

.....  
(Matrikelnummer, Unterschrift)

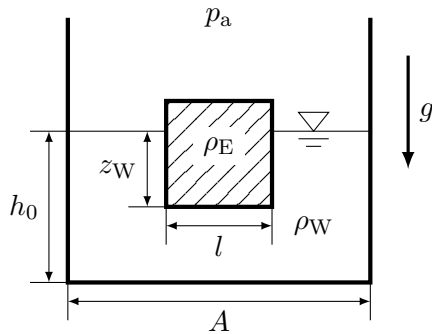
**Klausur „Strömungsmechanik I“**

10. 09. 2025

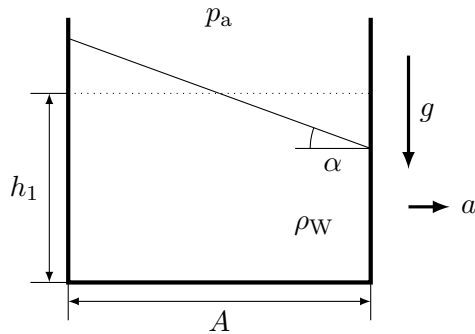


## 1. Aufgabe (20 Punkte)

In einem zum Zeitpunkt  $t_0$  ruhenden prismatischen Behälter der Grundfläche  $A$ , der mit Wasser der konstanten Dichte  $\rho_W$  bis zur Höhe  $h_0$  gefüllt ist, schwimmt ein Eiswürfel mit Kantenlänge  $l$  und konstanter Dichte  $\rho_E$ . Die Gravitationsbeschleunigung  $g$  und der Umgebungsdruck  $p_a$  sind höhenunabhängig konstant.



Skizze 1: Ruhezustand  $t = t_0$ , a) bis b)



Skizze 2: Beschleunigter Zustand  $t = t_2$ , c) bis f)

- Skizzieren Sie den **Druckverlauf** über die gesamte Oberfläche des Eiswürfels und kennzeichnen Sie, welcher Teil des Volumens des Eiswürfels zum **Auftrieb** beiträgt.
- Bestimmen Sie die **Eintauchtiefe**  $z_W$  des Eiswürfels im ruhenden Behälter in Skizze 1.

Zum Zeitpunkt  $t_1$  ist der Eiswürfel vollständig geschmolzen.

- Berechnen Sie die sich **neu eingestellte Füllhöhe**  $h_1$  im Behälter, die in der Skizze 2 für den Ruhezustand bei  $t = t_1 > t_0$  gestrichelt gekennzeichnet ist.
- Begründen Sie qualitativ, wie sich die Füllhöhe  $h_1$  verändert, falls der **Auftrieb in der Luft berücksichtigt** wird und im Ruhezustand die Füllhöhe unverändert  $h_0$  ist.

Nach dem Schmelzen des Eiswürfels wird der Behälter gleichmäßig senkrecht zur Gravitationsrichtung mit der Beschleunigung  $a$  bewegt, so dass sich ein quasi-statischer Zustand ab dem Zeitpunkt  $t_2 > t_1 > t_0$  einstellt.

- Berechnen Sie den **Neigungswinkel**  $\alpha$  der Fluidoberfläche im Behälter für die Zeitpunkte  $t \geq t_2$ , siehe Skizze 2.
- Skizzieren und kennzeichnen Sie exemplarisch die drei **Isobaren** im flüssigen Wasser zu den statischen Drücken  $p_a, p_1$  und  $p_2$  mit  $p_a < p_1 < p_2$  für die Zeitpunkte  $t \geq t_2$ . Kennzeichnen Sie zudem die **Richtung des Druckgradientens**  $\vec{\nabla}p$ .

