....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Musterlösung zur Klausur „Strömungsmechanik II“

10. 09. 2025

1. Aufgabe (22 Punkte)

a) Vereinfachungen:

- stationär: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$
- reibungsfrei: $\tau \Rightarrow 0$
- 2D: $\frac{\partial}{\partial z} = w = 0$

Überführen in kartesisches Koordinatensystem in 2D, mit Vereinfachungen (s.o.): :
Massenerhaltung:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Impulserhaltung:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho g$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{x-Richtung:} \\ \Leftrightarrow \rho \left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{0} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \\ \Leftrightarrow \rho \left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{y-Richtung:} \\ \Leftrightarrow \rho \left(\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{0} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \\ \Leftrightarrow \rho \left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \end{aligned}$$

b) Entdimensionierung der Variablen:
$\bar{x} = \frac{x}{L}$ $\quad \bar{y} = \frac{y}{\Delta H} = \frac{y}{H_2 - H_1}$ $\quad \bar{p} = \frac{p}{\Delta p}$ $\quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}$ $\quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_{ref}}$ $\quad g = \frac{g}{g_{ref}}$
$\bar{u} = \frac{u}{u_\infty}$ $\quad \bar{v} = \frac{v}{u_\infty} \frac{L}{(H_2 - H_1)}$
Massenerhaltungsgleichung mit eingesetzten dimensionslosen Größen:

$$\frac{u_\infty}{L}\cdot\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{u_\infty\Delta H}{L\Delta H}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=0\quad\text{mit}\quad\Delta H=H_2-H_1$$

$$\frac{u_\infty}{L}\Big(\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\Big)=0$$

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}=0\quad(\text{mit}\quad \mathrm{L},\mathrm{u}_\infty\neq 0)$$

Impulserhaltungsgleichung in x-Richtung mit eingesetzten dimensionslosen Größen: (nicht notwendig zur Ermittlung der Kennzahlen, wenn wie oben entdimensioniert)

$$\rho_\infty\bar{\rho}\Big(u_\infty\bar{u}\frac{u_\infty}{L}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{u_\infty\Delta H}{L}\bar{v}\frac{u_\infty}{\Delta H}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{y}}\Big)=-\frac{\Delta p}{L}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}$$

$$\rho_\infty\bar{\rho}\Big(\frac{u_\infty^2}{L}\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\frac{u_\infty^2\Delta H}{L\Delta H}\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\Big)=-\frac{\Delta p}{L}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}$$

$$\underbrace{\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{\Delta p}}_{\Pi_1=\mathrm{Eu}^{-1}}\bar{\rho}\Big(\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+\underbrace{\frac{\Delta H}{\Delta H}}_{1}\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\Big)=-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}}$$

Impulserhaltungsgleichung in y-Richtung mit eingesetzten dimensionslosen Größen:

$$\rho_\infty\bar{\rho}\Big(u_\infty\bar{u}\frac{u_\infty\Delta H}{L^2}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\frac{u_\infty\Delta H}{L}\bar{v}\frac{u_\infty\Delta H}{L}\frac{1}{\Delta H}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\Big)=-\frac{\Delta p}{\Delta H}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+\rho_\infty\bar{\rho}g_{ref}\bar{g}$$

$$\rho_\infty\bar{\rho}\Big(\frac{u_\infty^2\Delta H}{L^2}\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{x}}+\frac{u_\infty^2\Delta H}{L^2}\frac{\Delta H}{\Delta H}\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial\bar{y}}\Big)=-\frac{\Delta p}{\Delta H}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+\rho_\infty g_{ref}\bar{\rho}\bar{g}$$

$$\bar{\rho}\Big(\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{x}}+0=-\frac{\Delta p}{\rho u_\infty^2}\frac{L^2}{\Delta H^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}}+\frac{g_{ref}L}{u_\infty^2}\frac{L}{\Delta H}\bar{\rho}\bar{g}$$

$\Pi_1=\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{\Delta p}\ \left(\frac{1}{\mathrm{Eu}}\right)\quad \Pi_2=\frac{L}{\Delta H}=\frac{L}{H_2-H_1}$ (Geo.) $\quad\Pi_3=\frac{g_{ref}L}{u_\infty^2}\ \left(\frac{1}{\mathrm{Fr}^2}\right)$

c)
- Einflussgrößen: $\rho_g,\rho_f,r,\eta_f,\gamma$ (k= 5)
- Grunddimensionen: L, M, T (r= 3)
- Wiederkehrende Variablen: ρ_g,η,γ (z.B.)

