

AERODYNAMISCHES INSTITUT  
der Rheinisch - Westfälischen  
Technischen Hochschule Aachen  
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik I

13. 02. 2019

M U S T E R L Ö S U N G  
E I N S I C H T N A H M E

**Hinweis:**

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

**Klausur Aerodynamik I**

Fragenteil, Biot-Savart, konforme Abbildung

# Integrale und Additionstheoreme

## Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
  - $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
  - $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
  - $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
  - $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
  - $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
  - $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
  - $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
  - $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
  - $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
  - $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
  - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

## Integrale

- $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax + b)$
  - $\int \frac{x}{ax + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax + b)$
  - $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[ \frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$   
mit  $X = ax + b$
  - $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
  - $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
  - $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
  - $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
  - $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
  - $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
  - $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
  - $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
  - $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
  - Glauert-Integral  
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
  - $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall \quad |a| \neq |b|$

## 1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

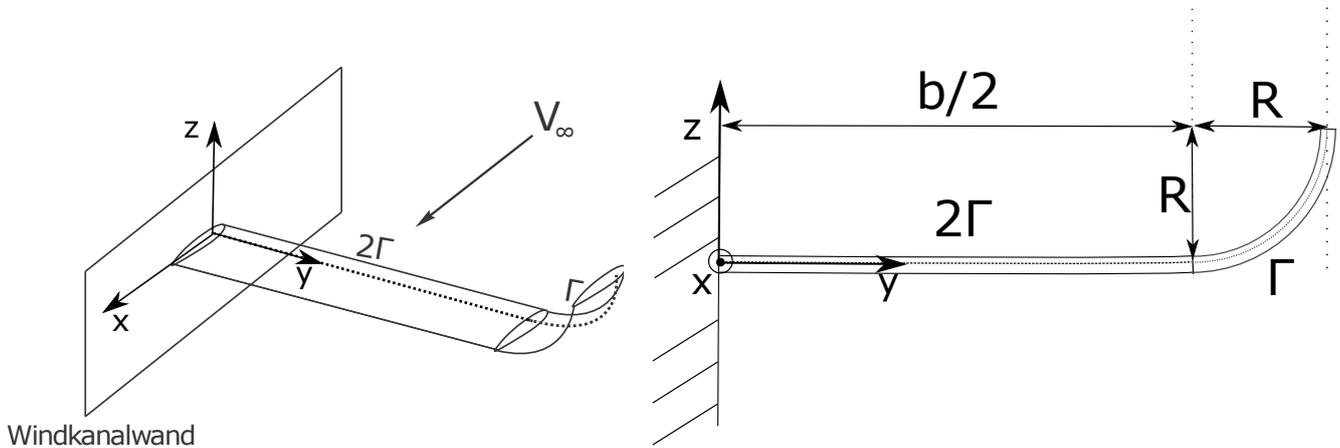
1. Erläutern und skizzieren Sie den Einfluss des Profildickenverhältnisses  $d/l$  in dem Bereich  $0.06 \leq d/l \leq 0.12$  auf den Widerstandsbeiwert  $c_w$  eines Profils in Abhängigkeit von der Machzahl  $M_\infty$ .
2. Zeichnen Sie das Profil NACA2412 (Profiltropfen und Skelettlinie getrennt) und geben Sie die Bedeutung der Ziffern im Hinblick auf die Geometrie des Profils an. Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf des Auftriebsbeiwertes  $c_l$  über den Anstellwinkel  $\alpha$  für:
  - (a) das NACA2412 Profil
  - (b) die angestellte ebene Platte nach der Skelett-Theorie.
3. Wie unterscheiden sich Eiffel-Windkanal und Göttinger Windkanal? Nennen Sie je einen Vor- und Nachteil beider Typen.
4.
  - (a) Sie wollen die Druckverteilung an einem symmetrisch angeströmten NACA 0015 Profil bei  $Ma_\infty = 0.6$  mit Hilfe der Göthertschen Formulierung des Kompressibilitätsgesetzes bestimmen. Wählen Sie für einen Wasserschleppversuch aus der NACA 4er-Reihe ein geeignetes Vergleichsprofil und begründen Sie Ihre Antwort.
  - (b) Zur Bestimmung des Auftriebsbeiwertes können Sie für den Wasserschleppversuch auch das Originalprofil NACA 0015 nehmen. Wie groß ist der Auftriebsbeiwert des NACA 0015 Profils bei  $Ma_\infty = 0.6$ , wenn es im Wasser einen Auftriebsbeiwert von  $c_l = 1.2$  besitzt? Begründen Sie Ihre Antwort.
5. Zeigen Sie, dass die Strömung hinter einem gekrümmten Verdichtungsstoß rotationsbehaftet ist. Argumentieren Sie mit den Aussagen des Croccoschen Wirbelsatzes:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} h_0 = T \vec{\nabla} s + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

