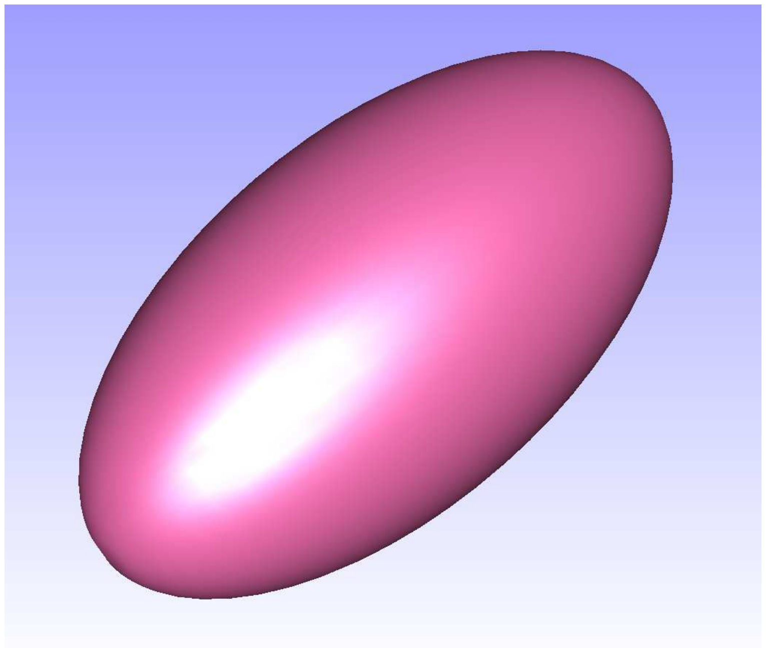
Aufgabe 1

Experimentelle Daten aus einem Wasserkanal für die Umströmung von Kugeln und Ellipsoiden sind gegeben. Die Experimente werden verwendet, um die Kräfte auf Kugeln und Ellipsoiden in Luft vorherzusagen. Die folgenden Werte sind gegeben:

	Dichte [$\frac{kg}{m^3}$]	Viskosität [Pas]	Durchmesser [m]
Wasserkanal	1000	$1.5 \cdot 10^{-3}$	1
Luft	1.225	$17 \cdot 10^{-6}$	5

Die Strömungsgeschwindigkeit im Wasserkanal beträgt $u = 15$ m/s. 5 Modelle mit unterschiedlichen Längen wurden getestet. Die gemessenen Kräfte stehen in folgender Tabelle:

Länge [m]	F_D [N]	
1	17670	$\star$
2	8390	
3	8217	$\star$
6	11194	
10	17670	$\star$



Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Kraft in Luft auf einen Ellipsoiden mit dem Durchmesser D = 5 m und einer Länge L = 15 m bei einer Geschwindigkeit u_1 = 100 km/h und bei u_2 = 180 km/h.

b) Berechnen Sie den Widerstandskoeffizienten der experimentellen Daten als Funktion der Stirnfläche und als Funktion der Referenzfläche $A_{ref} = V^{2/3}$. Das Volumen eines Ellipsoiden wird mit den Halbachsen $V = \frac{4}{3}\pi abc$ berechnet. Zeichnen Sie ihr Ergebnis in ein Diagramm.

c) Die Messergebnisse werden verwendet, um das Minimum für den Widerstandsbeiwert zu bestimmen. Nehmen Sie an, dass die Beziehung zwischen der Schlankheit und dem Widerstandsbeiwert, basierend auf der Stirnfläche durch eine Parabel zweiten Grades beschrieben werden kann und berechnen Sie aus den Messwerten das Minimum.

d) Die Messergebnisse werden verwendet, um das Minimum für den Widerstandsbeiwert zu bestimmen. Nehmen Sie an, dass die Beziehung zwischen der Schlankheit und dem Widerstandsbeiwert, basierend auf der Referenzfläche $A_{ref} = V^{2/3}$ durch eine Parabel zweiten Grades beschrieben werden kann und berechnen Sie aus den Messwerten das Minimum.

e) Drei der gemessenen Werte (markiert mit $\star$) werden verwendet, um eine exakte Parabel zweiten Grades zu bestimmen. Bestimmen Sie die nötigen Koeffizienten und berechnen Sie das Minimum.

Aufgabe 1

a) • Schlankheitsgrad: L/D = 3

• Reynoldszahl in Wasser: $\mathrm{Re}_W = \frac{\varrho_W u_W D_W}{\mu_W} = \frac{1000\cdot 15\cdot 1}{1.5\cdot 10^{-3}} = 10^7$

• Reynoldszahl in Luft: $\mathrm{Re}_1 = \frac{\varrho_A u_1 D_A}{\mu_A} = \frac{1.225\cdot 27.8\cdot 5}{17\cdot 10^{-6}} \approx 10^7$

• Reynoldszahl in Luft: $\mathrm{Re}_2 = \frac{\varrho_A u_2 D_A}{\mu_A} = \frac{1.225\cdot 50\cdot 5}{17\cdot 10^{-6}} \approx 1.8\cdot 10^7 \Longrightarrow$ ZU GROSS

$$c_D = \frac{F_{D,W}}{\frac{1}{2}\varrho u_W^2 \frac{\pi}{4} D_W^2} = \frac{8217}{\frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 15^2 \frac{\pi}{4} 1^2} = 0.093$$

$$F_{D,A} = c_D \cdot \frac{1}{2}\varrho u_A^2 \frac{\pi}{4} D_A^2 = 0.093\cdot \frac{1}{2} 1.225\cdot 27.8^2 \frac{\pi}{4} 5^2 = 864.4N$$

Aufgabe 1

b)

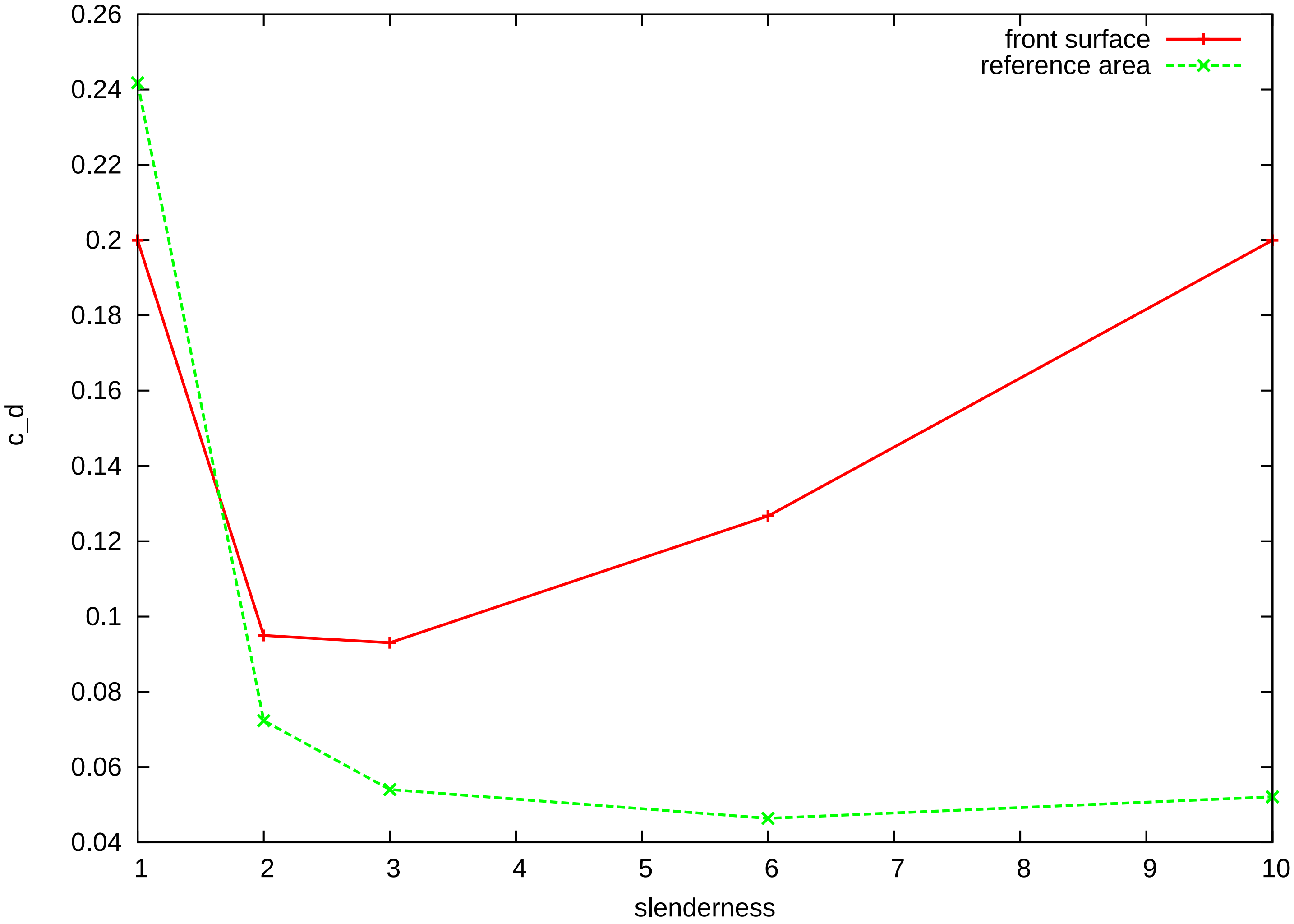
$$c_{D,F} = \frac{F_{D,W}}{\frac{1}{2}\varrho u_W^2 A_F}$$

$$c_{D,ref} = \frac{F_{D,W}}{\frac{1}{2}\varrho u_W^2 A_{ref}}$$

$$A_F = \frac{\pi}{4} D_W^2 \qquad A_{ref} = \left(\frac{1}{6}\pi D_W^2 \cdot L\right)^{2/3}$$

Länge [m]	F_D [N]	A_f [m]^2	c$_{D,F}$	Vol [m]^3	A$_{ref}$ [m]^2	c$_{D,ref}$
1	17670	0.785	0.2	0.52360	0.64963	0.24178
2	8390	0.785	0.095	1.04720	1.03122	0.07232
3	8217	0.785	0.093	1.57080	1.35128	0.05405
6	11194	0.785	0.127	3.14159	2.14503	0.04639
10	17670	0.785	0.2	5.23599	3.01531	0.05209

Aufgabe 1



0.26
0.24
0.22
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
c_d
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
slenderness
front surface
reference area

Aufgabe 1

c) Methode der kleinsten Fehlerquadrate

- Minimiere den Fehler der Ansatzfunktion

$$S = \sum_{i=1}^{n} {r_i}^2 \qquad \text{mit} \qquad r_i = y_i - f(x_i)$$

- In diesem Fall

$$f(x_i) = a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c \qquad \text{mit} \qquad n = 5$$

  – x_i: Schlankheitsgrad
  – y_i: Widerstandskraft oder -beiwert
  – x_i und y_i sind bekannte Größen $\longrightarrow$ 3 Unbekante: a, b, c

- Berechnung der Unbekannten, sodass S ein Minimum hat.
- Minimum einer Funktion mehrere Veränderlicher $\longrightarrow$ Die erste Ableitung muss für alle Variablen Null sein.

Aufgabe 1

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{5} \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right]^2$$

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{5} -2x_i^2 \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial b} = \sum_{i=1}^{5} -2x_i \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial c} = \sum_{i=1}^{5} -2 \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] = 0$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] &= 0 & \qquad a \sum_{i=1}^{5} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{5} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{5} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i \\
\sum_{i=1}^{5} x_i \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] &= 0 \Longrightarrow & a \sum_{i=1}^{5} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{5} x_i &= \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \\
\sum_{i=1}^{5} \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] &= 0 & a \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{5} x_i + 5 \cdot c &= \sum_{i=1}^{5} y_i
\end{aligned}$$

Aufgabe 1

lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^4 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{5} x_i & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{5} x_i y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{5} y_i \end{pmatrix}$$

x	y
1	0.2
2	0.095
3	0.093
6	0.127
10	0.2

Lösung mit Cramer’sche Regel

Aufgabe 1

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 22. \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 150. \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 1252 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 11394$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 0.7146099 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 3.4288622 \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i = 25.975976$$

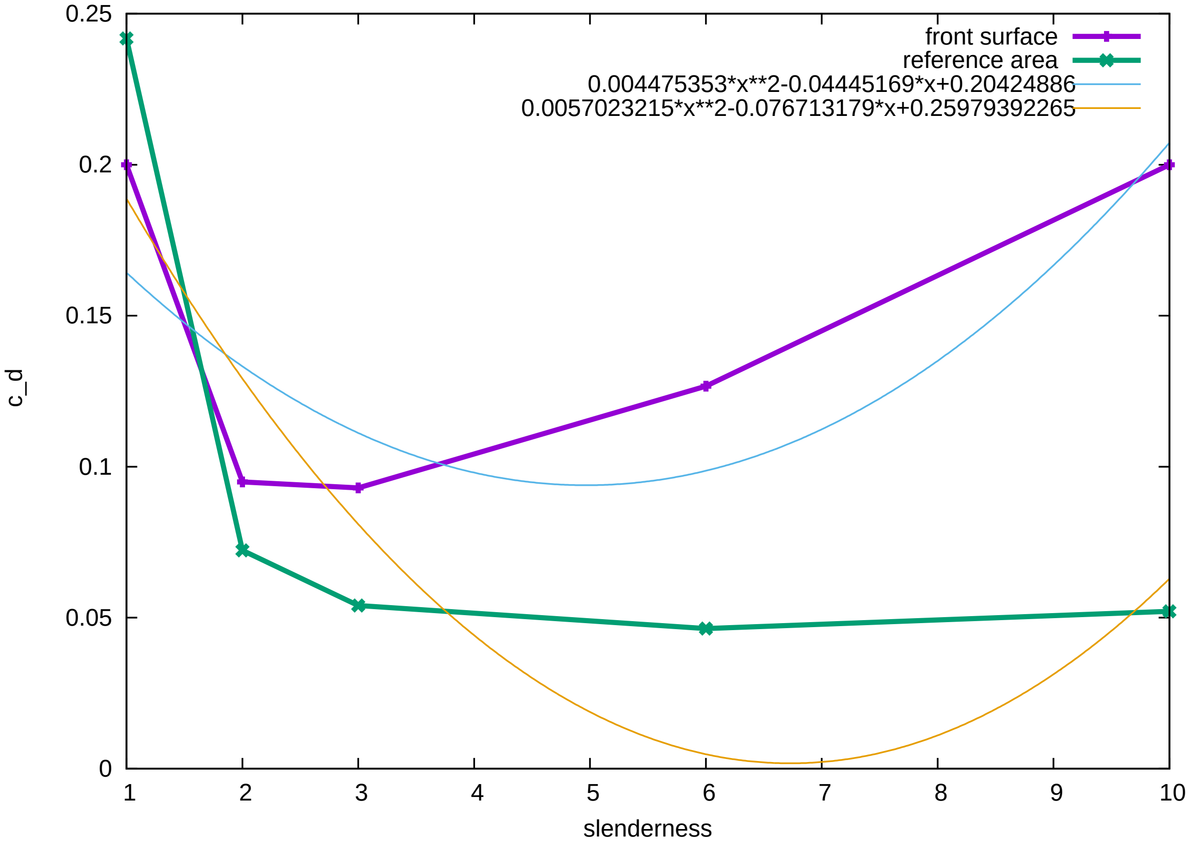
$$\begin{aligned} a &= 4.475353E - 003 \\ b &= -4.445169E - 002 \\ c &= 0.204248 \end{aligned}$$

$$f(x) = 4.475353E - 003 \cdot x^2 \; - \; 4.445169E - 002 \cdot x + 0.204248$$

$$\frac{df}{dx} = 0 \Longrightarrow x \; = \; \frac{4.445169E - 002}{2 \cdot 4.475353E - 003} = 4.966278$$

$$f(x) \; = \; 9.3869E - 002$$

Aufgabe 1



front surface
reference area
0.004475353*x**2-0.04445169*x+0.20424886
0.0057023215*x**2-0.076713179*x+0.25979392265
c_d
slenderness
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Aufgabe 1

d)

$$a = 5.7023215E-003$$
$$b = -7.671317E-002$$
$$c = 0.2597939$$

$$f(x) = 5.7023215E-003 \cdot x^2 \; - \; 7.6713179E-002 \cdot x + 0.2597939$$

$$\frac{df}{dx} = 0 \Longrightarrow x \; = \; \frac{7.671317E-002}{2 \cdot 5.7023215E-003} = 6.7264866$$

$$f(x) \; = \; 1.7888355E-003$$

Hinweis zu e: exakte Lösung an Stelle der Methode der kleinsten Quadrate

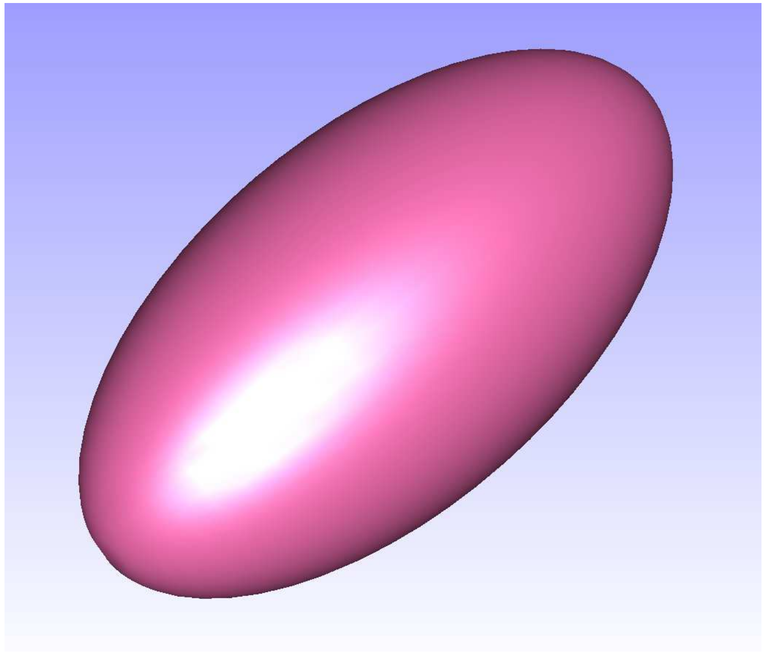
Aufgabe 1

Experimentelle Daten aus einem Wasserkanal für die Umströmung von Kugeln und Ellipsoiden sind gegeben. Die Experimente werden verwendet, um die Kräfte auf Kugeln und Ellipsoiden in Luft vorherzusagen. Die folgenden Werte sind gegeben:

	Dichte $[\frac{kg}{m^3}]$	Viskosität [Pas]	Durchmesser [m]
Wasserkanal	1000	$1.5 \cdot 10^{-3}$	1
Luft	1.225	$17 \cdot 10^{-6}$	5

Die Strömungsgeschwindigkeit im Wasserkanal beträgt $u = 15$ m/s. 5 Modelle mit unterschiedlichen Längen wurden getestet. Die gemessenen Kräfte stehen in folgender Tabelle:

Länge [m]	F_D [N]	
1	17670	$\star$
2	8390	
3	8217	$\star$
6	11194	
10	17670	$\star$



Aufgabe 1

a) Berechnen Sie die Kraft in Luft auf einen Ellipsoiden mit dem Durchmesser D = 5 m und einer Länge L = 15 m bei einer Geschwindigkeit u_1 = 100 km/h und bei u_2 = 180 km/h.

b) Berechnen Sie den Widerstandskoeffizienten der experimentellen Daten als Funktion der Stirnfläche und als Funktion der Referenzfläche $A_{ref} = V^{2/3}$. Das Volumen eines Ellipsoiden wird mit den Halbachsen $V = \frac{4}{3}\pi abc$ berechnet. Zeichnen Sie ihr Ergebnis in ein Diagramm.

c) Die Messergebnisse werden verwendet, um das Minimum für den Widerstandsbeiwert zu bestimmen. Nehmen Sie an, dass die Beziehung zwischen der Schlankheit und dem Widerstandsbeiwert, basierend auf der Stirnfläche durch eine Parabel zweiten Grades beschrieben werden kann und berechnen Sie aus den Messwerten das Minimum.

d) Die Messergebnisse werden verwendet, um das Minimum für den Widerstandsbeiwert zu bestimmen. Nehmen Sie an, dass die Beziehung zwischen der Schlankheit und dem Widerstandsbeiwert, basierend auf der Referenzfläche $A_{ref} = V^{2/3}$ durch eine Parabel zweiten Grades beschrieben werden kann und berechnen Sie aus den Messwerten das Minimum.

e) Drei der gemessenen Werte (markiert mit $\star$) werden verwendet, um eine exakte Parabel zweiten Grades zu bestimmen. Bestimmen Sie die nötigen Koeffizienten und berechnen Sie das Minimum.

Aufgabe 1

a) • Schlankheitsgrad: L/D = 3

• Reynoldszahl in Wasser: $\text{Re}_W = \frac{\varrho_W u_W D_W}{\mu_W} = \frac{1000 \cdot 15 \cdot 1}{1.5 \cdot 10^{-3}} = 10^7$

• Reynoldszahl in Luft: $\text{Re}_1 = \frac{\varrho_A u_1 D_A}{\mu_A} = \frac{1.225 \cdot 27.8 \cdot 5}{17 \cdot 10^{-6}} \approx 10^7$

• Reynoldszahl in Luft: $\text{Re}_2 = \frac{\varrho_A u_2 D_A}{\mu_A} = \frac{1.225 \cdot 50 \cdot 5}{17 \cdot 10^{-6}} \approx 1.8 \cdot 10^7 \Longrightarrow$ ZU GROSS

$$c_D = \frac{F_{D,W}}{\frac{1}{2}\varrho u_W^2 \frac{\pi}{4} D_W^2} = \frac{8217}{\frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 15^2 \frac{\pi}{4} 1^2} = 0.093$$

$$F_{D,A} = c_D \cdot \frac{1}{2}\varrho u_A^2 \frac{\pi}{4} D_A^2 = 0.093 \cdot \frac{1}{2} 1.225 \cdot 27.8^2 \frac{\pi}{4} 5^2 = 864.4 N$$

Aufgabe 1

b)

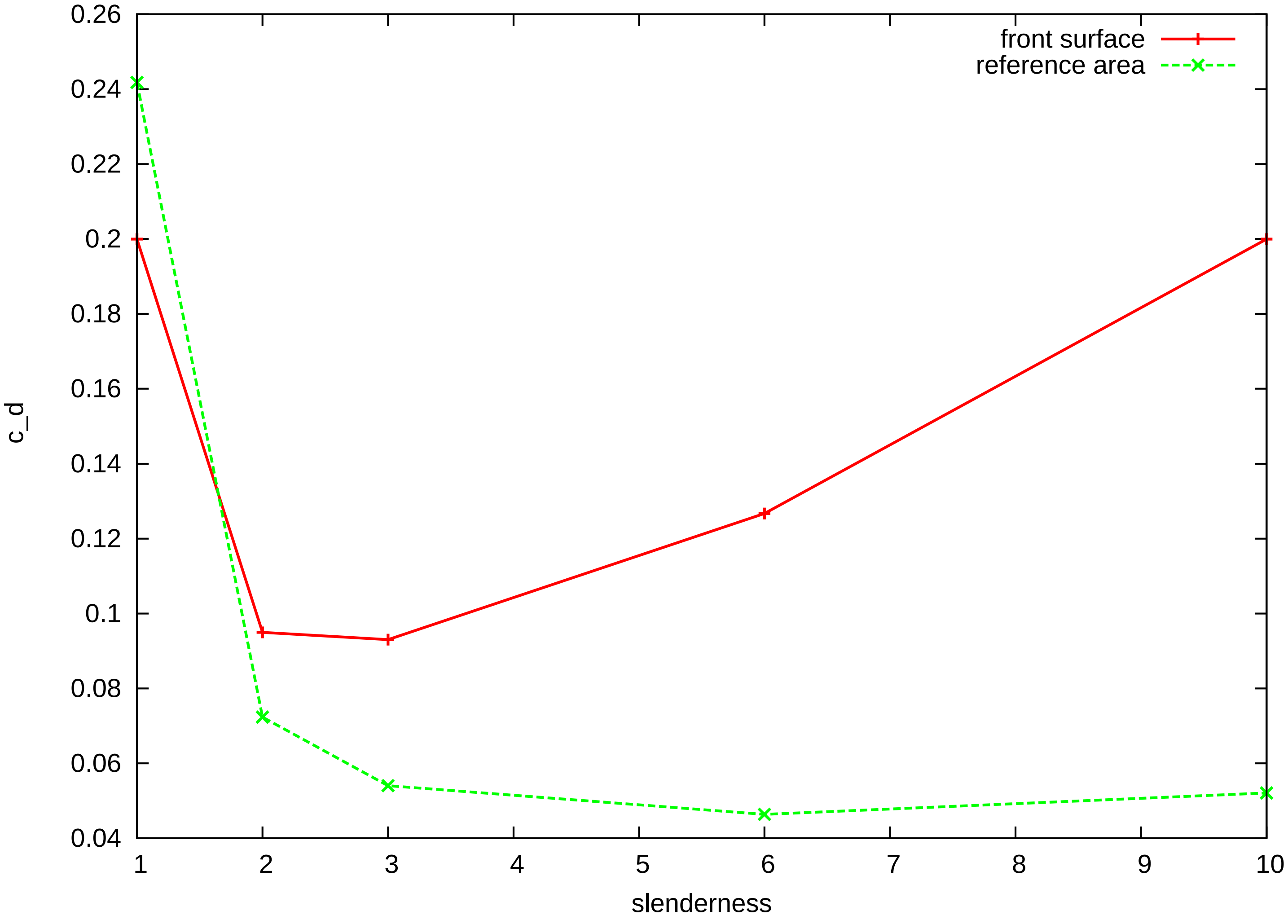
$$c_{D,F} = \frac{F_{D,W}}{\frac{1}{2}\varrho u_W^2 A_F}$$

$$c_{D,ref} = \frac{F_{D,W}}{\frac{1}{2}\varrho u_W^2 A_{ref}}$$

$$A_F = \frac{\pi}{4} D_W^2 \qquad A_{ref} = \left(\frac{1}{6}\pi D_W^2 \cdot L\right)^{2/3}$$

Länge [m]	F_D [N]	A_f [m]^2	c$_{D,F}$	Vol [m]^3	A$_{ref}$ [m]^2	c$_{D,ref}$
1	17670	0.785	0.2	0.52360	0.64963	0.24178
2	8390	0.785	0.095	1.04720	1.03122	0.07232
3	8217	0.785	0.093	1.57080	1.35128	0.05405
6	11194	0.785	0.127	3.14159	2.14503	0.04639
10	17670	0.785	0.2	5.23599	3.01531	0.05209

Aufgabe 1



front surface
reference area
0.26
0.24
0.22
0.2
0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
c_d
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
slenderness

Aufgabe 1

c) Methode der kleinsten Fehlerquadrate

- Minimiere den Fehler der Ansatzfunktion

$$S = \sum_{i=1}^{n} {r_i}^2 \qquad \text{mit} \qquad r_i = y_i - f(x_i)$$

- In diesem Fall

$$f(x_i) = a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c \qquad \text{mit} \qquad n = 5$$

  - x_i: Schlankheitsgrad
  - y_i: Widerstandskraft oder -beiwert
  - x_i und y_i sind bekannte Größen $\longrightarrow$ 3 Unbekante: a, b, c

- Berechnung der Unbekannten, sodass S ein Minimum hat.
- Minimum einer Funktion mehrere Veränderlicher $\longrightarrow$ Die erste Ableitung muss für alle Variablen Null sein.

Aufgabe 1

$$S(a,b,c) \;=\; \sum_{i=1}^{5} \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right]^2$$

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial a} \;=\; \sum_{i=1}^{5} -2x_i^2 \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial b} \;=\; \sum_{i=1}^{5} -2x_i \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial S(a,b,c)}{\partial c} \;=\; \sum_{i=1}^{5} -2 \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] = 0$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{5} x_i^2 \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] &= 0 & \quad & a \sum_{i=1}^{5} x_i^4 + b \sum_{i=1}^{5} x_i^3 + c \sum_{i=1}^{5} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i \\
\sum_{i=1}^{5} x_i \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] &= 0 & \Longrightarrow & a \sum_{i=1}^{5} x_i^3 + b \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + c \sum_{i=1}^{5} x_i &= \sum_{i=1}^{5} x_i y_i \\
\sum_{i=1}^{5} \left[y_i - \left(a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\right)\right] &= 0 & & a \sum_{i=1}^{5} x_i^2 + b \sum_{i=1}^{5} x_i + 5 \cdot c &= \sum_{i=1}^{5} y_i
\end{aligned}$$

Aufgabe 1

lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^4 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 \\ \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^3 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{5} x_i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2 y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{5} x_i y_i \\ \sum\limits_{i=1}^{5} y_i \end{pmatrix}$$

x	y
1	0.2
2	0.095
3	0.093
6	0.127
10	0.2

Lösung mit Cramer'sche Regel

Aufgabe 1

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 22. \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 150. \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^3 = 1252 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i^4 = 11394$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 0.7146099 \qquad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 3.4288622 \; \sum_{i=1}^{5} x_i^2 y_i = 25.975976$$

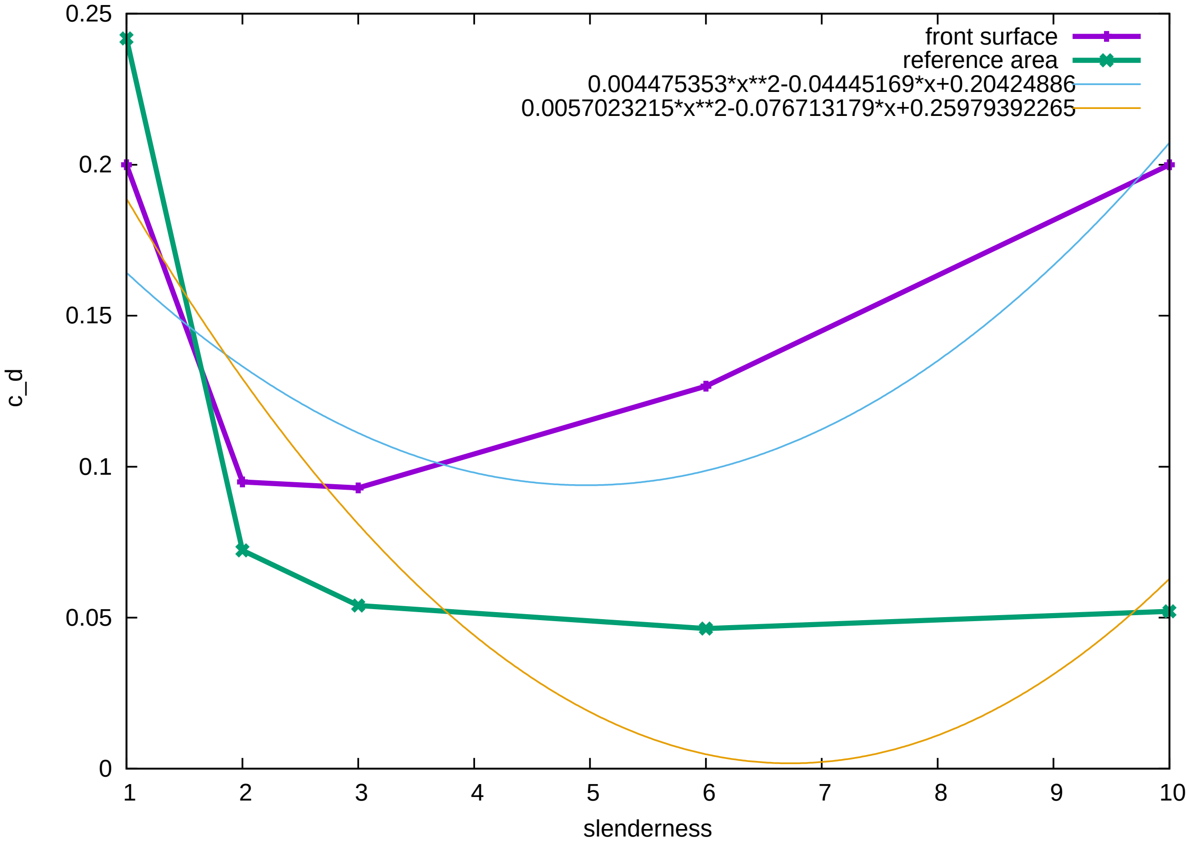
$$\begin{aligned} a &= 4.475353E-003 \\ b &= -4.445169E-002 \\ c &= 0.204248 \end{aligned}$$

$$f(x) = 4.475353E-003 \cdot x^2 \; - \; 4.445169E-002 \cdot x + 0.204248$$

$$\frac{df}{dx} = 0 \Longrightarrow x \; = \; \frac{4.445169E-002}{2 \cdot 4.475353E-003} = 4.966278$$

$$f(x) \; = \; 9.3869E-002$$

Aufgabe 1



front surface
reference area
0.004475353*x**2-0.04445169*x+0.20424886
0.0057023215*x**2-0.076713179*x+0.25979392265
c_d
slenderness
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Aufgabe 1

d)

$$a = 5.7023215E - 003$$
$$b = -7.671317E - 002$$
$$c = 0.2597939$$

$$f(x) = 5.7023215E - 003 \cdot x^2 \; - \; 7.6713179E - 002 \cdot x + 0.2597939$$

$$\frac{df}{dx} = 0 \Longrightarrow x \; = \; \frac{7.671317E - 002}{2 \cdot 5.7023215E - 003} = 6.7264866$$

$$f(x) \; = \; 1.7888355E - 003$$

Aufgabe 1

e)

