

Aufgaben
zur
Klausur

Aerodynamik I

30. 08. 2016

Matr.-Nr. :

Name :

Unterschrift :

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben:

Klausur Aerodynamik I

Fragenteil, Konforme Abbildungen, Skelett-Theorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (16 Punkte)

1. Unter welchen Voraussetzungen ist der Satz von Thomson gültig und wie lautet dieser?
2. Gegeben ist die Kontinuitätsgleichung als Bestimmungsgleichung für das Geschwindigkeitspotential in folgender Form:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0.$$

Leiten Sie mit Hilfe der Euler-Gleichung

$$-\rho \vec{v} d\vec{v} = dp$$

sowie der Definition der Schallgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$$

die Potentialgleichung für zweidimensionale, kompressible, stationäre, isentrope Strömungen her.

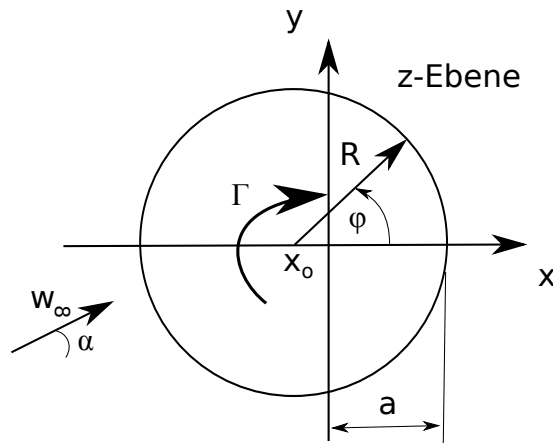
3. Wie unterscheiden sich Eiffel-Windkanal und Göttinger Windkanal? Nennen Sie je einen Vor- und Nachteil beider Typen.
4. Welche sind die drei wesentlichen geometrischen Grundelemente, die die Form eines Tragflügels bestimmen?
5. Welche wesentlichen Ähnlichkeitsparameter der Strömungsmechanik müssen bei der Untersuchung der aerodynamischen Eigenschaften eines Flugzeugmodells im Windkanalversuch im Hinblick auf die Übertragbarkeit der Messergebnisse auf ein reales Modell eingehalten werden?

2. Aufgabe: Konforme Abbildungen (17 Punkte)

Gegeben sei die Zhukhovski Abbildungsfunktion:

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}.$$

1. Nennen Sie jeweils einen Vor- und Nachteil sowie die Voraussetzungen zur Anwendung der Methode der konformen Abbildungen.
2. Stellen Sie eine komplexe Potentialfunktion $F(z)$ auf, die die Umströmung eines rotierenden Zylinders mit dem Radius R , dessen Mittelpunkt bei x_0 auf der x -Achse liegt, unter dem Winkel α beschreibt (siehe Skizze). Hierbei ist w_∞ der Betrag der Anströmgeschwindigkeit.



3. Welche Strömung ergibt sich in der ζ -Ebene bei der Anwendung der Zhukhovski Abbildungsfunktion auf die in Aufgabenteil 2 hergeleitete komplexe Potentialfunktion $F(z)$ und was bewirkt die Verschiebung des Kreises entlang der x -Achse?

Bestimmen Sie explizit die Profilkontur in der ζ -Ebene, d.h. $\xi(\varphi, R, x_0)$ und $\eta(\varphi, R, x_0)$ sowie die Schnittpunkte des Profils mit der ξ -Achse als Funktion von φ und der gegebenen Größen. Skizzieren Sie anschließend die Profilkontur in der ζ -Ebene qualitativ.

Wie würde sich die Profilkontur bei einer zusätzlichen Verschiebung des Kreises in y Richtung verändern?

4. Wie lautet die Kutta'sche Abflussbedingung in der ζ -Ebene bzw. in der z -Ebene? Bestimmen Sie anschließend die Zirkulation Γ als Funktion der gegebenen Größen, so dass die Kutta'sche Bedingung erfüllt wird.

Gegeben: $w_\infty, \alpha, R, x_0 < 0$

Anströmung: $F_1(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$;

Dipol: $F_2(z) = \frac{M}{2\pi z}$ mit $M = 2\pi(u_\infty + iv_\infty)R^2$;

Potentialwirbel: $F_3(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z)$;

3. Aufgabe: Skelett-Theorie (17 Punkte)

Die Umströmung einer unter dem Anstellwinkel α angestellten ebenen Platte mit der Länge l soll mit Hilfe der Skelett-Theorie näher untersucht werden.