Gegeben:

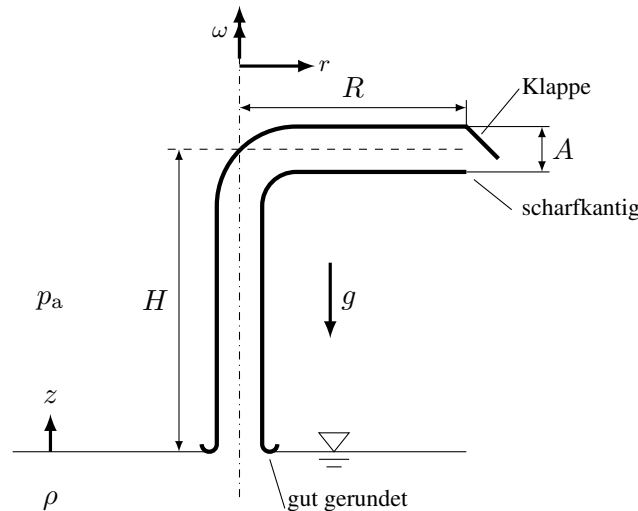
$$g, \quad h_0, \quad l, \quad \rho_W, \quad \rho_E, \quad a$$

Hinweise:

- Der Auftrieb in der Luft ist außer in Teilaufgabe d) zu vernachlässigen.
- Die Aufgabenteile e) und f) sind unabhängig von a) bis d) lösbar.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

## 2. Aufgabe (21 Punkte)

Ein abgewinkeltes sehr langes Rohr mit der Querschnittsfläche  $A$ , dessen unteres Ende in ein großes Becken mit einer inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte  $\rho$  eingetaucht ist, rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um seine vertikale Achse. Es gilt  $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r$  und das rotierende Rohr fungiert als Pumpe. Zum Zeitpunkt  $t_0$  ist das Rohr vollständig mit der Flüssigkeit gefüllt und die Klappe am Ende des Rohres wird plötzlich vollständig geöffnet. Die sich einstellende Strömung ist verlustfrei und im Rohr ausgebildet. Die Gravitationsbeschleunigung  $g$  und der Umgebungsdruck  $p_a$  sind höhenunabhängig konstant.



- Skizzieren Sie den **Verlauf der Druckanteile** statischen Druck  $p_{\text{stat}} = p(s)$ , geodätischen Druck  $p_{\text{geo}} = \rho g z(s)$  und dynamischen Druck  $p_{\text{dyn}} = \frac{\rho}{2} v^2(s)$  entlang der Mittellinie des Rohrs als Stromlinie abhängig von der Stromlinienkoordinate  $s$  für Zeitpunkte  $t \gg t_0$ .
- Berechnen Sie für den stationären Fall die **maximale Winkelgeschwindigkeit**  $\omega_{\text{max}} > 0$ , bei der an keiner Stelle im Rohr der **Dampfdruck**  $p_D$  unterschritten wird für  $t \gg t_0$ .
- Berechnen Sie die **minimale Winkelgeschwindigkeit**  $\omega_{\text{min}} > 0$ , welche mindestens benötigt wird, damit das Rohr nach dem Öffnen der Klappe beim Zeitpunkt  $t_0$  **gerade so Flüssigkeit fördert**.
- Berechnen Sie die **Zeitspanne**  $\Delta t$ , zu der 50% der stationären Austrittsgeschwindigkeit  $v_\infty$  erreicht werden, als Funktion der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  für  $t > t_0$ .

Gegeben:

$$\rho, \quad g, \quad H, \quad R, \quad p_D, \quad p_a, \quad \omega$$

Hinweise:

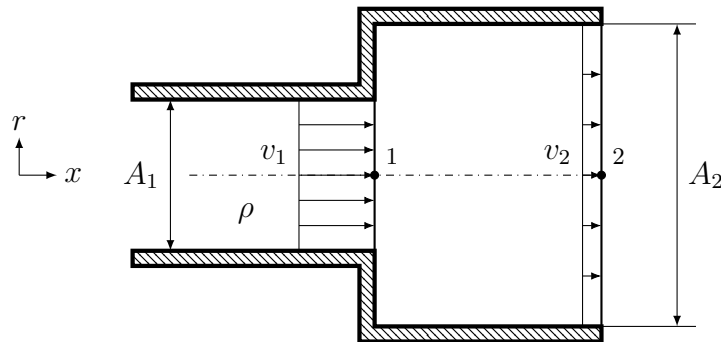
- Integral-Hilfe

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C & \text{für } |x| < a \\ \frac{1}{2a} \ln \frac{x+a}{x-a} + C & \text{für } |x| > a \end{cases}$$