für stationäre, isoenergetische Strömungen. Gehen Sie von einem zweidimensionalen Problem aus.

## 2. Aufgabe: Biot-Savart (20 Punkte)

Zur experimentellen Untersuchung des Winglet-Einflusses auf die Flügelaerodynamik wird ein Halbflügel einseitig bei  $y = 0$  an der Windkanalwand eingespannt. Der Halbflügel kann durch ein gerades Flügelsegment mit Zirkulation  $2\Gamma$  und einem Viertelkreissegment (dem Winglet) mit der Zirkulation  $\Gamma$  angenähert werden. Zur Auslegung des Experimentes wird der Aufbau im Nachfolgenden reibungsfrei betrachtet.



1. Skizzieren Sie das vollständige Wirbelsystem und erläutern Sie den zugrunde liegenden Wirbelsatz. Geben Sie dabei den Wert und die Drehrichtung der Zirkulation jedes Wirbels explizit an.
2. Leiten Sie aus der allgemeinen Form des Biot-Savartschen Gesetzes

$$d\vec{u}_i = -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{|\vec{r}|^3}$$

die Gleichung für eine gerade endliche Wirbellinie

$$|\vec{u}_i| = \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

her.

3. Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponente  $u_z$  im Punkt  $P(x_p, \frac{b}{2}, R)$  im eingezeichneten Koordinatensystem.

Gegeben:  $\Gamma$ ,  $x_p > 0$ ,  $b$ ,  $R$ .

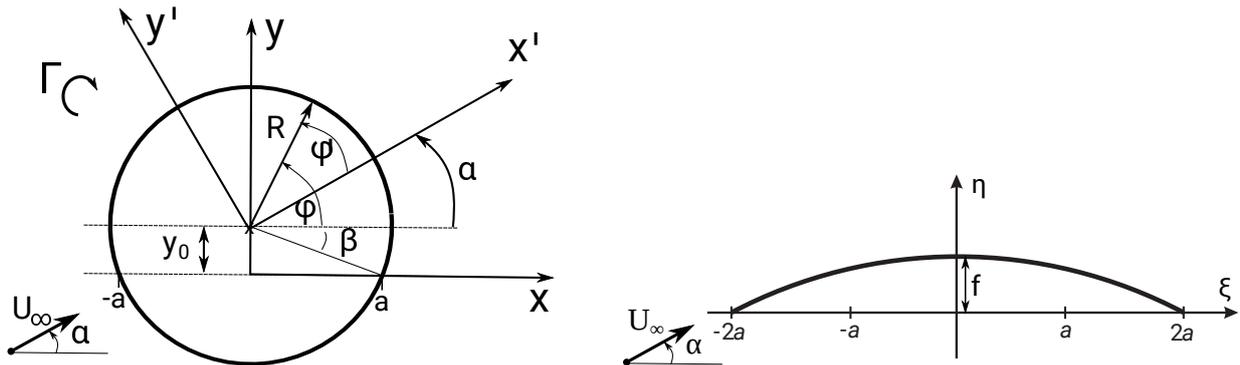
### 3. Aufgabe: Konforme Abbildung (16 Punkte)

1. Was sind die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Methode der konformen Abbildung und wie muss ein Körper beschaffen sein, damit das Strömungsfeld um ihn mit Hilfe der konformen Abbildung berechnet werden kann? Nennen Sie zudem jeweils einen Vor- sowie einen Nachteil der Methode.

