

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik I

02. 09. 2019

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Klausur Aerodynamik I

Fragenteil, konforme Abbildung, Tropfentheorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

1. Wie lauten die Helmholtz'schen Wirbelsätze und unter welchen Voraussetzungen sind diese anwendbar? Inwiefern findet der dritte Helmholtz'sche Wirbelsatz Anwendung, wenn ein Tragflügel mit endlicher Spannweite aus der Ruhe beschleunigt wird?
2. Leiten Sie aus der allgemeinen Form des Biot-Savart'schen Gesetzes

$$\vec{V} = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{\|\vec{r}\|^3}$$

die Gleichung für den induzierten Geschwindigkeitsbetrag einer geraden Wirbellinie her.

Welche induzierte Geschwindigkeit ergibt sich für den Spezialfall eines (a) unendlichen und (b) halbunendlichen Stabwirbels?

3. Wozu dient die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel und was sind die Voraussetzungen für ihre Gültigkeit? Wenden Sie die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel auf den Auftriebsanstieg $\partial c_a / \partial \alpha$ einer ebenen Platte an und stellen Sie diesen Verlauf graphisch dar. Geben Sie die Werte für $\partial c_a / \partial \alpha$ bei entsprechenden Vergleichsmachzahlen an und markieren Sie die Gültigkeitsbereiche in der Skizze.

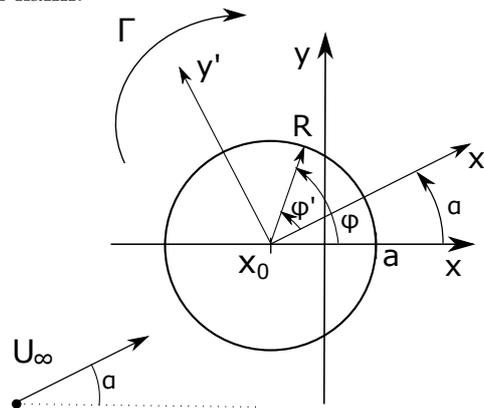
2. Aufgabe: Konforme Abbildung (18 Punkte)

1. Nennen Sie jeweils einen Vor- und Nachteil sowie die Voraussetzungen zur Anwendung der Methode der konformen Abbildungen.

Gegeben sei im Folgenden der abgebildete Profilkreis mit dem Radius R und dem Mittelpunkt $M(x_0, 0)$ der mit Hilfe der Zhukovski Abbildungsfunktion

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

in die ζ -Ebene übertragen werden kann.



2. Beschreiben Sie die Auswirkung der x -Verschiebung des Kreises auf das resultierende Zhukovski Profil in der ζ -Ebene. Was würde eine zusätzliche Verschiebung des Bildkreises in y -Richtung bewirken? Geben Sie die komplexe z -Koordinate für die Profilmase und die Hinterkante an.
3. Bestimmen Sie die komplexe Profilkontur in der ζ -Ebene ($\zeta(\varphi, R, x_0)$) und geben Sie die Koordinaten der Nase und Hinterkante in der ζ -Ebene an. Zeigen Sie, dass der Abstand der Nase zum Ursprung größer als $2a$ ist.
4. Stellen Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ und die konjugiert komplexe Geschwindigkeit $\overline{w_z(\varphi, R, x_0)}$ auf der Kreiskontur für den Fall, dass das Profil mit $U_\infty > 0$ unter dem Anstellwinkel α angeströmt wird, auf. Nehmen Sie die Zirkulation Γ als gegeben an.
5. Bestimmen Sie die komplexe Kraft auf das Profil in der z -Ebene. Hinweis: Verwenden Sie nur die für das Residuentheorem bzw. die Kraftberechnung notwendigen Terme und benutzen Sie folgende Vereinfachungen:

$$\frac{1}{z - z_0} \approx \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{(z - z_0)^2} \approx \frac{1}{z^2} + \frac{2z_0}{z^3}$$

Gegeben: $x_0 < 0, R, U_\infty, \alpha, \Gamma, \rho_\infty$.

