Potentialströmungen



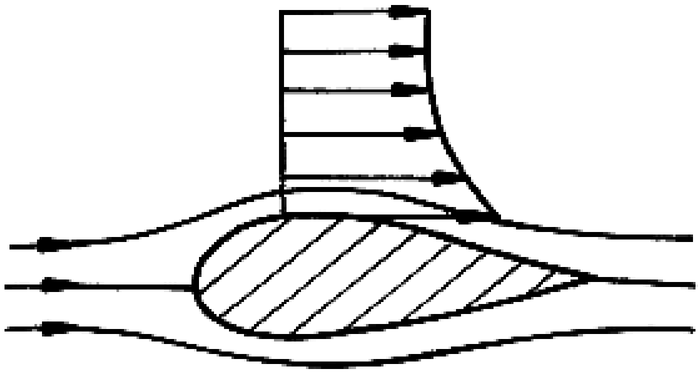




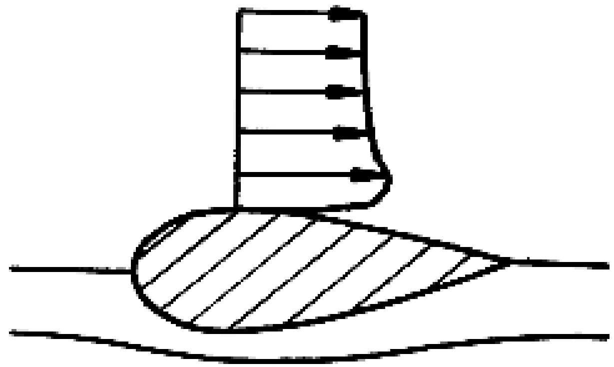
Potentialströmungen

$\rho = konst.$, reibungsfrei, 2D

$$\rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$$



idealisierte Strömung $\nu = 0$



realistische Strömung

Reibungseffekte nur in dünnen Wandschichten interessant.

$\Rightarrow$ Aufteilung :

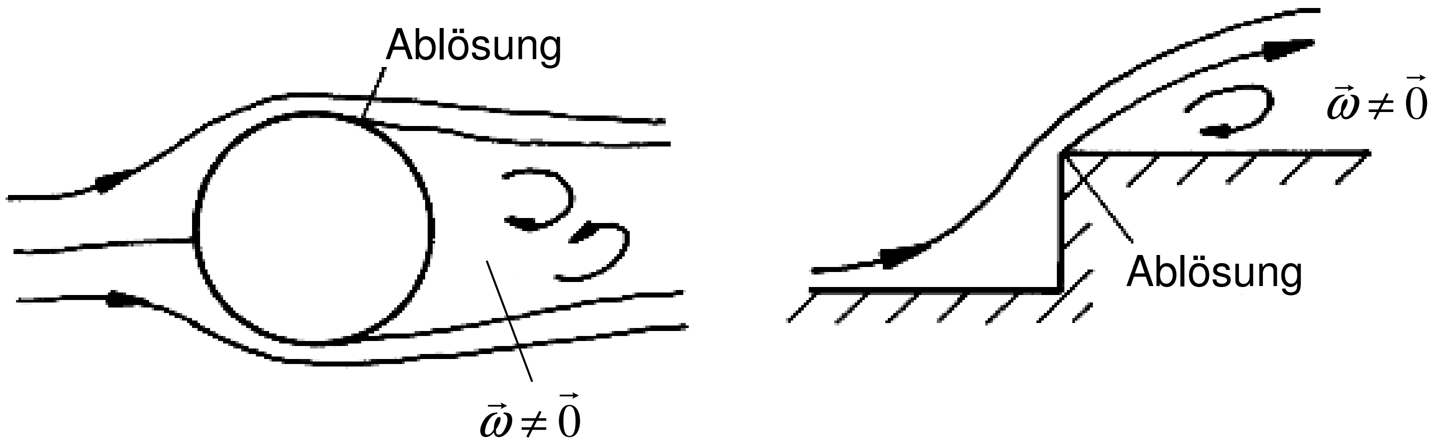
- Außenbereich

Strömung wird reibungsfrei und drehungsfrei angenommen.

$\Rightarrow$ Analyse mittels d. Th. drehungsfr. Strömung

- Innenbereich

Reibung führt u. a. zur Diffusion der Wirbelstärke



Potentialfunktion, Stromfunktion, Laplace Gleichung

$\vec{\omega} = rot\,\vec{v} = \vec{0}$ Lösung der Impulsgleichung

Identität :

$$rot\,(grad\ f\,) = \vec{0}$$

$$\vec{v} = grad\,\Phi$$

$$\vec{\omega} = rot\ (grad\,\Phi) = 0$$

$$div\,\vec{v} = 0 \xrightarrow{Bestgsglg.\ von\ \Phi} div\,(grad\,\Phi) = 0$$

$$\boxed{\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0}$$

Laplace Gleichung der Potentialfunktion

da $\quad u = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = \dfrac{\partial\phi}{\partial y}$

Definition von ψ :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- Kontinuitätsgleichung erfüllt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

- Bestimmung von ψ durch $\vec{\omega} = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{(eben)}$$

$$\boxed{\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0}$$

Laplace Gleichung der Stromfunktion

Vergleich von ϕ und ψ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Cauchy- Riemann DGL

$\phi\,(x,\ y) = konst.$ → Potentiallinien

$\psi\,(x,\ y) = konst.$ → Stromlinien

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = udx + vdy = 0 \qquad (1)$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -vdx + udy = 0 \qquad (2)$$

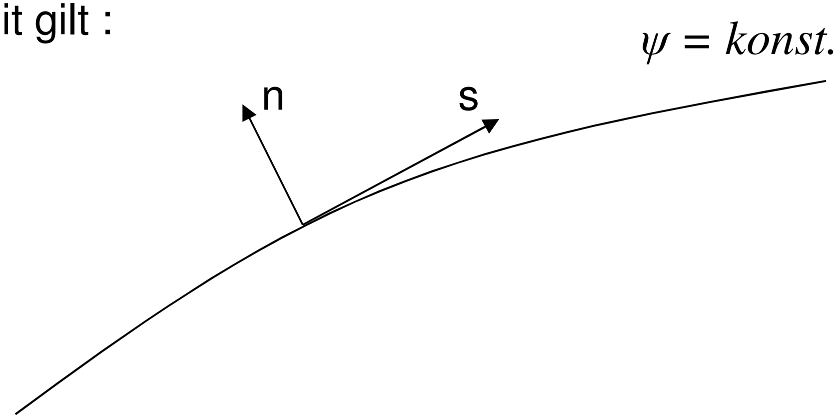
$$(1)\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi} = -\frac{u}{v} \qquad\qquad (2)\quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi} = \frac{v}{u}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi} = -\left[\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi}\right]^{-1} \qquad \Rightarrow \quad \psi \perp \phi$$

Cauchy-Riemann : $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$

Stromlinien können sich nicht schneiden → keine Komp. normal zu $\psi = konst.$

Somit gilt :



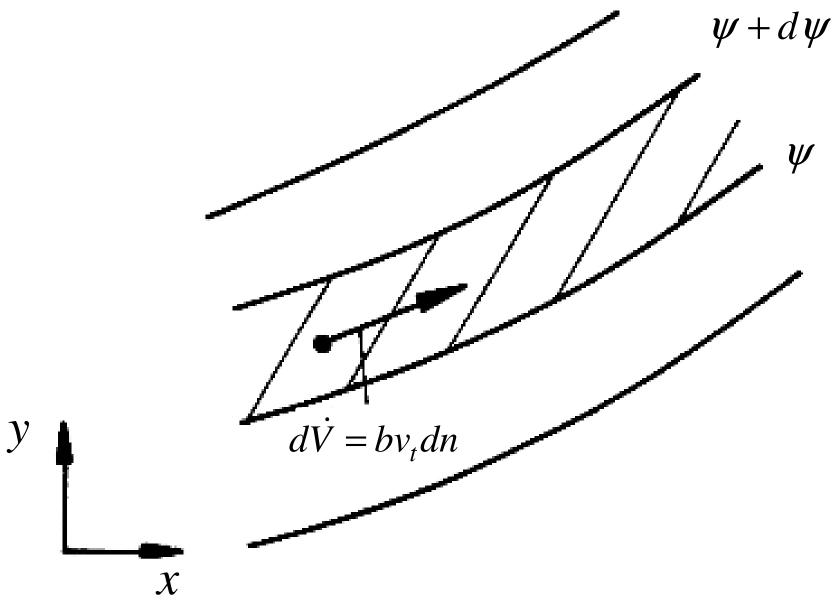
$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0$$

$$v_t = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \neq 0$$

kinematische Randbedingung

$\longrightarrow$ Fluidelemente **gleiten** auf der Kontur

Berechnung des Volumenstroms über ψ



$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} dn = v_t dn$$

$$d\dot{V} = bd\psi$$

Berechnung der Druckverteilung

ϕ *oder* ψ bekannt $\rightarrow u, v$

Impulserhaltung für reibungsfreie Strömungen (Euler Gleichung)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underline{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}} = \underline{\vec{b}} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$$

Identität : (unter Berücksichtigung der Drehungsfreiheit)

$$\underline{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}} = \vec{\nabla}\frac{\vec{v}^{\,2}}{2} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}$$

Potential :

$$\underline{\vec{b}} = -\vec{\nabla}(gz)$$

stationär :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$$

einsetzen und integrieren :

$$p + \frac{\rho}{2}\vec{v}^{\,2} + \rho g z = konst. \quad \text{(Bernoulli)}$$

$\Longrightarrow$ Gleichungen sind linear → Superposition möglich

Elementarströmungen mit $\phi_1,....\phi_n$ werden zu neuen Strömungen zusammengesetzt.