Der Bildkreis  $z = iy_0 + Re^{i\varphi}$  mit Radius  $R$  und Mittelpunkt  $z_0 = iy_0$  wird mit der Zhukhovski Abbildungsfunktion

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} \quad (1)$$

auf ein Parabelskelett mit geringer Wölbung in der  $\zeta$ -Ebene übertragen.



2. Bestimmen Sie mithilfe der Zhukhovski Abbildungsfunktion die Wölbungshöhe  $f$  des Profils in der  $\zeta$ -Ebene in Abhängigkeit der gegebenen Größen.
3. Stellen Sie eine komplexe Potentialfunktion  $F(z)$  auf, die die Umströmung eines um  $y = y_0$  gegenüber dem Koordinatenursprung vertikal verschobenen Zylinders mit dem Radius  $R$  beschreibt. Dieser besitzt die Zirkulation  $\Gamma$  und wird unter dem Winkel  $\alpha$  angeströmt (siehe obige Skizze).  
Hinweis: Beachten Sie die unterschiedlichen Koordinatensysteme und nehmen Sie die Zirkulation  $\Gamma$  für diesen Aufgabenteil als gegeben an.
4. Geben Sie die konjugiert komplexe Geschwindigkeit  $\overline{w_z}(z)$  auf der Kreiskontur an. Bestimmen Sie die Zirkulation, so dass die Kuttasche Abflussbedingung erfüllt ist.

Gegeben:  $U_\infty, \alpha, \beta, R, \rho, y_0$

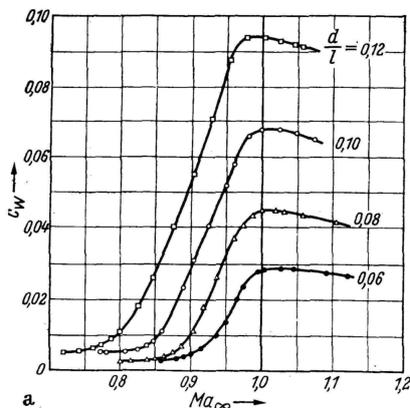
Parallelströmung:  $F_1(z') = U_\infty z'$ ;

Dipol:  $F_2(z') = \frac{M}{2\pi z'}$  mit  $M = 2\pi U_\infty R^2$ ;

Potentialwirbel:  $F_3(z') = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$ ;

# Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte) (LÖSUNG)

1. Starkes Anwachsen des Widerstandsbeiwertes mit zunehmendem Dickenverhältnis im Bereich der schallnahen Anströmung wegen stärkerer Verdrängung.



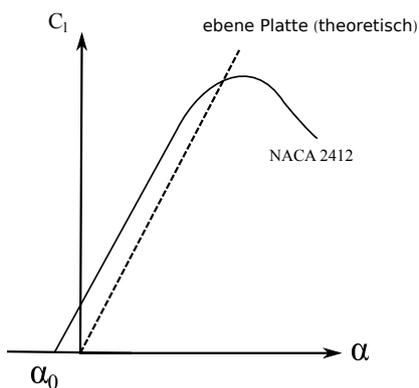
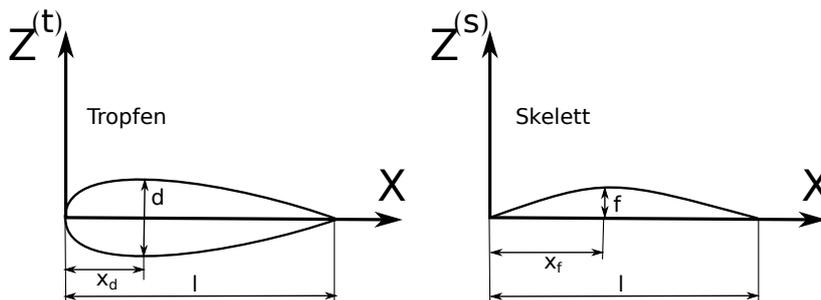
2. NACA2412:

2% maximale Wölbung in Prozent der Profiltiefe;

40% Wölbungsrücklage in Prozent der Profiltiefe;

12% maximale Dicke in Prozent der Profiltiefe;

Die Dickenrücklage beträgt für alle Profile der 4-er Reihe  $x_d/l = 0.3$ .