Hinweise:

Potentialströmungen:

Translationsströmung: $F(z') = U_\infty z'$

Dipol: $F(z') = \frac{M}{2\pi z'}$ mit $M = 2\pi U_\infty R^2$

Potentialwirbel: $F(z') = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$

1. Blasius-Formel:

$$F_z = \frac{i\rho_\infty}{2} \oint \overline{w(z)}^2 dz$$

Residuentheorem:

$$\oint f(z) dz = i2\pi B_1 \quad \text{für} \quad f(z) = B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \dots + \frac{B_n}{z^n} + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n$$

3. Aufgabe: Tropfentheorie (18 Punkte)

Die Oberseite eines Profiltropfens ist durch die Gleichung

$$Z^{(t)}(X) = 4a\sqrt{X - X^2} (9 - X - 8X^2(3 - 2X)), \quad X = \frac{x}{l}, \quad Z^{(t)} = \frac{z^{(t)}}{l}, \quad X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$$

mit $X \in [0, 1]$ beschrieben. Der Profiltropfen wird mit u_∞ angeströmt.

Der Fouriersche Reihenansatz nach Riegels lautet:

$$Z^{(t)}(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\varphi).$$

1. Transformieren Sie die gegebene Profildegleichung in das φ -Koordinatensystem und bestimmen Sie die Faktoren b_n der Fourier-Reihe nach Riegels für den obigen Profiltropfen in Abhängigkeit von a .
2. Bestimmen Sie die Dickenrücklage φ_d und X_d . Berechnen Sie den Wert der Konstanten a für den Fall, dass die Profildicke der Dicke eines NACA-0015 Profils entspricht. Beachten Sie die gegebenen Hinweise.
3. Geben Sie die Verteilungsfunktion der Quellstärken $q(\varphi)$ an und berechnen Sie damit die dimensionslose Vertikalstörgeschwindigkeit $w_a(\varphi) = \frac{w(\varphi)}{u_\infty}$.
4. Leiten Sie für einen allgemeinen Profiltropfen nach dem Reihenansatz von Riegels einen Ausdruck für $u(\varphi)$ her und bestimmen Sie für den gegebenen Profiltropfen die dimensionslose Axialstörgeschwindigkeit $u_a(\varphi) = \frac{u(\varphi)}{u_\infty}$.

Gegeben: u_∞ .

Hinweis:

Störgeschwindigkeiten:

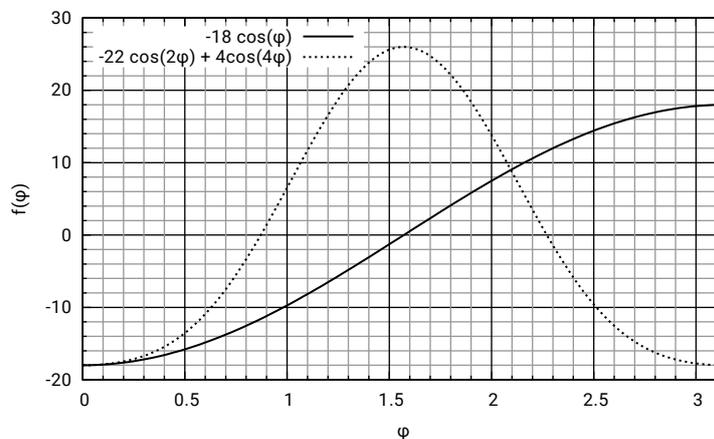
$$u(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'} \quad w(X) = \pm \frac{1}{2} q(X)$$

Quellverteilung:

$$q(X) = 2u_\infty \frac{dZ}{dX}$$

Winkelbeziehungen:

$$\sin(\varphi) \cos^3(\varphi) = \frac{1}{4} \sin(2\varphi) + \frac{1}{8} \sin(4\varphi)$$



Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte) (LÖSUNG)