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i$$

$\phi_1, \phi_2, ...\phi_n$ bekannt, a_i angepasst an Problem → ϕ

Komplexe Potentialfunktion

kurz : Theorie der komplexen Funktionen

wichtig für die Analyse der Laplaceschen Differentialgleichung

Definition :

komplexe Geschwindigkeit : $w = u + iv$

konjug. komplexe Geschwindigkeit : $\overline{w} = u - iv$

die Funktion $\boldsymbol{F(z) = \int \overline{w} dz}$ ist die **komplexe Potentialfunktion**

F(z) erfüllt die Laplace Gleichung

$$F(z) = \int \overline{w} dz = \int (udx + vdy) + i \int (udy - vdx)$$

$$= \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \right) + i \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right)$$

$$= \int d\phi + i \int d\psi = \phi(x, y) + i \psi(x, y)$$

Laplace Gleichung :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{d^2 F}{dz^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{dF}{dz} \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{d^2 F}{dz^2} i^2$$

$$\frac{d^2F}{dz^2} - \frac{d^2F}{dz^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $F(z)$ beschreibt Potentialströmung

$F(z)$: analytische Funktion

Singularität :

$F(z)$ oder $\dfrac{dF}{dz}$ → 0 oder → ∞

Cauchy-Riemann nicht erfüllt

$\Rightarrow$ $\phi = konst.$ und $\psi = konst.$ <u>nicht</u> orthogonal !

Bsp. :

$F(z) = \ln(z)$ analytisch außer in $z = 0$!

$F(z) = \dfrac{1}{z}$ analytisch außer in $z = 0$!

Superpositionsprinzip auch für $F(z)$:

$F(z)$ bekannt $\Rightarrow$ $\overline{w} = u - iv = \frac{dF}{dz}$

$\Rightarrow$ Geschwindigkeitsverteilung $\Rightarrow$ Druckverteilung

Vorgehensweise (hier) : Vorgabe von $F(z)$

Beispiele für die komplexe Potentialfunktion

2D, inkompressibel

Winkel- und Eckenströmung :

$$F(z) = \frac{a}{n} z^n = \frac{a}{n}(x+iy)^n = \frac{a}{n}(re^{i\varphi})^n$$

$$= \frac{a}{n} r^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

$$n \in \mathrm{R},\ a = a_r \pm i a_i$$

zunächst : $a \in R$

$$\phi = \frac{a}{n} r^n \cos(n\varphi)$$

$$\psi = \frac{a}{n} r^n \sin(n\varphi)$$

Stromlinien : $\psi = konst.$

$$\longrightarrow \quad r^n \sin(n\varphi) = konst. = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin(n\varphi) = 0$$

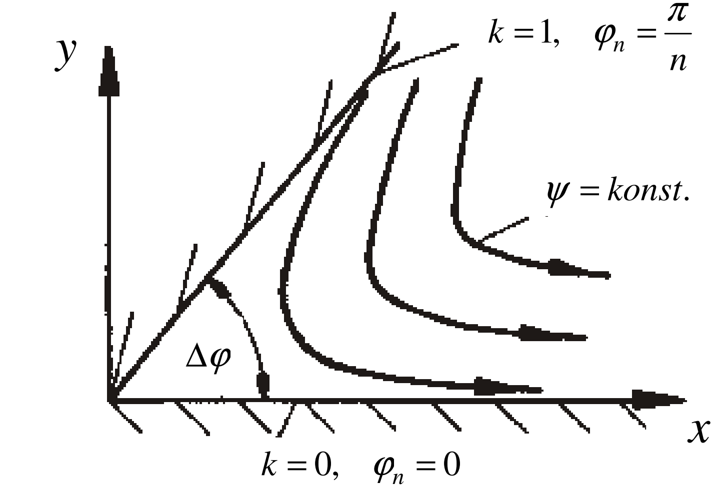
$$\varphi = \varphi_n = K\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad K = 0,1,2,\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l} K = 0 : \varphi = 0 \\ K = 1 : \varphi = \dfrac{\pi}{n} \end{array}\right\} \Delta\varphi = \frac{\pi}{n}$$

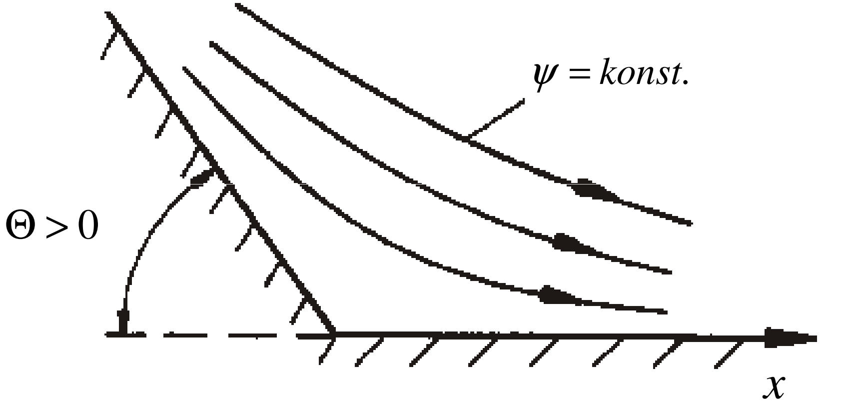
$n \geq 2:$ $\Delta\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (spitzer Winkel)

$2 > n > 1:$ $\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < \pi$ (konkave Ecke)

$1 > n > \frac{1}{2}:$ $\pi < \Delta\varphi < 2\pi$ (konvexe Ecke)



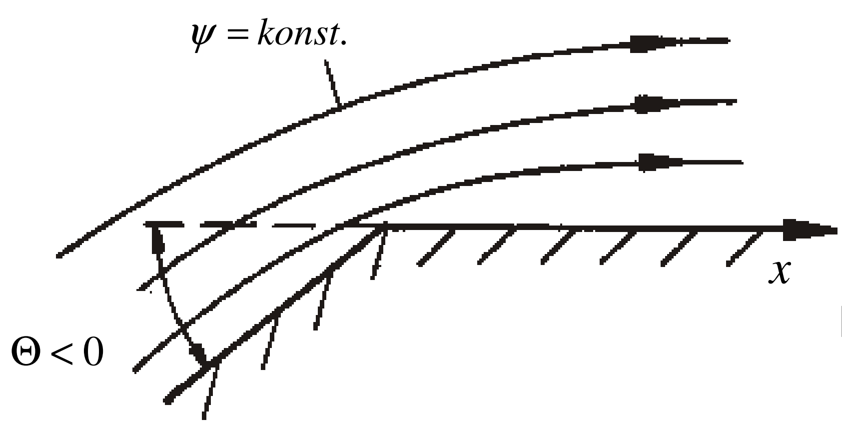
spitzer Winkel : $n \geq 2$



konkave Ecke : $2 > n > 1$

wobei

$$\Theta = \pi - \Delta\varphi = (n-1)\frac{\pi}{n}$$



konvexe Ecke : $1 > n > 1/2$

$$\overline{w}(z) = \frac{dF}{dz} = az^{n-1} = u - iv\ ; \quad mit \quad z = re^{i\varphi}$$

bzw.

$$\|\vec{v}\| = |a| r^{n-1}$$

<u>konkave Ecke (n > 1) :</u> $\|\vec{v}\| \to 0$ sofern $r \to 0$

<u>konvexe Ecke (n < 1) :</u> $\|\vec{v}\| \to \infty$ sofern $r \to 0$

Stromlinien anhand von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\tan[(n-1)\varphi]$$

Parallelströmung

$$n = 1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = \pi$$

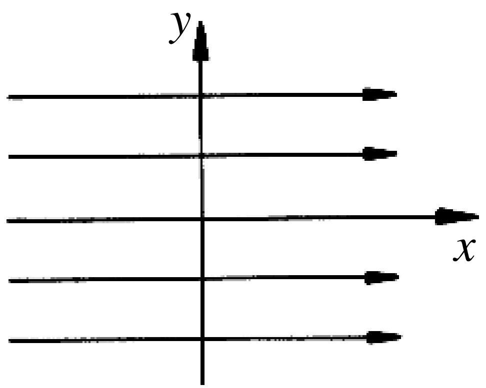
$$F(z) = az = (a_r - ia_i)(x + iy)$$

$$\frac{dF(z)}{dz} = \overline{w} = a = a_r - ia_i = u - iv$$

$$\phi = a_r x + a_i y \quad , \quad \psi = a_r y - a_i x$$

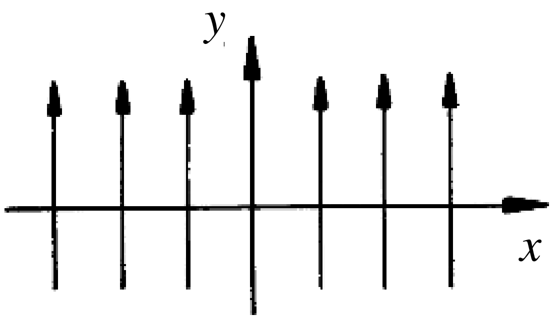
$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = a_r$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = a_i$$



