Ähnlichkeitstheorie

Realistische Probleme sind selten durch exakte Lösungen
der Erhaltungsgleichungen zu beschreiben.

$\Rightarrow$ Lösung mittels Numerik oder Experiment

Experiment :
- Planung
- Übertragbarkeit der Ergebnisse

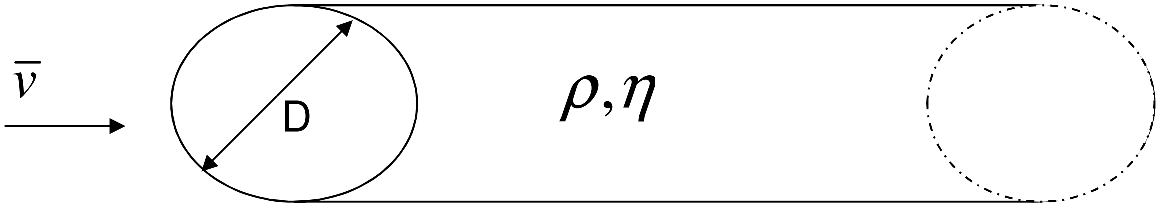
$\Rightarrow$ Ähnlichkeitstheorie

Ähnlichkeit : Beziehung zwischen Modell und Realausführung

2 Methoden :
- Methode der DGL
- Dimensionsanalyse

Dimensionsanalyse

Pipeline-Problem :



stationär, inkompr.

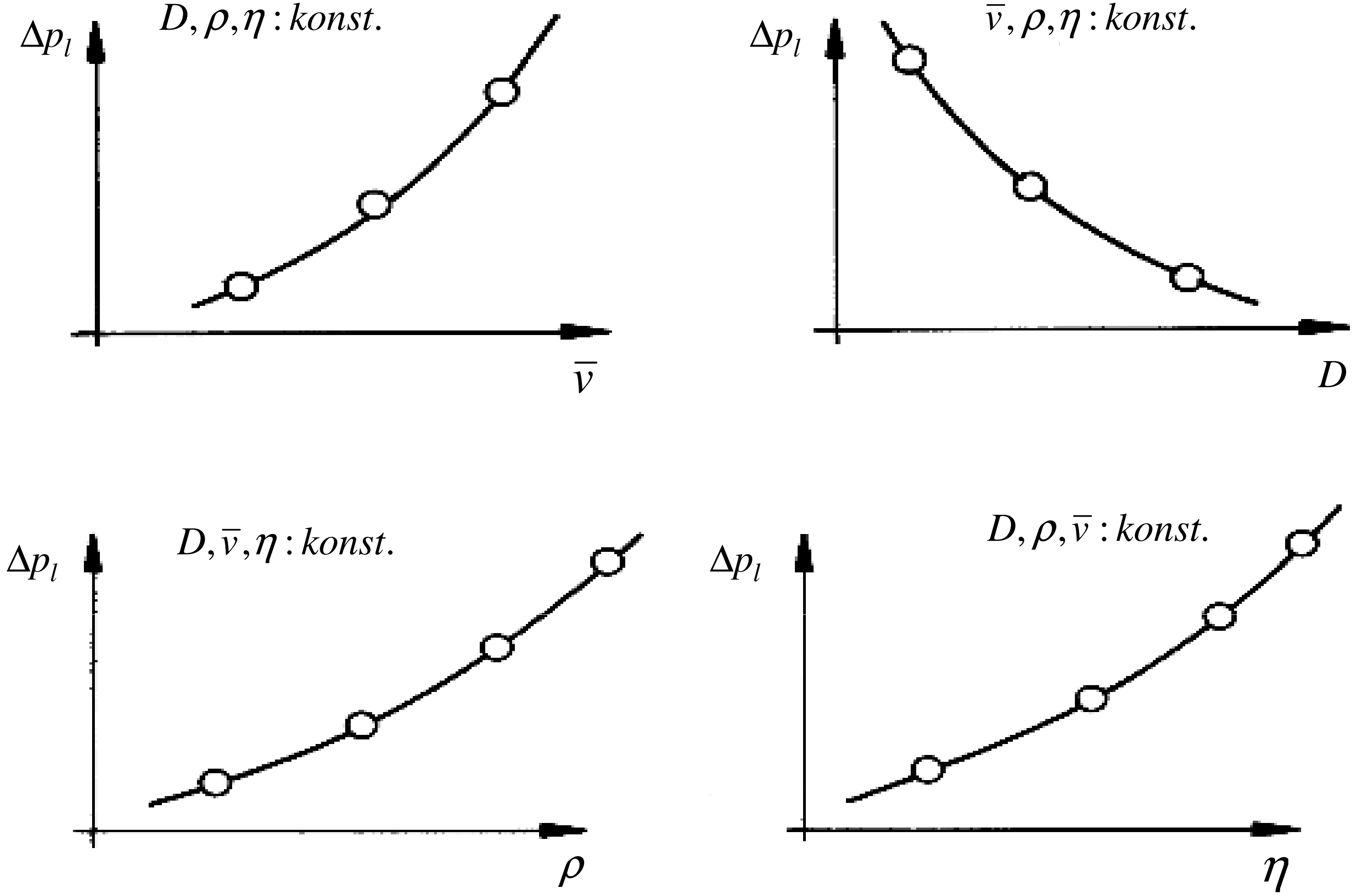
Druckverlust pro Einheitslänge Δp_l ?

