Wirbelströmungen





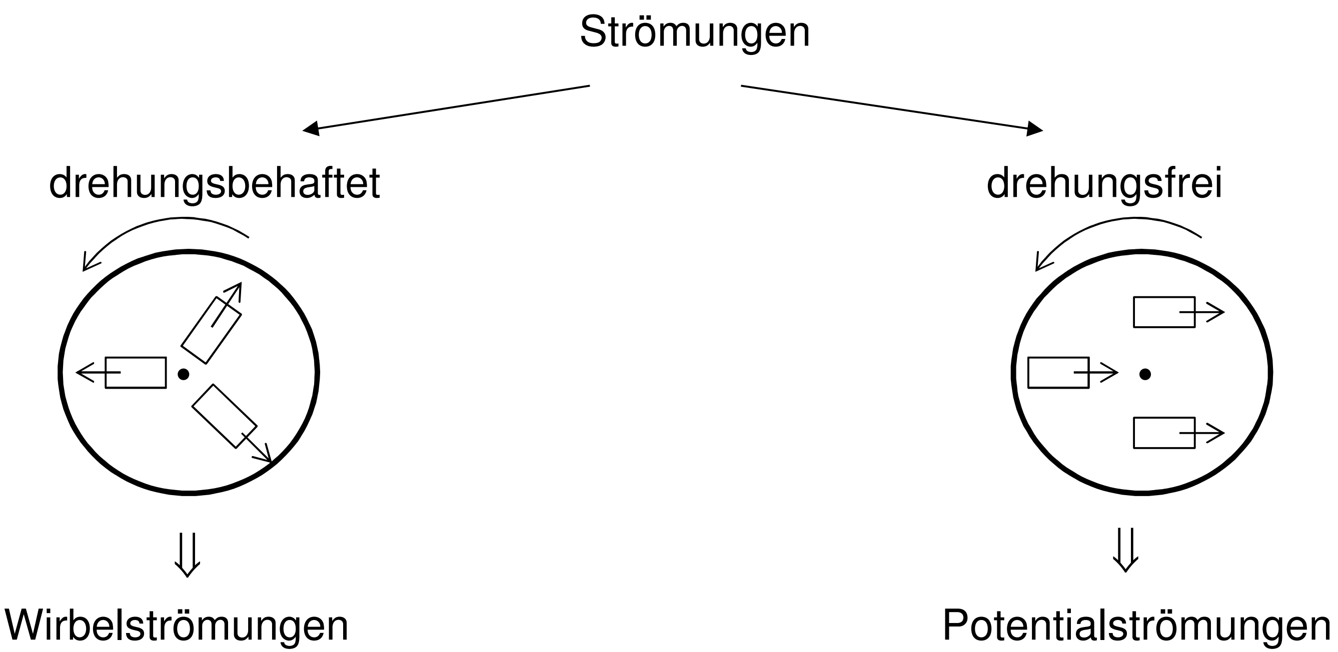








Wirbelströmungen



Begriffe der Wirbelströmungen

Dreh- oder Wirbelvektor $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$\vec{\omega}$ zeigt in Richtung der Drehachse des Fluidteilchens