$a_r > 0$

$a_i = 0$



$a_r = 0$

$a_i > 0$

Ebene Staupunktströmung

$$n = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$F(z) = \frac{a}{2} z^2 = \phi + i\psi$$

$$\psi = axy$$

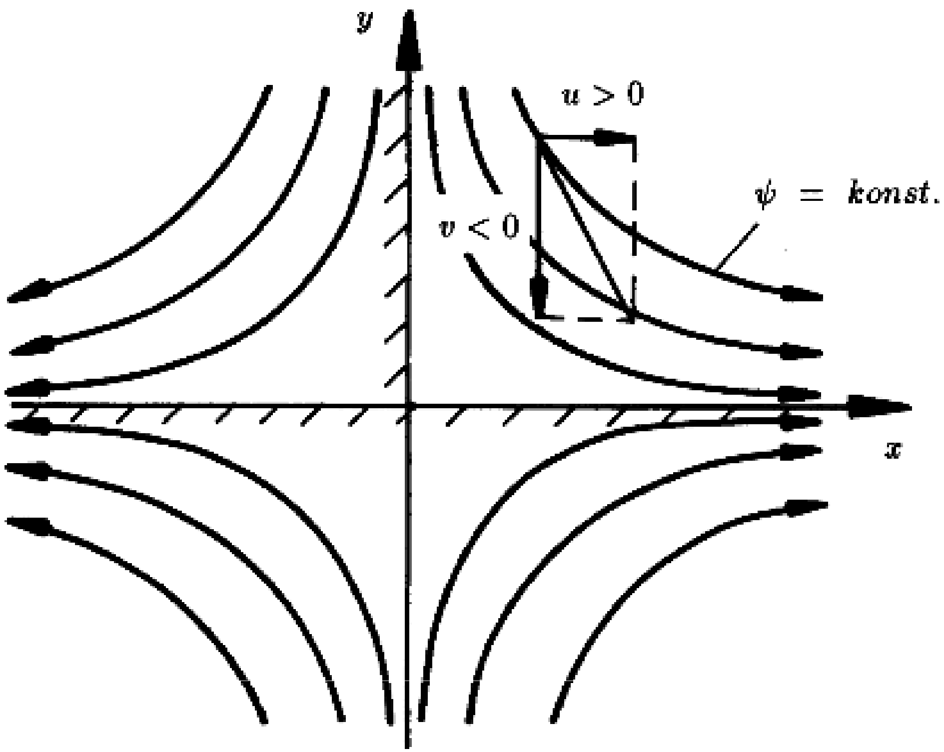
a ist Element der reellen Zahlen

$$\phi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2)$$

$\psi = konst.$: $\quad y \sim \frac{1}{x} \longrightarrow$ gleichseitige Hyperbel

$$\overline{w}(z) = \frac{dF}{dz} = az = ax + iay = u - iv$$

$$\left.\begin{array}{l} u = ax \\ v = -ay \end{array}\right\} \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{y}{x}$$



Isotachen : $\| \vec{v} \| = | a | r$

Isobaren : $p(r) = p_0 - \frac{\rho}{2} a^2 r^2$

Quelle oder Senke

$$F(z) = a\ln z = \frac{E}{2\pi}\ln z = \frac{E}{2\pi}\ln(re^{i\varphi})$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \frac{E}{2\pi}\ln r$$

$$\psi = \frac{E}{2\pi}\varphi = a\varphi$$

$\phi = konst.$: Kreise um den Ursprung

$\psi = konst.$: Strahlen durch den Ursprung

$$\overline{w}(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{E}{2\pi z} = u - iv$$

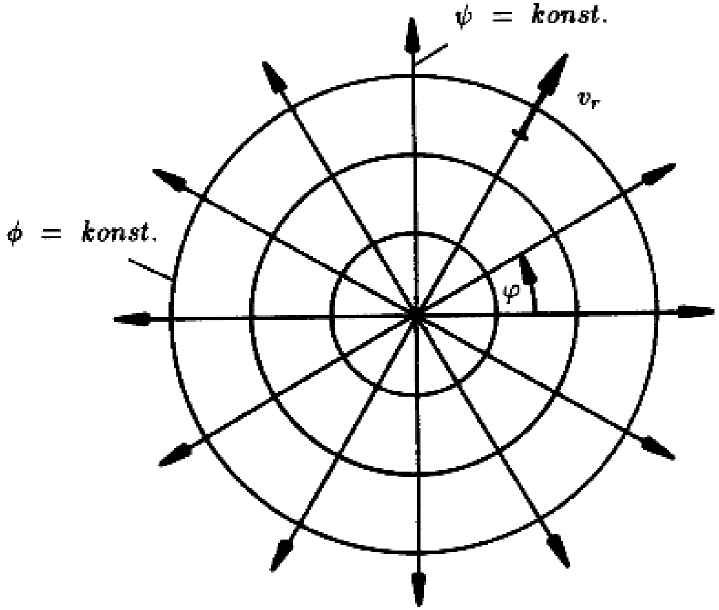
$$u = \frac{Ex}{2\pi(x^2 + y^2)} \qquad v = \frac{Ey}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

geeigneter in Polarkoordinaten

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{E}{2\pi r} \qquad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = 0$$

$E > 0$: Quellströmung

$E < 0$: Senkenströmung



$$\dot{V} = b[\psi(\varphi + 2\pi) - \psi(\varphi)]$$
$$= b[a(\varphi + 2\pi) - a\varphi] = 2\pi ab = Eb \quad \Rightarrow \quad a = E / 2\pi \quad \text{bzw.} \quad E = \dot{V} / b$$

$v_r \sim \frac{1}{r}$: $r \to 0 \quad \Rightarrow \quad v_r \to \infty$ (Singular.)

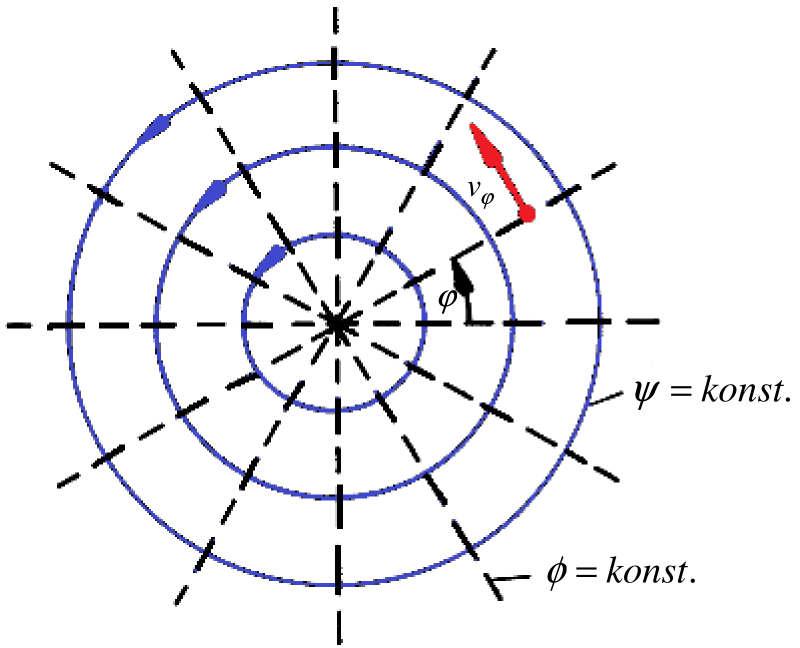
Potentialwirbel

Vertauschen von ϕ und ψ

$$\Rightarrow \quad \phi = c\varphi$$
$$\psi = -c \ln r$$

$$F(z) = \phi + i\psi = -ic \ln z$$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0$$
$$v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{c}{r}$$



c : ?

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

$$r = R: \qquad \Gamma = \frac{c}{R} 2\pi R = 2\pi c$$

$$\Rightarrow \quad F(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z, \phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi, \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

Wirbelkomponente in Polarkoordinaten

$$\omega_z = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi) - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right)$$

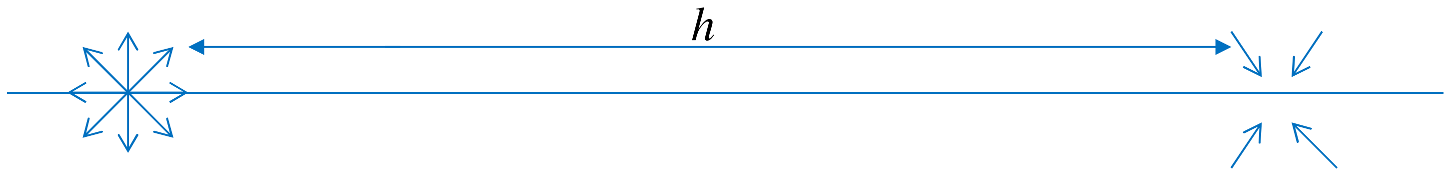
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = 0, \quad rv_\varphi = c = \frac{\Gamma}{2\pi} = konst. \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial(rv_\varphi)}{\partial r} = 0 \qquad [r \neq 0]$$

$$\omega_z = 0 \quad für \quad r \neq 0$$

$r = 0? \quad \omega_z \neq 0, \quad denn \quad \Gamma \neq 0$ bedingt Drehung (Stokes)