Planung des Experiments → $\Delta p_l = f(?)$

hier : $\Delta p_l = f(D, \rho, \eta, \bar{v})$

f(...) mittels Experiment bestimmen!

Experiment der Form : $\Delta p_l = f(x_1)$ mit x_2, x_3, x_4 konstant

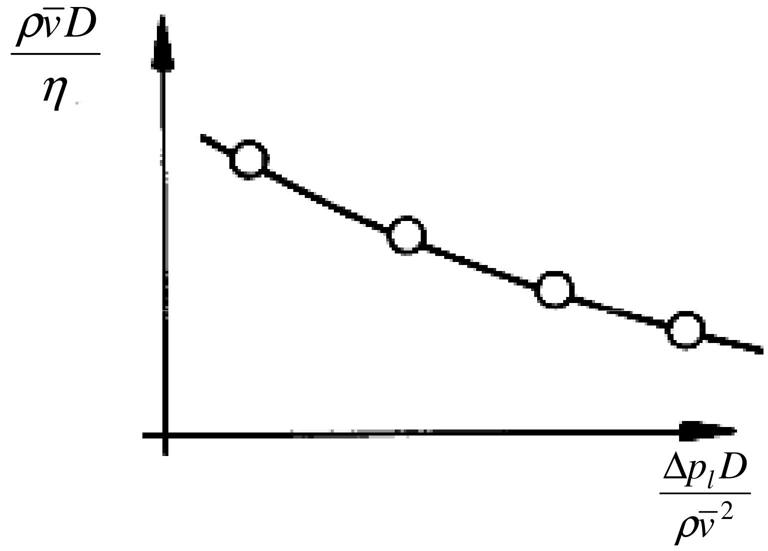


Betrag von $\Delta p_l = f(D, \rho, \eta, \bar{v})$ aufwendig und schwierig

Daten liefern nicht automatisch $f(\ldots)$.

Ausweg : Bildung von **Kennzahlen** (dimensionslose Parameter) aus $\rho, \eta, D, \bar{v}$

hier : $$\frac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2} = \phi\left(\frac{\rho \bar{v} D}{\eta}\right)$$



$\Rightarrow$ 1 Kurve aus den Experimenten?

Exp. : einfacher und kostengünstiger

Wie gelangt man zu $\dfrac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2} = \phi\left(\dfrac{\rho \bar{v} D}{\eta}\right)$?

Basis : Dimension der Variablen $\Rightarrow$ qualitative Beschreibung des Problems

Basisdimensionen :

M : Masse, L : Länge, T : Zeit

Pipeline-Problem : $\Delta p_l\left[\dfrac{M}{t^2 L^2}\right],\ D[L],\ \rho\left[\dfrac{M}{L^3}\right],\ \bar{v}\left[\dfrac{L}{t}\right],\ \eta\left[\dfrac{M}{Lt}\right]$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2} = \phi\left(\frac{\rho \bar{v} D}{\eta}\right)$$: dimensionslos

mittels Dimensionsanalyse wird die Anzahl der Variablen reduziert.

