Laminare Grenzschichten

analytische Lösungen stationärer Strömungen :

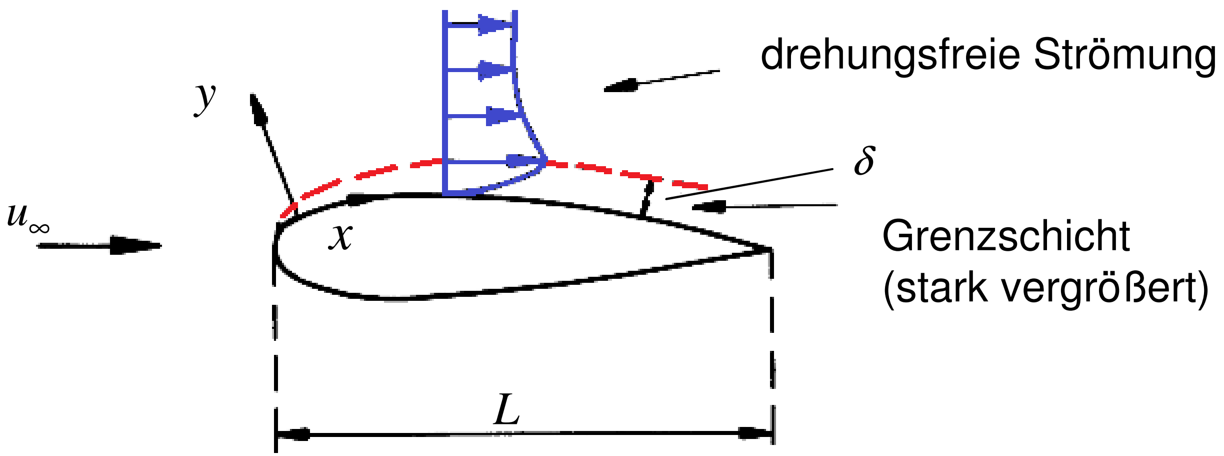
- Druck- und Reibungsterme im Gleichgewicht
- Trägheits- und Druckkräfte im Gleichgewicht

1904 Grenzschichtkonzept von Prandtl :

η klein, dann werden Reibungskräfte nur in unmittelbarer Wandnähe berücksichtigt.

$\eta \rightarrow 0$, dann $\delta \rightarrow 0$;

durch δ wird die Haftbedingung erfüllt → Widerstandskraft



Grenzschichtgleichungen

η klein bzw. Re groß

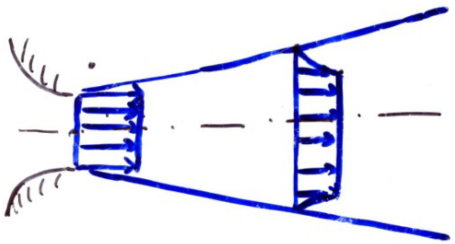
$\longrightarrow$ Grenzschicht existiert

$\delta << L \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y}$ sehr groß (i.a.)

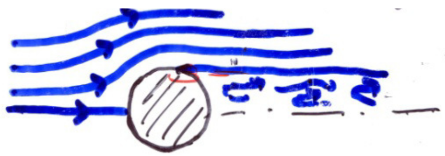
dünne Reibungsschichten :

- Wandgrenzschicht

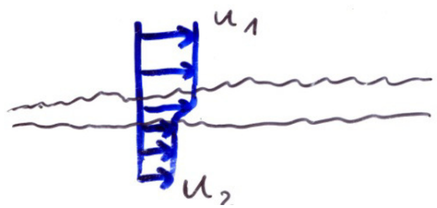
- Freistrahl



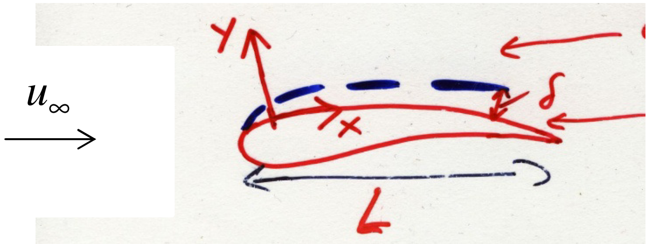
- Nachlauf



- Scherschicht



hier : Wandgrenzschichten



Ableitung eines Maßes für die Grenzschichtdicke $\tilde{\delta}$

Impulsgleichung in x-Richtung :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Referenzgeschwindigkeit : u_∞