Wirbellinien : Kurven verlaufen tangential zum Wirbelvektor

Richtung der Wirbellinie aus $\vec{\omega} \parallel d\vec{s}$

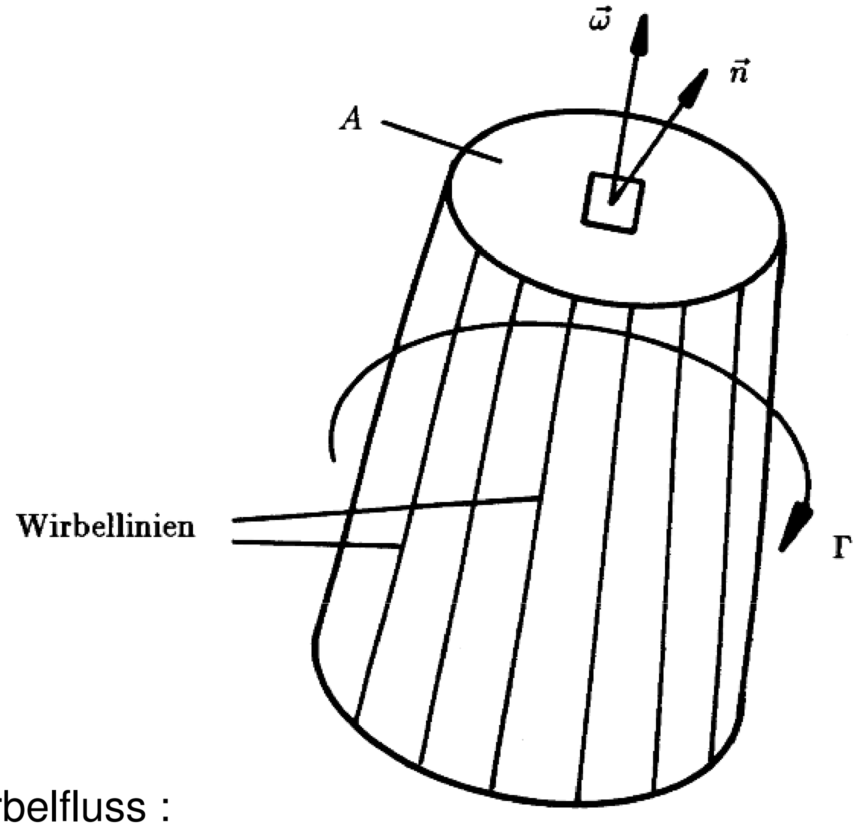
$$\Rightarrow \qquad (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \times (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \vec{0}$$

bzw.

$$\underbrace{\underbrace{\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y}}_{\text{2D}} = \frac{dz}{\omega_z}}_{\text{3D}}$$

Wirbelfaden : Bündelung aller durch A gehenden Wirbellinien

Wirbelröhre : Wirbellinien der Mantelfläche des Wirbelfadens



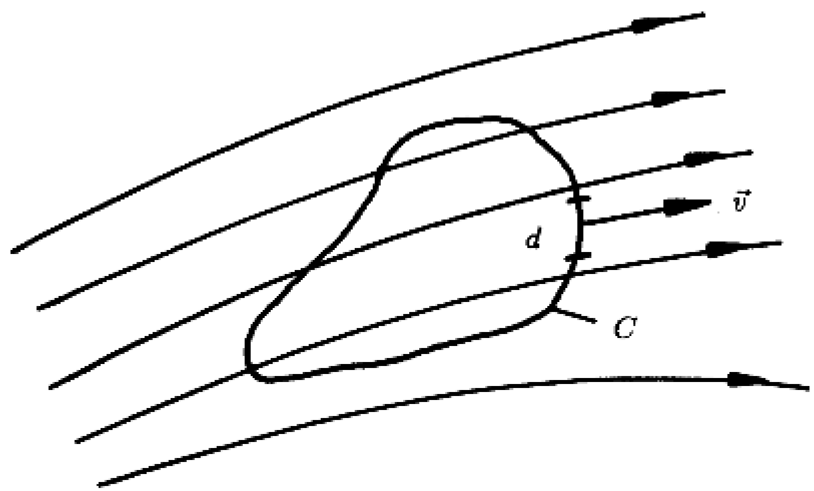
Wirbelstrom oder Wirbelfluss :

$$\Omega = \int_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA$$

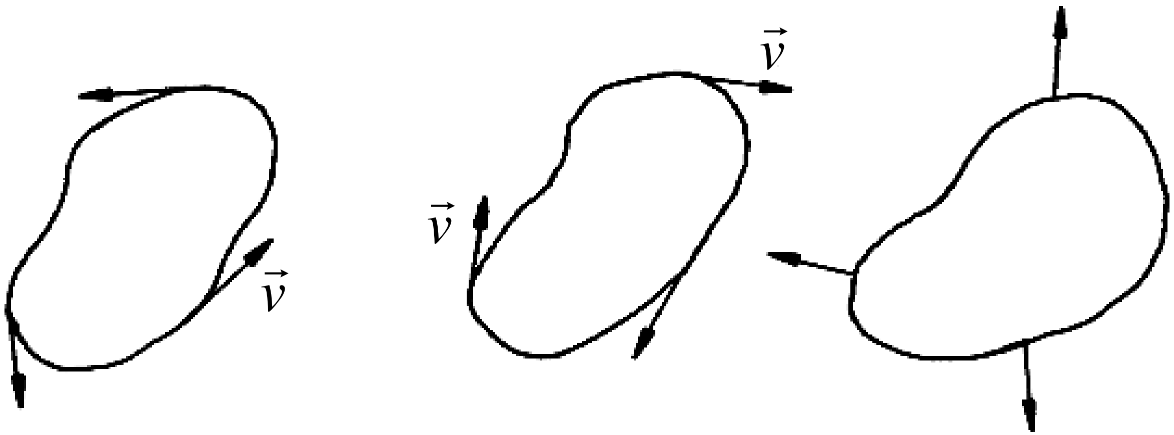
Zirkulation :