Grundlage der Dimensionsanalyse ist das **Kennzahl-** oder **PI-Theorem** von Buckingham.

$\Longrightarrow$ # der nötigen dimensionslosen Parameter

PI-Theorem : Sofern eine Gleichung mit **k Variablen** bezüglich der Dimensionen homogen ist, kann sie auf eine Beziehung **mit k-r unabhängigen dimensionslosen Variablen** reduziert werden, wobei **r der minimalen Anzahl von Referenzgrößen** entspricht, die zur Beschreibung der ursprünglichen Variablen nötig ist.

dimensionslose Größen : Kennzahlen oder PI-Terme

D.h. nach **PI-Theorem** folgt auf

$$u_1 = f(u_2, u_3, u_4, ..., u_k)$$

der Zusammenhang

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, ..., \pi_{k-r})$$

Im Allgemeinen ist $r=3$ *(M,L,T)*

Bestimmung der **PI-Terme** mittels der **Methode der wiederkehrenden Variablen**.

1. Angabe aller relevanten Variablen,

i. a. geometrische Daten (→ D)

Fluiddaten (→ ρ, η)

äußere Effekte (→ Δp_l) .

Achtung : Variablen müssen unabhängig sein (→ nicht D und A)

2. Alle Variablen in Referenzgrößen schreiben

3. k : # der Variablen

r : # der Referenzgrößen

$\longrightarrow$ k-r : # der Kennzahlen

4. Wahl der wiederkehrenden Variablen, # der wiederkehrenden Variablen = # der Referenzdimensionen, wiederkehrende Variable besitzen alle Bezugsdimensionen;

wiederkehrende Variable müssen dimensional unabhängig sein;

Bemerkung : die wesentliche, zu bestimmende Größe sollte nicht Teil der Liste der wiederkehrenden Variablen sein.

5. Bestimmung der Kennzahl: Multiplikation einer nichtwiederkehrenden Variablen mit den wiederkehrenden Variablen derart, dass die Kennzahl dimensionslos ist, Betrachtung für jede nichtwiederkehrende Variable.

6. Check : Kennzahl dimensionslos?

7. Angabe von $\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{k-r})$

Bemerkung : Bestimmung von Φ mittels Experiment

Anwendung auf das Pipeline-Problem

1. $\Delta p_l = f(D, \rho, \eta, \bar{v})$

2. $\Delta p_l = \dfrac{M}{t^2 L^2}, D \doteq L, \rho \doteq \dfrac{M}{L^3}, \eta \doteq \dfrac{M}{Lt}, \bar{v} \doteq \dfrac{L}{t}$

3. $k = 5, \quad r = 3, \quad k - r = 2$ Kennzahlen

4. wiederkehrende Variable $D, \rho, \bar{v}$

5. $\pi_1 = \Delta p_l D^a \, \bar{v}^b \rho^c$

$$M^0 L^0 t^0 \doteq M t^{-2} L^{-2} L^a (L t^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

$$M \; : 0 = 1 + c$$

$$L \; : 0 = -2 + a + b - 3c$$

$$t \; : 0 = -2 - b$$

$$a = 1, \;\; b = -2, \;\; c = -1$$

$$\pi_1 = \frac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2}$$

$$\pi_2 = \eta D^a \bar{v}^b \rho^c$$

$$M^0 L^0 t^0 \doteq M t^{-1} L^{-1} L^a (L t^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