charakteristische Länge : L

$$\longrightarrow \qquad u\frac{\partial u}{\partial x}\sim\frac{u_\infty^2}{L}$$ Ordnung der konvek. Terme

Maß für die Variation von *v* aus der Kontinuitätsgleichung :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u >> v \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$ von gleicher Ordnung in der Grenzschicht

$$\longrightarrow \quad \frac{u_\infty}{L} \sim \frac{v}{\tilde{\delta}} \quad \Rightarrow \quad v \sim \frac{u_\infty \tilde{\delta}}{L}$$

$$\Rightarrow \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{u_\infty^2}{L}$$

Ordnung der konvektiven Terme : $\frac{u_\infty^2}{L}$

Ordnung der Reibungsterme : $\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \nu \frac{u_\infty}{\tilde{\delta}^2}$

Annahme : Übereinstimmung der Ordnung

$$\Rightarrow \quad \tilde{\delta} \sim \sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}}$$

Vereinfachung der Bewegungsgleichungen in der Grenzschicht

es ist : $\frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} << \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

Referenzgrößen :

Längen : L in x- , $\tilde{\delta} << L$ in y - Richtung

Druck : ρu_∞^2

Geschw. : u_∞ in x - , $\frac{u_\infty \tilde{\delta}}{L}$ in y - Richtung

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \quad \bar{y} = \frac{y}{\tilde{\delta}}$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_\infty} \quad \bar{v} = \frac{v}{\tilde{\delta} u_\infty / L} = \frac{v}{u_\infty}\sqrt{\mathrm{Re}} \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho u_\infty^2}$$

man erhält :

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \underline{\underline{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{\mathrm{Re}}}}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \underline{\underline{\frac{1}{\mathrm{Re}^2}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}}} + \underline{\underline{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}}}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

wobei : $\mathrm{Re} = u_\infty \dfrac{L}{\nu}$

dimensionslose Variable und die Differentiale von Ordnung 1

$\Rightarrow$ $\mathrm{Re} \to \infty$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

bzw. in dimensionsbehafteter Form

$$\boxed{\begin{gathered} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{gathered}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{wand} = p_{\tilde{\delta}}$$

Druckverteilung aus Euler Glg.

$$U\frac{dU}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$$

oder Bernoulli Glg.

$$p+\frac{\rho}{2}U^2=konst.$$

U : Geschwindigkeit bei $\tilde{\delta}$

Anfangs- und Randbedingungen : $u(x,0)=0, \quad v(x,0)=0$

$u(x,\infty)=U(x) \quad u(x_0,y)=u_0(y)$

<u>2D stationäre kompressible Strömungen</u>

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\rho c_p u\frac{\partial T}{\partial x}+\rho c_p v\frac{\partial T}{\partial y}=u\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

bekannt : $c_p(T), \eta(T), \lambda(T), \frac{\partial p}{\partial x}$

Anfangs- und Randbedingungen :