Hinweis zu e: exakte Lösung an Stelle der Methode der kleinsten Quadrate

- $$f(x_i) = a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c \qquad \text{mit} \qquad n = 3$$
  - x_i: Schlankheitsgrad oder Länge
  - F: Widerstandskraft
  - x_i und F sind bekannte Größen $\longrightarrow$ 3 Unbekannte: a, b, c
- lineares Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
F(x_1 = 1) &= a * x_1^2 + b * x_1 + c = 17670 \\
F(x_3 = 3) &= a * x_3^2 + b * x_3 + c = 8217 \\
F(x_5 = 10) &= a * x_5^2 + b * x_5 + c = 17670
\end{aligned}$$

Aufgabe 1

$$F(x_1 = 1) = 1 \cdot a + 1 \cdot b + c = 17670 \quad (1)$$
$$F(x_2 = 3) = 9 \cdot a + 3 \cdot b + c = 8217 \quad (2)$$
$$F(x_2 = 10) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c = 17670 \quad (3)$$

$$(2) - (1): \; 8 \cdot a + 2 \cdot b = -9453 \quad (4)$$
$$(3) - (2): \; 91 \cdot a + 7 \cdot b = 9453 \quad (5)$$

$$2 * (5) - 7 * (4): \; 126 \cdot a = 85077 \quad (6)$$

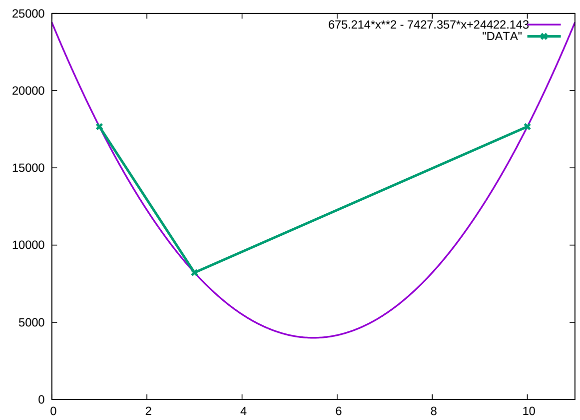
$$a = 85077/126 = 675.214 \quad (7)$$
$$b = (9453 - 91 \cdot 675.214)/7 = -7427.357 \quad (8)$$
$$c = 17670 - 675.214 - (-7427.357) = 24422.143 \quad (9)$$

Aufgabe 1

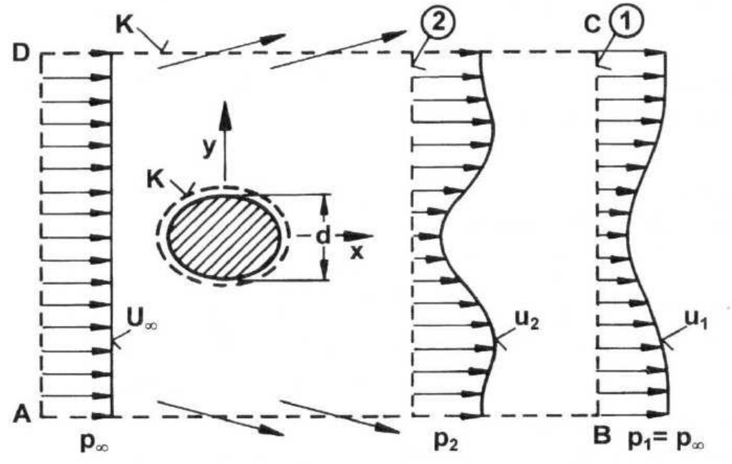
$$F = 675.214 * x^2 - 7427.357 * x + 24422.143 \tag{10}$$

$$\frac{dF}{dx} = 2 \cdot 675.214 \cdot x - 7427.357 = 0 \Longrightarrow x = \frac{7427.357}{2 \cdot 675.214} = 5.5 \tag{11}$$

$$\Longrightarrow F(x) = 675.214 \cdot 5.5^2 - 7427.357 \cdot 5.5 + 24422.143 = 3996.903 \tag{12}$$



Aufgabe 2



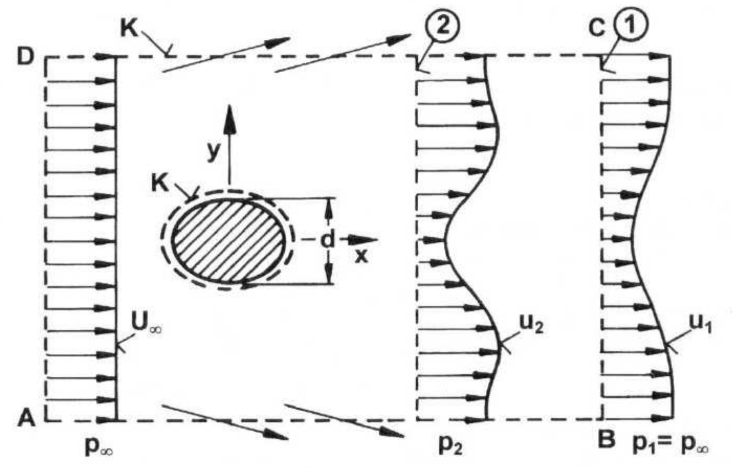
Die Geschwindigkeitsverteilung im Strömungsfeld um einen stumpfen Körper wurde vermessen. Aus den Daten wurde analysiert, dass sich das symmetrische Feld in der folgenden Form schreiben lässt:

$$\frac{u(y)}{U_\infty} = -\frac{1}{2500} \times \left(\frac{y}{d}\right)^3 \quad + \quad \frac{3}{500} \times \left(\frac{y}{d}\right)^2 \quad + \quad 0.8 \tag{1}$$

für alle Werte $0 < y/d < 10$ zwischen den Punkten B und C.

Berechnen Sie den Volumenstrom und die Impulsflüsse für die Flächen AD, AB, CD und BC. Bestimmen Sie die Widerstandskraft und den Widerstandsbeiwert.

Aufgabe 2



- Volumenstrom :

$$\dot{Q} = \int_A \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA$$

- Impulsfluss :

$$\dot{I} = \varrho \int_A \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) \, dA$$

Aufgabe 2

AD

- Volumenstrom:

$$\dot{Q} = -b \int\limits_{-10d}^{10d} U_\infty \, dy = -20bdU_\infty$$

- X-Impuls:

$$\dot{I} = -b\varrho \int\limits_{-10d}^{10d} U_\infty^2 \, dy = -20\varrho bdU_\infty^2$$

Aufgabe 2

BC

- Volumenstrom:

$$\dot{Q} = b\int\limits_{-10d}^{10d} u(y)\,dy = 2bU_\infty \int\limits_{0}^{10d}\left(-\frac{1}{2500}\times\left(\frac{y}{d}\right)^3 + \frac{3}{500}\times\left(\frac{y}{d}\right)^2 + 0.8\right)\,dy =$$

$$= 2bdU_\infty\left[-\frac{1}{10000}\left(\frac{y}{d}\right)^4 + \frac{1}{500}\times\left(\frac{y}{d}\right)^3 + 0.8\left(\frac{y}{d}\right)\right]_0^{10d} = 2bdU_\infty\left(-1+2+0.8*10\right) = 18bdU_\infty$$

- X-Impuls:

$$\dot{I} = \varrho b\int\limits_{-10d}^{10d} u(y)^2_\infty\,dy = 2\varrho bU^2_\infty \int\limits_{0}^{10d}\left(-\frac{1}{2500}\times\left(\frac{y}{d}\right)^3 + \frac{3}{500}\times\left(\frac{y}{d}\right)^2 + 0.8\right)^2\,dy =$$

$$= 2\varrho bU^2_\infty\int\limits_{0}^{10d}\left(\frac{1}{6.25\times10^6}\left(\frac{y}{d}\right)^6 + \frac{36}{10^6}\left(\frac{y}{d}\right)^4 + 0.64 - \frac{6}{1.25\times10^6}\left(\frac{y}{d}\right)^5 - \frac{1.6}{2500}\left(\frac{y}{d}\right)^3 + \frac{4.8}{500}\left(\frac{y}{d}\right)^2\right)dy =$$

$$= 2\varrho bdU^2_\infty\left[\frac{1}{7\times6.25\cdot10^6}\left(\frac{y}{d}\right)^7 + \frac{36}{5\cdot10^6}\left(\frac{y}{d}\right)^5 + 0.64\left(\frac{y}{d}\right) - \frac{1}{1.25\cdot10^6}\left(\frac{y}{d}\right)^6 - \frac{1.6}{10^4}\left(\frac{y}{d}\right)^4 + \frac{1.6}{500}\left(\frac{y}{d}\right)^3\right]_0^{10d} =$$

$$= 2\varrho bdU^2_\infty\left[\frac{10^7}{7\times6.25\cdot10^6} + \frac{36\cdot10^5}{5\cdot10^6} + 6.4 - \frac{1\cdot10^6}{1.25\cdot10^6} - \frac{1.6\cdot10^4}{10^4} + \frac{1.6\cdot10^3}{500}\right] = 16.297\ \varrho bdU^2_\infty$$

Aufgabe 2

AB + DC

- Volumenstrom:

$$\dot{Q} = -\dot{Q}_{AD} - \dot{Q}_{BC} = 2bdU_\infty$$

- X-Impuls:

$$\dot{I} = \dot{Q} \cdot U_\infty = 2\varrho bdU_\infty^2$$

Widerstandskraft:

$$D = \varrho b \int_{-10d}^{10d} u(y) \left(U_\infty - u(y)\right) \, dy = -\sum \dot{I} = 1.703\varrho bdU_\infty^2$$

Kraftbeiwert:

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\varrho bdU_\infty^2} = 3.406$$

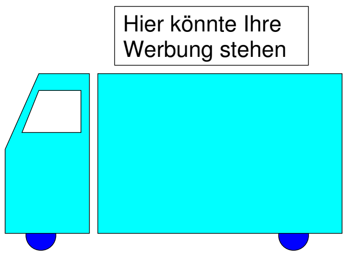
Aufgabe 4

1. Auf dem Dach eines Lieferwagens soll ein Werbeschild angebracht werden. Wie groß ist der zusätzliche Widerstand und die benötigte Leistung, wenn bei 50 km/h die Platte

   - parallel zur Fahrtrichtung (turbulent, ohne Wandrauigkeit)
   - normal zur Fahrtrichtung

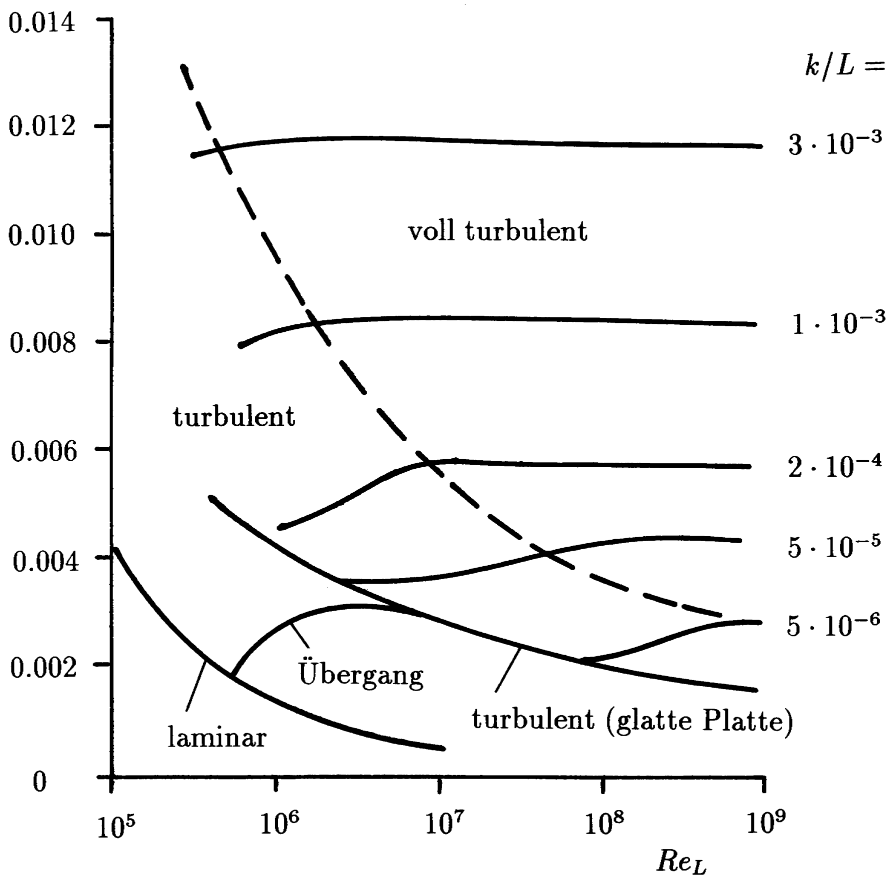
   auf dem Dach befestigt wird. Das Schild ist rechteckig und hat eine Länge von 1,5 m und eine Höhe von 0,5 m. Die Luftdichte beträgt $\varrho = 1.225\,kg/m^3$ und die Viskosität von Luft beträgt $\eta = 0.179 \cdot 10^{-4}\,Ns/m^2$. Verwenden Sie das Diagramm bzw. die Gleichung

   $$c_w = 1.1 + 0.02(L/H + H/L)$$

2. Die maximale Sinkgeschwindigkeit eines Fallschirmes soll am Boden nicht mehr als 5,4 m/s betragen. Der Fallschirm kann näherungsweise als eine geöffnete Halbkugel mit einem Widerstandsbeiwert von $c_w = 2.2$ gesehen werden. Welchen Durchmesser muss der Fallschirm haben, wenn der Fallschirmspringer inklusive der Ausrüstung maximal $m = 150\,kg$ wiegt? Die Dichte der Luft ist $\varrho = 1.225\,kg/m^3$ und die Erdbeschleunigung beträgt $g = 9,81\,m/s^2$.