$$M\ : 0 = 1 + c$$
$$L\ : 0 = -1 + a + b - 3c$$
$$t\ : 0 = -1 - b$$

$$a = -1,\ b = -1,\ c = -1$$

$$\pi_2 = \frac{\eta}{D\rho\bar{v}}$$

6. Check : π_1, π_2 dimensionslos

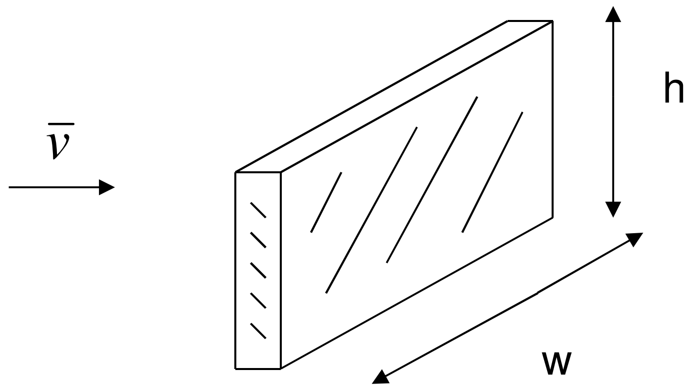
7.

$$\frac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2} = \varphi\left(\frac{\eta}{D\rho\bar{v}}\right)$$

$$\frac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2} = \phi\left(\frac{D\rho\bar{v}}{\eta}\right)$$

φ - oder ϕ - Funktion aus Experiment

Platten-Beispiel :



gesucht : Widerstand $D = f(w, h, \rho, \eta, \bar{v})$ bzw. geeignete Kennzahlen zur Beschreibung

$$D \doteq MLt^{-2}, \quad w \doteq L, \quad h \doteq L, \quad \rho \doteq ML^{-3}$$

$$\eta \doteq ML^{-1}t^{-1}, \quad \bar{v} \doteq Lt^{-1}$$

$$k = 6\,, \ \ r = 3$$

$\Rightarrow$ # der Kennzahlen $\mathrm{k} - \mathrm{r} = 3$

wiederkehrende Variable : $\rho, \bar{v}, w$

$$\pi_1 = D\, w^a\, \bar{v}^b \rho^c$$

$$M^0 L^0 t^0 \doteq MLt^{-2} L^a (Lt^{-1})^b (ML^{-3})^c$$

$$M \; : 0 = 1 + c$$

$$L \; : 0 = 1 + a + b - 3c$$

$$t \; : 0 = -2 - b$$

$$a = -2, \;\; b = -2, \;\; c = -1$$

$$\pi_1 = \frac{D}{w^2 \bar{v}^2 \rho}$$

$$\pi_2 = h w^a \bar{v}^b \rho^c$$

$$M^0 L^0 t^0 \doteq L\, L^a (Lt^{-1})^b (ML^{-3})^c$$

$$M\ :0=c$$
$$L\ :0=1+a+b-3c$$
$$t\ :0=b$$

$$a=-1, b=0, c=0$$

$$\pi_2=\frac{h}{w}$$

$$\pi_3=\eta w^a \bar{v}^b \rho^c$$

$$M^0 L^0 t^0 \doteq ML^{-1}t^{-1}L^a (Lt^{-1})^b (ML^{-3})^c$$

$$a=-1, b=-1, c=-1$$

$$\pi_3=\frac{\eta}{w\bar{v}\rho}$$

$$\frac{D}{w^2\bar{v}^2\rho}=\phi\left(\frac{w}{h},\frac{w\bar{v}\rho}{\eta}\right)$$

Methode der Differentialgleichungen

Beschreibung anhand der 2-dim. , inkompressiblen Strömung

Erhaltungsgleichungen :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho\, g + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Rand- und Anfangsbedingungen sind bekannt

Variablen des Problems : $u,\ v,\ p,\ x,\ y,\ t$

Referenzgrößen :

$$u_\infty\,,\; p_\infty\,, l\,, \tau$$

dimensionslose Variable :

$$\overline{u} = \frac{u}{u_\infty}, \quad \overline{v} = \frac{v}{v_\infty}, \quad \overline{p} = \frac{p}{p_\infty}$$

$$\overline{x} = \frac{x}{l}, \quad \overline{y} = \frac{y}{l}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}$$