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_C v_t \left\| d\vec{r} \right\|$$

Γ : Summe der Tangentialkomponenten v_t auf C

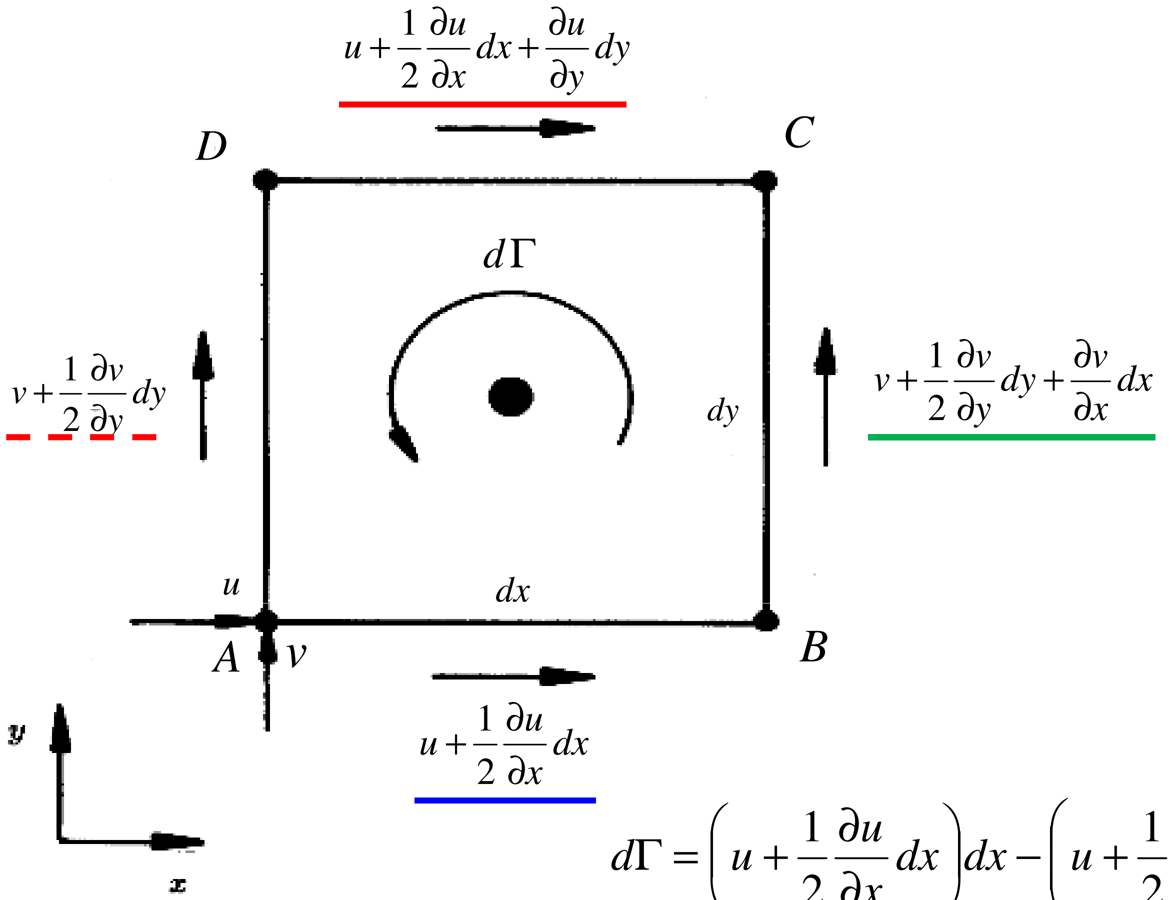


Annahme : C im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen



$\Gamma > 0$ $\Gamma < 0$ $\Gamma = 0$

Zusammenhang zwischen $\vec{\omega}$ und Γ



$$d\Gamma=\left(u+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dx-\left(u+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)dx$$

$$+\left(v+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)dy-\left(v+\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)dy$$