$\Rightarrow$ bei r = 0 existiert eine Wirbellinie oder Stabwirbel $\perp$ zur Strömungsebene

Dipolströmung

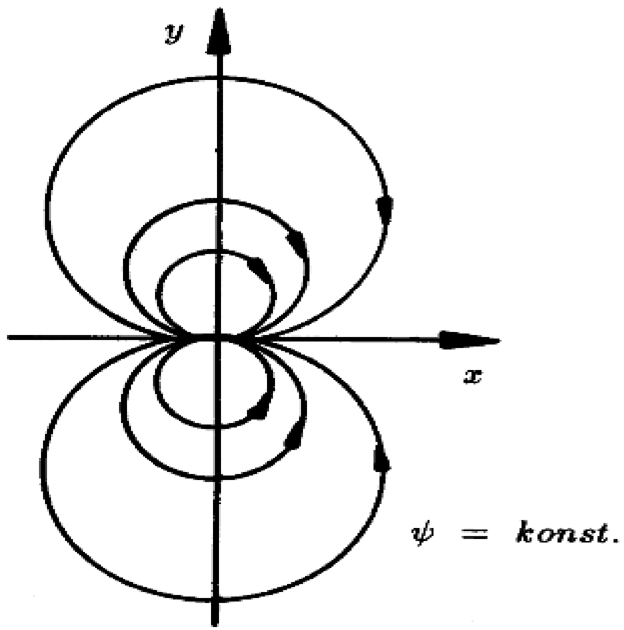


Quelle Senke

$$E_{Quelle} = E_{Senke} = E$$

<u>Bedingung :</u> $E \sim \frac{1}{h}$ bzw. $M = Eh = konst.$ für $h \to 0$

$\Rightarrow$ Dipolströmung mit Dipolmoment M und Dipolachse x.



$$F(z)=\frac{M}{2\pi}\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{\ln(z+h)-\ln z}{h}}_{\dfrac{d\ln(z)}{dz}=\dfrac{1}{z}}=\frac{M}{2\pi\, z}=\frac{M}{2\pi}\frac{x-iy}{r^2}=\phi+i\varphi$$

$$\phi=\frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\psi=-\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

ψ - Gleichung liefert

$$x^2+\left(y+\frac{M}{4\pi\psi}\right)^2=\left(\frac{M}{4\pi\psi}\right)^2$$

$\Rightarrow$ Stromlinien : Kreis mit Zentren $\left(0,-\frac{M}{4\pi\psi}\right)$ und Radien $M/(4\pi\psi)$

(siehe Skizze)

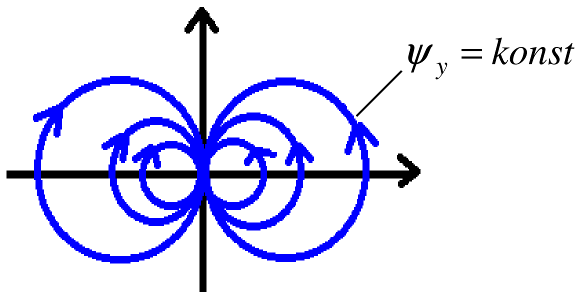
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$\Longrightarrow$ Multiplikation mit i $\Longrightarrow$ Rotation um $\pi/2$.

D. h. iM statt M

$$\Longrightarrow \qquad \psi_y = \frac{Mx}{2\pi(x^2+y^2)}$$

bzw. $$\left(x - \frac{M}{4\pi\psi_y}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{4\pi\psi_y}\right)^2$$



Aus $F(z) = \dfrac{M}{2\pi z}$ folgt :

$$\overline{w}(z) = \frac{dF}{dz} = -\frac{M}{2\pi z^2} = u - iv$$

$$u = -\frac{M}{2\pi r^2}\cos(2\varphi) = -\frac{M}{2\pi}\frac{x^2 - y^2}{r^4}$$

$$v = -\frac{M}{2\pi r^2}\sin(2\varphi) = -\frac{M}{2\pi}\frac{2xy}{r^4}$$

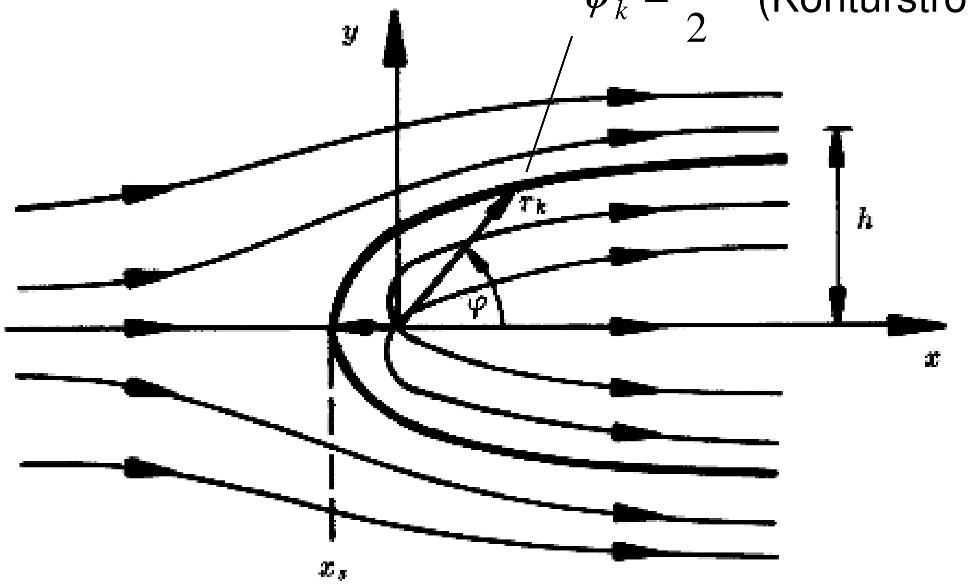
$\|\vec{v}\| \sim 1/r^2 \longrightarrow$ Singularität bei $r = 0$

Halbkörper

Parallelströmung + Quellenströmung

$$F(z) = u_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln z$$

$\psi_k = \frac{E}{2}$ (Konturstromlinie)



$$\phi = u_\infty x + \frac{E}{2\pi}\ln r = u_\infty x + \frac{E}{4\pi}\ln(x^2 + y^2)$$

$$\psi = u_\infty y + \frac{E}{2\pi}\varphi$$

bzw. die Geschwindigkeitskomponenten :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = u_\infty + \frac{E}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{E}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$\Longrightarrow$ Koordinaten des Staupunkts $(\ u = v = 0\ )$

$v = 0:$ $\quad y_s = 0$

$u = 0:$ $\quad x_s = -\dfrac{E}{2\pi u_\infty}$

Wandstromlinie : ?

$\psi_k = \psi_s$ (Wert von ψ im Staupunkt)

$$\varphi_s = \pi \qquad \Rightarrow \qquad \psi_s = \frac{E}{2}$$

$$\psi_k = u_\infty r_k \sin\varphi + \frac{E}{2\pi}\varphi = \frac{E}{2}$$

$$\Rightarrow \quad r_k = \frac{E}{2\pi u_\infty} \frac{\pi - \varphi}{\sin\varphi}$$

max. (Halb) breite h bei $x \rightarrow \infty$:

$$x \rightarrow \infty: \qquad y = h \qquad , \qquad \varphi = 0$$

$$\psi_\infty = \psi_k$$

$$\psi_\infty = u_\infty h = \psi_k = \frac{E}{2} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{E}{2u_\infty}$$

Druckverteilung : ?

$$p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)$$

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2}u_\infty^2} = 1 - \left[\left(\frac{u}{u_\infty}\right)^2 + \left(\frac{v}{u_\infty}\right)^2\right]$$

$$c_p = 1 - \left[\left(1 + \frac{h}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{h}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right]$$

Druckverteilung auf der Kontur :

$$u_k = u_\infty + \frac{E}{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r_k} = u_\infty + \frac{u_\infty}{\pi - \varphi} \sin\varphi \cos\varphi$$

$$v_k = \frac{E}{2\pi} \frac{\sin\varphi}{r_k} = \frac{u_\infty}{\pi - \varphi} \sin\varphi \sin\varphi$$

$$c_{pk} = 1 - \left[\left(1 + \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\pi - \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\sin^2\varphi}{\pi - \varphi} \right)^2 \right]$$