$\mathrm{m}=\mathrm{k}-\mathrm{r}=2$

2. Aufgabe (22 Punkte)

a) $\dfrac{\partial p}{\partial x} = \eta \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow \dfrac{1}{\eta}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + C_1$$

$$u(y) = \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

mit $u(0) = 0$:
$C_2 = 0$

mit $u(h) = u_0$:

$$u_0 = \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{h^2}{2} + C_1 \cdot h$$

$$\Leftrightarrow C_1 = \frac{u_0}{h} - \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

$$u(y) = \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{y^2}{2} + \left(\frac{u_0}{h} - \frac{h}{2}\left[\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right]\right) y$$

b) Reibungskräfte: $\underbrace{F_r = A \cdot \tau_w|_{y=h}}$ mit $\underbrace{\tau_w|_{y=h} = \eta \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=h}}$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = y\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{u_0}{h} - \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)$$

mit $A = aL$:

$$F_r = al \cdot \eta\left[\frac{u_0}{h} + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\right]$$

c) Druckgradient über Volumenstrom:
Verdrängter Volumenstrom $\dot{V}_Q = u_0 a^2$
Volumenstrom durch Spalt: $\dot{V} = -\dot{V}_Q$

$$-\dot{V}_Q = \dot{V} = -4a \cdot \int_0^h u(x,y)dy = 4a \cdot \left(\int udy\Big|_{y=h} - \underbrace{\int udy\Big|_{y=0}}_{0} \right) = ...$$

$$... = -4a \cdot \int udy\Big|_h$$

$$= -4a \cdot \int_0^h \left[\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{y^2}{2} + \left(\frac{u_0}{h} - \frac{h}{2}\left[\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right]\right) y \right] dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{u_0 a}{4} = -\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right)\frac{h^3}{6} - \left(\frac{u_0}{h} - \frac{h}{2}\left[\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\right]\right)\frac{h^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3u_0\eta}{h^2}\left(2 + \frac{a}{h}\right) = \mathrm{const}$$

d) Bei Höchstgeschwindigkeit ist der Aufzug im Kräftegleichgewicht: $\Sigma F_i = 0$

$\Rightarrow F_g - F_{r,ges} - F_p = 0$
$F_g = mg$
$F_p = a^2 \Delta p$

Konstanter Druckgradient in x-Richtung, damit ist integriert $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\Delta p}{L}$

$$F_{r,ges} = 4F_r = \underbrace{4aL \cdot \eta \left[\frac{u_0}{h} + \frac{h}{2}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\Delta p}{L}\right)\right]} = \frac{4\eta a L u_0}{h} + 2ah\Delta p$$

$$\Rightarrow mg - a^2\Delta p = \frac{4\eta_{min} a L u_0}{h} + 2ah\Delta p$$

$$\Leftrightarrow \eta_{min} = h\frac{mg - a^2\Delta p - 2ah\Delta p}{4aLu_0}$$

3. Aufgabe (26 Punkte)

a) Parallelströmung: $F(z) = u_\infty z$ mit $u_\infty > 0$
Quelle: $F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$
$F_I(z) = u_\infty z + \frac{E}{2\pi} \ln z$ mit $E > 0$

b) Bestimmung des Volumenstroms über Stromfunktion:
Punkte in Polarkoordinaten:
$\mathrm{P}_1 : r = L,\ \varphi = \pi$
$\mathrm{P}_2 : r = \sqrt{2}L,\ \varphi = \frac{3\pi}{4}$
Formel für Volumenstrom: $\dot{V} = B\left(\Psi_2 - \Psi_1\right)$

$$\begin{aligned}
F_I(z) &= u_\infty r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{E}{2\pi}\ln\left(re^{i\varphi}\right)\\
F_I(z) &= u_\infty r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{E}{2\pi}(\ln r + i\varphi)\\
\Psi = Im(F_I(z)) &= u_\infty r\sin\varphi + \frac{E\varphi}{2\pi}\\
\frac{\dot{V}}{B} &= \underbrace{u_\infty\left(\sqrt{2}L\sin\frac{3\pi}{4} - L\cdot\sin\pi\right)} + \underbrace{\frac{E}{2\pi}\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right)}\\
&= u_\infty L - \frac{E}{8}
\end{aligned}$$

c) $F_{II}(z) = u_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln z - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$

d) Nutzung der komplex konjugierten Geschwindigkeit $\bar{w}$:

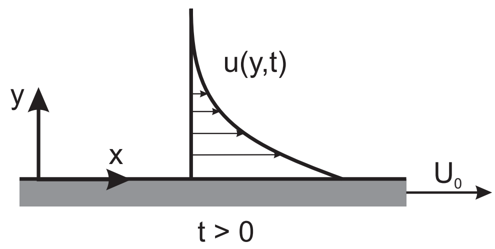
$$\begin{aligned}
F_{II}(z) &= u_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln z - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z \\
\frac{\partial F_{II}(z)}{\partial z} &= \bar{w} = u - iv \\
\bar{w} &= u_\infty + \frac{E}{2\pi z} - \frac{i\Gamma}{2\pi z} = u_\infty + \frac{E - i\Gamma}{2\pi z} \\
\bar{w} &= u_\infty + \frac{E - i\Gamma}{2\pi z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} \\
Mit z\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 : \\
\bar{w} &= u_\infty + \frac{(E - i\Gamma)(x - iy)}{2\pi(x^2+y^2)} \\
u &= \mathrm{Re}(\bar{w}) \\
v &= -\mathrm{Im}(\bar{w}) \\
\Rightarrow u &= u_\infty + \frac{Ex - \Gamma y}{2\pi(x^2+y^2)} \\
\Rightarrow v &= \frac{Ey + \Gamma x}{2\pi(x^2+y^2)}
\end{aligned}$$

e) Zunächst analog zu b):

$$\begin{aligned}
F_{II}(z) &= u_\infty r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{E}{2\pi}(\ln r + i\varphi) - \frac{\Gamma}{2\pi}(i\ln r - \varphi) \\
\Psi_{II} &= u_\infty r\sin\varphi + \frac{E}{2\pi}\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \\
\frac{\dot{V}}{B} &= u_\infty L - \frac{E}{8} - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{2} \\
\text{Aus Aufgabenstellung :} & \\
\Omega\dot{V}_I &= \dot{V}_{II} \\
\Rightarrow \Omega\left(u_\infty L - \frac{E}{8}\right) &= u_\infty L - \frac{E}{8} - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{2} \\
\Leftrightarrow \Gamma\frac{\ln 2}{4\pi} &= u_\infty L(1-\Omega) + \frac{E}{8}(\Omega - 1) \\
\Leftrightarrow \Gamma &= \frac{4\pi\left(u_\infty L(1-\Omega) + \frac{E}{8}(\Omega-1)\right)}{\ln 2}
\end{aligned}$$

4. Aufgabe (16 Punkte)

a) Geschwindigkeitsprofil für $t > 0$:



b) Räumlich ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil $\Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$

Druck entlang der Platte konstant $\Rightarrow \quad \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$

Einführen in Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Aus Konti folgt mit der Haftbedingung $v(y = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(y, t) = konst. = 0$

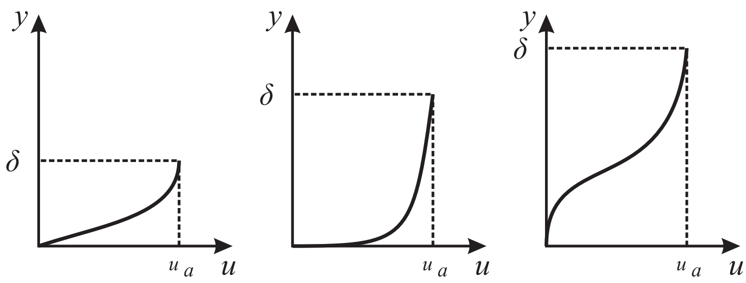
Einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

c) Anfangsbedingungen $(t \leq 0)$: $\Rightarrow \quad u(y \geq 0, t = 0) = 0$

Randbedingungen $(t > 0)$: $\Rightarrow \quad u(y = 0, t > 0) = U_0$ und $u(y \to \infty, t > 0) = 0.$

d) Grenzschichtprofile:



laminar *turbulent* $\tau_w = 0$

5. Aufgabe (20 Punkte)

a) Der kritische Zustand ist ein Referenzzustand, bei dem im engsten Querschnitt $M = 1$ erreicht wird.