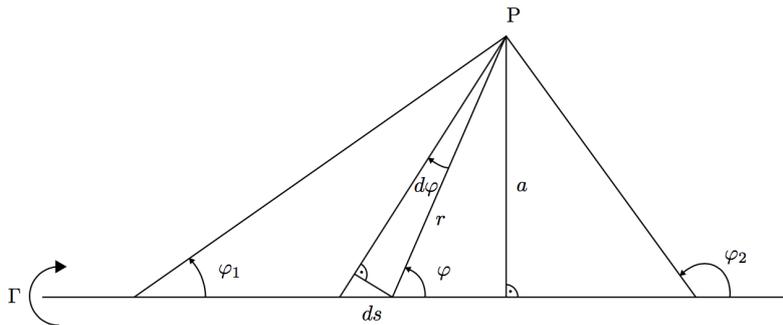
1. Helmholtz'sche Wirbelsätze:

- i) Drehung ist zeitlich konstant.
- ii) Wirbellinien fließen mit dem Fluid und Fluidelemente bleiben Teil derselben Wirbellinie.
- iii) Zirkulation bzw. Wirbelfluss einer Wirbelröhre ist konstant und eine Wirbelröhre endet auf festem Rand oder ist geschlossen.

Die Helmholtz'schen Wirbelsätze gelten für eine reibungsfreie barotrope Strömung mit konservativen Volumenkräften, in einem nicht-rotierendem Referenzsystem.

Der 3. Helmholtz'sche Wirbelsatz besagt, dass die Zirkulation bzw. der Wirbelfluss einer Wirbelröhre konstant ist. Daraus folgt, dass die Wirbelröhre auf einem festen Rand bzw. im Unendlichen endet oder in sich geschlossen ist. Der gebundene Wirbel entlang der Tragfläche endlicher Spannweite kann an deren Enden nicht aufhören, sondern geht in zwei freie Wirbel über, welche sich parallel zur Anströmung vom Profil entfernen. Wird ein zuerst ruhendes Profil bewegt, so bildet sich ein sog. Anfahrwirbel aus. Der III. Helmholtz'sche Wirbelsatz bedingt, dass sich die freien Wirbel mit dem Anfahrwirbel verbinden und somit mit dem gebundenen Wirbel eine geschlossene Wirbellinie bilden.

2.



$$|\vec{r} \times d\vec{s}| = |\vec{r}| \cdot |d\vec{s}| \cdot \sin \varphi = a \cdot |d\vec{s}| = a \cdot ds \quad (\text{Fläche Parallelogramm})$$

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= \frac{a}{r} = \frac{rd\varphi}{ds} \\ \rightarrow \frac{ds}{r^2} &= \frac{d\varphi}{a} \quad \text{und} \quad a = r \sin(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{V}_i| &= \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{|\vec{r} \times d\vec{s}|}{|\vec{r}|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{a \cdot ds}{r^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{r \sin \varphi ds}{r^3} \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{\sin \varphi ds}{r^2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi \\ |\vec{V}_i| &= \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \end{aligned}$$

(a) unendlicher Stabwirbel:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\rightarrow 0 & \varphi_2 &\rightarrow \pi \\ |\vec{V}_i| &= \frac{\Gamma}{2\pi a} \end{aligned}$$

(a) halbunendlicher Stabwirbel:

$$\varphi_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad \varphi_2 \rightarrow \pi$$

$$|\vec{V}_i| = \frac{\Gamma}{4\pi a}$$

3. Die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel ist eine Korrektur für inkompressible Daten bezüglich der Kompressibilitätseffekte. Voraussetzungen sind schlanke Körper, geringe Anstellwinkel, reibungsfreie und drehungsfreie Strömung. Weiterhin ist die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel lediglich für $Ma_\infty \lesssim 0.7$ bzw. im Bereich $1.2 \lesssim Ma_\infty \lesssim 5$ gültig.