Additionstheoreme :

$$\sin(2\varphi) = 2\cos\varphi \sin\varphi$$

$$\sin(2(\pi - \varphi)) = -\sin(2\varphi)$$

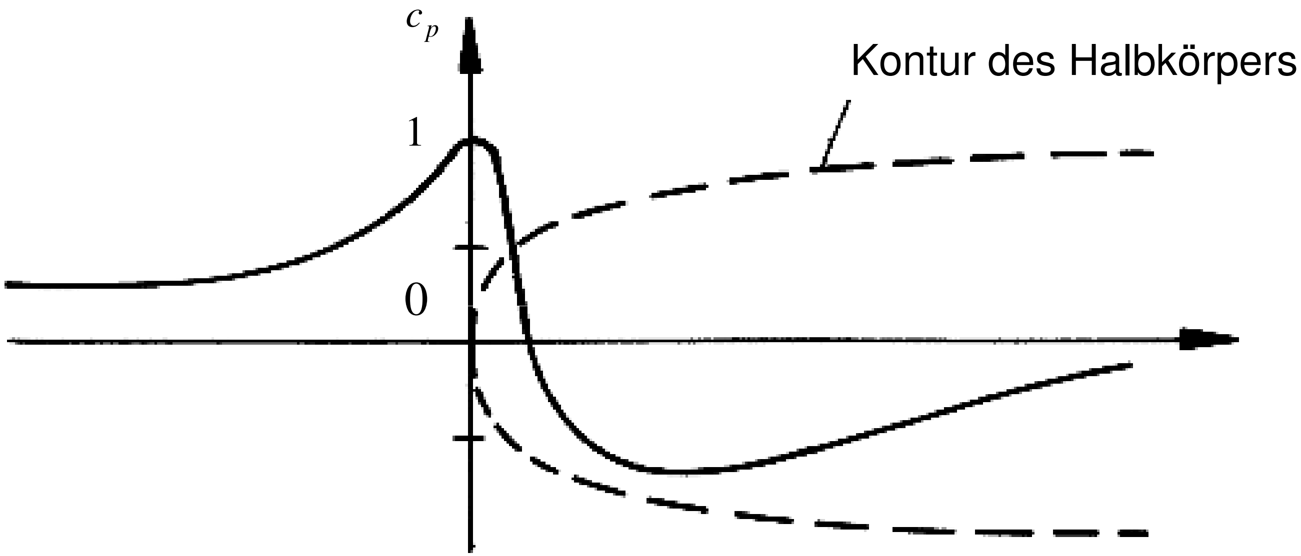
$$c_{pk} = \frac{\sin(2\overline{\varphi})}{\overline{\varphi}} - \left(\frac{\sin\overline{\varphi}}{\overline{\varphi}} \right)^2$$

Staupunkt : $\varphi = \pi$ bzw. $\overline{\varphi} = 0$

$c_p = 1$

$$c_p(\varphi = \frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi^2}$$

$c_p \to 0$ für $x \to \infty$ bzw. $\varphi \to 0$



Kreiszylinder

Parallelströmung + Quellenströmung + Senkenströmung

E_Q = E_s

$\Rightarrow$ geschlossene Wandstromlinie

Abstand von Quelle + Senke $\rightarrow 0$

$\Rightarrow$ Dipolströmung

$\longrightarrow$ Parallelströmung + Dipolströmung

$$F(z) = u_\infty z + \frac{M}{2\pi z}$$

$$\phi = u_\infty x + \frac{M}{2\pi r^2} x = \left(u_\infty + \frac{M}{2\pi r^2} \right) r \cos\varphi$$

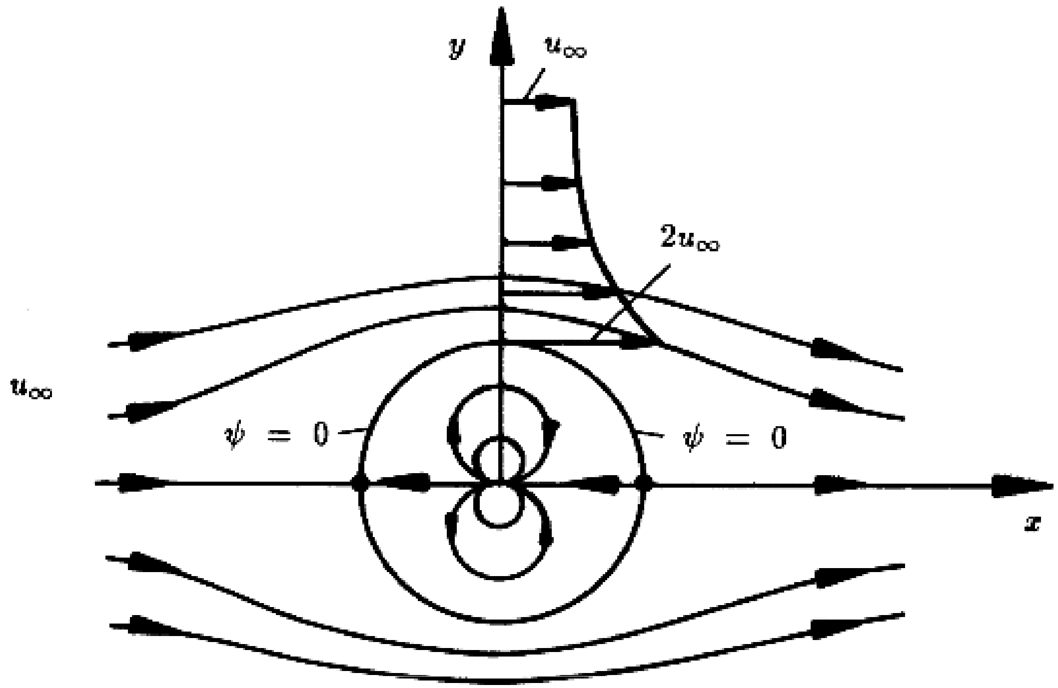
$$\psi = u_\infty y - \frac{M}{2\pi r^2} y = \left(u_\infty - \frac{M}{2\pi r^2} \right) r \sin\varphi$$

$$\overline{w}(z) = u_\infty - \frac{M}{2\pi z^2}$$

bzw.

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(u_\infty - \frac{M}{2\pi r^2} \right) \cos\varphi$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -\left(u_\infty + \frac{M}{2\pi r^2} \right) \sin\varphi$$



Staupunkte $(v_r = v_\varphi = 0)$ bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$

$$v_r = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\infty - \frac{M}{2\pi R^2} = 0$$

$$R = \sqrt{\frac{M}{2\pi\, u_\infty}}$$

$\Rightarrow$ Wandstromlinie $\psi = 0$; Geschwindigkeit auf $\psi = 0$

$$v_r = 0$$

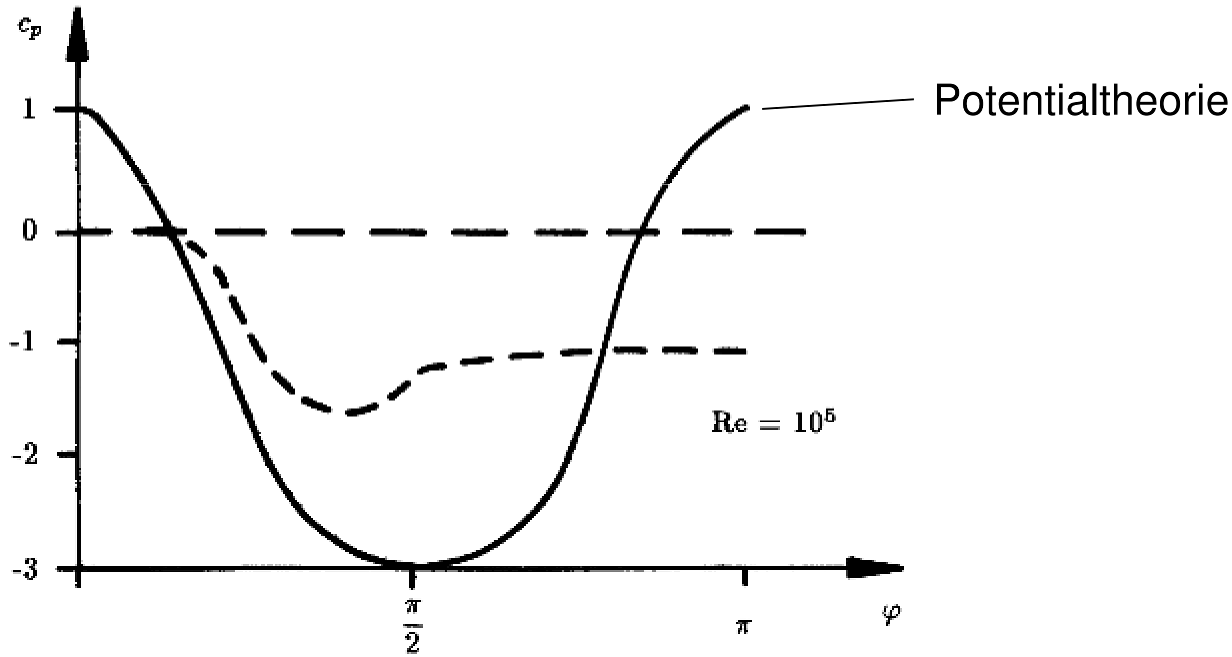
$$v_\varphi = -2u_\infty \sin\varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \varphi = \frac{3}{2}\pi : \ |v_\varphi| = 2u_\infty$$

Druckverteilung auf Kontur :

$$p_k + \frac{\rho}{2} v_k^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2} u_\infty^2$$

$$c_{pk} = \frac{p_k - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \left(\frac{v_k}{u_\infty}\right)^2 = 1 - 4\sin^2\varphi$$



Potentialtheorie → symmetrische p-Verteilung

→ keine resultierende Kraft

→ d 'Alembertsches Paradoxon

Addition eines Potentialwirbels $\Longrightarrow$ Seitenkraft

$$F(z) = u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\phi = u_\infty \cos\varphi \left(r + \frac{R^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi$$

$$\psi = u_\infty \sin\varphi \left(r - \frac{R^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = u_\infty \cos\varphi \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -u_\infty \sin\varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$v_r = 0 \quad \textit{für} \quad r = R$$

$$v_\varphi = -2u_\infty \sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Staupunkt(e) : ?