Aufgabe 4



Widerstandsbeiwert für die längsangeströmte ebene Platte

Aufgabe 3

- parallel zur Fahrtrichtung

$$Re = \frac{\varrho \cdot u \cdot L}{\eta} = 1.43 \cdot 10^6 \Longrightarrow \text{turbulent}$$

aus Diagramm: $c_w \approx 4 \cdot 10^{-3}$

$$c_w = \frac{F_w}{\frac{1}{2}\varrho u^2 \cdot L \cdot H} \Longrightarrow F_w = c_w \cdot \frac{1}{2}\varrho u^2 \cdot L \cdot H = 0.35\,N \Longrightarrow P = F_w \cdot v = 4.9\,W$$

Umströmung von beiden Seiten

$$F_w = 0.71N \text{ und } P = 9.8W$$

- senkrecht zur Fahrtrichtung

$$L/H = 3 \Longrightarrow c_w = 1.167$$

$$c_w = \frac{F_w}{\frac{1}{2}\varrho u^2 \cdot L \cdot H} \Longrightarrow F_w = c_w \cdot \frac{1}{2}\varrho u^2 \cdot L \cdot H = 103.4\,N$$

$$P = F \cdot v = 1436\,W$$

146-mal soviel

Aufgabe 3

- konstante Fallgeschwindigkeit $\Longrightarrow$ Kräftegleichgewicht:

$$G = F_w$$

für die Widerstandskraft gilt:

$$F_w = c_w \cdot \frac{1}{2}\varrho v^2 \cdot A = c_w \cdot \frac{1}{2}\varrho v^2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2$$

Damit ergibt sich für den Durchmesser

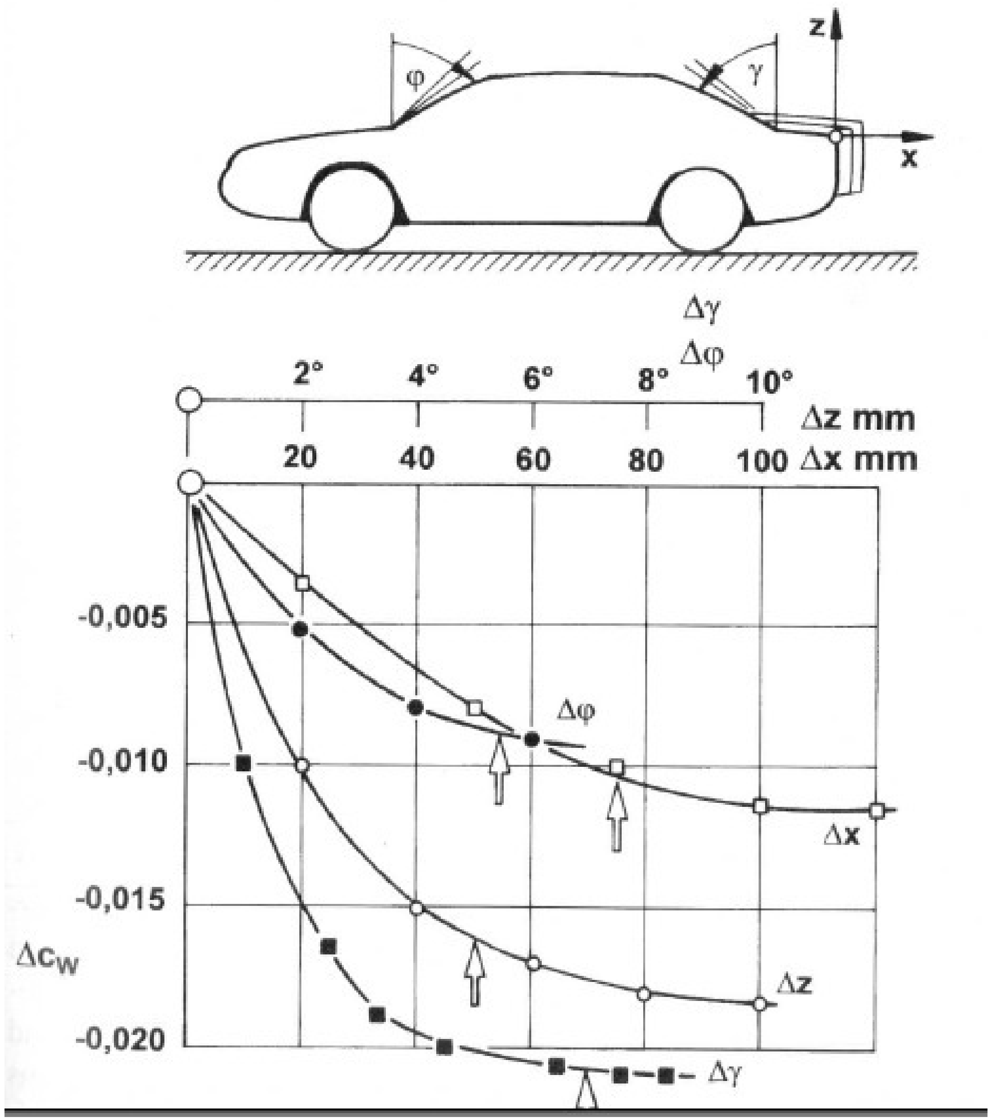
$$D = \sqrt{\frac{G}{c_w \cdot \frac{1}{2}\varrho v^2 \cdot \frac{\pi}{4}}} = \sqrt{\frac{m \cdot g}{c_w \cdot \frac{1}{2}\varrho v^2 \cdot \frac{\pi}{4}}} = 6.9\, m$$

Übung 4

Die Länge eines Fahrzeuges ist länger als erlaubt. Es muss um 33 mm gekürzt werden. Um den selben Widerstand für das kürzere Fahrzeug zu erhalten, gibt es verschiedene Möglichkeiten (siehe Skizze). Das gegebene Fahrzeug ist durch die Pfeile in der Skizze gekennzeichnet.

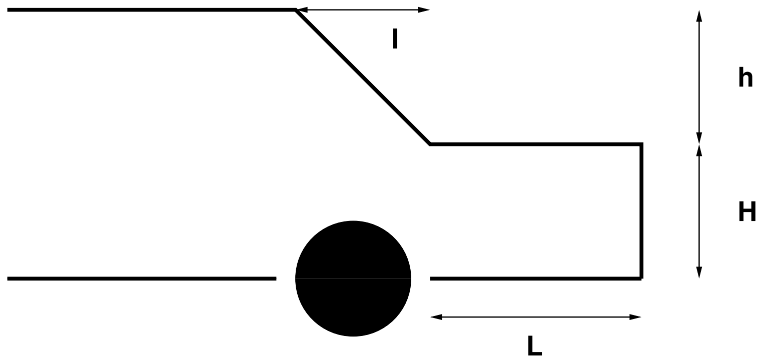
- Geben Sie verschiedene Möglichkeiten an, um denselben Widerstand zu erhalten
- Versuchen Sie dabei, das Volumen des Kofferraumes beizubehalten
- Erläutern Sie das asymptotische Verhalten
- Zählen Sie andere Verhaltensweisen auf, mit denen der Einfluss auf den c_W-Wert beschrieben werden kann

Übung 4



$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi: \quad \Delta c_D &= -0.00472 \times \Delta\varphi^{0.36} \\
\Delta x: \quad \Delta c_D &= -0.001822 \times \Delta x^{0.397} \\
\Delta z: \quad \Delta c_D &= -0.00851 \times \Delta z^{0.167} \\
\Delta\gamma: \quad \Delta c_D &= -0.01575 \times \Delta\gamma^{0.1378}
\end{aligned}
$$

Übung 4



Gegeben: B = 2m, L = 1m, H = 0.3m, h = 0.5 m, $\gamma = 45°$
$\Delta x_{ref} = 73mm, \Delta z_{ref} = 50mm, \Delta\varphi_{ref} = 5.33°, \Delta\gamma = 7°$

$$\Delta x = 73mm \Rightarrow \Delta c_D = -0.01$$

$$\Delta z = 50mm \Rightarrow \Delta c_D = -0.01635$$

$$\Delta\varphi = 5.33° \Rightarrow \Delta c_D = -0.00862$$

$$\Delta\gamma = 7° \Rightarrow \Delta c_D = -0.02059$$

$$V = B \cdot L \cdot H = 0.6m^3$$

$\Delta L = 33mm \Rightarrow L_{neu} = 0.967m \Rightarrow \Delta x_{neu} = 40mm \Rightarrow \Delta c_{D,neu} = -0.0788 \Rightarrow 2.11 \cdot 10^{-3}$ Verlust

Übung 4

mögliche Lösungen für Δz

$$H_{neu} = \frac{V}{B \cdot L_{neu}} = 0.31024m \Rightarrow \Delta z_{neu} = \Delta z_{ref} + H_{neu} - H = 60.23mm$$

$$\Delta c_d(|Deltaz = 60.23mm) = -0.01687 \Rightarrow d\Delta c_d = 5.2 \cdot 10^{-4}$$

zu wenig

$h_{neu} = 48.977cm \Rightarrow \gamma_{neu} = atan(\frac{l}{h_{neu}}) = atan(\frac{h}{h_{neu}}) = 45.6^\circ$

$$\Delta\gamma_{new} = 7.6^\circ$$

$$\Delta c_d(\Delta\gamma = 7.6^\circ) = -0.0208 \Rightarrow d\Delta c_d = 2.4 \cdot 10^{-4}$$

auch zu klein. Es fehlen $1.35 \cdot 10^{-3}$. $\Rightarrow$ Modifikation von φ ist erforderlich

$$\Delta c_d = 9.97 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \Delta\varphi = \left(9.97 \cdot 10^{-3}/0.00472\right)^{1/0.36} = 8^\circ$$

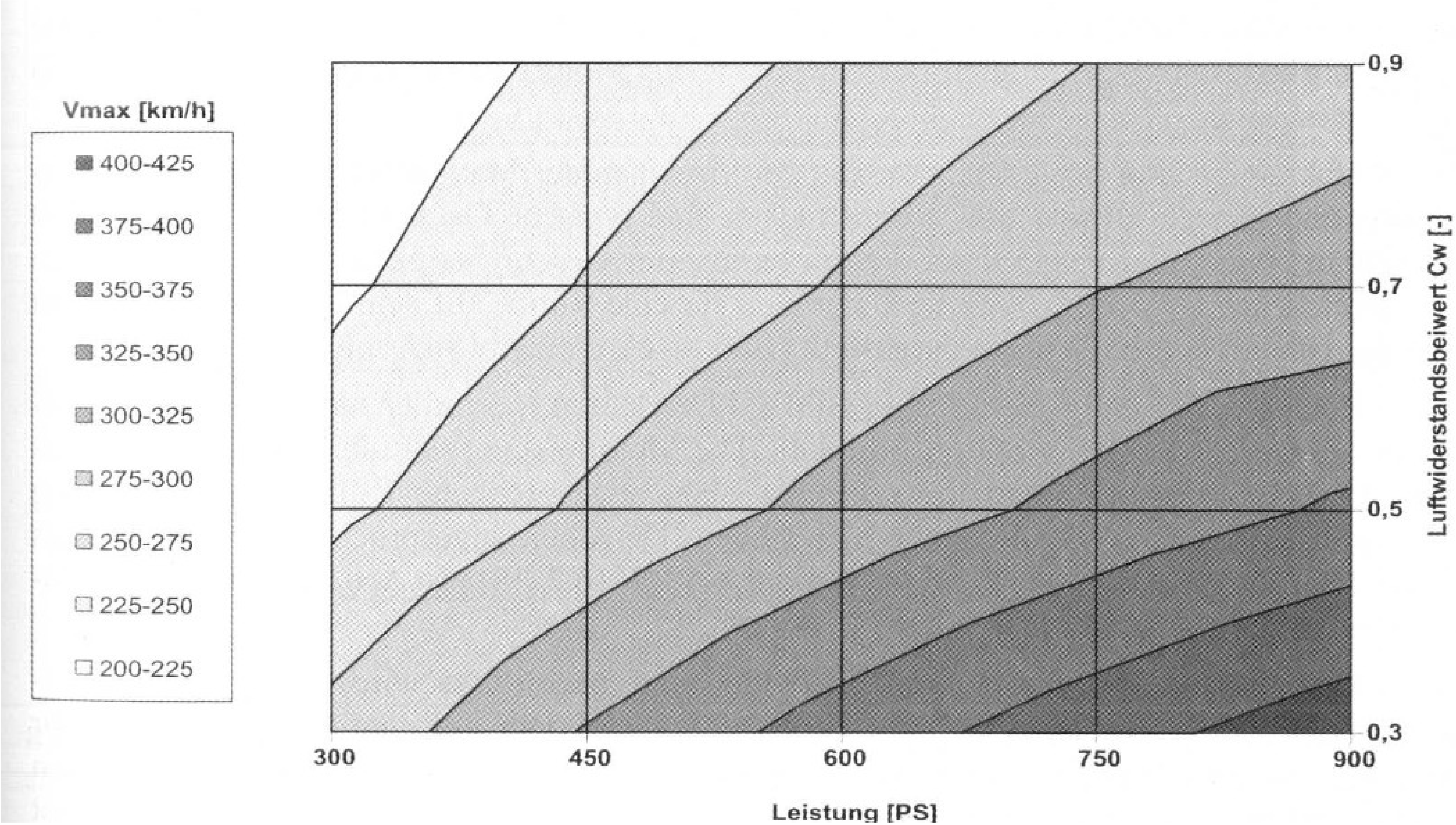
Frontscheibe muss 2.65° stärker geneigt werden.

- kein klares Optimum
- Design $\Longleftrightarrow$ Aerodynamik
- Sättigung, Minimum, Sprung

Übung 5

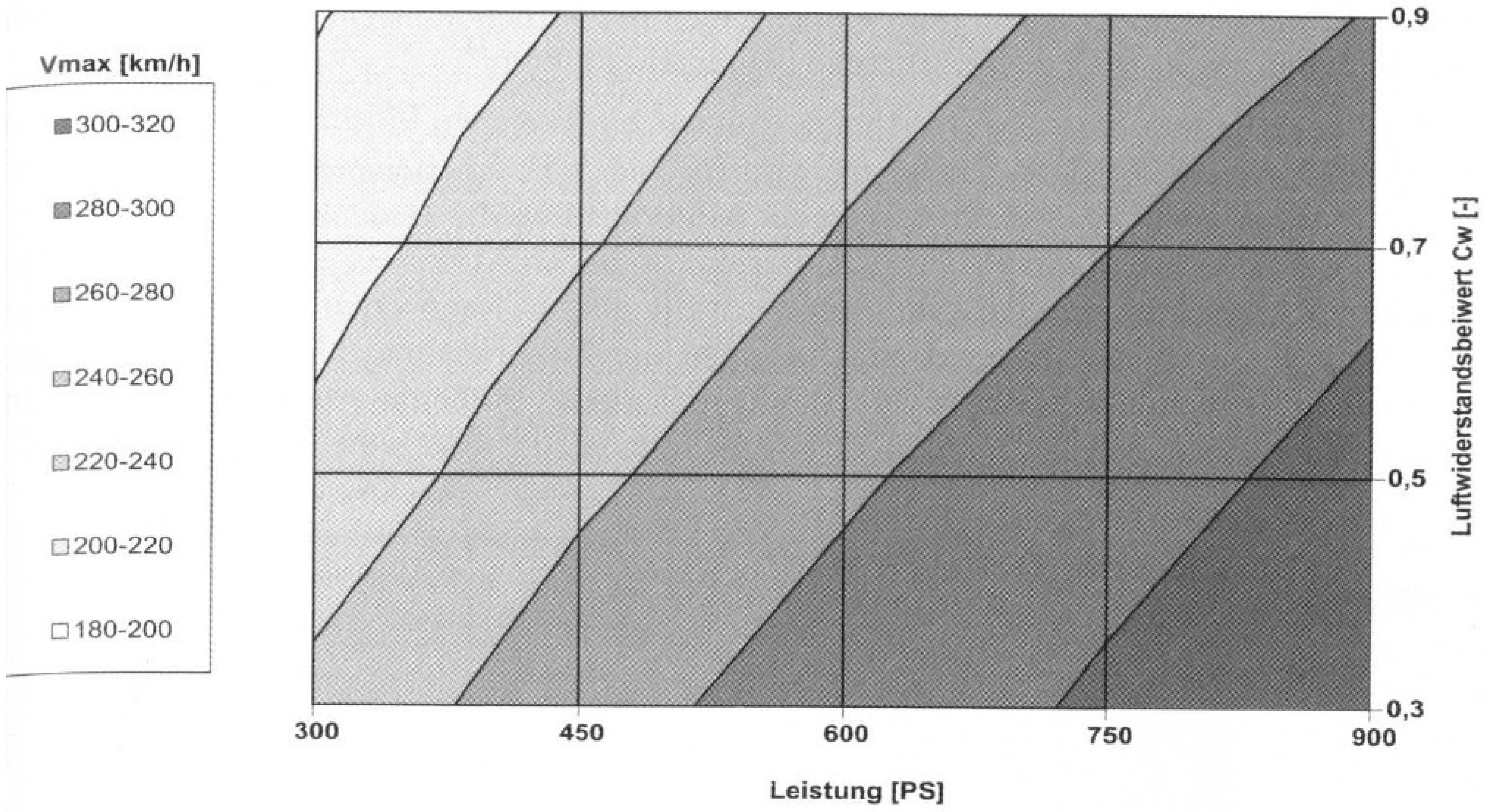
1. Die Leistung eines Motors kann erhöht werden, wenn er bei niedrigeren Temperaturen betrieben wird. Die Kühlung eines Motors mit 600 PS bei einem Widerstandsbeiwert $c_D = 0.5$ wird verstärkt. Dabei erhöht sich der Widerstandsbeiwert um $\Delta c_D = 0.01$. Wieviel zusätzliche Leistung muss erreicht werden, um die maximal mögliche Geschwindigkeit v_{max} auf einer generischen Rennstrecke und in Hockenheim zu erhöhen?
2. Um wieviel wird die Rundenzeit in Hockenheim und in Le Mans erhöht bzw. abgesenkt, wenn der Widerstandsbeiwert bei konstanter Effizienz von 0.5 auf 0.55 erhöht wird.
3. Erläutern Sie:
   - Boat/Bob-tailing
   - Kamm-Heck
   - Gurney flap

