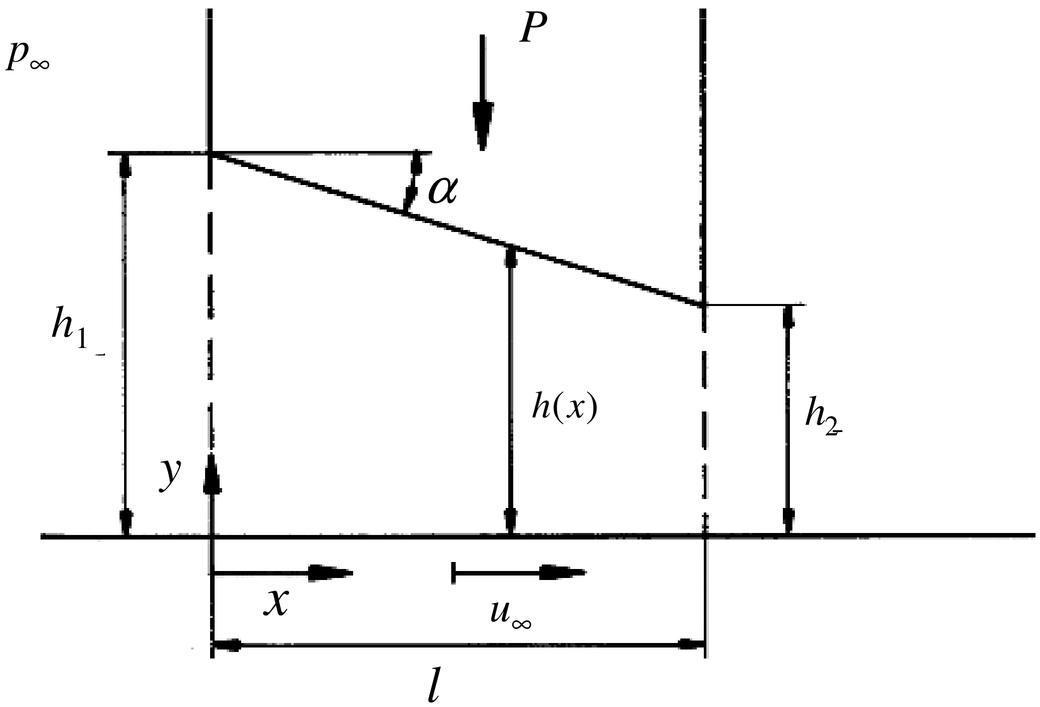
Schleichende Strömungen

[redacted] [redacted]

$$\frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} << 1$$

$$\frac{\text{Trägheit}}{\text{Reibung}} \sim \text{Geschwindigkeit} \Rightarrow \text{Bezeichnung : schleichend}$$

Vereinfachung der Erhaltungsgleichungen anhand dieses Beispiels der **Gleitlagerströmung**



stationär, inkomp. , $T = konst.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Wahl der Bezugsgrößen derart, dass Terme $0\ (1)$ sind

$$\bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_\infty}\frac{l}{h}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho u_\infty^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{l}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}$$

denn mit $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$ und $\alpha = 0\left(\frac{h}{l}\right)$

$$\Rightarrow \qquad \frac{v}{u_\infty} = 0\left(\frac{h}{l}\right)$$

dimensionslose Erhaltungsgleichungen :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}} = 0$$

$$\frac{\rho\, u_\infty^2}{l}\left(\overline{u}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\,\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right) = -\frac{\rho\, u_\infty^2}{l}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} + \frac{\eta\, u_\infty}{h^2}\left[\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2}\frac{h^2}{l^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}\right]$$

$$\frac{\rho\, u_\infty^2\, h}{l^2}\left(\overline{u}\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\,\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}}\right) = -\frac{\rho\, u_\infty^2}{h}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} + \frac{\eta\, u_\infty}{h\, l}\left[\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{x}^2}\frac{h^2}{l^2} + \frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2}\right]$$

Division von $\frac{\rho u_\infty^2}{l}$ und $\frac{\rho u_\infty^2}{h}$ liefert

$$\boxed{\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \frac{l^2}{h^2}\left[\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}\right.}\left. + \frac{h^2}{l^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2} - \mathrm{Re}\frac{h^2}{l^2}\left(\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right)\right]$$

$$\boxed{\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} = \frac{1}{\mathrm{Re}} \left[\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2}\right.}\left. + \frac{h^2}{l^2}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{x}^2} - \mathrm{Re}\frac{h^2}{l^2}\left(\overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \overline{y}}\right)\right]$$

Es gilt :

$$\frac{\rho u \frac{\partial u}{\partial x}}{\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \rightarrow \frac{\rho u_\infty^2 / l}{\eta u_\infty / h^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{h}{l}\right)^2 << 1$$

da $h / l << 1$, obwohl Re > 1 .