$$v_\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi u_\infty R}$$

$\Gamma < 4\pi u_\infty R \quad \Rightarrow$ 2 Staupunkte

$\Gamma = 4\pi u_\infty R \quad \Rightarrow$ 1 Staupunkt

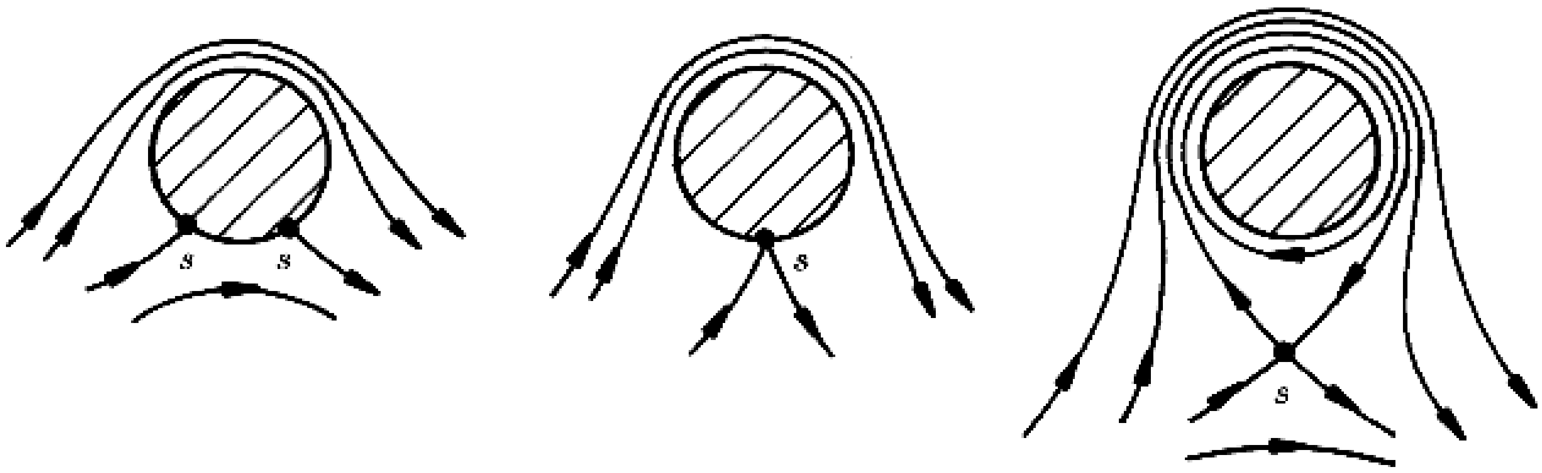
$\Gamma > 4\pi u_\infty R \quad \Rightarrow$ keine Lösung auf der Kontur, jedoch ein freier Staupunkt

$$v_r(r \neq R, \varphi) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$v_\varphi(r \neq R, \varphi = -\frac{\pi}{2}) = 0 \;\Rightarrow\; u_\infty(1 + \frac{R^2}{r^2}) - \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{4\pi u_\infty}\left[\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - (4\pi u_\infty R)^2}\right]$$

nur $r > R$ berücksichtigen



$\Gamma < 4\pi u_\infty R$ $\Gamma = 4\pi u_\infty R$ $\Gamma > 4\pi u_\infty R$

Potentialwirbel → Γ → Seitenkraft

Magnus Effekt

Druckverteilung auf der Kontur

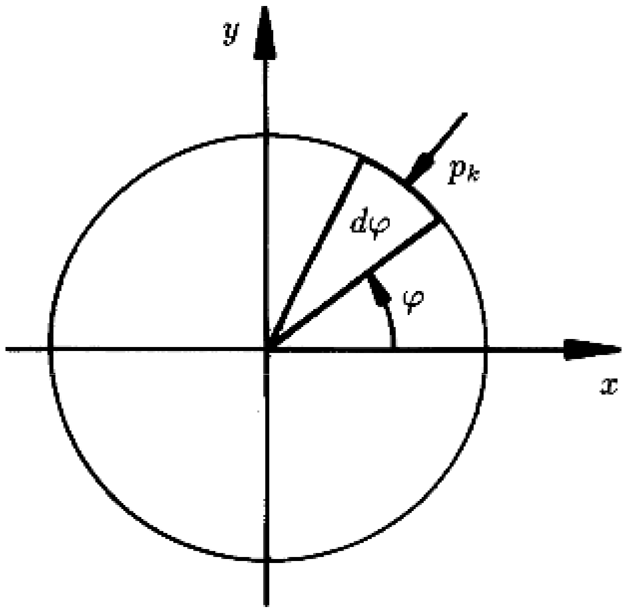
$$p + \frac{\rho}{2}(v_r^2 + v_\varphi^2) = p_\infty + \frac{\rho}{2} u_\infty^2$$

$$p_k = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left[u_\infty^2 - \left(-2u_\infty \sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi R} \right)^2 \right]$$

bzw.

$$c_p = \frac{p_k - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \left(2\sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi u_\infty R} \right)^2$$

Kraft in y - Richtung :



$$L = -\int_0^{2\pi} p_k \sin\varphi R \, d\varphi$$

$$L = \frac{\rho u_\infty \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{\rho u_\infty \Gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi$$

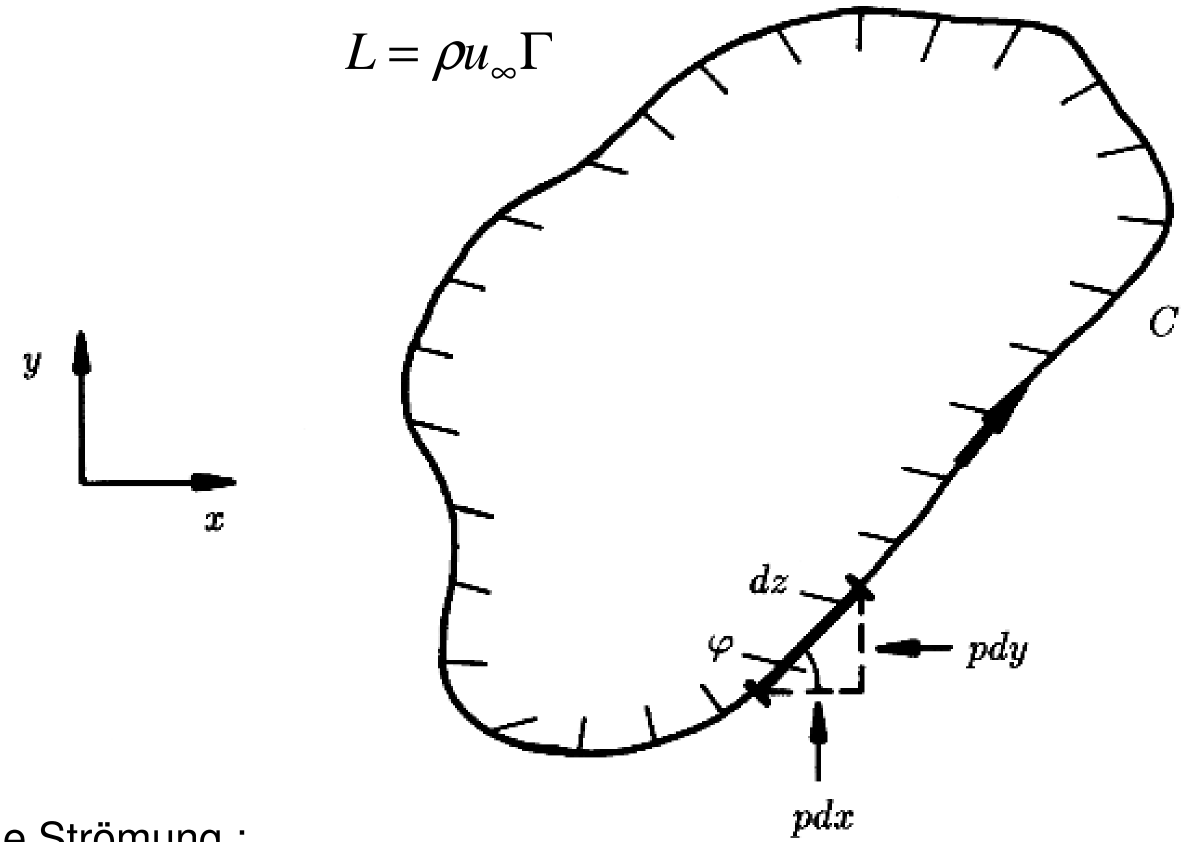
$$\boxed{L = \rho u_\infty \Gamma}$$

$L \sim \Gamma$ Kutta, Zhukhovski

Auftriebssatz von Kutta – Zhukhovski

Für beliebige ebene Körper gilt :

$$L = \rho u_\infty \Gamma$$



reibungsfreie Strömung :

$$dD = -pdy$$

$$dL = pdx$$

infinitesimale Kraft

$$dD - idL = -pdy - ipdx = -ipd\overline{z}$$

$$d\overline{z} = dx - idy$$

Gesamtkraft

$$D - iL = -i\oint_C pd\overline{z}$$

Druckverteilung

$$p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2}\left(u^2 + v^2\right) = p + \frac{1}{2}\rho(u+iv)(u-iv)$$

$$D - iL = -i\oint\left[\underbrace{p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2}_{} - \frac{\rho}{2}(u+iv)(u-iv)\right]d\overline{z}$$

$$\Rightarrow \quad \oint_C\left(p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2\right)d\overline{z} = 0$$

$$dz = |dz| e^{i\varphi}$$

$$u + iv = \sqrt{u^2 + v^2}\, e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \; dz \parallel u + iv$$

$\Rightarrow \; (u + iv)d\bar{z}$ reell und

$$(u - iv)dz = (u + iv)d\bar{z}$$

$$D - iL = \frac{i}{2}\rho \oint_C (u - iv)^2 dz = \frac{i}{2}\rho \oint_C \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 dz$$

(I. Blasiussche Formel)

gültig für ebene, stat. , drehungsfreie Strömungen

Funktionentheorie :

Integration auf jeder beliebigen Kontur möglich, sofern keine Singularitäten zwischen Körper und gewählter Kontur.

hier : • Strömung setzt sich u. a. aus Sing. zusammen, die sich jedoch innerhalb des Körpers befinden.