$$u(x,0 \; = v(x,0) = 0$$

$$T(x,0) = T_w(x) \qquad \text{oder}$$

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$$

$$u(x,\infty) \; = U(x), \quad T(x,\infty) = T_i(x)$$

$$u(x_0, y) = u_0(y)$$

$$T(x_0, y) = T_0(y)$$

Gültigkeit der Grenzschichtvereinfachung

$$\mathrm{Re} >> 1$$

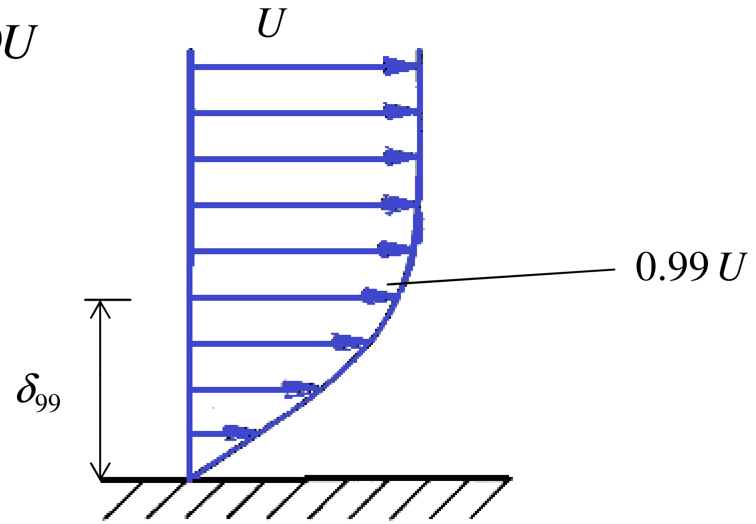
$$R >> \tilde{\delta}$$

Grenzschichtgrößen

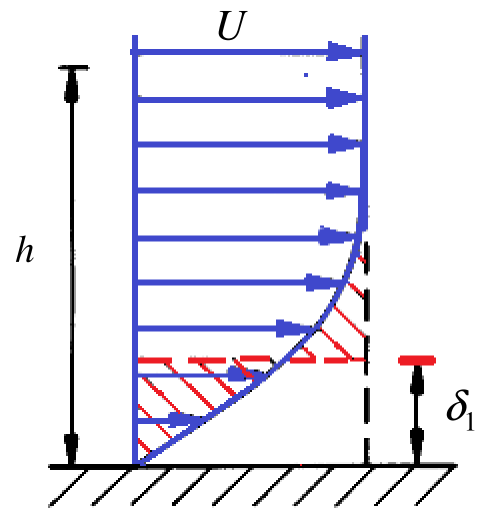
Definition der Grenzschichtdicke (3 übliche Maße)

0,99 U – Dicke

$$\delta \overset{!}{=} \delta_{99}, \; wobei \; u(x, y = \delta_{99}) = 0.99U$$



Verdrängungsdicke : δ_1



Aufdickung einer angenommen reibungsfreien Strömung um δ_1 , wobei $\dot{Q}_i = \dot{Q}_v$

$h >> \delta$, es gilt

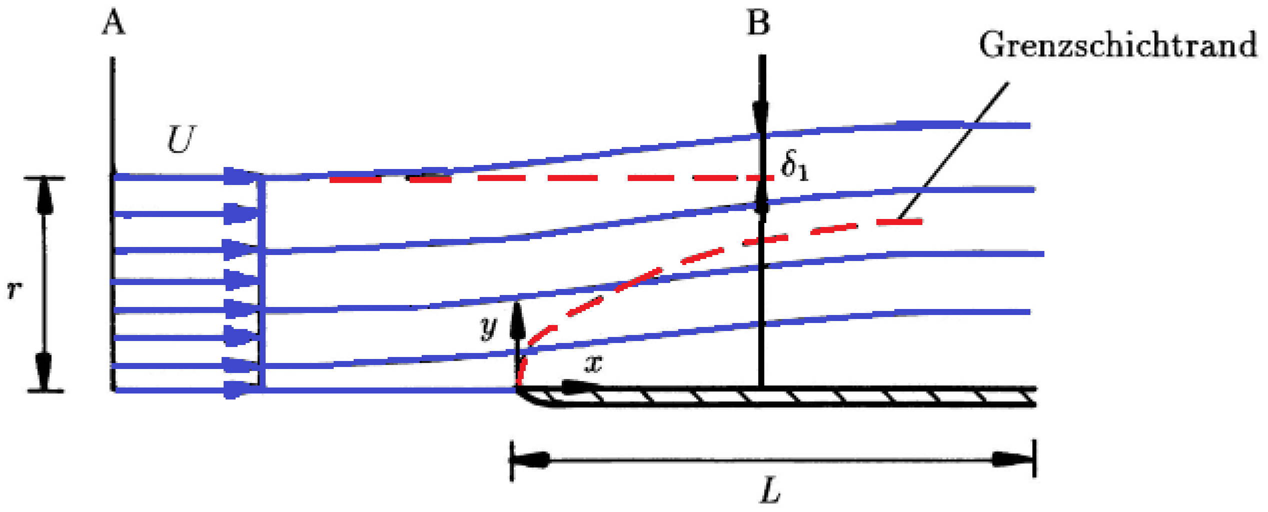
$$\underbrace{\int_0^h u\,dy}_{\dot{Q}_v} = \underbrace{U(h-\delta_1)}_{\dot{Q}_i}$$