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{l^2}{h^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2} \\ \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2} \end{aligned}}$$

Es ist :

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{y}} << \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{l^2}{h^2}\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2} >> \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial \overline{y}^2} \quad \text{,so dass}$$

$$\Rightarrow \quad p(x, y) = p(x)$$

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

Randbedingungen :

$$y = 0 : u = u_\infty, v = 0 \qquad y = h(x) : u = v = 0$$

$$x = 0 : p = p_\infty \qquad x = l : p = p_\infty$$

zweifache Integration :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx} y + C_1$$

$$u = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

RB $\Rightarrow$ $$C_2 = u_\infty$$

$$C_1 = -\frac{1}{h}\left[u_\infty + \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2}\right]$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{u = u_\infty\left(1-\frac{y}{h}\right) - \frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2\eta}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)}$$

$p\,(x)$ mittels $\dot{V} = konst.$

$$\dot{V} = \int_0^{h(x)} u\,dy = konst.$$

$$\dot{V} = \frac{u_\infty h}{2} - \frac{h^3}{12\eta}\frac{dp}{dx}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dp}{dx} = 12\eta\left(\frac{u_\infty}{2h^2} - \frac{\dot{V}}{h^3}\right)$$

$$\boxed{p(x) = p_\infty + 6\eta u_\infty \int_0^x \frac{dx}{h^2(x)} - 12\eta\dot{V}\int_0^x \frac{dx}{h^3(x)}}$$

$x = l \qquad \Rightarrow$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} u_\infty \frac{\int_0^l \frac{dx}{h^2(x)}}{\int_0^l \frac{dx}{h^3(x)}} = \frac{1}{2} u_\infty H$$

H : charakteristische Höhe

$$\longrightarrow \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_\infty}{h^2}\left(1 - \frac{H}{h}\right)$$

D. h. : $p\ (x)$ hat bei $h = H$ einen Extremwert !

Beispiel : h (x) linear

$$h(x) = \underbrace{h_1}_{\alpha} - \underbrace{\frac{h_1 - h_2}{l}}_{\beta} x = \alpha + \beta x$$

mit

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$$

folgt

$$\int_0^l \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^2} = \left[\frac{-1}{\alpha(\alpha x+\beta)}\right]_0^l = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right]$$

$$\int_0^l \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^3} = \left[\frac{-1}{\alpha 2(\alpha x+\beta)^2}\right]_0^l = \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}\right]$$

$\Rightarrow$ $$H = \frac{2h_1h_2}{h_1+h_2}$$

$\Rightarrow$ $$\dot{V} = u_\infty \frac{h_1h_2}{h_1+h_2}$$

bzw. $$\boxed{p(x) = p_\infty + \frac{6\eta u_\infty l}{h_1^2-h_2^2}\cdot\frac{(h_1-h)(h-h_2)}{h^2}}$$

Gesamtdruckkraft P :

$$P = \int_0^l (p-p_\infty)dx$$

$$P=\int_0^l (p-p_\infty)dx=\int_0^l \frac{6\eta u_\infty l}{h_1^2-h_2^2}\left[\frac{h_1+h_2}{h}-\frac{h_1h_2}{h^2}-1\right]dx$$

$$=\frac{6\eta u_\infty l}{h_1^2-h_2^2}\left[-l\,\frac{h_1+h_2}{h_1-h_2}\ln(h(x))-l\,\frac{h_1h_2}{h_1-h_2}\frac{1}{h(x)}-x\right]_0^l$$

$$P=\frac{6\eta u_\infty l^2}{(h_1-h_2)^2}\left(\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)-2\frac{h_1-h_2}{h_1+h_2}\right)$$

Gesamtschubspannungskraft

$$F=-\int \eta \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} dx$$

$$\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=-\frac{u_\infty}{h}-\frac{h}{2\eta}\frac{dp}{dx}=-\frac{4u_\infty}{h}+\frac{6u_\infty h_1h_2}{h_1+h_2}\frac{1}{h^2}$$

$$\boxed{F=\frac{\eta u_\infty l}{h_1-h_2}\left[4\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)-\frac{6(h_1-h_2)}{h_1+h_2}\right]}$$

$$\frac{F}{P} \sim \frac{h_2}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{P} << 1 \ m\ddot{o}glich$$

Mit

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_\infty}{h^2}\left(1 - \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}\frac{1}{h}\right)$$