Übung 5



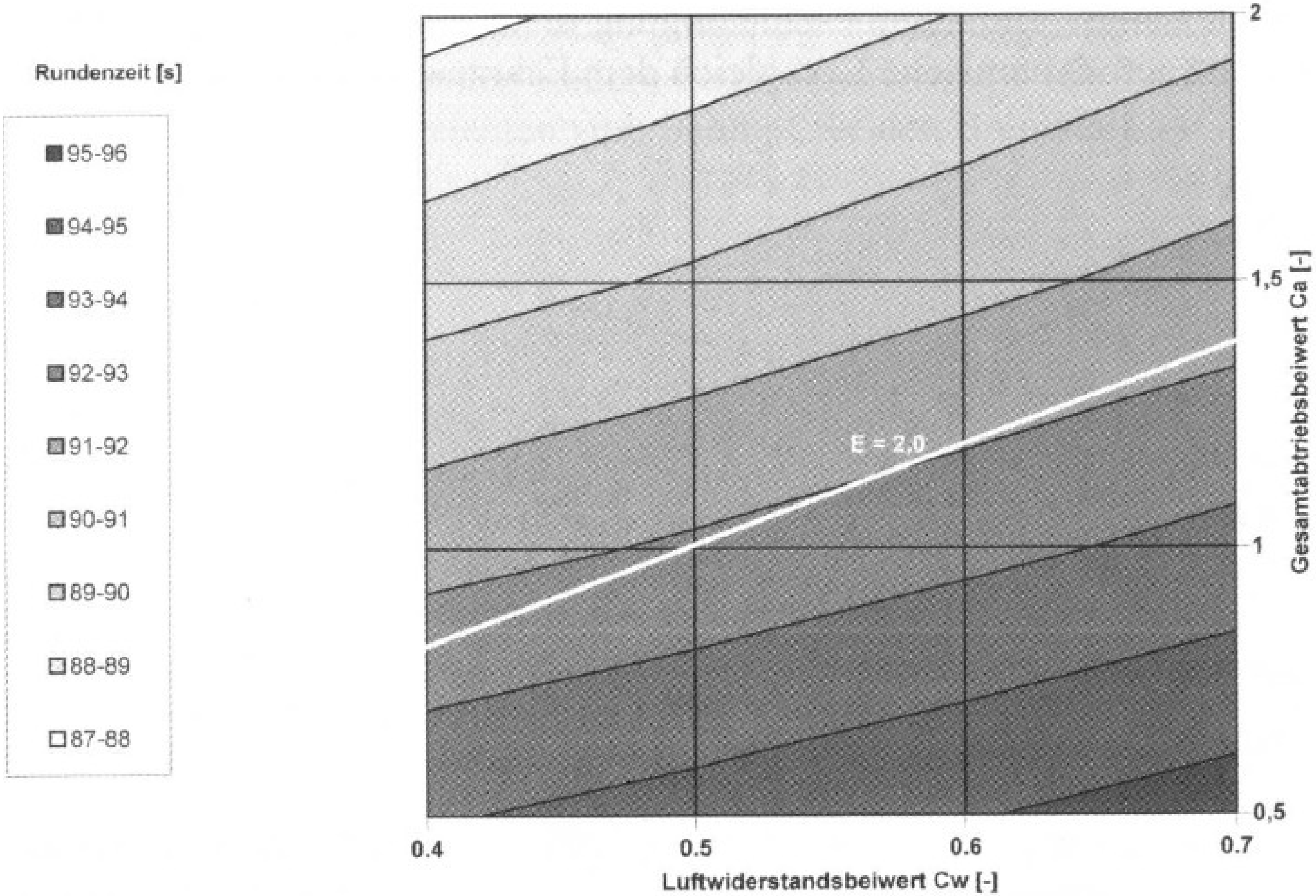
generic race track

Übung 5



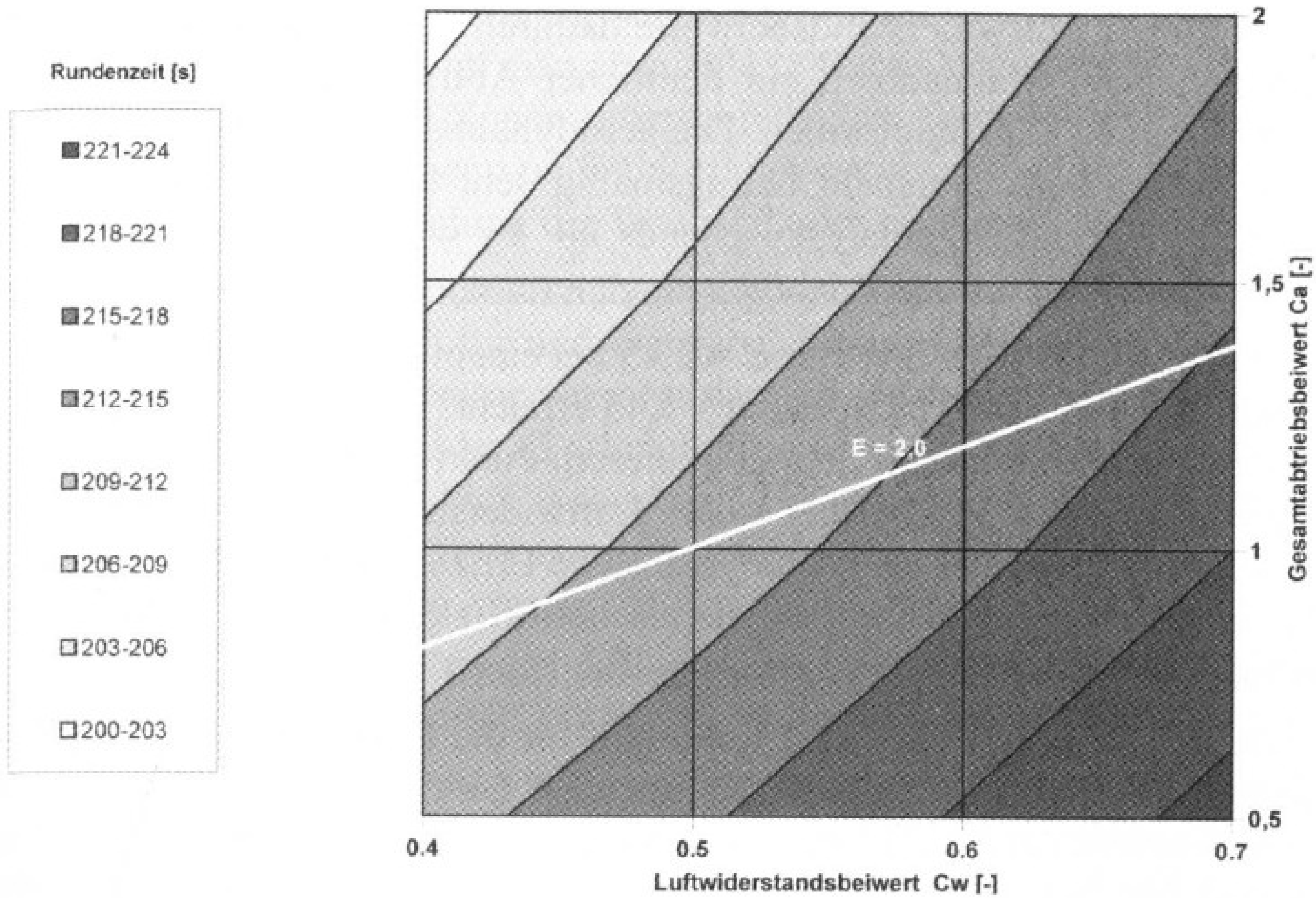
Hockenheim

Übung 6



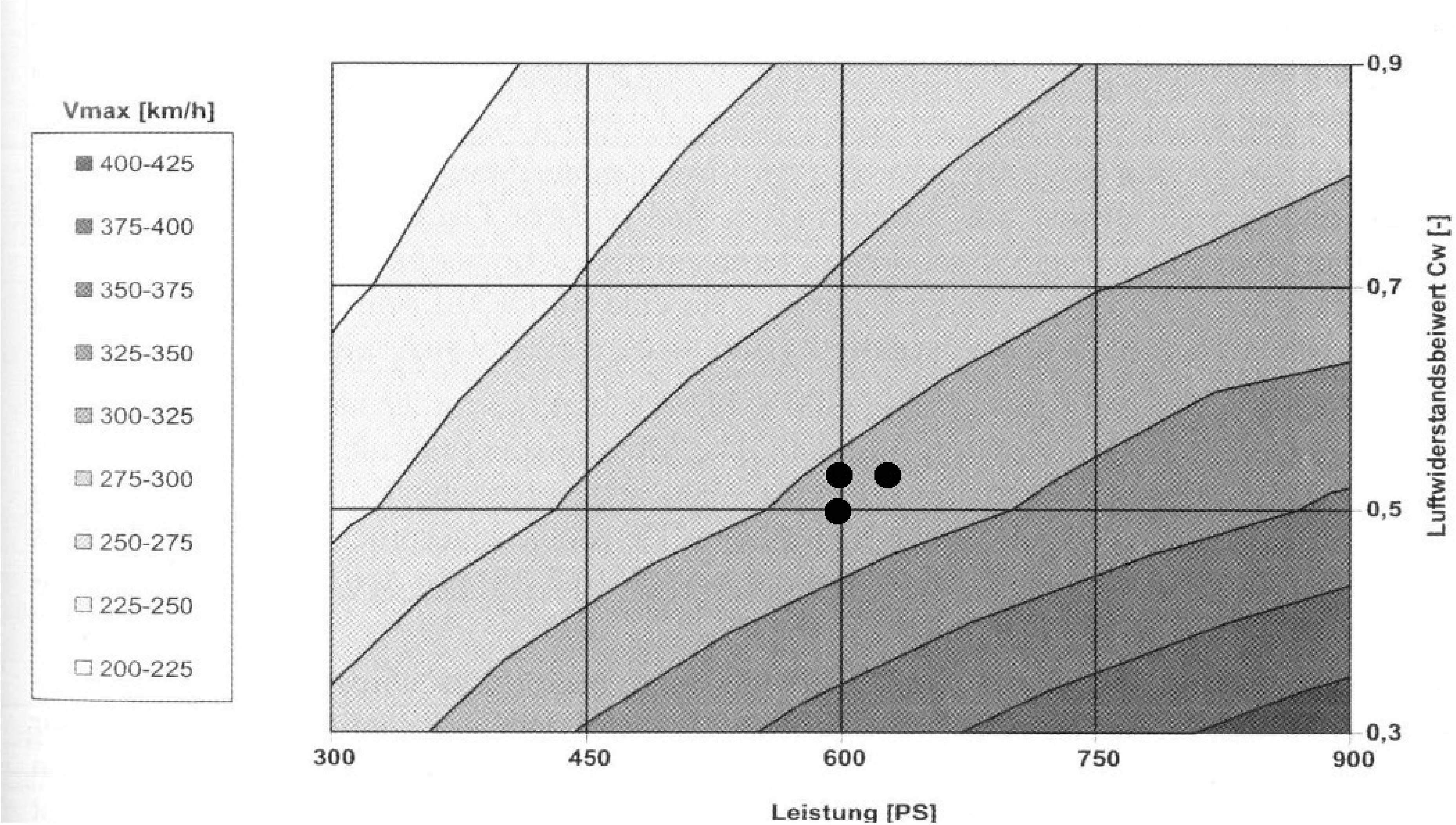
Hockenheim

Übung 5



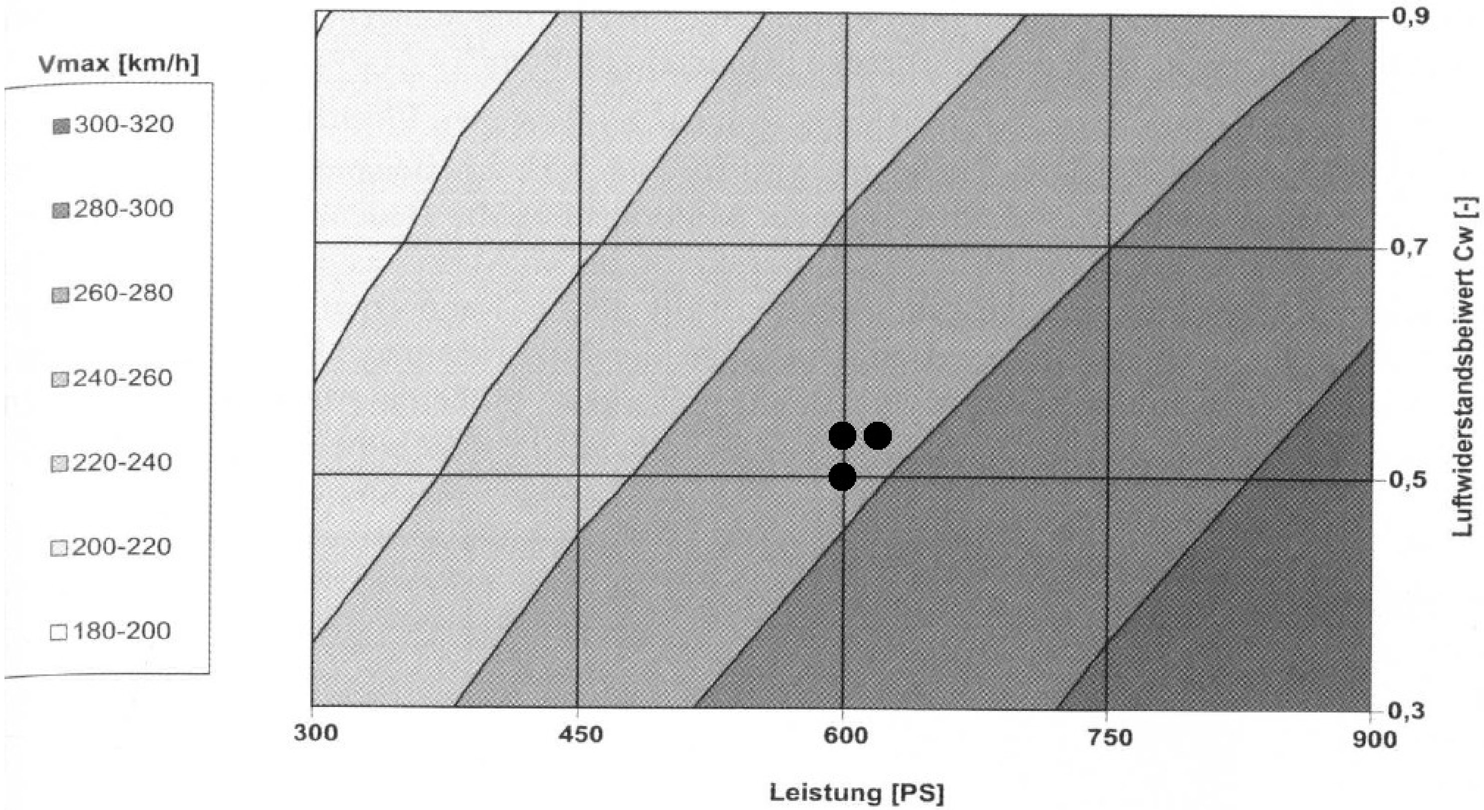
Le Mans

Übung 5



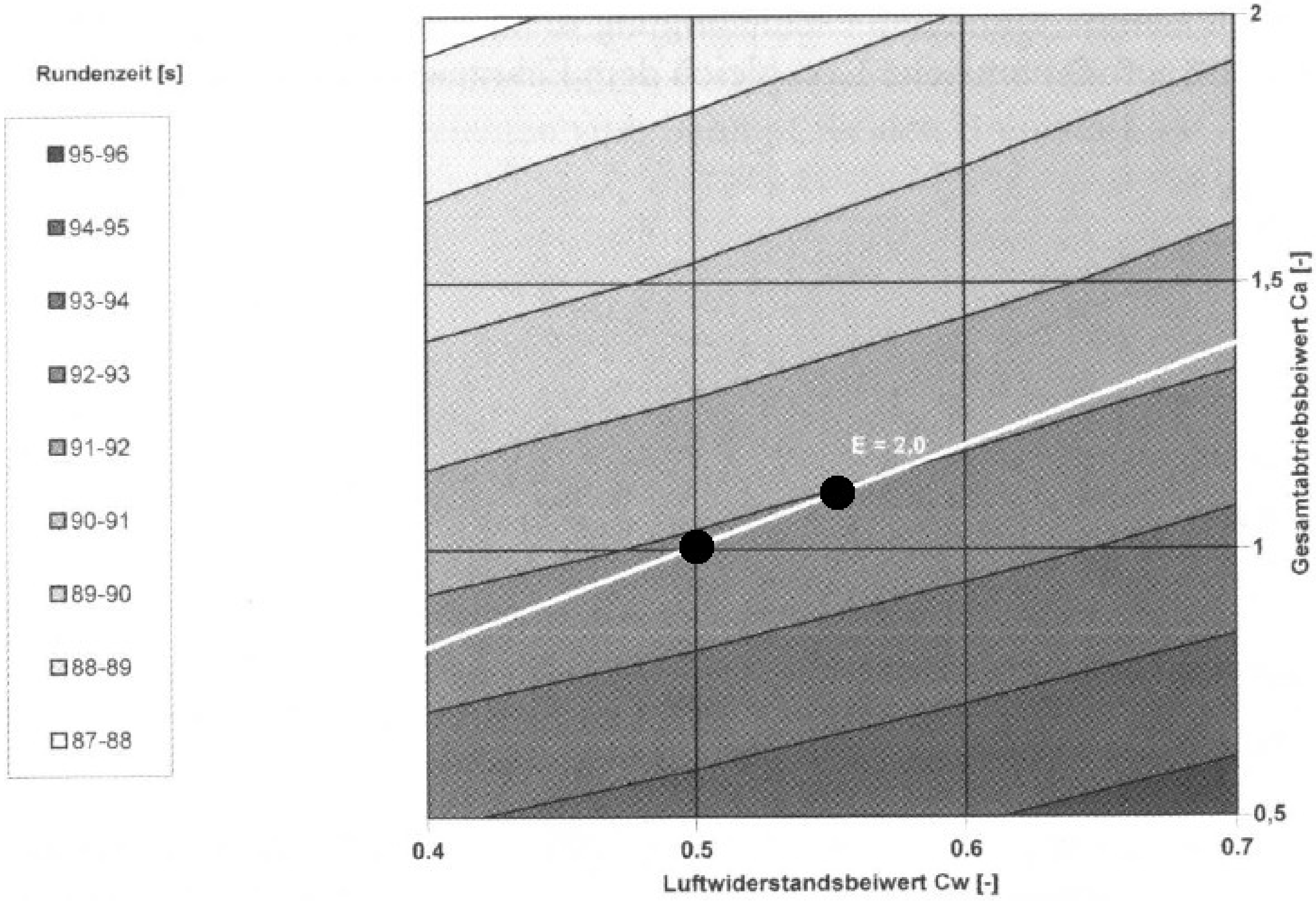
generic race track ($\Delta P \approx 15hP$)