$$h \to \infty \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

für $\dfrac{dp}{dx}$ ist δ_1 entscheidend

weitere Interpretation von : δ_1

δ_1 ist der Abstand, um den die Stromlinien bei $y > \delta$ abgedrängt werden.



$\dot{Q}$ in A und B:

$$Ur = \int_0^{r+\delta_1} u\,dy = \int_o^{r} u\,dy + U\delta_1$$

$$\Rightarrow \qquad U\delta_1 = \int_0^{r} (U-u)\,dy$$

$$r \to \infty \quad : \qquad \boxed{\delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1-\frac{u}{U}\right) dy}$$

Impulsverlustdicke δ_2

δ_2 ist die Dicke, so dass $\rho U^2 \delta_2$ den Impulsverlust durch die Grenzschicht dargestellt

mit obiger Abbildung: $I_{vb} \equiv$ Impulsfluss/Einheitsbreite

Schnitt *A:* $\qquad I_{vb,A} = \rho U^2 r$

Schnitt *B:* $\qquad I_{vb,B} = \int_0^{r+\delta_1} \rho u^2 dy = \int_0^{r} \rho u^2 dy + \rho U^2 \delta_1$

$$\delta_2 \text{ aus } \quad I_{vb,A} - I_{vb,B}$$

$$\rho U^2 r - \int_0^r \rho u^2 dy - \rho U^2 \delta_1 \equiv \rho U^2 \delta_2$$

$$\int_0^r \left(U^2 - u^2\right) dy - U^2 \int_0^r \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = U^2 \delta_2$$

$$\Rightarrow \qquad r \to \infty \qquad \boxed{\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy}$$

$$\delta_2 < \delta_1$$

von Kármánsche Integralbeziehung

exakte Lösungen der Grenzschichtgleichungen selten, Näherungsverfahren auf der Basis eines Integrals (von Kármán 1921) gesucht

$$\int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) dy = \int_0^h \left(U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dy$$

mit $h > \delta$

Umformung der x-Impulsgleichung mittels $\pm u\frac{dU}{dx}$ und $v\frac{\partial U}{\partial y}$

$$\underbrace{(U-u)\frac{dU}{dx}}_{\mathrm{I}}+\underbrace{u\frac{\partial(U-u)}{\partial x}}_{\mathrm{II}}+\underbrace{v\frac{\partial(U-u)}{\partial y}}_{\mathrm{III}}=\underbrace{-\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\mathrm{IV}}$$

I :

$$\int_0^h (U-u)\frac{dU}{dx}dy = U\frac{dU}{dx}\int_o^h\left(1-\frac{u}{U}\right)dy = U\delta_1\frac{dU}{dx}$$

III :

$$\int_0^h v\frac{\partial(U-u)}{\partial y}dy = v(U-u)\Big|_0^h - \int_0^h (U-u)\frac{\partial v}{\partial y}dy = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}(U-u)dy$$