### 3. Eiffel-Windkanal vs. Göttinger Windkanal

	Eiffel-Windkanal
Unterschied	keine Rückführung des Durchströmungsmediums
Vorteile	geringe Baukosten, große Abmessungen für Modelle möglich
Nachteile	Geschwindigkeit niedrig, hoher Energiebedarf, begrenzte Messzeiten
	Göttinger Windkanal
Unterschied	Strömungsmedium wird über Diffusoren und Umlenkvorrichtungen zurückgeführt (Kreislauf)
Vorteile	unabhängig von Ansaugbedingung (Umgebung), höhere Geschwindigkeiten, geringer Energiebedarf, große Messzeiten
Nachteile	hohe Baukosten, großer Platzbedarf, Selbstverschmutzung

4. (a) Göthertsche Formulierung des Kompressibilitätsgesetzes erfordert eine Geometrietransformation in  $y$ -Richtung mit dem Faktor  $t_1 = \sqrt{1 - Ma_\infty^2} = \sqrt{1 - 0.6^2} = \sqrt{0.64} = 0.8$ .

Das NACA 0015 Profil besitzt die relative Dicke von 15%. Die relative Dicke des transformierten Profils für den Wasserschleppversuch soll deshalb  $(d/l)|_{ink} = 0.8 \cdot 0.15 = 0.12$  betragen. Es soll somit ein NACA 0012 Profil genommen werden.

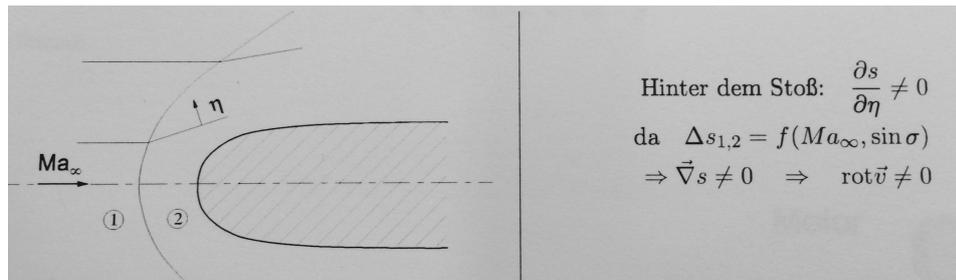
- (b) Mit Hilfe der Prandtl-Glauert-Ackeret-Regel kann die Kompressibilitätskorrektur direkt ohne Geometrietransformation durchgeführt werden. Der Auftriebsbeiwert bei  $Ma_\infty = 0.6$  ergibt sich somit zu  $c_l|_{Ma_\infty=0.6} = \frac{c_{l,ink}}{\sqrt{1 - Ma_\infty^2}} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5$

5. Croccoscher Wirbelsatz:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} h_0 = T \vec{\nabla} s + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

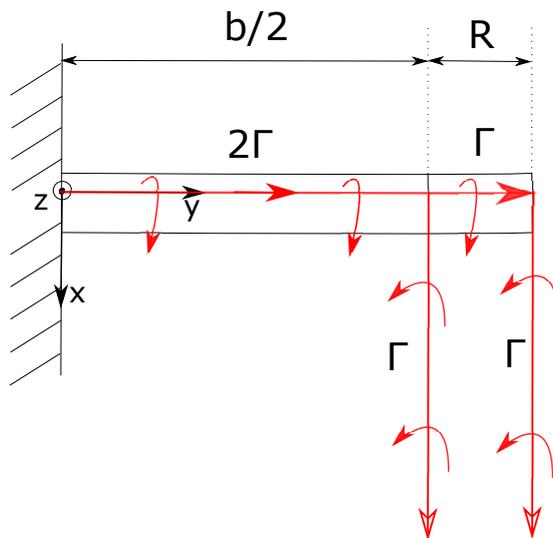
stationär und isoenergetisch:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla} h_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad T \vec{\nabla} s = -\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$