1. Nennen Sie die Voraussetzungen der Skelett-Theorie.
2. Formulieren Sie die Kernaussage der kinematischen Strömungsbedingung in eigenen Worten und leiten Sie die allgemeine Strömungsbedingung für ein unter einem Anstellwinkel angeströmtes Skelettprofil her. Skizzieren Sie hierzu die Geschwindigkeiten an der Skelettlinie.
3. Transformieren Sie das Integral zur Bestimmung der Vertikalstörgeschwindigkeit

$$w(X) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \gamma(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

in Polarkoordinaten und bestimmen Sie $w(\varphi)$.

4. Bestimmen Sie mit Hilfe des Fourierschen Reihenansatzes von Birnbaum-Ackermann für die Zirkulationsverteilung die Koeffizienten A_0 bis A_n .
5. Bestimmen Sie den Nickmomentenbeiwert $c_{m,Nase}$.
6. Bestimmen Sie den Druckbeiwert als Funktion von φ auf der Oberseite für eine Machzahl $Ma = 0.6$ mit Hilfe der Prandtl-Glauert Regel.

Gegeben: α, u_∞, l

Fourierscher Reihenansatz von Birnbaum-Ackermann für die Zirkulationsverteilung:

$$\gamma(\varphi) = 2u_\infty \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \right)$$

Druckbeiwert: $c_p \approx \mp \frac{\gamma}{u_\infty}$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (16 Punkte)

(LÖSUNG)

1. Satz von Thomson: Die Zirkulation entlang einer sich mit dem Fluid bewegenden geschlossenen Kurve ist zeitlich konstant:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0,$$

sofern es sich um reibungsfreie, barotrope Strömungen mit konservativen Volumenkräften handelt. Daraus folgt, dass Strömungen, die anfänglich in Drehung waren, diese Drehung beibehalten, während drehungsfreie Strömungen drehungsfrei bleiben.

2. Herleitung der Potentialgleichung:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

und mit

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}$$

folgt:

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

Elimination der Dichte mit Hilfe der Euler-Gleichung:

$$dp = -\rho \vec{v} d\vec{v} = -\frac{\rho}{2} d(\vec{v}^2) = -\frac{\rho}{2} d(u^2 + v^2) = -\frac{\rho}{2} d\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right)$$

Gleichzeitig gilt $dp = c^2 d\rho$, sodass folgt:

$$d\rho = -\frac{\rho}{2c^2} d\left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right)$$

In Komponenten:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\frac{\rho}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)$$

Einsetzen in die Kontinuitätsgleichung ergibt:

$$\rho \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

Umsortieren:

$$\left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{2}{c^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

3.

4. 1. Grundriss (Zuspitzung, Pfeilung)
2. Profil (Dicken und Wölbungsverteilung)
3. Verwindung und Neigung (V-Stellung)

5. Ähnlichkeitsparameter:

Reynoldssche Ähnlichkeit: $Re = \frac{\rho u l}{\eta}$

Machsche Ähnlichkeit: $Ma = \frac{u}{a}$

Außerdem sind die Randbedingungen für Modelle im Windkanal mit denen der umströmten Körper in Originalgröße gleich zu halten.

	Eiffel-Windkanal
Unterschied	keine Rückführung des Strömungsmediums
Vorteile	geringe Baukosten, große Abmessungen für Modelle möglich
Nachteile	Geschwindigkeit niedrig, hoher Energiebedarf, begrenzte Messzeiten
	Göttinger Windkanal
Unterschied	Strömungsmedium wird über Diffusoren und Umlenkecken zurückgeführt (Kreislauf)
Vorteile	unabhängig von Ansaugbedingung (Umgebung), höhere Geschwindigkeiten, geringer Energiebedarf, große Messzeiten
Nachteile	hohe Baukosten, großer Platzbedarf, Selbstverschmutzung

Lösung 2. Aufgabe: Konforme Abbildungen (17 Punkte) (LÖSUNG)

1. Vor- und Nachteil:
 exaktes Verfahren, aber nur zweidimensional anwendbar.
 Anwendbarkeit:
 inkompressible, stationäre, rotationsfreie und reibungsfreie Strömung.
2. Potentialfunktion in der z -Ebene:

$$F(z) = w_\infty e^{-i\alpha}(z - x_0) + \frac{w_\infty e^{i\alpha} R^2}{z - x_0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - x_0)$$

3. Es ergibt sich die Umströmung eines symmetrischen Profils. Durch eine Verschiebung des Kreises entlang der x -Achse wird die Dickenverteilung variiert.