III‘

IV : Schubspannung auf der Wand

$$\tau_0 = \eta\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

$$-\frac{\eta}{\rho}\int_0^h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy = -\frac{1}{\rho}\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta \frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{\tau_0}{\rho}$$

II, III‘ :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u(U-u)\right] = u\frac{\partial (U-u)}{\partial x} + (U-u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\int_0^h \left(u\frac{\partial (U-u)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}(U-u)\right)dy =$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}\left[u(U-u)\right]dy = \frac{d}{dx}U^2\int_0^h \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy = \frac{d}{dx}\left(U^2\delta_2\right)$$

Zusammenfassung :

von Kármánsche Integralbeziehung

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(U^2\delta_2\right) + \delta_1 U\frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}}$$

bzw.

$$\boxed{\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}\left(2\delta_2 + \delta_1\right) = \frac{\tau_0}{\rho U^2}}$$

Annahme : Geschwindigkeitsprofil

$$\Rightarrow \delta = f(x) \text{ und } \tau_0 = g(x)$$

Beispiel : längsangeströmte ebene Platte

$$\frac{dU}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\int_o^\delta (U-u)u\,dy = \frac{\tau_0}{\rho}$$

Geschwindigkeitsprofil : $$\frac{u}{U} = a + b\frac{y}{\delta} + c\frac{y^2}{\delta^2} + d\frac{y^3}{\delta^3}$$

Randbedingungen : $$y = 0 \qquad u = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad 1)$$

$$y \to \delta \qquad u = U \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad 2)$$

aus 1) folgt : $a = c = 0$

aus 2) folgt : $b = 3/2 \; ; \; d = -1/2$

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad \text{mit} \quad \delta = \delta(x)$$

$$U^2 \int_0^h \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{39}{280} U^2 \delta$$

und :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{3}{2} \nu \frac{U}{\delta}$$

$\Longrightarrow$ von Kármán Beziehung für die ebene Platte

$$\frac{39}{280}\frac{d}{dx}(U^2\delta) = \frac{39}{280}U^2\frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2}\nu\frac{U}{\delta}$$

Integration in x-Richtung mit $\delta = 0$ bei $x = 0$

$$\delta = 4.64\sqrt{\nu x / U}$$

$$\delta_{lam} \sim \sqrt{x}$$

Reibungsbeiwert : $c_f = \dfrac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} U^2}$

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{\rho}{2} U^2} = \frac{\frac{3}{2} U \nu / \delta}{\frac{1}{2} U^2} = \frac{0.646}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad c_{f,lam} \sim x^{-\frac{1}{2}}$$

Ähnliche Lösung der Grenzschichtströmung der ebenen Platte (Blasius Lösung)

Vernachlässigung der Verdrängung

$$\rightarrow U = konst \qquad \rightarrow \frac{dp}{dx} = 0$$

$\rightarrow$ kein Längenmaß

Vorstellung : Lösung ist „ähnlich“

$$\frac{u}{U} = g(\overline{\eta})$$

wobei

$$\overline{\eta} = \frac{y}{\delta(x)}$$

(Ansatz von Blasius)

Ausgangsgleichungen und Randbedingungen

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$x=0,\, y \qquad u(y)=U$$

$$0\le x\le L,\, y=0 \qquad u=v=0$$

$$0\le x\le L,\frac{y}{\delta}\to\infty \qquad u\to U$$

Kontinuitätsgleichungen via Stromfunktion ψ

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\psi=\int_0^h u\,dy=\delta\int_0^{\overline{\eta}} u\,d\overline{\eta}$$

$$=\delta\int_0^{\overline{\eta}} U\ g(\overline{\eta})d\overline{\eta}=\delta U\ f(\overline{\eta}), \qquad \text{so dass} \qquad g(\overline{\eta})\equiv\frac{df}{d\overline{\eta}}$$