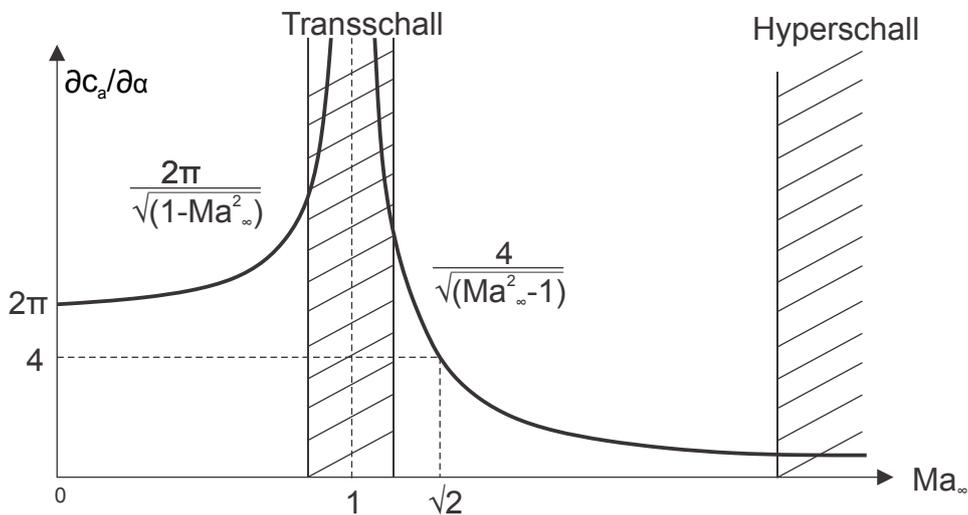
Nach der Prandtl-Glauert-Ackeret Regel wird der Auftriebsanstieg für eine kompressible Strömung aus der Skalierung der Steigung des Auftriebsbeiwertes bei Vergleichsmachzahlen bestimmt.

Vergleichsmachzahlen:

$$Ma_v = 0 \text{ für } Ma_\infty \lesssim 0.7 \text{ mit } \left. \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \right|_{Ma_v=0} = 2\pi$$

$$Ma_v = \sqrt{2} \text{ für } 1.2 \lesssim Ma_\infty \lesssim 5 \text{ mit } \left. \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \right|_{Ma_v=\sqrt{2}} = 4.$$

$$\text{Der Skalierungsfaktor ist } \frac{1}{\sqrt{|1-Ma_\infty^2|}}.$$



Lösung 2. Aufgabe: Konforme Abbildung (18 Punkte) (LÖSUNG)

1. Vorteile: exaktes Verfahren

Nachteile: nur zweidimensional anwendbar, schwierig für allgemeine Geometrien

Voraussetzungen: inkompressible, stationäre, rotationsfreie und reibungsfreie Strömung, geschlossene Geometrie, 2D

2. Einfluss der Verschiebung:

$x_0 = 0, y_0 = 0$	→ ebene Platte
$x_0 < 0, y_0 = 0 \Rightarrow d/l > 0$	→ symmetrischer Profiltropfen mit endlicher Dicke
$y_0 > 0, x_0 = 0 \Rightarrow f > 0$	→ Skelett-Profil mit Wölbung
$x_0 < 0, y_0 > 0 \Rightarrow d/l > 0, f > 0$	→ Profil mit Wölbung und Dicke

Profilkoordinaten:

Nase: $z = -R + x_0$

HK : $z = R + x_0$

$x_0 < 0$

3. Transformation in die ζ -Ebene:

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} \quad \text{mit } a = R + x_0 \text{ und } z = Re^{i\varphi} + x_0$$

$$\zeta = x_0 + Re^{i\varphi} + \frac{(R + x_0)^2}{x_0 + Re^{i\varphi}}$$

$$\zeta = x_0 + R(\cos \varphi + i \sin \varphi) + \frac{(R + x_0)^2}{x_0 + R(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$$

Profilkoordinaten in ζ -Ebene:

HK: $\varphi = 0 \quad \zeta = 2a = 2(R + x_0)$

VK: $\varphi = \pi \quad \zeta = \zeta(\varphi = \pi) \quad \text{mit } \sin(\pi) = 0 \text{ und } \cos(\pi) = -1$

$$\zeta = x_0 - R + \frac{(R + x_0)^2}{x_0 - R}$$

$$\zeta = \frac{(x_0 - R)^2 + (R + x_0)^2}{x_0 - R}$$

$$\zeta = \frac{2x_0^2 + 2R^2}{x_0 - R}$$

$$\zeta = -2 \frac{(x_0^2 + R^2)a}{(x_0 - R)(R + x_0)}$$

$$\zeta = -2a \frac{R^2 + x_0^2}{R^2 - x_0^2}$$

wobei $\frac{R^2 + x_0^2}{R^2 - x_0^2} > 1$, somit ist $|\zeta(VK)| > 2a$.

4. komplexe Potentialfunktion $F(z')$:

Kombination von Anströmung, Dipol und Wirbel

$$F(z') = U_\infty z' + \frac{U_\infty R^2}{z'} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$$

Transformation in z :

um x_0 verschoben und um α gedreht da der Dipol senkrecht zur Anströmung steht.

$$z = Re^{i\varphi} + x_0 = Re^{i(\varphi'+\alpha)} + x_0 = Re^{i\varphi'} e^{i\alpha} + x_0 = z' e^{i\alpha} + x_0$$

$$z' = (z - x_0)e^{-i\alpha}$$

Potentialfunktion $F(z)$:

$$F(z) = U_\infty e^{-i\alpha}(z - x_0) + \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{z - x_0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - x_0) + \frac{\Gamma\alpha}{2\pi}$$

komplexe Geschwindigkeitsfunktion $w(z)$:

$$\overline{w_z(z)} = \frac{dF(z)}{dz} = U_\infty e^{-i\alpha} - \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{(z - x_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z - x_0)}$$

auf der Kreiskontur mit $z = Re^{i\varphi} + x_0$

$$\overline{w_z(\varphi, R, x_0)} = U_\infty e^{-i\alpha} - \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{R^2 e^{2i\varphi}} + \frac{i\Gamma}{2\pi R e^{i\varphi}} = U_\infty e^{-i\alpha} - U_\infty e^{i(\alpha-2\varphi)} + \frac{i\Gamma}{2\pi R e^{i\varphi}}$$

5. $\overline{w_z(z)}$:

$$\overline{w_z(z)} = U_\infty e^{-i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z - x_0)} - \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{(z - x_0)^2}$$

Darstellung von $\overline{w_z(z)}$ als Quotientenreihe analog zu der Reihe aus dem gegebenen Residuentheorem :

$$\overline{w_z(z)} = A_0 + \frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} \quad \text{mit}$$

$$A_0 = U_\infty e^{-i\alpha}, \quad A_1 = \frac{i\Gamma}{2\pi}, \quad A_2 = -U_\infty e^{i\alpha} R^2$$

$\left(\overline{w_z(z)}\right)^2$ kann somit als:

$$\left(\overline{w_z(z)}\right)^2 = \left(A_0 + \frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2}\right)^2$$

formuliert werden.

Mit Verwendung der Hinweise: $\frac{1}{z-z_0} \approx \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2}$ und $\frac{1}{(z-z_0)^2} \approx \frac{1}{z^2} + \frac{2z_0}{z^3}$ kann dies umgeformt werden zu:

$$\left(\overline{w_z(z)}\right)^2 = \left(A_0 + A_1 \left(\frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2}\right) + A_2 \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2z_0}{z^3}\right)\right)^2$$

$$\left(\overline{w_z(z)}\right)^2 = A_0^2 + 2A_0A_1 \frac{1}{z} + \frac{A_1^2 + 2A_0A_1z_0 + 2A_2A_0}{z^2} + \dots$$

Nach dem Residuentheorem ist lediglich der Term mit $\frac{1}{z}$ von Relevanz für die Integration, sodass lediglich ein Term nach Bildung des Quadrates berücksichtigt werden muss. Es gilt:

$$B_1 = 2A_0A_1$$

sodass für die Kraft in der z -Ebene gilt:

$$F_z = \frac{i\rho_\infty}{2} (2\pi i 2A_0A_1)$$

$$= -\rho_\infty \pi (U_\infty e^{-i\alpha}) \left(\frac{i\Gamma}{\pi}\right)$$

$$= -i\rho_\infty U_\infty e^{-i\alpha} \Gamma$$

Lösung 3. Aufgabe: Tropfentheorie (18 Punkte) (LÖSUNG)