• Wahlkontur weit entfernt vom Körper

$$F(z) = u_\infty z + \underbrace{\frac{E}{2\pi}\ln z} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z + \frac{M}{2\pi z} + \ldots$$

$\longrightarrow$ $\sum\limits_i (E_{Qi} + E_{si}) = 0$ $\longrightarrow$ Körperoberfläche ist geschlossen

I. Blasiussche Formel :

$$D - iL = \frac{i\rho}{2}\oint \left[u_\infty + \frac{i\Gamma}{2\pi z} - \frac{M}{2\pi z^2} + \ldots \right]^2 dz$$

Residuensatz :

$$\oint\limits_c f(z)dz = 2\pi i \cdot \left(\sum \mathrm{Res}\left[f(z)\right]\right)$$

Res [*f(z)*]*:?*

$$\left[u_\infty + \frac{i\Gamma}{2\pi z}\right]^2 \quad \rightarrow \quad u_\infty^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} + \frac{i u_\infty \Gamma}{\pi z}$$

$$\rightarrow \qquad D - iL = \frac{i\rho}{2}\left[2\pi i\left(\frac{i u_\infty \Gamma}{\pi}\right)\right]$$

$$D = 0$$

$$L = \rho u_\infty \Gamma$$

Somit verschwindet die Widerstandskraft und die Seitenkraft ist proportional zur Zirkulation!

Entstehung der Zirkulation

nur Körper mit scharfen Hinterkanten erzeugen Γ (exp. Ergebnis)

$\Gamma = 0$

$\Gamma \neq 0$

Γ_{Kutta}

vorangegangene Darstellung : drehungsfreie Strömung, Γ steigt an

$\Gamma = 0$ Staupunkt (B) auf der Oberfläche

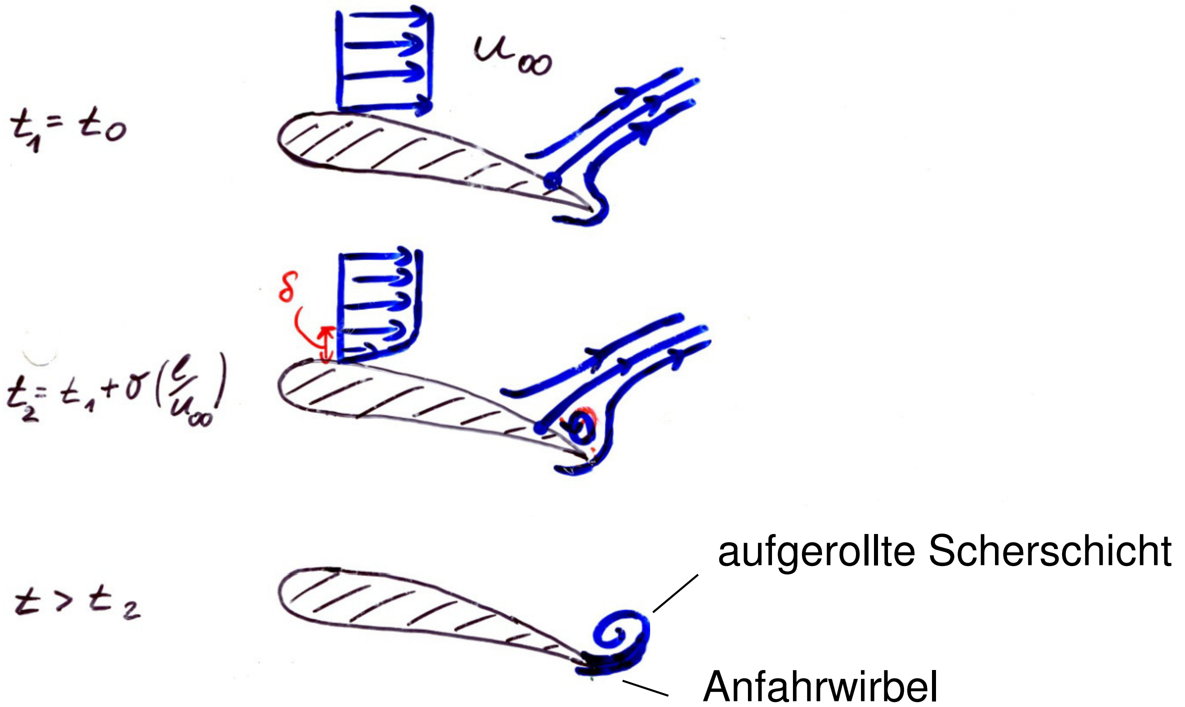
$\Gamma \uparrow$ A,B wandern auf der Oberfläche

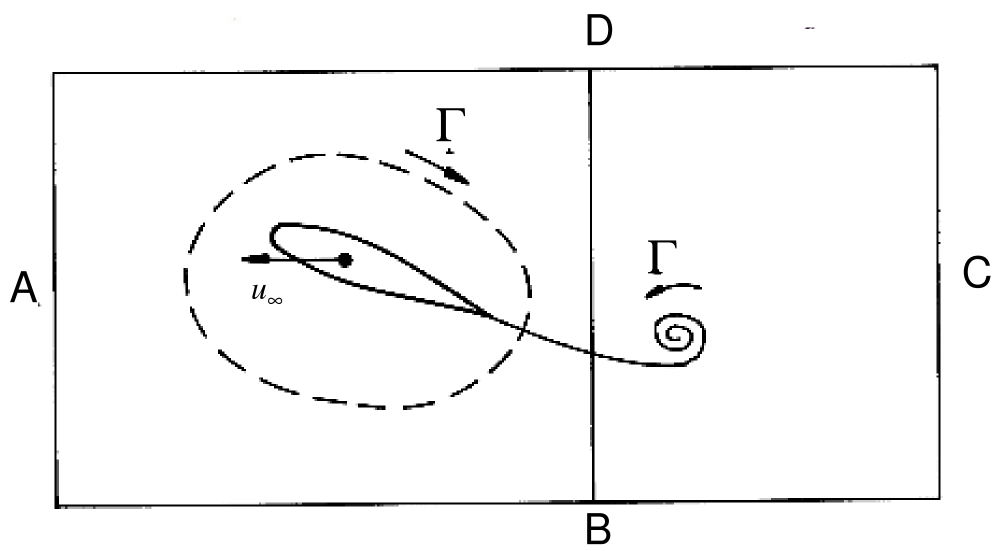
Γ_{Kutta} B auf der Hinterkante

Hypothese von Kutta :

Strömung über ebenen, scharfkantigen Körper besitzt genau die Zirkulation Γ, so dass B auf der Hinterkante liegt. (Kutta Bedingung)

Warum genügt eine realistische Strömung der Kutta Bedingung?





Satz von Thomson : Γ um jede geschlossene Kurve ist konstant, wenn die Kurve in einer reibungsfreien Strömung bleibt.

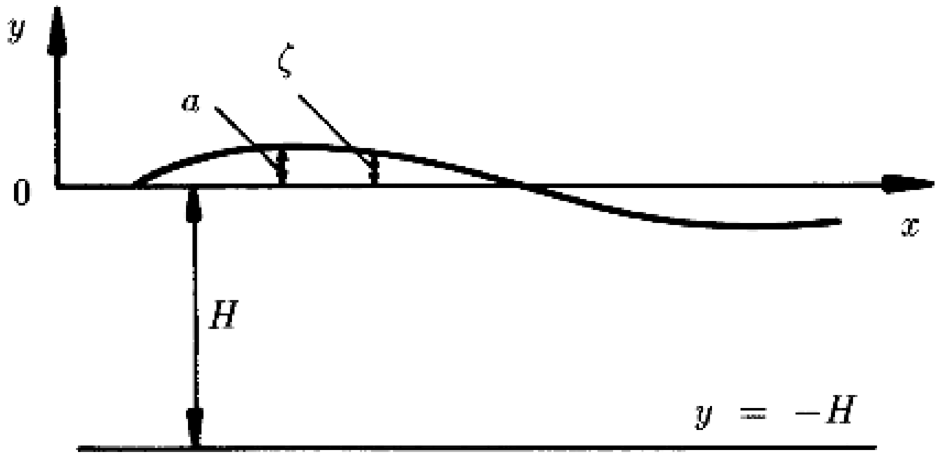
$$\rightarrow \Gamma_{ABCD}(t > t_0) = 0, \quad \text{da } \Gamma_{ABCD}(t_0 = 0) = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma_{ABD} \text{ kompensiert } \Gamma_{BCD} = \Gamma_{Anfahr}$$