$$z = x_0 + R e^{i\varphi}$$

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z} \quad a = x_0 + R$$

$$\zeta = x_0 + R e^{i\varphi} + \frac{(x_0 + R)^2}{x_0 + R e^{i\varphi}} = x_0 + R \cos\varphi + i R \sin\varphi + \frac{(x_0 + R)^2}{x_0 + R \cos\varphi + i R \sin\varphi}$$

$$\zeta = x_0 + R \cos\varphi + i R \sin\varphi + \frac{(x_0 + R)^2 (x_0 + R \cos\varphi - i R \sin\varphi)}{(x_0 + R \cos\varphi)^2 + R^2 \sin^2\varphi}$$

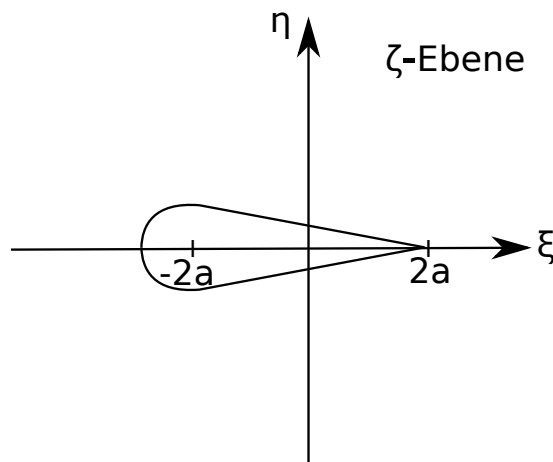
$$\xi = x_0 + R \cos\varphi + \frac{(x_0 + R)^2 (x_0 + R \cos\varphi)}{(x_0 + R \cos\varphi)^2 + R^2 \sin^2\varphi} = (x_0 + R \cos\varphi) \left(1 + \frac{(x_0 + R)^2}{(x_0^2 + 2x_0 R \cos\varphi + R^2)} \right)$$

$$\eta = i R \sin\varphi - \frac{(x_0 + R)^2 i R \sin\varphi}{(x_0 + R \cos\varphi)^2 + R^2 \sin^2\varphi} = i R \sin\varphi \left(1 - \frac{(x_0 + R)^2}{(x_0^2 + 2x_0 R \cos\varphi + R^2)} \right)$$

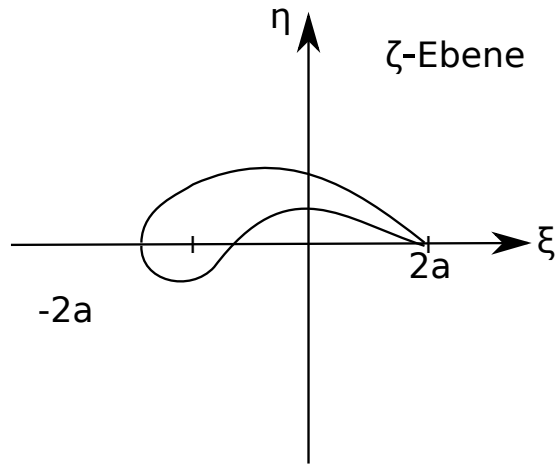
Schnittpunkte mit der ξ -Achse:

$$\xi_{HK}(\varphi = 0) = 2(x_0 + R) = 2a$$

$$\xi_{VK}(\varphi = \pi) = (x_0 - R) \left(1 + \frac{(x_0 + R)^2}{(x_0 - R)^2} \right) = 2 \frac{x_0^2 + R^2}{x_0 - R} = -2a \frac{R^2 + x_0^2}{R^2 - x_0^2} < -2a$$



Eine zusätzliche Verschiebung entlang der y -Achse würde die Wölbung des Profils verändern.



4. Die Kutta Bedingung besagt, dass es an einer unendlich dünnen Hinterkante nicht zur Umströmung kommt und das Fluid glatt abfließt. In der ζ -Ebene muss somit die Geschwindigkeit an der Hinterkante $\bar{w}_\zeta(z = a)$ endlich sein. Betrachtet man jedoch den Kreiszyylinder in der z -Ebene, so befindet sich an der Stelle $z=a$ ein Staupunkt, womit die Bedingung $\bar{w}_z(z = a) = 0$ erfüllt sein muss.

$$\bar{w}_z = \frac{dF}{dz} = \left(w_\infty e^{-i\alpha} - \frac{w_\infty e^{i\alpha} R^2}{(z - x_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(z - x_0)} \right)$$

mit $z = x_0 + R e^{i\varphi}$

$$\bar{w}_z = \left(w_\infty e^{-i\alpha} - w_\infty e^{i\alpha} e^{-i2\varphi} + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{-i\varphi} \right)$$