$$\begin{aligned}
\text{Energiegleichung: } h_0 &= h + \frac{u^2}{2} \\
c_p T_0 &= c_p T + \frac{u^2}{2} \\
\text{mit } c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} : \frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u^2}{\gamma R T} \qquad M = \frac{u}{\sqrt{\gamma R T}} \\
\frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2
\end{aligned}$$

im kritischen Zustand: $\dfrac{T_0}{T^*} = 1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} = \dfrac{\gamma + 1}{2}$

kritisches Druckverhältnis mit Isentropenbeziehung: $\dfrac{p^*}{p_0} = \left(\dfrac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} = 0.528$

da $\dfrac{p_K}{p_0} = 0.75 > 0.528$ $\underbrace{\text{unterkritisch}}$, d.h. der kritische Zustand wird nicht erreicht.

b) $\dot{m} = \underbrace{\rho_e u_e A_e} = \underbrace{\frac{\rho_e}{\rho_0}} \rho_0 \, u_e A_e$

$$\begin{aligned}
\text{ideales Gasgesetz: } \rho_0 &= \frac{p_0}{R T_0} \\
\text{Energieerhaltung aus a): } \frac{u_e^2}{2} + c_p T_e &= c_p T_0 \\
\rightarrow u_e^2 &= \frac{2 \gamma R T_0}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_e}{T_0}\right) \\
u_e^2 &= \frac{2 \gamma R T_0}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right)
\end{aligned}$$

da unterkritisch, gilt $p_e = p_K$.

$$\dot{m}(p_e) = \underbrace{\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}} \frac{p_0}{\sqrt{R T_0}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(1 - \left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right)} A_e$$

$$\Rightarrow \quad \dot{m} = (0,75)^{\frac{1}{\gamma}} \frac{p_0}{\sqrt{R T_0}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \left(1 - (0,75)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}\right)} A_e$$

c) Wenn Lösung in b) $\underbrace{\mathrm{unterkritisch}}$ (z.B. bei der korrekten Lösung): Massensenstrom größer, limitiert durch Ma = 1 im engsten Querschnitt.
Wenn Lösung in b) kritisch oder überkritisch (d.h. falsche Lösung in b): Massenstrom gleich, Druckänderungen des Kessels hat keinen Einfluss auf Strömungsgeschwindigkeit.

6. Aufgabe (14 Punkte)

a) Prandtl-Zahl: $\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda}$
Bei Strömungen, bei denen die Wärmeübertragung eine Rolle spielt.

b) Bei schleichenden Strömungen sind die Reibungskräfte bedeutend größer als die Trägheitskräfte.
Beispiele: Strömung von Luft oder Wasser durch Sand (Grundwasserströmung), Strömung zwischen zwei parallelen Platten mit deutlich geringerem Abstand h gegenüber der Lauflänge L, sodass $\mathrm{Re}\, h/l << 1$

c) Berechnung der Rotation des Vektorfelds:
$rot(\vec{u}) = \nabla \times \vec{u}$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \vec{u} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\right) && -\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right] && -\frac{\Gamma}{2\pi}\left[\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{x^2+y^2}\right] \\
&= \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} && -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow rot(\vec{u}) = \nabla \times \vec{u} = \vec{0}$$

Es wurde gezeigt, dass die Rotation des Vektorfelds null ist, d.h. das Vektorfeld ist drehungsfrei.

d) Die Verdrängungsdicke δ_1 entspricht dem Abstand, um den ein Körper in einer hypothetisch reibungsfreien Strömung aufgedickt werden muss, so dass der gleiche Massenstrom wie in der reibungsbehafteten Strömung auftritt. Somit wird δ_1 derart bestimmt, dass die beiden schraffierten Bereiche in der Skizze die gleiche Fläche aufweisen.