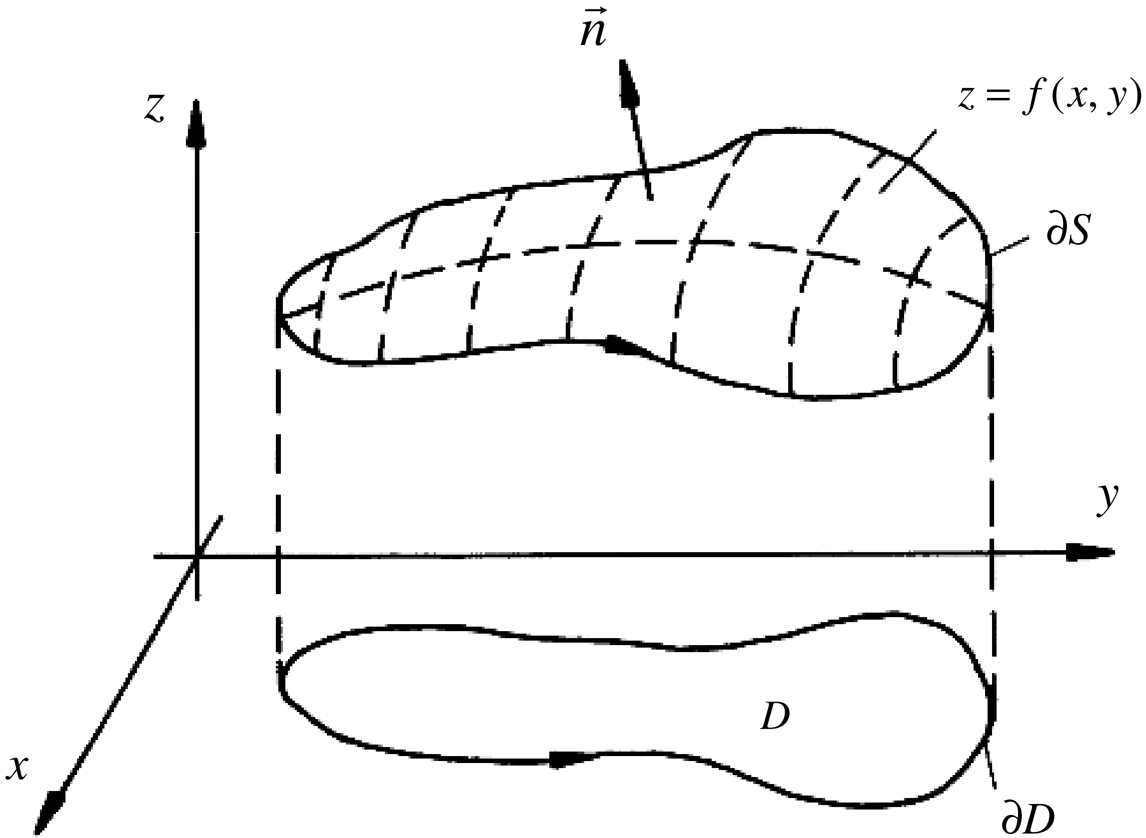
$$d\Gamma=\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy$$

$$d\Gamma=2\omega_z dA$$

$$\Rightarrow \qquad \Gamma = \oint_C v_t \left\| d\vec{r} \right\| = 2\int_A \omega_z dA$$

Zusammenhang Oberflächenintegral und Linienintegral → Stokessches Theorem

$$\int_{\partial S} \vec{\Phi}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{\Phi}) \cdot \vec{n} dA = \iint_S rot\vec{\Phi} \cdot \vec{n} dA$$



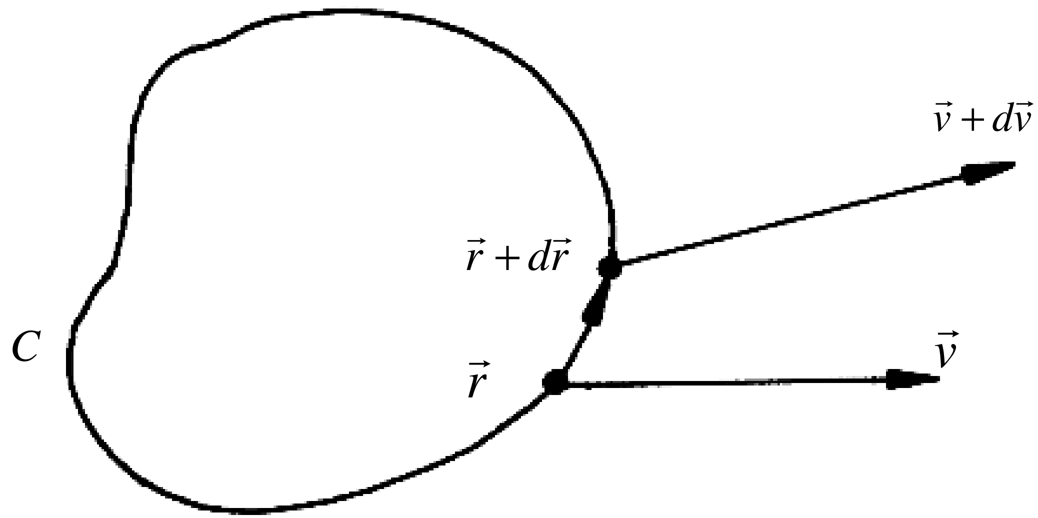
Es sei $\vec{\Phi} = \vec{v}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{\Phi} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = rot\vec{v} = 2\vec{\omega}$