- Die Strecke in der Rohrkrümmung ist gegenüber  $H$  und  $R$  zu vernachlässigen.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

### 3. Aufgabe (18 Punkte)

Nachfolgend wird der Verlust auf Grund einer unstetigen Querschnittserweiterung von  $A_1$  auf  $A_2$  in einer inkompressiblen stationären Rohrströmung mit der Dichte  $\rho$  untersucht. Hierbei gilt  $0 < A_1 < A_2$ . Am scharfkantigen Einlass bei Punkt 1 liegt eine Blockprofilströmung mit Geschwindigkeit  $v_1$  vor. Stromab bei Punkt 2 stabilisiert sich die Strömung, so dass sich erneut eine Blockprofilströmung mit Geschwindigkeit  $v_2$  einstellt. Die äußere Reibung, zwischen Fluid und Wand, ist gegenüber der inneren Reibung, also innerhalb des Fluids, zu vernachlässigen.



- a) Berechnen Sie die **Differenz der statischen Drücke**  $p_1 - p_2$  über die unstetige Querschnittserweiterung in  $x$ -Richtung. Entscheiden Sie anhand Ihres Ergebnisses, wie sich der statische Druck durch die Querschnittserweiterung stromab von  $p_1$  zu  $p_2$  verändert.

Der Verlustbeiwert  $\zeta$  ist hier über den Zusammenhang  $\Delta p_{1,2}^- = \zeta \frac{\rho}{2} v_1^2$  definiert, wobei  $\Delta p_{1,2}^- \geq 0$  den Druckverlust darstellt.

- b) Bestimmen Sie den **Verlustbeiwert**  $\zeta$  auf Grund der unstetigen Querschnittserweiterung in  $x$ -Richtung. Zeigen Sie mit Ihrem Ergebnis, dass der Verlustbeiwert positiv ist, also  $\zeta > 0$  gilt.
- c) Skizzieren Sie die **Stromlinien** im Bereich der Querschnitte 1 bis 2. Kennzeichnen und benennen Sie dabei die Gebiete, in denen **Verlusteffekte** stattfinden.
- d) Erklären und skizzieren Sie, wie die Geometrie der Querschnittsveränderung modifiziert werden kann, um die **Strömungsverluste zu verringern**.

Gegeben:

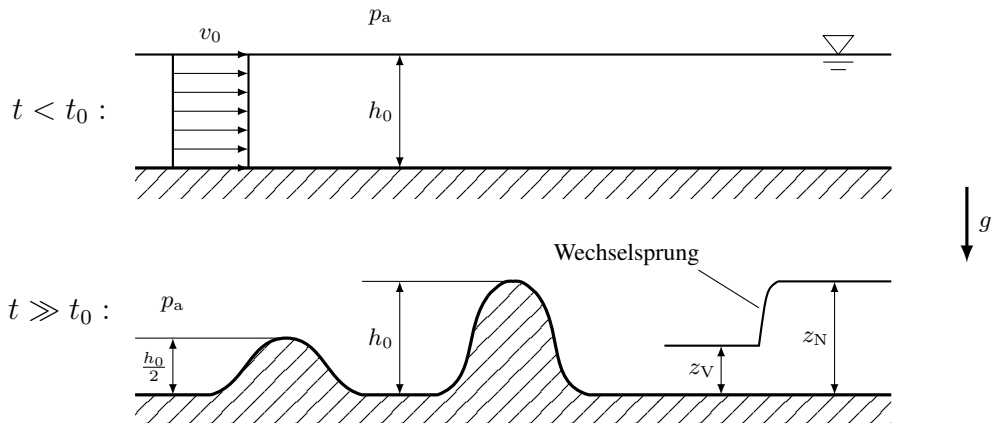
$$\rho, \quad v_1, \quad A_1, \quad A_2$$

Hinweise:

- Der Einfluss der Gravitation ist über die geometrischen Abmaße zu vernachlässigen.
- Die Aufgabenteile c) und d) sind unabhängig von a) und b) lösbar.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

#### 4. Aufgabe (18 Punkte)

Ein offenes Rechteck-Gerinne der Breite  $B$  wird mit der Geschwindigkeit  $v_0$  bei einer Spiegelhöhe  $h_0$  durchströmt, wobei  $Fr < 1$  ist. Zum Zeitpunkt  $t_0$  werden zwei Hindernisse mit den Höhen  $h_0/2$  und  $h_0$  hintereinander positioniert. Es stellt sich für  $t \gg t_0$  wieder eine stationäre Strömung mit gleichem Volumenstrom  $\dot{V}$  ein. Hinter dem zweiten Hindernis steht ein horizontaler Wechselsprung.



- Zeichnen Sie für  $t \gg t_0$  qualitativ den **Verlauf der Spiegelhöhe** und in einem **Energiehöhendendiagramm**  $H(z)$  den zugehörigen Verlauf der Energiehöhen. Es ist keine Berechnung erforderlich und tragen Sie die für den Strömungsvorgang wesentlichen Größen ein.
- Berechnen Sie die **Energiehöhe**  $H_V$  **vor dem Wechselsprung**.
- Berechnen Sie die **Energiehöhe**  $H_N$  **nach dem Wechselsprung**. Nehmen Sie die Spiegelhöhen  $z_N$  und  $z_V$  hier als gegeben an.

Im Nachfolgenden wird der Volumenstrom  $\dot{V}$  gegenüber dem Zustand  $t < t_0$  verändert.

- Erklären Sie mittels eines Energiehöhendendiagramms, wie sich der **Volumenstrom**  $\dot{V}$  ändern muss, damit bei **gleichbleibender totaler Energiehöhe**  $H_0^{\text{tot}} = H_1^{\text{tot}}$  beide Hindernisse weiterhin stationär überströmt werden.

Gegeben:

$$h_0, \quad v_0, \quad g$$

Hinweise:

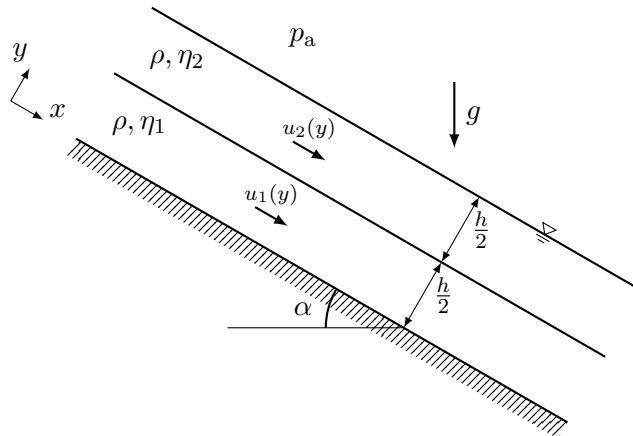
- Die Strömung ist reibungsfrei und inkompressibel.
- Die Energiehöhe  $H$ , die Grenztiefe  $z_{\text{gr}}$  und der Energiehöhenverlust  $\Delta H$  werden für eine Rechteck-Gerinneströmung wie folgt berechnet:

$$H(z) = z + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z^2} \quad \text{und} \quad z_{\text{gr}} = \left( \frac{\dot{V}^2}{gB^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{und} \quad \Delta H = \frac{(z_N - z_V)^3}{4z_V z_N} \geq 0$$

- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

### 5. Aufgabe (23 Punkte)

Zwei Newtonsche Fluide der gleichen konstanten Dichte  $\rho$  mit unterschiedlichen dynamischen konstanten Viskositäten  $\eta_1 > 0$  und  $\eta_2 > 0$  fließen in wandparallelen Schichten (laminar) unter dem Einfluss der konstanten Gravitationsbeschleunigung  $g$  an einer konstant um den Winkel  $\alpha$  geneigten Wand herab. Die Strömung ist stationär, vollständig ausgebildet und die Fluide mischen sich nicht. Die beiden Fluidschichten weisen eine konstante Dicke  $h/2$  in Hauptströmungsrichtung  $x$  auf. Der Umgebungsdruck  $p_a$  an der freien Oberfläche über Fluid 2 ist höhenunabhängig konstant. Die Platte ist in  $z$ -Richtung bzw. in die Tiefe unendlich ausgedehnt.