Übung 5



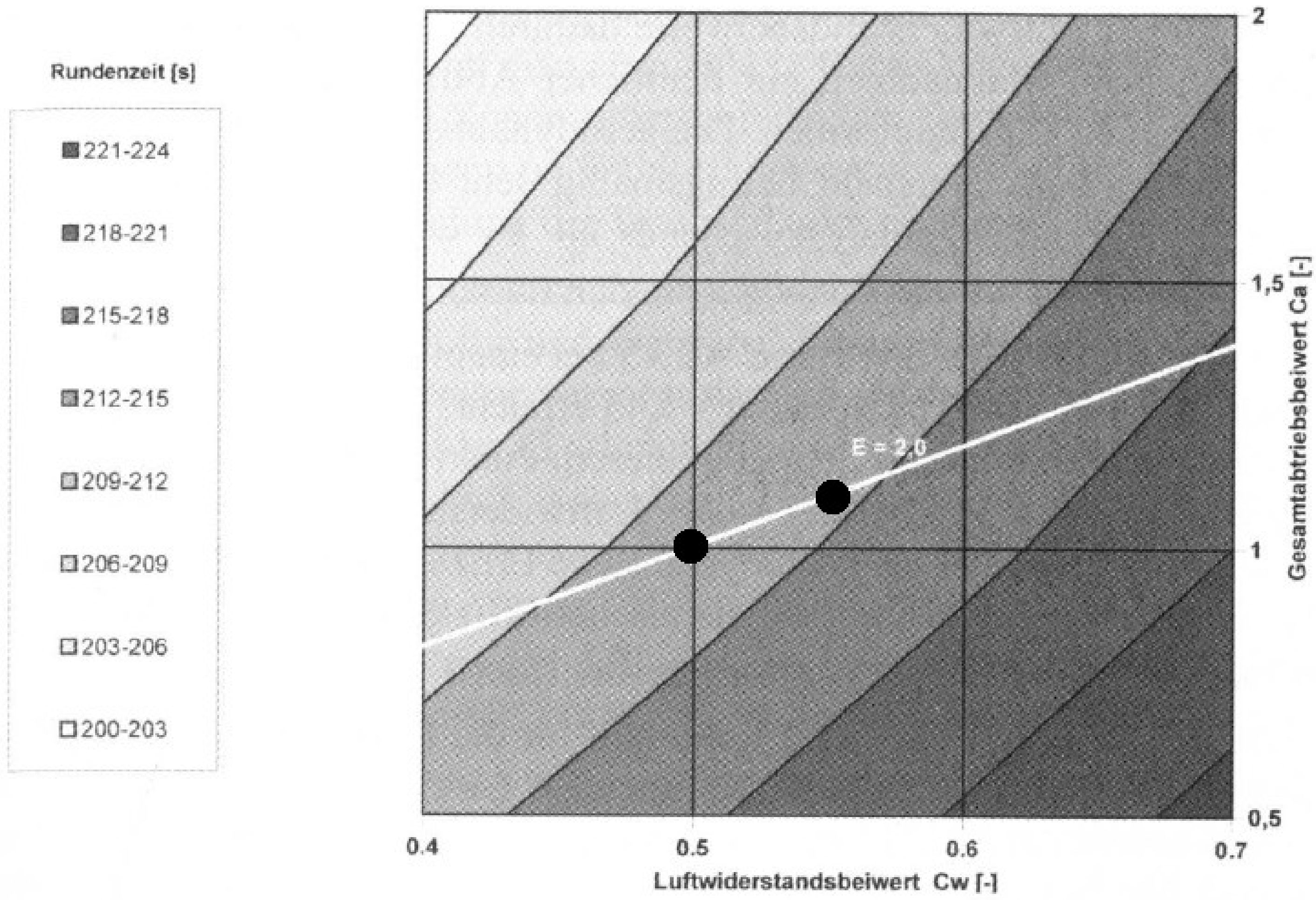
Hockenheim ($\Delta P \approx 8hP$)

Übung 5



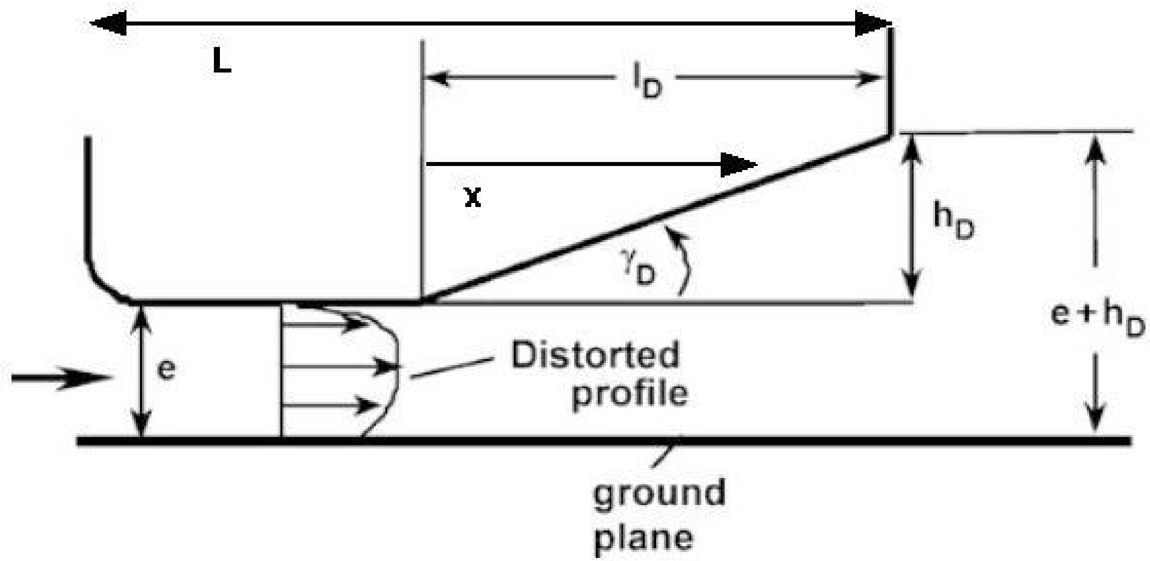
Hockenheim ($\Delta t = -0.05 sec$)

Übung 5



Le Mans ($\Delta t = +0.9sec$)

Übung 6



Am Unterboden eines Rennfahrzeuges ist ein Diffusor angebracht. Die Strömung sei reibungsfrei und der Winkel γ_D sei klein.

1. Berechnen Sie die Druckverteilung p(x) auf der Unterseite der oben dargestellten Konfiguration. Der Umgebungsdruck ist p_a. Die Dichte der Luft sei ϱ und die Anströmgeschwindigkeit u_∞. Der Volumenstrom/Breite zwischen Boden und Strasse ist $\dot{V}/B = u_\infty \cdot (e + h_D)$. Skizzieren Sie p(x).
2. Berechnen Sie die Abtriebskraft unter der Annahme, dass auf der Oberseite des Fahrzeugs Umgebungsdruck herrscht. Skizzieren Sie die Abtriebskraft als Funktion von e/h_D.

Übung 6

Kontinuität für $x < 0:$

$$\varrho u_\infty (e + h_D) = \varrho u_0 e \Rightarrow u_0 = u_\infty \frac{e + h_D}{e}$$

Kontinuität für $0 < x < l_D:$

$$\varrho u_\infty (e + h_D) = \varrho u(x)(e + h(x)) \Rightarrow u(x) = u_\infty \frac{e + h_D}{e + h(x)} = u_\infty \frac{e + h_D}{e + h_D \cdot \frac{x}{l_D}}$$

Bernoulli Unterboden:

$$p_a + \frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 = p_u + \frac{1}{2} u_0^2$$

$$\Rightarrow p_u = p_a + \frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 \left[1^2 - \left(\frac{e + h_D}{e}\right)^2\right] = p_a + \frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{e/h_D + 1}{e/h_D}\right)^2\right]$$

Übung 6

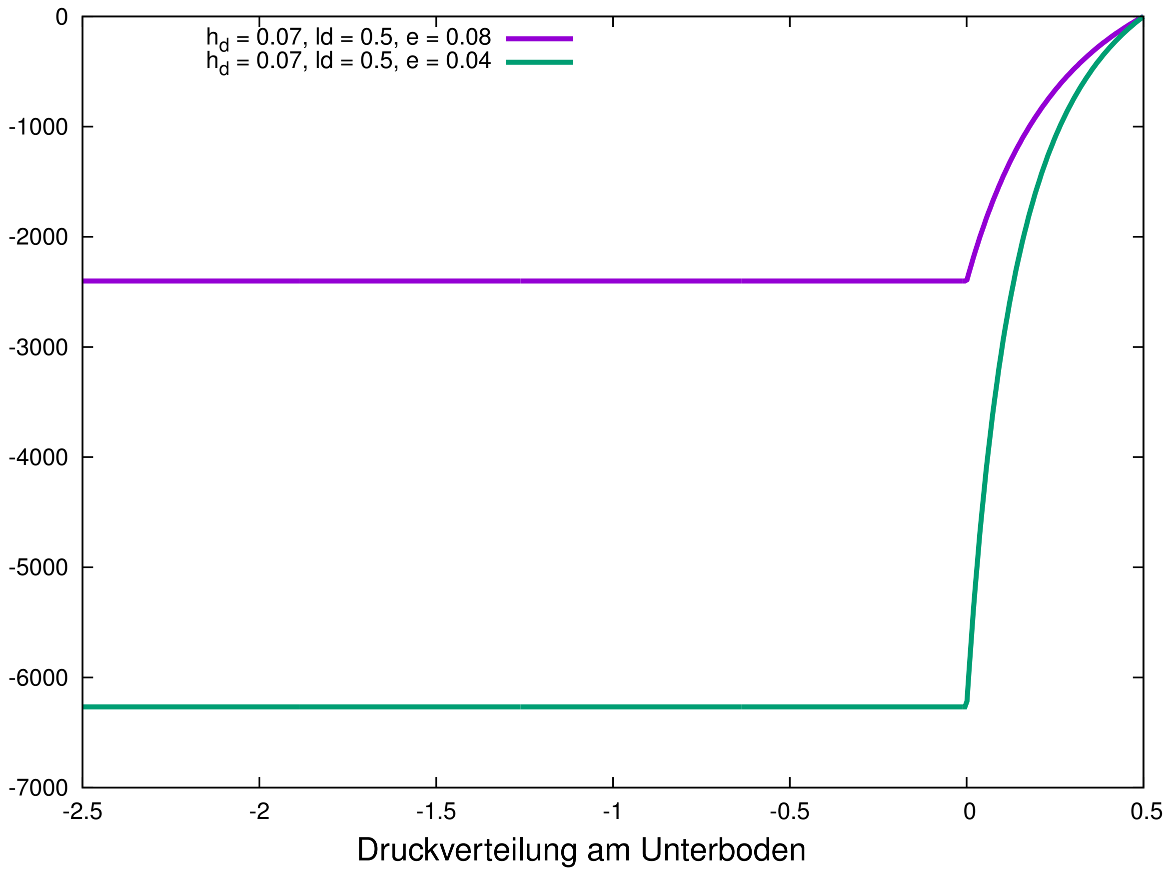
Bernoulli im Diffusor:

$$p_a + \frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 = p(x) + \frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 \left(\frac{e + h_D}{e + h_D \cdot \frac{x}{l_D}} \right)^2$$

$$\Rightarrow p(x) = p_a + \frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{e + h_D}{e + h_D \cdot \frac{x}{l_D}} \right)^2 \right] =$$

$$= p_a + \frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{e/h_D + 1}{e/h_D + \frac{x}{l_D}} \right)^2 \right]$$

Übung 6



h_d = 0.07, ld = 0.5, e = 0.08
h_d = 0.07, ld = 0.5, e = 0.04
0
-1000
-2000
-3000
-4000
-5000
-6000
-7000
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
Druckverteilung am Unterboden

Abtriebskraft:

$$F_A = \frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 \left[1^2 - \left(\frac{e+h_D}{e}\right)^2\right] B(L - l_d) +$$

$$+\frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 B \int_0^{l_D} 1 - \left(\frac{e+h_D}{e+h_D\cdot\frac{x}{l_D}}\right)^2 dx$$

$$\Rightarrow F_A = \frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 \left[1^2 - \left(\frac{e+h_D}{e}\right)^2\right] B(L - l_d) +$$

$$+\frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 B \left[x + \frac{l_D}{h_D}\cdot\frac{(e+h_D)^2}{e+h_D\cdot\frac{x}{l_D}}\right]_0^{l_D}$$

Abtriebskraft:

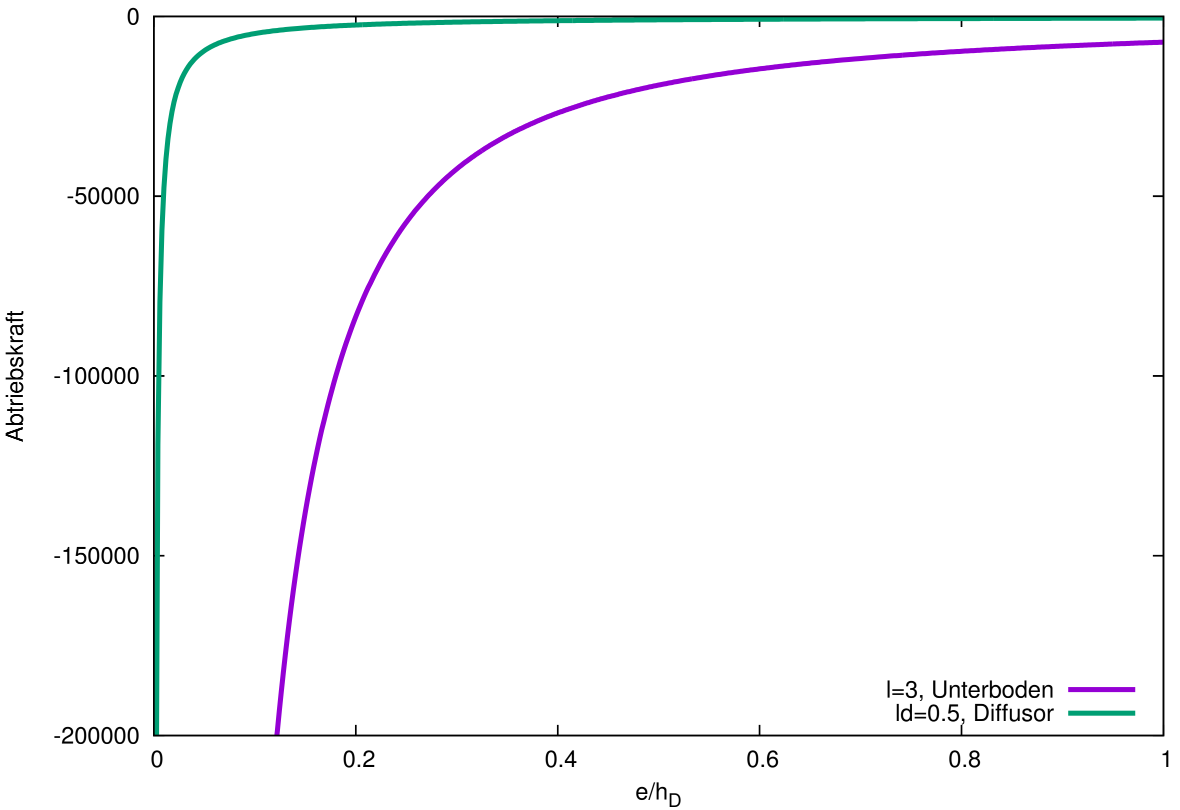
$$F_A = \frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{e + h_D}{e}\right)^2\right] B(L - l_d) +$$

$$+\frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 B \left[l_D + \frac{l_D}{h_D}\cdot(e + h_D) - \frac{l_D}{h_D}\cdot\frac{(e + h_D)^2}{e}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 \left[1 - \left(\frac{e/h_D + 1}{e/h_d}\right)^2\right] B(L - l_d) +$$

$$+\frac{1}{2}\varrho u_\infty^2 B \left[l_D + l_D\cdot(e/h_D + 1) - l_D\cdot\frac{(e/h_D + 1)^2}{e/h_D}\right]$$