1. Transformation der Profilleichung nach φ :

$$Z^{(t)}(X) = 4a\sqrt{X - X^2} (9 - X - 8X^2(3 - 2X))$$

Transformation mit $X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$ bzw. dessen Umformung:

$$\sin(\varphi) = \sqrt{1 - \cos^2(\varphi)} = \sqrt{1 - (2X - 1)^2} = \sqrt{1 - (4X^2 - 4X + 1)} = 2\sqrt{X - X^2}$$

Einsetzen und Ausmultiplizieren:

$$\begin{aligned} Z^{(t)}(\varphi) &= 2a \sin(\varphi) \left(9 - \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi)) - 2(1 + 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi))(2 - \cos(\varphi)) \right) \\ &= 2a \sin(\varphi) \left(\frac{17}{2} - \frac{1}{2}\cos(\varphi) - 4 - 8\cos(\varphi) - 4\cos^2(\varphi) + 2\cos(\varphi) + 4\cos^2(\varphi) + 2\cos^3(\varphi) \right) \\ &= 2a \sin(\varphi) \left(\frac{9}{2} - \frac{13}{2}\cos(\varphi) + 2\cos^3(\varphi) \right) \\ &= a(9\sin(\varphi) - 13\sin(\varphi)\cos(\varphi) + 4\sin(\varphi)\cos^3(\varphi)) \end{aligned}$$

Mit dem Additionstheorem $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$ und dem gegebenen Hinweis:

$$\sin(\varphi)\cos^3(\varphi) = \frac{1}{4}\sin(2\varphi) + \frac{1}{8}\sin(4\varphi)$$

folgt

$$\begin{aligned} Z^{(t)}(\varphi) &= a \left(9\sin(\varphi) - \frac{13}{2}\sin(2\varphi) + \sin(2\varphi) + \frac{1}{2}\sin(4\varphi) \right) \\ &= 9a\sin(\varphi) - \frac{11a}{2}\sin(2\varphi) + \frac{a}{2}\sin(4\varphi) \\ &= \frac{1}{2} \left(18a\sin(\varphi) - 11a\sin(2\varphi) + a\sin(4\varphi) \right) \end{aligned}$$

Aus dem Koeffizientenvergleich mit der gegebenen Reihe ergeben sich die Koeffizienten b_n zu:

$$b_1 = 18a; \quad b_2 = -11a; \quad b_3 = 0; \quad b_4 = a; \quad b_n = 0 \quad \forall n > 4.$$

2. Dickenrücklage φ_d und X_d :

Gesucht ist die Position von φ und X an der die Profilkontur ihr Maximum besitzt:

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{dZ}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dX} \stackrel{!}{=} 0, \quad \frac{d\varphi}{dX} = \frac{-2}{\sin(\varphi)} \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\varphi}{dX} \neq \infty \quad \forall \varphi \in (0, \pi)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dZ}{d\varphi} &= \frac{1}{2} \left(18a \cos(\varphi) - 22a \cos(2\varphi) + 4a \cos(4\varphi) \right) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow 18a \cos(\varphi) - 22a \cos(2\varphi) + 4a \cos(4\varphi) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow -22 \cos(2\varphi) + 4 \cos(4\varphi) \stackrel{!}{=} -18 \cos(\varphi) \end{aligned}$$

Die ermittelte Funktion $\frac{dZ}{d\varphi}$ wird gerade dann Null, wenn sich die Graphen von $-22 \cos(2\varphi) + 4 \cos(4\varphi)$ und $-18 \cos(\varphi)$ schneiden.

Anhand der gegebenen Abbildung lässt sich somit $\varphi_d \approx 2.1$ ablesen.

