphi)} \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{d\varphi'} \frac{d\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} \right)$$

Mit dem Fourieransatz nach Riegels:

$$dZ^{(t)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n n \cos(n\varphi') d\varphi'$$

$$\Rightarrow u(\varphi) = -u_\infty \sum_{n=1}^N b_n n \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi') d\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'}$$

Mit dem Glauert-Integral:

$$u(\varphi) = +u_\infty \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi}$$

Für die Geschwindigkeit auf der Kontur ergibt sich somit:

$$V_k(\varphi) = \frac{u_\infty}{\kappa} \left(1 + \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \right)$$

$$= \frac{u_\infty}{\sqrt{1 + \left(\frac{-2dZ}{\sin \varphi d\varphi} \right)^2}} \left(1 + \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \right)$$

Für den gegebenen Profiltropfen folgt somit:

$$V_k(\varphi) = \frac{u_\infty}{\sqrt{1 + \left(\frac{0.2 \cos \varphi - 0.2 \cos(2\varphi) + 0.06 \cos(3\varphi)}{\sin \varphi} \right)^2}} \left(1 + 0.2 - 0.2 \frac{\sin(2\varphi)}{\sin \varphi} + 0.06 \frac{\sin(3\varphi)}{\sin \varphi} \right)$$

$$6. \quad c_p = 2 \frac{p - p_\infty}{\rho u_\infty^2} = 1 - \frac{V_k^2}{u_\infty^2}$$

$$c_p = 1 - \frac{1}{k(\varphi)^2} \left(1 + \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \right)^2$$

mit $b_1 = 0.2$; $b_2 = -0.1$ und $b_3 = 0.02$:

$$c_p = 1 - \frac{1}{k(\varphi)^2} \left(1.2 - 0.2 \frac{\sin(2\varphi)}{\sin \varphi} + 0.06 \frac{\sin(3\varphi)}{\sin \varphi} \right)^2$$