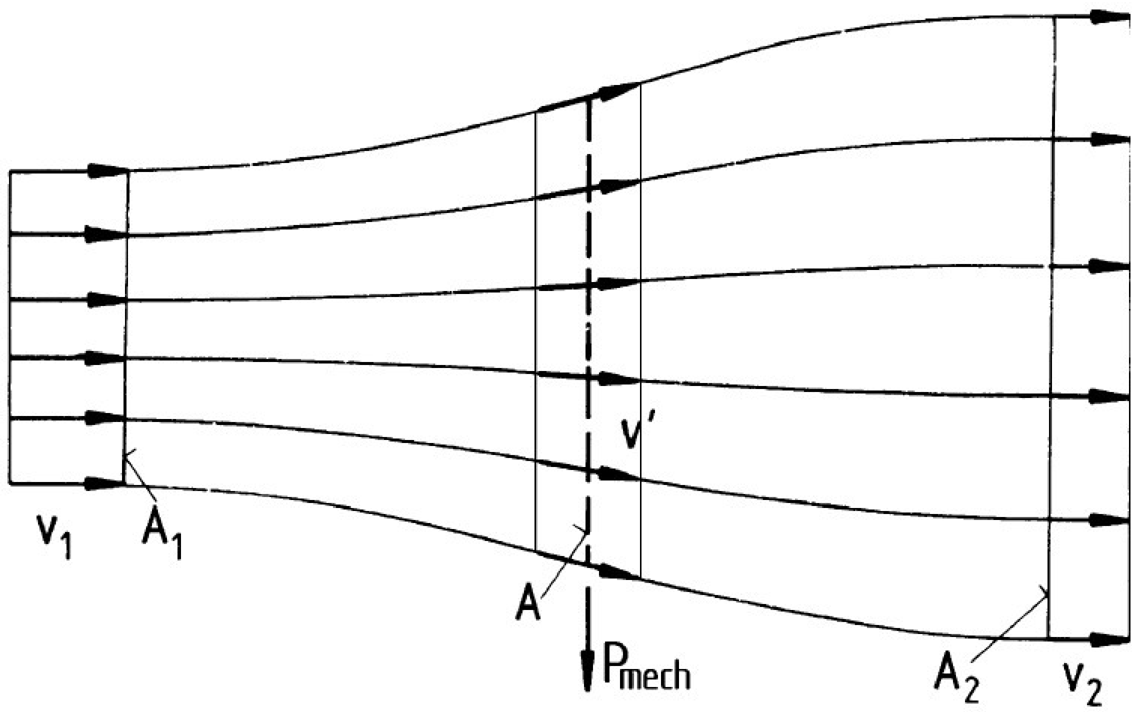
Übung 6



Abtriebskraft / [m] als Funktion von e/h_D

Übung 7

1. Eine einfache Theorie zur Beschreibung des Strömungsfeldes um eine Windturbine ist von Betz. Was sind die Annahmen für diese Theorie?

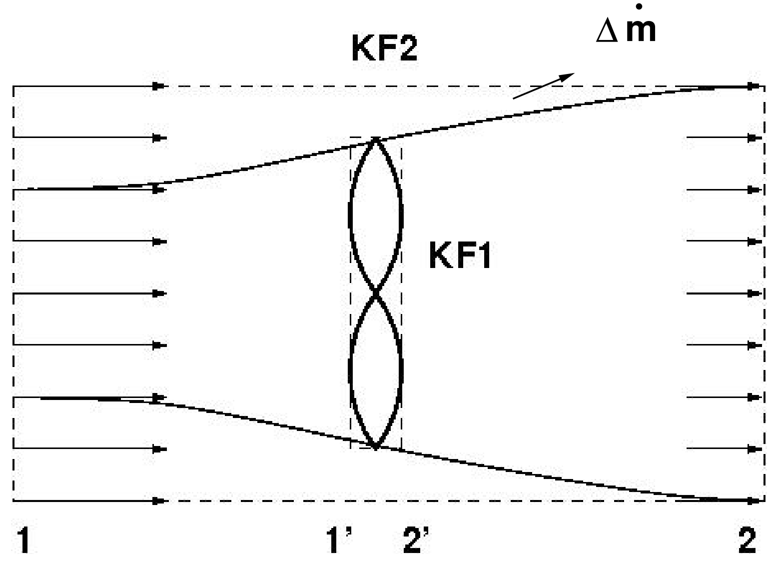


2. Berechnen Sie die Geschwindigkeit in der Rotorebene!

Übung 7

Bernoulli von 1 nach 1' : $p_a + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 = p_1' + \frac{1}{2}\varrho v'^2$
Bernoulli von 2' nach 2 : $p_2' + \frac{1}{2}\varrho v'^2 = p_a + \frac{1}{2}\varrho v_2^2$

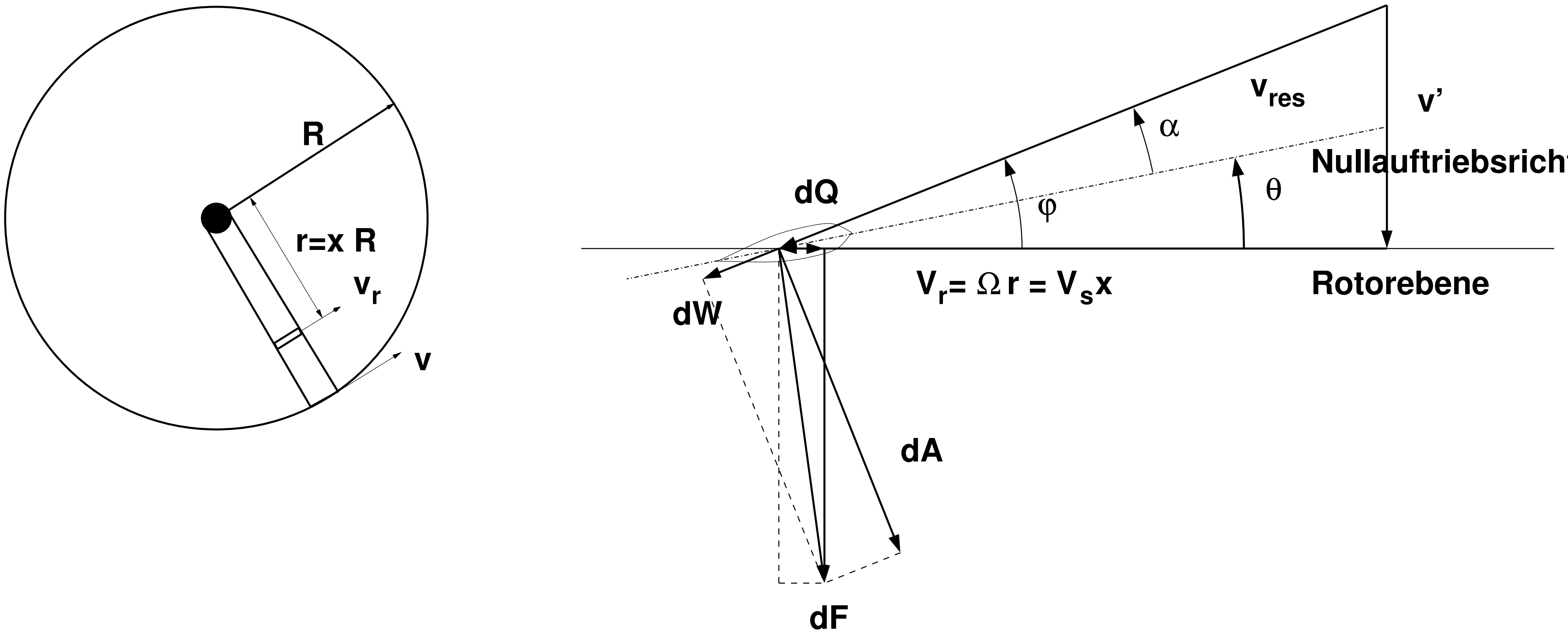
Impuls K.F.1: $0 = (p_1' - p_2')A' + F_s$
Impuls K.F.2: $-\varrho v_1^2 A_2 + \varrho v_2^2 A_2 + \Delta\dot{m} v_1 = F_S$



Kontinuität: $\Delta\dot{m} = \varrho v_1 A_2 - \varrho v_2 A_2$
Kontinuität: $v_1 A_1 = v_2 A_2 = v' A'$

$$-\varrho v_1^2 A_2 + \varrho v_2^2 A_2 + \varrho v_1^2 A_2 - \varrho v_1 v_2 A_2 = (p_2' - p_1')A'$$
$$p_2' - p_1' = \varrho(v_2 - v_1)v' = \frac{1}{2}\varrho(v_2^2 - v_1^2)$$
$$v' = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$$

Blattelementtheorie



Kräfte und Geschwindigkeiten am Blattelement

Bezeichnungen

r	Abstand von der Rotorachse
θ	Winkel zwischen der Rotorebene und der Nullauftriebsrichtung
φ	Winkel zw. der Rotorebene und der res. Anströmgeschw.
l	Blatttiefe
$V_r = \Omega \cdot r$	Umfangsgeschw. am Element
$V_S = \Omega \cdot R$	Umfangsgeschw. an der Blattspitze
V_1	Windgeschwindigkeit

Blattelementtheorie

- Für große Schnelllaufzahlen ist der Winkel φ der resultierenden Geschwindigkeit relativ zur Rotorebene $\varphi = \frac{V'}{\Omega \cdot r}$ und die Anströmgeschwindigkeit des Rotors ist $V_{\text{res}} = \Omega \cdot r$. Der effektive Anstellwinkel α_e des Rotorprofiles ergibt sich aus der Differenz zwischen φ und dem Blatteinstellwinkel θ.

  Wie groß ist die Schubkraft von k Rotorblättern auf ein Blattelement der Tiefe l und der spannweitigen Ausdehnung dr? Nehmen Sie an, dass sich der Auftriebsbeiwert linear mit dem effektiven Anstellwinkel ändert.
- Wie groß ist die Schubkraft auf ein ringförmiges Element der spannweitigen Ausdehnung dr unter Anwendung der Strahltheorie?

Blattelementtheorie

effektiver Anströmwinkel

$$\alpha_e = \varphi - \theta \tag{1}$$

resultierende Anströmgeschwindigkeit V_{res}

$$V_{res} = \sqrt{(\Omega \cdot r)^2 + V'^2} \tag{2}$$

Winkel der resultierenden Geschwindigkeit relativ zur Drehebene des Rotors

$$\varphi \approx \tan\varphi = \frac{V'}{\Omega \cdot r} \tag{3}$$

Kräfte am Element:

$$\begin{aligned} &\text{Auftrieb:} && dA = \tfrac{\rho}{2} V_{res}^2 \cdot c_a \cdot l \cdot dr \\ &\text{Widerstand:} && dW_p = \tfrac{\rho}{2} V_{res}^2 \cdot c_w \cdot l \cdot dr \\ &\text{mit } c_a(\alpha_e); && c_w(\alpha_e) \end{aligned} \tag{4}$$

Blattelementtheorie

Zerlegung der Kräfte senkrecht und parallel zur Rotorebene

$$\begin{aligned} \text{Schub:} \quad & dF = dA \cdot \cos\varphi + dW_p \cdot \sin\varphi \\ \text{Querkraft:} \quad & dQ = dA \cdot \sin\varphi - dW_p \cdot \cos\varphi \end{aligned} \tag{5}$$

Für kleine φ (große Schnelllaufzahl)

$$V_{res} = \Omega \cdot r = V_s \cdot x \tag{6}$$

$$dF = dA \tag{7}$$

$$dQ = \varphi \cdot dA - dW_p \tag{8}$$

Mit $c_a = c_a' \cdot \alpha_e = c_a' \cdot (\varphi - \theta)$

Man erhält bei k Rotorblättern:

$$dF = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (\Omega \cdot r)^2 \cdot c_a' \cdot (\varphi - \theta) \cdot k \cdot l \cdot dr \tag{9}$$

Blattelementtheorie

ringförmiges Element: $dS_R = 2\pi \cdot r \cdot dr$

aus der Strahltheorie

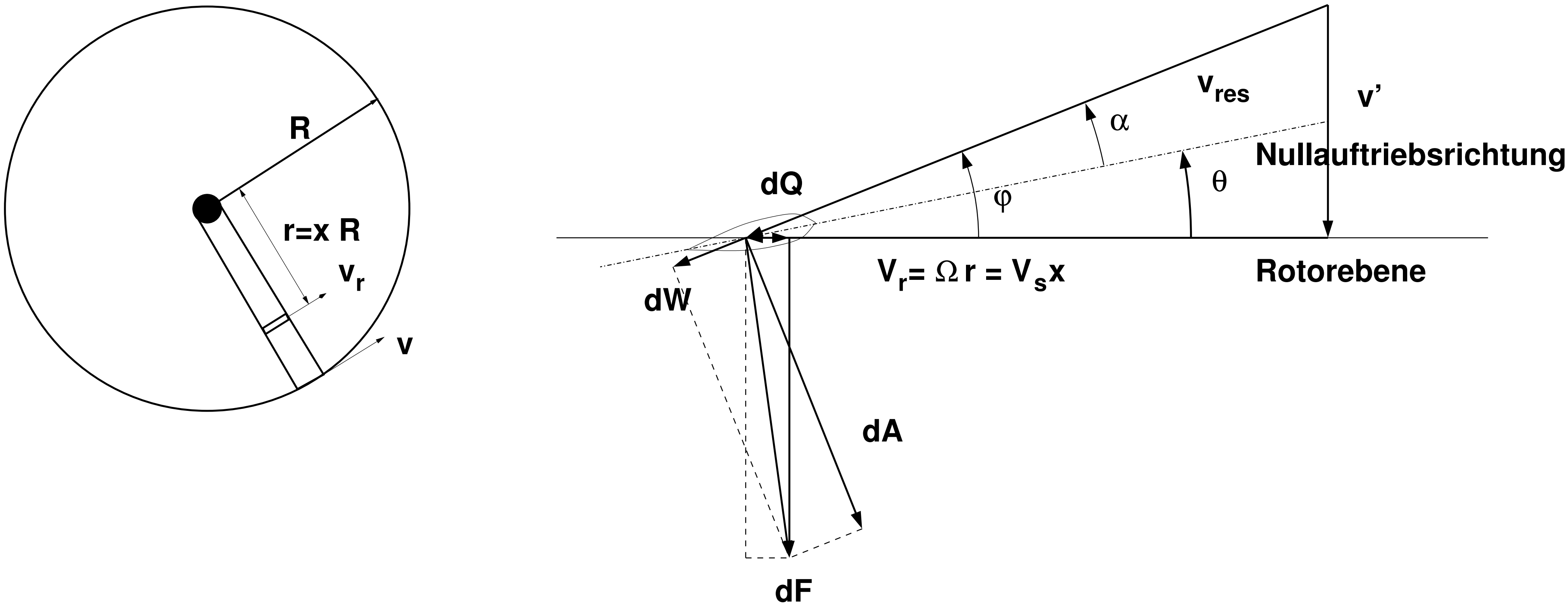
$$dF = \rho V' \cdot (V_1 - V_2) dS_R \tag{10}$$

$$V' = \varphi \cdot \Omega \cdot r = \frac{1}{2}(V_1 + V_2) \tag{11}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (V_1 - V_2) = V' - V_2 = V_1 - V' = V_1 - \varphi \cdot \Omega \cdot r \tag{12}$$

$$dF = 4\pi\rho \cdot \varphi \cdot \Omega \cdot r(V_1 - \varphi \cdot \Omega \cdot r) r \cdot dr \tag{13}$$

Blattelementtheorie



Kräfte und Geschwindigkeiten am Blattelement

Blattelementtheorie

Bezeichnungen

r	Abstand von der Rotorachse
θ	Winkel zwischen der Rotorebene und der Nullauftriebsrichtung
φ	Winkel zw. der Rotorebene und der res. Anströmgeschw.
l	Blatttiefe
$V_r = \Omega \cdot r$	Umfangsgeschw. am Element
$V_S = \Omega \cdot R$	Umfangsgeschw. an der Blattspitze
V_1	Windgeschwindigkeit
σ	$\frac{\text{Blattfläche}}{\text{Rotorfläche}}$ = Völligkeit

Blattelementtheorie

aus der Blattelementtheorie

$$dF = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (\Omega \cdot r)^2 \cdot c_a' \cdot (\varphi - \theta) \cdot k \cdot l \cdot dr \tag{1}$$

aus der Strahltheorie

$$dF = 4\pi\rho \cdot \varphi \cdot \Omega \cdot r(V_1 - \varphi \cdot \Omega \cdot r)r \cdot dr \tag{2}$$

Verwenden Sie die Ergebnisse aus der letzten Übung, um eine Gleichung herzuleiten, mit der für jeden Radius r der Torsionswinkel oder der Auftriebsbeiwert bestimmt werden kann.