bzw.

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dA = \int_A rot\vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

D. h. : Die Zirkulation entlang der Randkurve einer beliebigen räumlichen Fläche ist gleich dem doppelten Wirbelfluss durch die zugehörige Projektionsfläche

$\frac{d\Gamma}{dt}:?$ in reibungsfreier, barotroper Strömung $(\rho = f(p))$



$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} + \oint_C \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}d\vec{r}$$

<u>reibungsfreie</u> Strömung $(\eta/\rho = 0)$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$ Euler Gleichungen

$$\rightarrow \oint_C \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{g}\cdot d\vec{r} - \oint_C \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{g}\cdot d\vec{r} - \oint_C \frac{dp}{\rho}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \underbrace{\oint_C \vec{g}\cdot d\vec{r}}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\oint_C \frac{dp}{\rho}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\oint_C \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}(d\vec{r})}_{\mathrm{III}}$$

I : Satz : Jedes **konservative** Vektorfeld ist als Gradient zu schreiben

$$\vec{g} = \vec{\nabla} f$$

$$\oint_C \vec{g} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \oint_C df = 0$$

II : Annahme : Strömung ist barotrop

$\rightarrow \rho = \rho(p)$ Definition : $\frac{1}{\rho} = \frac{dF}{dp} = f(p)$

$$\oint_C \frac{dp}{\rho} = \oint_C \frac{dF}{dp} dp = 0$$

III :

$$d\vec{v} = \frac{d}{dt}(d\vec{r})$$

$$\oint_C \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(d\vec{r}) = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{v} = \oint d\left(\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right) = 0$$

$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$ reibungsfreie, barotrope Strömung mit konserv. Volumenkräften

Satz von Thomson

$$\Gamma(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma(t+\Delta t) = 0$$

Strömung drehungsfrei (Stokes)

Achtung : Gültig für die Kurve C

Wirbeltransportgleichung

Für ρ = $konst.$, η = $konst.$ wird eine Gleichung für $\vec{\omega}$ abgeleitet.

Wirbelerhaltungssatz

Identität : $div(rot\,\vec{\Phi}) = 0$

Mit $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\,\vec{v}$

$$\boxed{div\,\vec{\omega} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0}$$

Zusammenhang zwischen $\vec{v}$ und $\vec{\omega}$ führt auf $\vec{\omega}$ - Gleichung aus

rot (Impulserhaltung).

Da *rot (grad h) = 0* gilt

rot (grad f) = 0 Grav.terme

rot (grad p) = 0 Druckterme

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla} f - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu\, \nabla^2 \vec{v}\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\omega}$$

Identität :

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \vec{\omega}\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} q^2$$

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$\vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{2}\vec{\nabla}(u^2 + v^2 + w^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \nu \nabla^2 \vec{\omega}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\omega}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{v}\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}_{\text{(a)}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{\omega}}_{\text{(b)}}}$$

Wirbeltransportgleichung

(a) : Änderung der Wirbelstärke durch Streckung und Neigung der Wirbellinien

(b) : Änderung von $\vec{\omega}$ durch Diffusion

ebene, drehsymmetrische Strömung

$$\vec{\omega} \perp \vec{v} \Rightarrow (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0$$

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} = \nu \nabla^2 \omega}$$

Lösung zum Beispiel *:* $\omega = konst.$

reibungsfreie Strömung

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

In reibungsloser Strömung (mit $\rho = konst.$, $\eta = konst.$) wird Drehung weder erzeugt noch vernichtet.

stationäre Strömung

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

Die **Wirbeltransportgleichung** ist eine modifizierte Form der **Navier-Stokes Gleichung :**

$\Rightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{0}$ ist auch Lösung der Impulserhaltung.

$\vec{\omega} = \vec{0} \quad \Rightarrow$ **Potentialströmungen**