Für die Hinterkante gilt: $\varphi_{HK} = 0$, somit gilt für den Staupunkt:

$$\bar{w}_z(\varphi = 0) = \left(w_\infty e^{-i\alpha} - w_\infty e^{i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2\pi R} \right) = 0.$$

$$-2i w_\infty \sin\alpha + \frac{i\Gamma}{2\pi R} = 0.$$

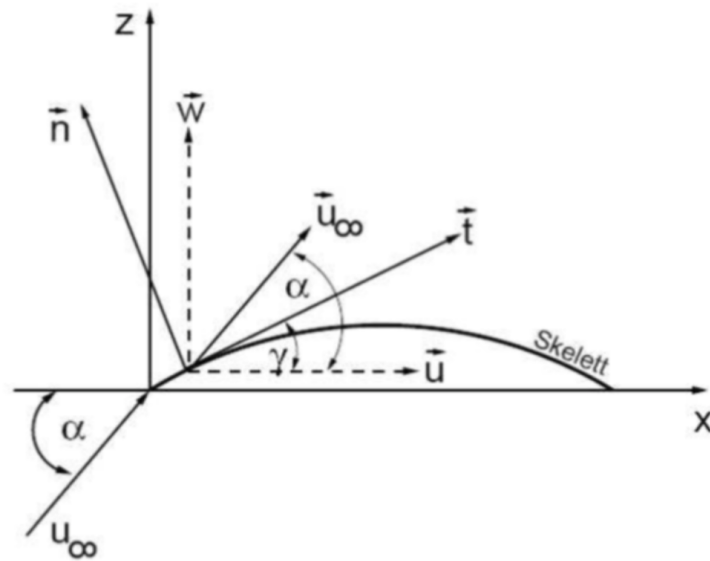
Somit ergibt sich für Γ

$$\Gamma = 4\pi R w_\infty \sin\alpha.$$

Lösung 3. Aufgabe: Skeletttheorie (17 Punkte) (LÖSUNG)

1. Die Skelett-Theorie geht von dünnen Profilen, kleinen Anstellwinkeln und inkompressibler, stationärer, rotationsfreier und reibungsfreier Strömung aus.
2. Die kinematische Strömungsbedingung besagt, dass die Skelettlinie, auf der Profilerseite und Profilunterseite näherungsweise zusammenfallen, eine Stromlinie ist. Das heißt, dass kein Massentransport normal zur Skelettlinie stattfindet. Der resultierende Geschwindigkeitsvektor an der Skelettlinie ist tangential zu dieser, die Geschwindigkeitskomponente normal zur Skelettlinie muss verschwinden.

Unter Berücksichtigung der Anströmung u_∞ und der Störgeschwindigkeiten u und w sowie des Anstellwinkels α ergibt sich:



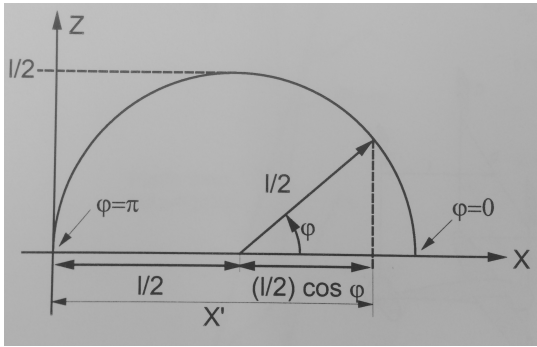
$$\begin{aligned}
 u_\infty \sin(\alpha - \gamma) - u \sin(\gamma) + w \cos(\gamma) &= 0 \\
 u_\infty [\sin(\alpha) \cos(\gamma) - \sin(\gamma) \cos(\alpha)] - u \sin(\gamma) + w \cos(\gamma) &= 0 \\
 u_\infty [\sin(\alpha) - \tan(\gamma) \cos(\alpha)] - u \tan(\gamma) + w &= 0
 \end{aligned}$$

Linearisierung (schlankes Profil): $\Rightarrow \sin(\alpha) \approx \alpha$, $\cos(\alpha) \approx 1$, $u \tan(\gamma) \approx 0$

Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 u_\infty (\alpha - \tan(\gamma)) + w &= 0 \\
 \tan(\gamma) &= \alpha + \frac{w}{u_\infty} \\
 \tan(\gamma) &= \frac{dZ^{(s)}}{dX} \\
 \rightarrow \frac{dZ^{(s)}}{dX} &= \alpha + \frac{w}{u_\infty}
 \end{aligned}$$

3.