- Leiten Sie anhand eines differentiellen Volumenelements die **Differentialgleichung** zur Bestimmung der **Schubspannungsverteilung**  $\tau(y)$  in beiden fluiden Phasen her. Skizzieren Sie sorgfältig das differentielle Element und die darauf wirkenden relevanten Kräfte.
- Nennen Sie die **beiden Randbedingungen in der Phasengrenze** zwischen den beiden Fluiden bei  $y = \frac{h}{2}$ , die zur eindeutigen Lösung der Differentialgleichung erforderlich sind.
- Bestimmen Sie die **Geschwindigkeitsfelder**  $u_1(y)$  und  $u_2(y)$  in beiden fluiden Phasen.
- Skizzieren** Sie sorgfältig die zuvor bestimmten **Geschwindigkeitsfelder** abhängig von  $y$  für  $\eta_1 > \eta_2$  in den entsprechenden Fluidphasen.

Gegeben:

$$\rho, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \quad h, \quad g, \quad \alpha$$

Hinweise:

- Oberflächenspannungseffekte sind zu vernachlässigen.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

6. Aufgabe (20 Punkte)

- a) Geben Sie die Definitionsgleichung der zentralen dimensionslosen **Kennzahl**, die zur **Charakterisierung der Strömungsformen** "laminar" und "turbulent" herangezogen wird. Interpretieren Sie den Zähler und Nenner der Definitionsgleichung der gesuchten Kennzahl.
- b) Skizzieren Sie sorgfältig das **turbulente bzw. universelle Wandgesetz** in einem halb-logarithmischen **Diagramm** mit der Reynolds-gemittelten Strömungsgeschwindigkeit  $\bar{u}^+$  als Ordinate und dem logarithmierten Wandabstand  $y^+$  als Abszisse in inneren Einheiten.
- c) Skizzieren Sie, wie sich die **gesamte Schubspannung**  $\bar{\tau}$  im **turbulenten bzw. universellen Wandgesetz** abhängig vom Wandabstand  $y^+$  aus der laminaren/molekularen  $\bar{\tau}_l$  und der turbulenten Schubspannung  $\bar{\tau}_t$  im Wandbereich **zusammensetzt**.
- d) Es ist ein stationäres zweidimensionales Strömungsfeld  $\vec{v}$  in kartesischen Koordinaten mit Geschwindigkeitskomponente  $u$  in  $x$ -Richtung und Geschwindigkeitskomponente  $v$  in  $y$ -Richtung gegeben.

$$\vec{v} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y \text{ mit } u = \hat{u} = \text{const und } v = \hat{v} \cos(kx), \text{ wobei } \hat{v}, k = \text{const}$$

- Geben Sie die **Differentialgleichung** zur Ermittlung der **Stromlinie** im zweidimensionalen kartesischen Fall mit den Koordinaten in  $x$ - und  $y$ -Richtung an.
- Bestimmen Sie die **Stromlinie**, die durch den Punkt mit den Koordinaten  $x_0 = 0$  und  $y_0 = 0$  geht, in der Form  $y_S(x_S)$ .
- **Skizzieren** Sie sorgfältig die zuvor bestimmte **Stromlinie** und das **Strömungsfeld**.

Gegeben:  $\hat{u} > 0, \quad \hat{v} > 0, \quad k > 0, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0$

- e) Nennen Sie die **vier zentralen Annahmen und Randbedingungen**, die zur Herleitung der nachfolgenden "Barometrischen Höhenformel" für eine Gasatmosphäre in der Fluidstatik getroffen werden.

$$p(z) = p_a e^{-\frac{g}{R_L T} z} \quad \text{für } z \geq 0$$

Hinweise:

- Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen.