## Lösung 2. Aufgabe: Biot-Savart (20 Punkte) (LÖSUNG)

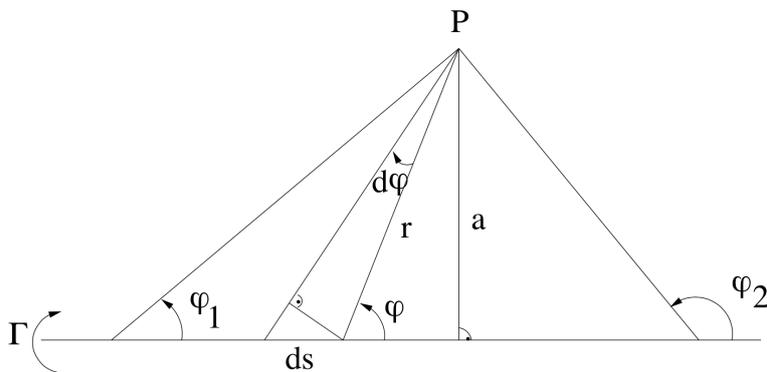
1. Wirbelsystem:



3. Helmholtz'scher Wirbelsatz:

Wirbellinien bilden geschlossene Kurven und enden nur auf einer Wand oder im Unendlichen.

2. Herleitungen:



Kreuzprodukt und Geometrie:

$$|\vec{r} \times d\vec{s}| = |\vec{r}| |d\vec{s}| \sin\varphi = a \cdot ds \text{ (Fläche Parallelogramm)}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{a}{r} = \frac{rd\varphi}{ds}$$

$$\rightarrow \frac{ds}{r^2} = \frac{d\varphi}{a} \text{ und } a = r \sin(\varphi)$$

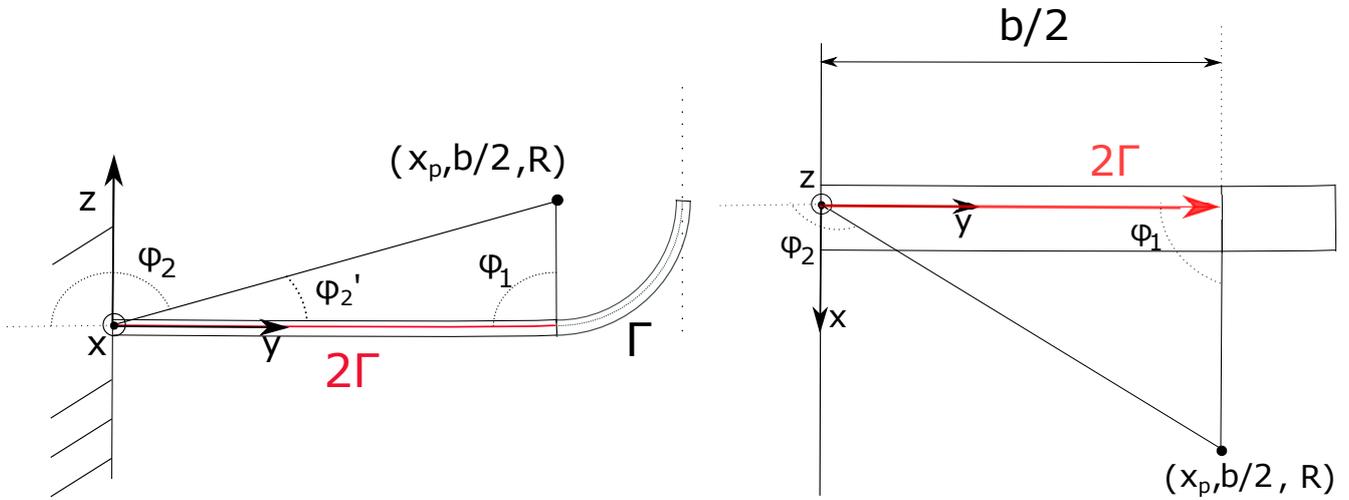
$$|\vec{u}_i| = \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{|\vec{r} \times d\vec{s}|}{|\vec{r}|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{a \cdot ds}{r^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{r \sin\varphi ds}{r^3}$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{\sin\varphi ds}{r^2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin\varphi d\varphi}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi d\varphi$$