Transformation: $x' = \frac{l}{2}(1 + \cos(\varphi)) \rightarrow X' = \frac{x'}{l} = \frac{1 + \cos(\varphi)}{2}$
 Ableitung: $dX' = -\frac{1}{2} \sin(\varphi') d\varphi'$ Grenzen:
 $X' = 0 \quad \varphi' = \pi$
 $X' = 1 \quad \varphi' = 0$

$$w(X) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \gamma(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

$$w(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} \int_\pi^0 \gamma(\varphi') \frac{-\frac{1}{2} \sin(\varphi') d\varphi'}{\frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi)) - \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi'))} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \gamma(\varphi') \frac{\sin(\varphi') d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')}$$

4. Bestimmung der Koeffizient A_0 bis A_n

Es handelt sich laut Aufgabenstellung um eine angestellte ebene Platte. Daraus folgt, dass $A_n = 0$ mit $n \geq 1$.

Für A_0 :

Mit der Beziehung:

$$\tan\left(\frac{\varphi'}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\varphi')}{\sin(\varphi')}$$

und dem Ansatz von Ackermann und Birnbaum für die Zirkulationsverteilung ($A_n = 0, n \geq 1$), folgt für die vertikale Störgeschwindigkeit:

$$-\frac{w(\varphi')}{u_\infty} = \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^\pi \gamma(\varphi') \frac{\sin(\varphi') d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} = \frac{A_0}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - \cos(\varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi'$$

Mit Hilfe des Glauertschen Integrals folgt somit

$$-\frac{w(\varphi')}{u_\infty} = A_0$$

Einsetzen in die kinematische Randbedingung ergibt:

$$\frac{dZ^{(s)}}{dX} = \alpha + \frac{w}{u_\infty} = \alpha - A_0$$

Da es sich um eine ebene Platte handelt ist $\frac{dZ^{(s)}}{dX} = 0$ und somit:

$$A_0 = \alpha$$

5. Bestimmung des Nickmomentenbeiwerts

Für den Nickomentenbeiwert gilt:

$$\begin{aligned}
c_{m,Nase} &= - \int_0^l \Delta c_p X dX = 2 \int_0^l \frac{\gamma(X)}{u_\infty} X dX \\
&= -2 \int_\pi^0 \frac{\gamma(\varphi)}{u_\infty} \frac{(1 + \cos(\varphi))}{2} \left(-\frac{1}{2} \sin(\varphi)\right) d\varphi \\
&= -2 \int_0^\pi \frac{\gamma(\varphi)}{u_\infty} \frac{(1 + \cos(\varphi))}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(\varphi)\right) d\varphi
\end{aligned}$$

mit der Zirkulationsverteilung nach Birnbaum-Ackermann für die ebene Platte (alle Glieder $A_n = 0, n \geq 1$) und mit der Beziehung:

$$\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

ergibt sich für den Nickmomentenbeiwert:

$$\begin{aligned}
c_{m,Nase} &= -4A_0 \int_0^\pi \frac{1 - \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} \frac{(1 + \cos(\varphi))}{2} \left(\frac{1}{2} \sin(\varphi)\right) d\varphi \\
&= -A_0 \int_0^\pi (1 - \cos(\varphi))(1 + \cos(\varphi)) d\varphi = A_0 \int_0^\pi (1 - \cos(\varphi)^2) d\varphi \\
&= -A_0 \left(\pi - \left[\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^\pi \right) \\
&= -A_0 \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned} \tag{1}$$

Der Momentenbeiwert ergibt sich zu:

$$c_{m,Nase} = -\frac{\pi}{2} \alpha$$

6. Bestimmung des Druckbeiwerts auf der Oberseite für eine Machzahl $Ma=0.6$:

Der Druckbeiwert im inkompressiblen auf der Oberseite ergibt sich nach der Skeletttheorie zu:

$$c_p = -\frac{\gamma}{u_\infty}$$

Damit gilt für den Druckbeiwert für die Oberseite:

$$c_p = -2\alpha \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Mit der Prandl-Glauert-Regel lässt sich der Wert auf den kompressiblen Wert korregieren:

$$c_{p,komp.} = \frac{c_{p,inkomp.}}{\sqrt{(1 - Ma^2)}} = -\frac{2\alpha \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sqrt{1 - 0.36}} = -2.5\alpha \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$