Stromfunktion ψ in Impulsgleichungen einführen

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$$

$$x=0 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=U$$

$$y=0 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\psi=0$$

$$\frac{y}{\delta}\to\infty \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}\to U$$

Rückführung auf $f(\overline{\eta})=\dfrac{\psi}{\delta U}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=U\left[f\frac{d\delta}{dx}+\delta\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\underline{\underline{U\frac{d\delta}{dx}\left[f-f'\overline{\eta}\right]}}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=U\frac{d\delta}{dx}\frac{\partial}{\partial y}\left[f-f'\overline{\eta}\right]=\underline{\underline{-\frac{U\overline{\eta}f''}{\delta}\frac{d\delta}{dx}}}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\underline{\underline{Uf'}},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\underline{\underline{\frac{Uf''}{\delta}}},\quad \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=\underline{\underline{\frac{Uf'''}{\delta^2}}}$$

mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\overline{\eta}} \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial x} = -f' \frac{\overline{\eta}}{\delta} \frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{d\overline{\eta}} \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial y} = f' \frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f' \overline{\eta}) = \overline{\eta} f'' \frac{1}{\delta} + f' \frac{1}{\delta}$$

die Impulsgleichung lautet

$$-U^2 f' f'' \frac{\overline{\eta}}{\delta}\frac{d\delta}{dx} - U^2 \frac{f''}{\delta}\frac{d\delta}{dx}\left[f - f'\,\overline{\eta}\right] = \nu \frac{Uf'''}{\delta^2} \qquad \Rightarrow \; -\left(\frac{U\,\delta}{\nu}\frac{d\,\delta}{dx}\right) f \;\; f'' = f'''$$

da $f(\overline{\eta}\;)$ folgt

$$\frac{U\delta}{\nu}\frac{d\delta}{dx} = \text{konstant} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \qquad \text{(gewählt)}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu\, x}{U}}$$

Somit gilt

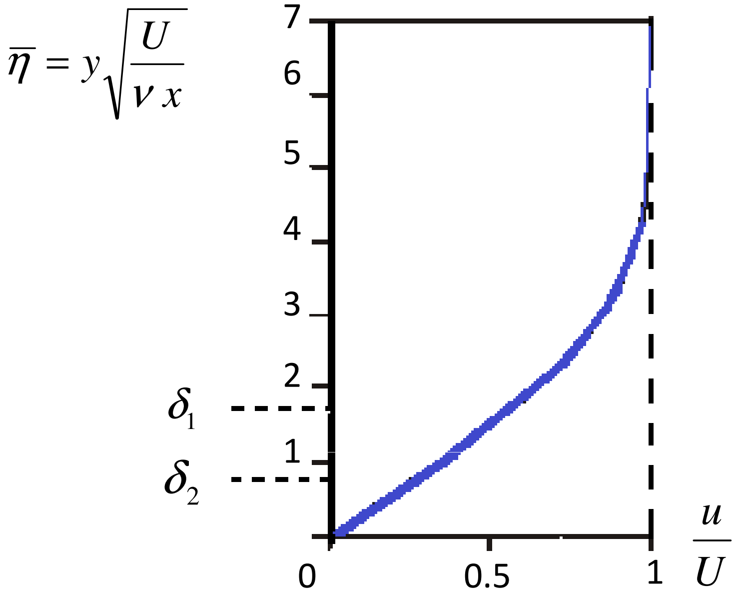
$$\boxed{\frac{1}{2} f\, f'' + f''' = 0}$$