$$|\vec{u}_i| = \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)$$

3. Abwindgeschwindigkeit in  $P(x_p, \frac{b}{2}, R)$ :

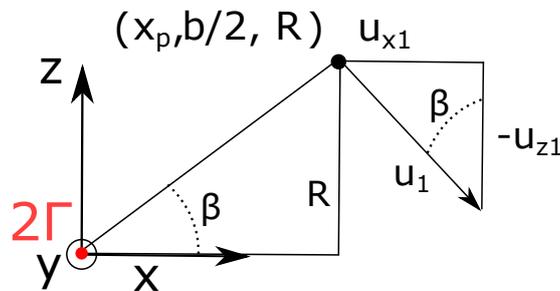
gebundener Wirbel im ungekrümmten Flügelsegment (I)



$$|u_1| = \frac{2\Gamma}{4\pi a_1} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2), \quad a_1 = \sqrt{x_p^2 + R^2}$$

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \cos(\varphi_1) = 0, \quad \cos\varphi_2 = \cos(\pi - \varphi'_2) = -\cos(\varphi'_2) = -\frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{x_p^2 + (\frac{b}{2})^2 + R^2}}$$

$$|u_1| = \left| \frac{\Gamma}{2\pi \sqrt{x_p^2 + R^2}} \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{x_p^2 + (\frac{b}{2})^2 + R^2}} \right|$$



$$\cos(\beta) = \frac{|u_{z1}|}{|u_1|}$$

$$\cos(\beta) = \frac{x_p}{\sqrt{x_p^2 + R^2}}$$

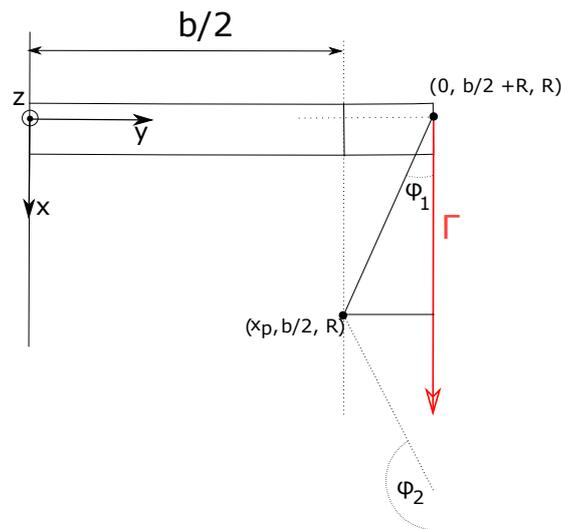
$$u_{z1} = -\cos(\beta)|u_1| = \frac{-\Gamma}{2\pi} \frac{x_p}{x_p^2 + R^2} \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{x_p^2 + R^2 + (\frac{b}{2})^2}}$$

freier Wirbel am Übergang von Flügelsegment zu Winglet (II):

Da der Punkt P genau oberhalb der Wirbellinie liegt, wird dort nur eine Komponente in y-Richtung induziert:

$$\Rightarrow u_{z2} = 0$$

freier Wirbel am Winglet (III):



$$|u_3| = \frac{\Gamma}{4\pi a_3} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2), \quad a_3 = R$$