Desweiteren lässt sich $-18 \cos(\varphi_d) \approx 9$ ablesen, woraus sich $\cos(\varphi_d) \approx -0.5$ ergibt.

Mit der Koordinatentransformation nach X ergibt sich:

$$X_d = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi_d)) \approx \frac{1}{2}(1 - 0.5) = 0.25.$$

Einsetzen von $X_d = \frac{1}{4}$ in die Profildegleichung:

$$\begin{aligned} Z^{(t)}(X_d) &= 4a \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} \left(9 - \frac{1}{4} - \frac{8}{16} \left(3 - \frac{2}{4} \right) \right) \\ &= 4a \sqrt{\frac{3}{16}} \left(\frac{35}{4} - \frac{5}{4} \right) \\ &= \frac{15\sqrt{3}}{2} a \end{aligned}$$

Die Dicke soll der eines NACA-0015 Profils entsprechen:

$$2Z^{(t)}(X_d) \stackrel{!}{=} 0.15 = \frac{15}{100}$$

Somit ergibt sich der Wert für die Konstante a :

$$2 \frac{15\sqrt{3}}{2} a = \frac{15}{100} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{100\sqrt{3}}$$

3. Bestimmung von $q(\varphi)$

Transformation der Gleichung von $q(X)$ nach φ : $q(\varphi) = 2u_\infty \frac{dZ}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dX}$

Mit der Ableitung von $Z^{(t)}(\varphi)$ nach φ aus vorherigem Aufgabenteil:

$$\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{1}{2} \left(18a \cos(\varphi) - 22a \cos(2\varphi) + 4a \cos(4\varphi) \right)$$

Ableitung der Transformation $X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$:

$$\frac{dX}{d\varphi} = \frac{-\sin(\varphi)}{2}.$$

Es ergibt sich $q(\varphi)$ zu:

$$q(\varphi) = \frac{-2au_\infty}{\sin(\varphi)} (18\cos(\varphi) - 22\cos(2\varphi) + 4\cos(4\varphi)).$$

Bestimmung von $w_a(\varphi)$:

$$\text{Aus } w(X) = \pm \frac{1}{2}q(X) \text{ folgt: } w_a(\varphi) = \pm \frac{1}{2u_\infty}q(\varphi).$$

Für $w_a(\varphi)$ ergibt sich somit:

$$w_a(\varphi) = \mp \frac{a}{\sin(\varphi)}(18\cos(\varphi) - 22\cos(2\varphi) + 4\cos(4\varphi)).$$

4. Bestimmung von $u(\varphi)$ für einen allgemeinen Profiltropfen mit dem Ansatz:

$$u(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X-X'}$$

Einsetzen der Quellgleichung ergibt:

$$u(X) = \frac{u_\infty}{\pi} \int_0^1 \frac{dZ(X')}{dX'} \frac{dX'}{X-X'}$$

Die Transformation nach φ führt auf:

$$u(\varphi) = \frac{2u_\infty}{\pi} \int_\pi^0 \frac{dZ(\varphi')}{d\varphi'} \frac{d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')}$$

Die Ableitung des Reihenansatzes lautet:

$$\frac{dZ^{(t)}(\varphi)}{d\varphi} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n n \cos(n\varphi).$$

Setzt man diesen in die Integralgleichung ein und passt die Grenzen an folgt:

$$u(\varphi) = \frac{-u_\infty}{\pi} \sum_{n=1}^N b_n n \int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi'.$$

Unter Verwendung des Glauert-Integrals folgt schließlich

$$u(\varphi) = u_\infty \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)}.$$

Bestimmung von $u_a(\varphi) = \frac{u(\varphi)}{u_\infty}$ für den Profiltropfen:

Einsetzen der Koeffizienten in das Ergebnis des vorherigen Aufgabenteils:

$$u_a(\varphi) = \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)} = a \left(18 - 22 \frac{\sin(2\varphi)}{\sin(\varphi)} + 4 \frac{\sin(4\varphi)}{\sin(\varphi)} \right)$$