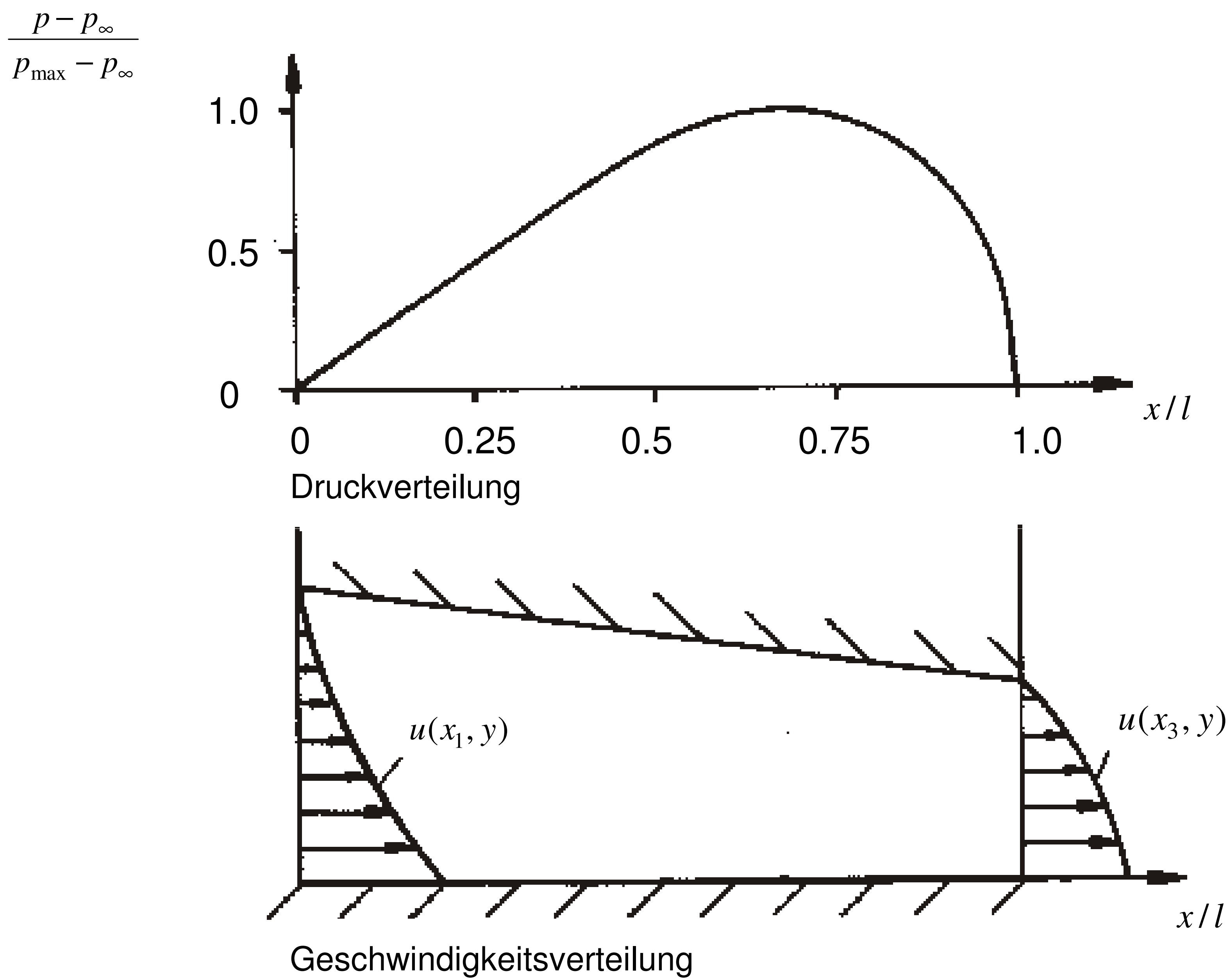
folgt

$$u(x, y) = u_\infty\left(1 - \frac{y}{h}\right)\left[1 - 3\frac{y}{h}\left(1 - \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}\frac{1}{h}\right)\right]$$

bzw.

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

Ist $\frac{h_2}{h_1}$ bekannt, ergibt sich folgende $p(x)$- und $u(x, y)$- Verteilung



$\frac{p - p_\infty}{p_{max} - p_\infty}$
1.0
0.5
0
x/l
0
0.25
0.5
0.75
1.0
Druckverteilung
$u(x_1, y)$
$u(x_3, y)$
x/l
Geschwindigkeitsverteilung

Bemerkungen zu **schleichenden Strömungen:**

$$\frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} << 1$$

- $\vec{v}$ klein

oder

- η sehr groß

oder

- $\frac{h}{l}$ sehr klein

oder

- ρ sehr klein

• Bewegung einer Kugel 1851 (Stokes) , 1910 (Oseen)

• Strömung zwischen parallelen Platten mit $h / l << 1$ 1898 (Hele, Shaw)

• Praxis : Luft oder Wasser durch Sand → Grundwasserströmung