nur Γ_{Kutta} bewirkt keine Oszillation des hinteren Staupunktes

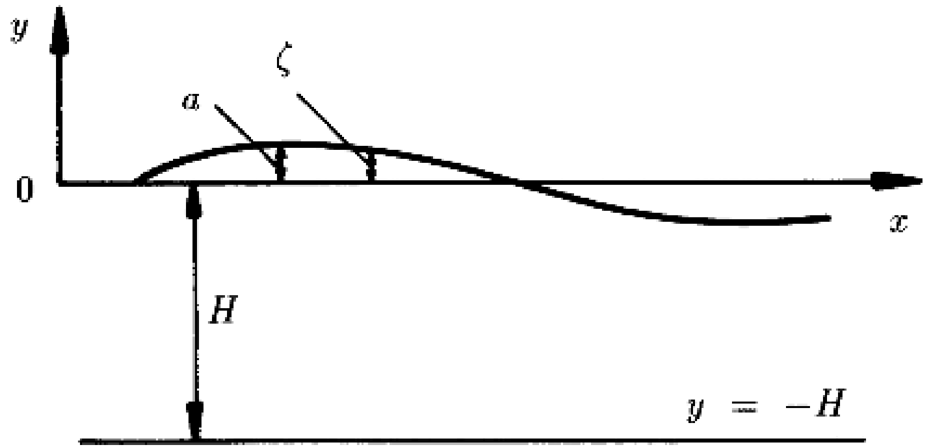
D.h. Viskosität ruft zwar D hervor, jedoch ebenfalls Γ und somit L.

Schwerewellen



H : mittlere Tiefe

- $a/\lambda \ll 1$ und $a/H \ll 1$
- $H \; \substack{\ll \\ \gg} \; \lambda$
- η klein → Reibung hat keinen Einfluss auf Wellenausbreitung
- Bewegung aus der Ruhe → drehungsfreie Analyse



$\zeta\,(x,\,t)$ beschreibt die Oszillationen, drehungsfreie Strömung → Potential einführen

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$ in Kontinuitätsgleichung :

$$\Rightarrow \qquad \nabla^2 \phi = 0$$

Randbedingungen :

$$y = \zeta: \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x}\bigg|_{y=\zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\bigg|_{y=\zeta} = v\big|_{y=\zeta}$$

$$\boxed{y = -H: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v = 0}$$

Annahme : a klein $\Rightarrow$ $u\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}$ klein

$$\longrightarrow \quad u\frac{\partial \zeta}{\partial x} << \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

somit : $\quad y = \zeta \qquad \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = \left.\dfrac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=\zeta}$

Taylorentwicklung

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=\zeta} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=0} + \zeta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \quad \ldots \quad \approx \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=0}$$

dynamische Randbedingung bei $y = \zeta$:

$$y = \zeta \quad : \quad p = p_a = 0$$

mittels Bernoulli Gleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} + gy = F(t)$$

$$\phi = f(\tilde{\phi}, F)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gy = 0$$

$$y=\zeta \quad : \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}+g\zeta=0$$

mit $$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{y=\zeta}=\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{y=0}+\zeta\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t}+....$$

$$\boxed{y=0 \quad : \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}=-g\zeta}$$

Zusammenfassung des Problems $\nabla^2\phi=0$

mit RB :

$$y=-H \quad : \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}=0$$

$$y=0 \quad : \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}=-g\zeta$$

Annahme : $\zeta(x,t)=a\cos(kx-\omega t)$

$k=\dfrac{2\pi}{\lambda}$: Wellenzahl $\qquad \omega=\dfrac{2\pi}{T}$: Kreisfrequenz

$T=\dfrac{\lambda}{c}, \quad c$: Phasengeschwindigkeit

bzw. $\omega=kc$

Bedenkt man die Bedingungen

$y = 0$ $$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\zeta$$

folgt als Ansatz für ϕ :

$$\phi = f(y)\sin(kx - \omega t)$$

$f(y)$, k bzw. ω unbekannt

Laplace ergibt :

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - k^2 f = 0$$

allgemeine Lösung :

$$f(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}$$

$$\phi = (Ae^{ky} + Be^{-ky})\sin(kx - \omega t)$$

A, B aus Randbedingungen

$y = -H$ $$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \left(Ake^{-kH} - Bke^{kH}\right)\sin(kx - \omega t) = 0$$

$$\Rightarrow \quad B = Ae^{-2kH}$$

$y = 0:$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = a\omega \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = k\left(Ae^{ky} - Be^{-ky}\right)\sin(kx - \omega t) = k\left(A - B\right)\sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}: \qquad k(A - B) = a\omega$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{a\omega}{k(1 - e^{-2kH})}$$

$$B = \frac{a\omega e^{-2kH}}{k(1 - e^{-2kH})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi &= \frac{a\omega}{k}\frac{\cosh\left(k(y+H)\right)}{\sinh(kH)}\sin(kx - \omega t) \\ u &= a\omega\frac{\cosh\left(k(y+H)\right)}{\sinh(kH)}\cos(kx - \omega t) \\ v &= a\omega\frac{\sinh\left(k(y+H)\right)}{\sinh(kH)}\sin(kx - \omega t) \end{aligned}}$$

Zusammenhang zwischen c, ω, k über die dynamische Bedingung

$$\zeta \text{ und } \phi \text{ in } \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\zeta \qquad (\, y = 0 \,)$$

$$-\frac{a\omega^2}{k}\frac{\cosh(kH)}{\sinh(kH)}\cos(kx-\omega t) = -\underbrace{g\,a\cos(kx-\omega t)}_{\zeta}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{gk\tanh(kH)}$$

$$\Rightarrow \qquad c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kH)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\frac{2\pi H}{\lambda}} \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l} c = f\,(k) \\ k = g\,(c) \end{array}\right\}$$: dispersive Wellen

$\omega = f\,(k)$ heißt Dispersionsbeziehung

Gleichung * für : $H/\lambda >> 1$ und

$H/\lambda << 1$

$H / \lambda >> 1$

$$\tanh(x \to \infty) \to 1$$

Näherung : $\tanh(1.75) = 0.9414$

$$\Rightarrow \quad KH > 1.75 \text{ bzw. } H > 0.28\lambda$$

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$ 3 % genau

Tiefwasserwellen, sofern $H > 0.28\lambda$; $c = f(\lambda)$, $c \neq f(H)$

$H / \lambda << 1$

$$\tanh(x \to 0) \approx x$$

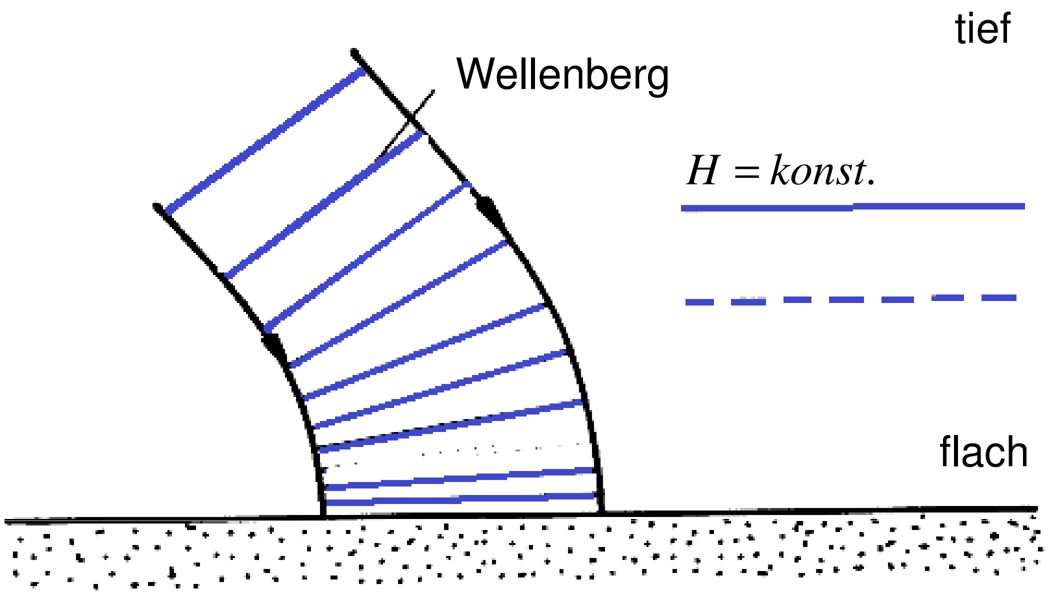
$H / \lambda << 1$

$$\tanh\frac{2\pi H}{\lambda} \approx \frac{2\pi H}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{gH}$$ Genauigkeit besser 3% für $H / \lambda < 0.07\lambda$

Flachwasserwellen, sofern $H < 0.07\lambda$; $c \neq f(\lambda)$, $c = f(H)$

Bemerkung zur Berechnung von Flachwasserwellen



in Strandnähe : $c = \sqrt{gH}$

$\longrightarrow$ Drehung der Wellenberge parallel zur Küste in Richtung Strand

$\Longrightarrow$ Wellen immer parallel zur Küste; sie treffen senkrecht auf den Strand auf