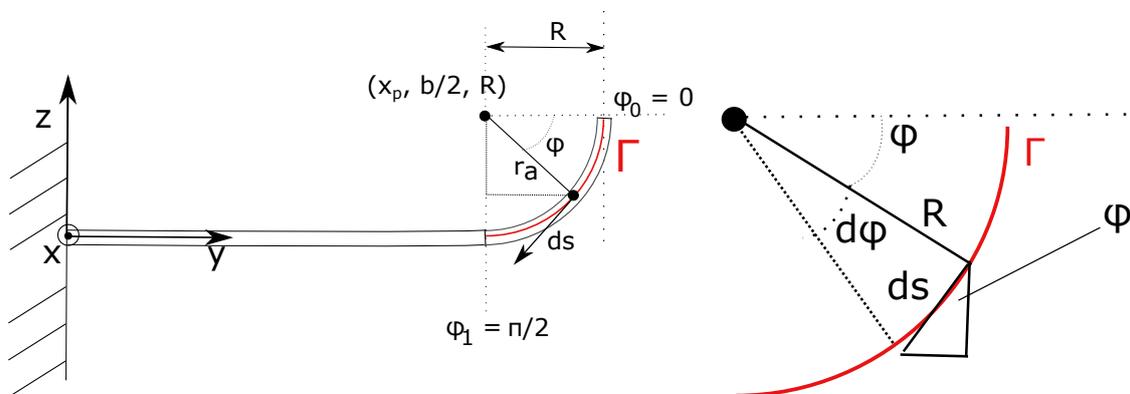
$$\cos \varphi_1 = \frac{x_p}{\sqrt{x_p^2 + R^2}}, \quad \cos \varphi_2 = \cos \pi = -1 \quad (\text{halbunendlicher Wirbel})$$

$$|u_3| = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \frac{x_p}{\sqrt{x_p^2 + R^2}} + 1 \right)$$

Wirbel III induziert nur eine Geschwindigkeitskomponente in negative z-Richtung:

$$u_{z3} = -|u_3| = -\frac{\Gamma}{4\pi R} \left( \frac{x_p}{\sqrt{x_p^2 + R^2}} + 1 \right)$$

gebundener Wirbel im Winglet (IV):



$$d\vec{v}_i = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{|\vec{r}|^3}$$

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} x_p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \cos(\varphi) \\ R \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad d\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \sin(\varphi) d\varphi \\ -R \cos(\varphi) d\varphi \end{pmatrix}$$

Kleinwinkelnäherung:  $\cos(d\varphi) = d\varphi$ .

Das Kreuzprodukt  $\vec{r} \times d\vec{s} = (\vec{P} + \vec{r}_a) \times d\vec{s}$  ergibt somit:

$$\begin{pmatrix} x_p \\ -R \cos(\varphi) \\ R \sin(\varphi) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -R \sin(\varphi) d\varphi \\ -R \cos(\varphi) d\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 d\varphi \overbrace{(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi))}^1 \\ x_p R \cos(\varphi) d\varphi \\ -x_p R \sin(\varphi) d\varphi \end{pmatrix}$$

$$= R d\varphi \begin{pmatrix} R \\ x_p \cos(\varphi) \\ -x_p \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

Der Betrag  $\|\vec{a}\| = \|\vec{P} + \vec{r}_a\|$  ist:

$$\left\| \begin{pmatrix} x_p \\ -R \cos(\varphi) \\ R \sin(\varphi) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_p^2 + R^2 \cos^2(\varphi) + R^2 \sin^2(\varphi)}$$

$$= \sqrt{x_p^2 + R^2}$$

Aufgrund der entgegengesetzten Drehrichtung des Wirbels und der Integration, kehrt sich das Vorzeichen um und für die induzierten Geschwindigkeiten folgt:

$$\vec{u}_4 = \begin{pmatrix} u_{x4} \\ u_{y4} \\ u_{z4} \end{pmatrix} = \frac{\Gamma R}{4\pi (\sqrt{x_p^2 + R^2})^3} \begin{pmatrix} \int_0^{\pi/2} R d\varphi \\ 0 \\ x_p \int_0^{\pi/2} \cos(\varphi) d\varphi \\ 0 \\ -x_p \int_0^{\pi/2} \sin(\varphi) d\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\Gamma R}{4\pi (\sqrt{x_p^2 + R^2})^3} \begin{pmatrix} R\pi/2 \\ x_p \sin(\pi/2) \\ x_p (\cos(\pi/2) - 1) \end{pmatrix} = \frac{\Gamma R}{4\pi (\sqrt{x_p^2 + R^2})^3} \begin{pmatrix} R\pi/2 \\ x_p \\ -x_p \end{pmatrix}$$