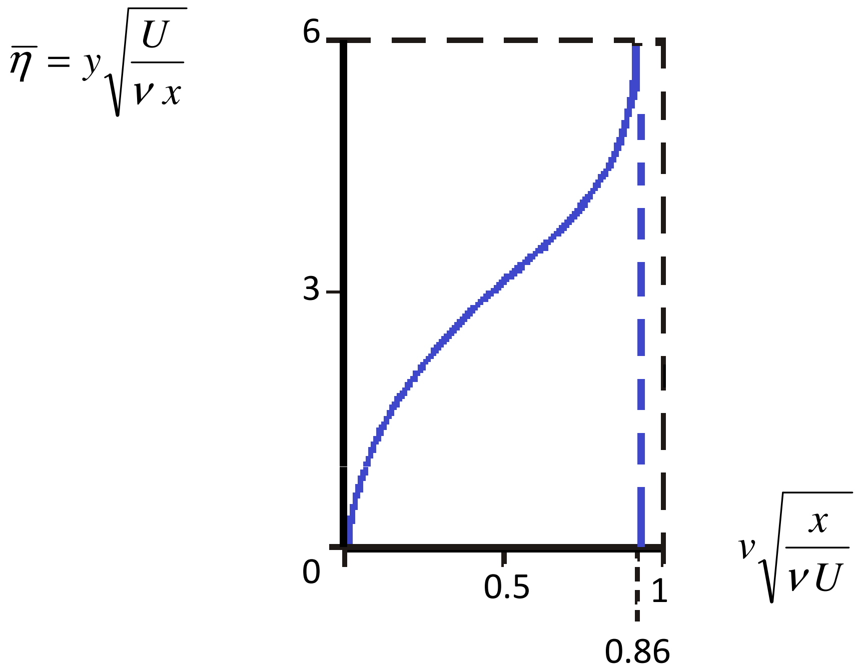
Randbedingungen :

$$f(0) = f'(0) = 0$$
$$f'(\infty) = 1$$

Blasius 1908 über Reihenentwicklung gelöst.

$$\frac{u}{U} = f'(\overline{\eta})$$: Geschwindigkeitsprofil für sämtliche Schnitte





$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -U\,\frac{d\delta}{dx}\left[f - f'\overline{\eta}\right] \qquad \frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{xU}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\left[\overline{\eta} f' - f\right]$$

$u = 0{,}99U$ bei $\xi = 4.9$

$$\Rightarrow \quad \delta_{99} = 4.9\sqrt{\frac{\nu\, x}{U}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\delta_{99}}{x} = \frac{4.9}{\sqrt{\frac{Ux}{\nu}}} = \frac{4.9}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \quad \Rightarrow \delta \sim \sqrt{x}$$

$$U = 1\frac{m}{s} \quad \rightarrow \quad \mathrm{Re}_{x=1m} = 6\times 10^4 \quad \Rightarrow \quad \delta_{99} = 2cm$$

$$\delta_1 = \int_0^\infty (1-\frac{u}{U})dy \qquad \delta_1 = 1.72\sqrt{\frac{\nu\, x}{U}}, \quad \delta_2 = 0.664\sqrt{\frac{\nu\, x}{U}}$$

$$\tau_0 = \eta \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \eta \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \eta \frac{Uf''(0)}{\delta}$$

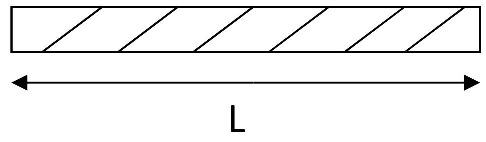
$$\tau_0 = \frac{0.332\rho U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad \Rightarrow \quad \tau_0 \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Achtung : $x \rightarrow 0 \quad \tau_0 \rightarrow \infty; \ \frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y}$ nicht mehr erfüllt!

lokaler Reibungsbeiwert

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

Reibungskraft auf <u>einer</u> Seite der Platte



$$D = \int_0^L \tau_0 dx = \frac{0.664\,\rho U^2 L}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$$

$$D_{lam} \sim U^{3/2}$$

Reibungsbeiwert c_D

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 L} = \frac{1.33}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$$

wobei $$c_D = \frac{1}{L}\int_0^L c_f\,dx$$