in DGL einsetzen : $\Rightarrow$ z. Bsp.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u_\infty \overline{u})}{\partial \overline{x}} \frac{\partial \overline{x}}{\partial x} = \frac{u_\infty}{l} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_\infty}{l} \frac{\partial}{\partial \overline{x}} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} \right) \frac{\partial \overline{x}}{\partial x} = \frac{u_\infty}{l^2} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\frac{\rho\, u_\infty}{\tau}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho\, u_\infty^2}{l}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{p_\infty}{l}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\eta\, u_\infty}{l^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\underbrace{\frac{\rho\, u_\infty}{\tau}}_{F_{Il}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \underbrace{\frac{\rho\, u_\infty^2}{l}}_{F_{Ic}}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\underbrace{\frac{p_\infty}{l}}_{F_p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \underbrace{\rho\, g}_{F_G} + \underbrace{\frac{\eta\, u_\infty}{l^2}}_{F_v}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

F_{Il} : lokale Trägheitskraft / V

F_{Ic} : konvektive Trägheitskraft / V

F_p : Druckkraft / V

F_G : Gravitationskraft / V

F_V : Reibungskraft / V

<u>dimensionslose Gleichungen :</u> Division durch F_{Ic} (i. a.)

$\longrightarrow$

$$\frac{l}{\underline{\underline{\tau\, u_\infty}}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{p_\infty}{\underline{\underline{\rho\, u_\infty^2}}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\eta}{\underline{\underline{\rho\, u_\infty\, l}}}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\frac{l}{\tau\, u_\infty}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{p_\infty}{\rho\, u_\infty^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \frac{g\, l}{\underline{\underline{u_\infty^2}}} + \frac{\eta}{\rho\, u_\infty\, l}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

Ausdrücke sind die Kennzahlen

$$Sr = \frac{l}{\tau u_\infty}$$

: Strouhal Zahl

relevant für instationäre Vorgänge; Verhältnis der Zeiten l / u^∞ und τ

$Sr \rightarrow$: Strömung quasistationär

$$Eu = \frac{p_\infty}{\rho u_\infty^2}$$

: Euler Zahl

Verhältnis von Druck- und Trägheitskraft

$$Fr = \frac{u_\infty}{\sqrt{gl}}$$

: Froude Zahl

Verhältnis von Trägheits- und Schwerekräften;
relevant bei Flüssigkeitsströmungen mit freier Oberfläche

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u_\infty l}{\eta}$$

: Reynolds Zahl

Verhältnis von Trägheits- und Reibungskraft weitere physikalisch bedeutende Kennzahlen :

$$Ma = \frac{u}{c}$$

: Mach Zahl

Verhältnis von Strögs. und Schallgeschwindigkeit

Ma < 0.3 → inkompressible Strömung

$$\mathrm{Pr} = \frac{\upsilon}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda}$$

: Prandtl Zahl

Verhältnis von durch Reibung erzeugter und abgeleiteter Wärme; a : Temp. leitfähigkeit; Stoffgröße, Pr = 0.72 (Luft)

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

: Nusselt Zahl

Verhältnis der übergehenden zur geleiteten Wärme; α : Wärmeübertragungszahl

$$St = \frac{Nu}{\mathrm{RePr}} = \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty}$$

: Stanton Zahl

Verhältnis der übergehenden zur konvekt. transportierten Wärme

$$Pe = \frac{\rho u_\infty l c_p}{\lambda} = \frac{u_\infty l}{\alpha}$$

: Péclet Zahl

Verhältnis der konvekt. zur geleiteten Wärme

$$Kn = \frac{\bar{l}}{l}$$

: Knudsen Zahl

Verhältnis der mittleren freien Weglänge zu einer charakterischen geometrischen Länge;

$Kn << 1$ Kontinuumsmechanik

$Kn >> 1$ kinetische Gastheorie

zur Methode der Differentialgleichungen :

Kennzahlen gleich $\Rightarrow$ Lösungen des DGLs stimmen überein

$\Rightarrow$ sogenannte **dynamische Ähnlichkeit**

$\Rightarrow$ einfaches Experiment für komplexe Strömungen

Dimensionsanalyse

physik. Intuition ist Voraussetzung, sonst Fehler

Methode der DGL

Ausgangsgleichungen liefern entscheidende Kennzahlen
abhängig von den Bezugsgrößen