Insgesamt ergibt sich die induzierte Geschwindigkeit  $u_z$  im Punkt P zu:

$$u_z = u_{z1} + u_{z3} + u_{z4} = \frac{-\Gamma}{4\pi} \left( \frac{x_p b}{(x_p^2 + R^2) \sqrt{x_p^2 + R^2 + (\frac{b}{2})^2}} \right. \\ \left. + \frac{1}{R} \left( \frac{x_p}{\sqrt{x_p^2 + R^2}} + 1 \right) \right. \\ \left. + \frac{x_p R}{\left( \sqrt{x_p^2 + R^2} \right)^3} \right)$$

### Lösung 3. Aufgabe: Konforme Abbildung (16 Punkte) (LÖSUNG)

1. Voraussetzungen: inkompressibel, reibungsfrei, zweidimensional.

Körper: Es muss sich bei dem Körper um ein einfach geschlossenes Gebiet handeln (keine Lücken etc.)

Vorteil: exaktes Verfahren.

Nachteil: die Abbildungsfunktion ist für eine allgemeinere Geometrie schwierig zu bestimmen.

2. Den Punkt  $z_o = 0 + i(y_0 + R)$  in die Abbildungsfunktion einsetzen und mit  $a = R \cos \beta$  folgt:

$$\zeta(z_o) = z_o + \frac{a^2}{z_o} = i(y_0 + R) + \frac{R^2 \cos^2 \beta}{i(y_0 + R)}$$

mit  $y_0 + R = R(\sin \beta + 1)$

$$\begin{aligned} \zeta(z_o) &= iR(\sin \beta + 1) - \frac{iR^2 \cos^2 \beta}{R(\sin \beta + 1)} \\ &= iR \left[ \frac{(\sin \beta + 1)^2 - \cos^2 \beta}{\sin \beta + 1} \right] \\ &= \frac{iR}{\sin \beta + 1} (\sin^2 \beta + 2 \sin \beta + 1 - \cos^2 \beta) \\ &= \frac{iR}{\sin \beta + 1} (2 \sin^2 \beta + 2 \sin \beta) \\ &= i2R \sin \beta = \xi + i\eta \end{aligned}$$

Die Wölbungshöhe des Profils ist somit  $f = 2R \sin \beta$ .

3. Potentialfunktion in dem versetzten  $x' - y'$  Koordinatensystem:

$$F(z') = U_\infty z' + \frac{U_\infty R^2}{z'} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$$

Transformation:

$$z = Re^{i\varphi} + iy_0 = Re^{i(\varphi'+\alpha)} + iy_0 = Re^{i\varphi'} e^{i\alpha} + iy_0 = z' e^{i\alpha} + iy_0$$

$$z' = (z - iy_0)e^{-i\alpha}$$

Potentialfunktion in dem versetzten  $x' - y'$  Koordinatensystem::

$$F(z) = U_\infty e^{-i\alpha}(z - iy_0) + \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{z - iy_0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - iy_0) + \frac{\Gamma\alpha}{2\pi}$$

4.

$$\overline{w_z}(z) = \frac{dF}{dz} = \left( U_\infty e^{-i\alpha} - \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{(z - iy_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(z - iy_0)} \right)$$

Kuttasche Abflussbedingung in der  $z$ -Ebene:  $\overline{w_z}(a) = 0$  (Staupunkt)

Mit  $z - iy_0 = a - iy_0 = R \cos \beta - iR \sin \beta = Re^{-i\beta}$  an der Hinterkante folgt:

$$\left( U_\infty e^{-i\alpha} - U_\infty e^{i\alpha} e^{i2\beta} + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{i\beta} \right) = 0$$

$$i\Gamma = -2\pi RU_{\infty} e^{-i\alpha} e^{-i\beta} + 2\pi RU_{\infty} e^{i\alpha} e^{i\beta}$$

$$i\Gamma = 2\pi RU_{\infty} (-e^{-i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha+\beta)})$$

$$\Gamma = 4\pi RU_{\infty} \sin(\alpha + \beta)$$