Blattelementtheorie

Lösen Sie die Gleichungen unter folgenden Voraussetzungen:

$$\sigma = 0.1, \lambda = 6, c_a' = 5.7, V_1 = 10m/s$$

a) konstante Verwindung $\theta = 3°$

b) konstante Geschwindigkeitsabnahme $\varphi\Omega r - V_1 = const., \theta(x = 1) = k_1, k_1 = 3°$

c) lineare Verwindung $\theta = 15° - 12° \cdot x$

d) mit konstantem Auftrieb $c_a = 0.4$

Vervollständigen Sie jeweils die Tabelle

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
θ										
φ										
c_a										

Blattelementtheorie

Gleichsetzen

$$(\varphi - \theta) = \frac{8}{\sigma \cdot c_a'} \cdot \varphi \left\{ \frac{V_a}{V_S} - \varphi \cdot x \right\} \tag{3}$$

quadratische Gleichung für φ

$$\varphi^2 + \varphi \cdot \left(\frac{\sigma c_a'}{8 \cdot x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{V_a}{V_S} \right) - \frac{\sigma \cdot c_a'}{8x} \cdot \theta = 0 \tag{4}$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma c_a'}{8 \cdot x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{V_a}{V_S} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{\sigma c_a'}{8 \cdot x} - \frac{1}{x} \cdot \frac{V_a}{V_S} \right)^2 + \frac{\sigma \cdot c_a'}{8x} \cdot \theta} \tag{5}$$

Blattelementtheorie

a)

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
θ	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
φ	56.8	29.4	20.2	15.6	12.8	10.9	9.6	8.6	7.8	7.2
c_a	5.3	2.6	1.7	1.3	0.98	0.79	0.66	0.56	0.48	0.41

b)

konstante Verzögerung: $\left\{\frac{V_1}{V_S} - \varphi \cdot x\right\} = const.$

$$\varphi \sim \frac{1}{x} \Rightarrow \theta \sim \frac{1}{x} \Rightarrow \theta = \frac{k_1}{x} = \frac{3}{x}$$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
θ	30	15	10	7.5	6	5	4.3	3.75	3.33	3
φ	71.7	35.9	23.9	17.9	14.3	11.9	10.2	9.0	7.0	7.2
c_a	4.2	2.1	1.4	1.0	0.83	0.69	0.59	0.52	0.46	0.41

Blattelementtheorie

c)

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
θ	13.8	12.6	11.4	10.2	9.0	7.8	6.6	5.4	4.2	3.0
φ	63.5	34.7	25.4	19.1	15.6	13.1	11.2	9.7	8.3	7.2
c_a	4.9	2.2	1.3	0.89	0.66	0.53	0.46	0.43	0.41	0.41

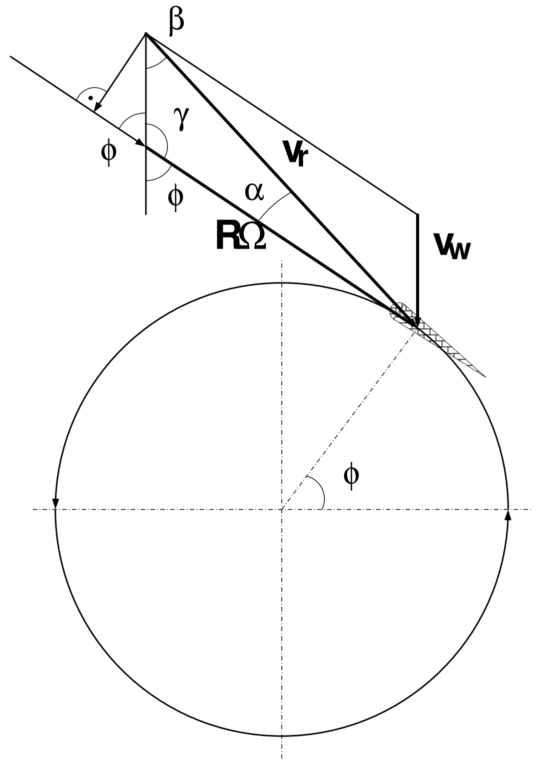
d)

$$(\varphi - \theta) = const. = \frac{8}{\sigma \cdot c_a'} \cdot \varphi \left\{ \frac{V_1}{V_S} - \varphi \cdot x \right\} \Rightarrow \frac{8x}{\sigma c_a'} \varphi^2 - \frac{8}{\sigma c_a'} \frac{V_1}{V_S} \varphi + (\varphi - \theta) = 0 \tag{6}$$

$$\varphi = \frac{1}{2x} \frac{V_1}{V_S} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2x} \frac{V_1}{V_S}\right)^2 - \frac{1}{8x} \sigma c_a}$$

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
θ	89.6	41.8	25.8	17.8	13.0	9.8	7.4	5.7	4.3	3.1
φ	93.7	45.9	30.0	22.0	17.1	13.9	11.6	9.8	8.4	7.2
c_a	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4

Vertikalachswindturbine



Geschwindigkeiten am Blattelement einer VAWT

Vertikalachswindturbine

Bezeichnungen

R	Abstand von der Rotorachse
ϕ	Umfangswinkel gegenüber der x-Achse
α	Anstellwinkel
Ω	Winkelgeschwindigkeit
v_1	Windgeschwindigkeit
v_r	Relativgeschwindigkeit

Vertikalachswindturbine

- Berechnen Sie den Anstellwinkel α in Abhängigkeit der Schnelllaufzahl, des Umfangswinkels und der Umfangsgeschwindigkeit
- Wie groß ist der maximale Anstellwinkel?
- Wie groß muss die Schnelllaufzahl sein, damit der maximale Winkel nicht oberhalb des Ablösewinkels liegt?

Vertikalachswindturbine

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \phi \Longrightarrow \alpha + \beta = \phi \Longrightarrow \alpha = \phi - \beta$$

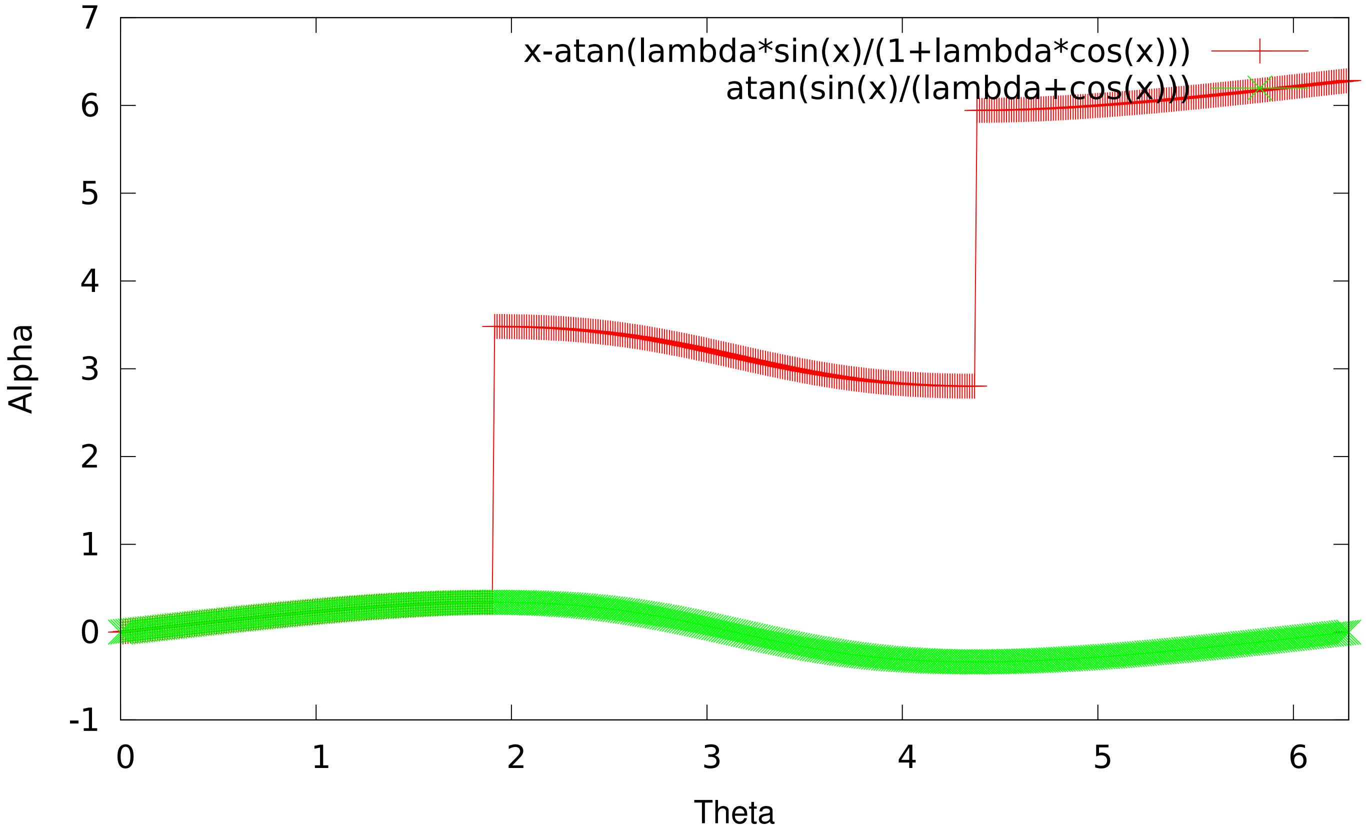
$$\beta = \text{atan}\frac{R\Omega \sin\phi}{v_1 + R\Omega\cos\phi} = \text{atan}\frac{\sin\phi}{1/\lambda + \cos\phi}$$

$$\Longrightarrow \alpha = \phi - \text{atan}\frac{\sin\phi}{1/\lambda + \cos\phi}$$

anderer Weg

$$\alpha = \text{atan}\frac{u_w \sin\phi}{u_w\cos\phi + \Omega R} = \text{atan}\frac{\sin\phi}{\cos\phi + \lambda}$$

Vertikalachswindturbine



Anstellwinkel am Blattelement einer VAWT

Vertikalachswindturbine

erste Ableitung Nullsetzen

$$\alpha' = \frac{1}{1 + \frac{\sin^2\phi}{(\cos\phi + \lambda)^2}} \frac{\cos\phi(\lambda + \cos\phi) + \sin\phi(\sin\phi)}{(\lambda + \cos\phi)^2}$$

Der Zähler muss Null sein

$$\cos\phi(\lambda + \cos\phi) + \sin\phi^2 = 0$$

$$\cos\phi(\lambda + \cos\phi) + (1 - \cos\phi^2) = 0$$

$$-\lambda\cos\phi = 1 \Longrightarrow \cos\phi = -\frac{1}{\lambda}$$

$$\Longrightarrow \tan\alpha_{max} = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda - \frac{1}{\lambda}}$$

Vertikalachswindturbine

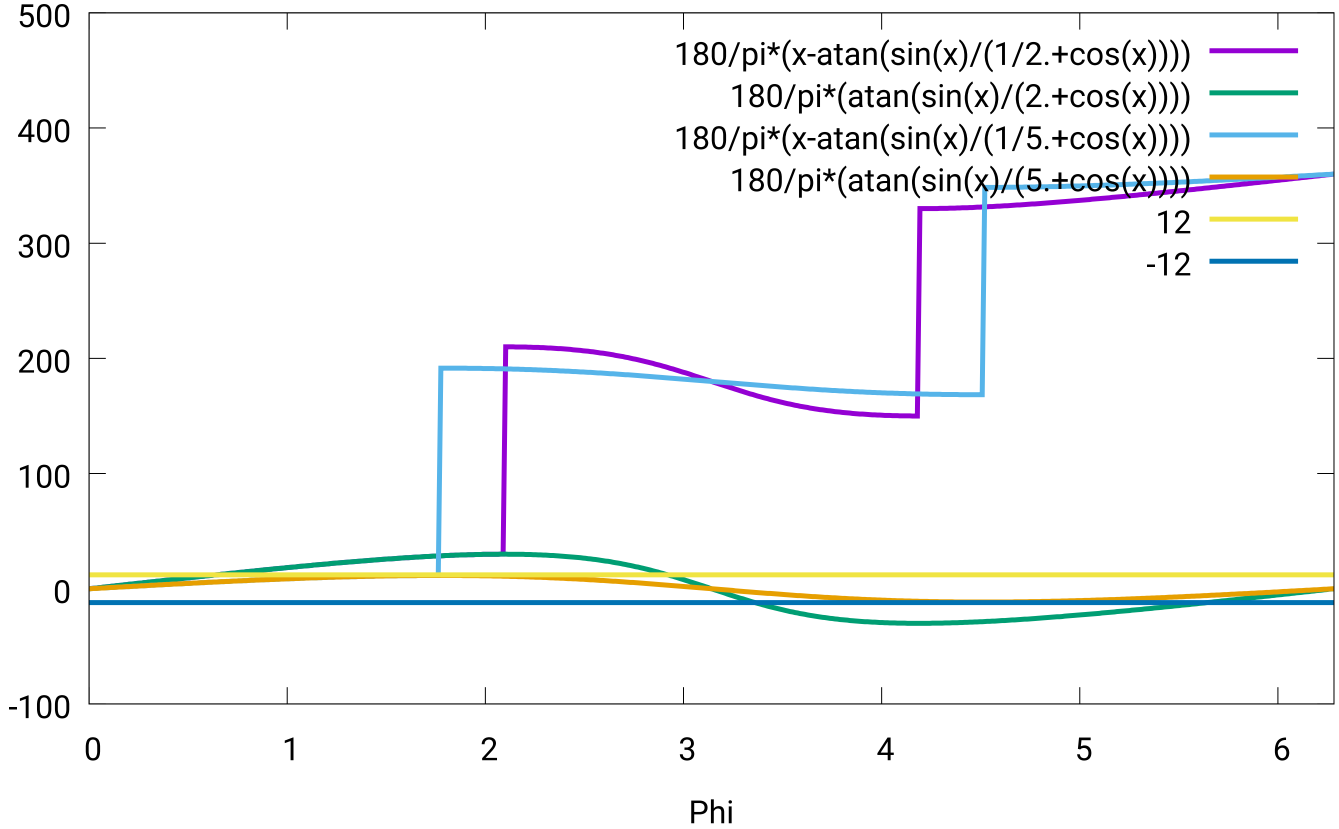
Wie groß muss λ sein?

$$\tan\alpha_{max} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\lambda^2}}}{\lambda - \frac{1}{\lambda}} \Longrightarrow \tan^2\alpha_{max} = \frac{1-\frac{1}{\lambda^2}}{\lambda^2 - 2 + \frac{1}{\lambda^2}}$$

$$\tan^2\alpha_{max} = \frac{\lambda^2-1}{\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1} = \frac{\lambda^2-1}{(\lambda^2-1)^2} = \frac{1}{\lambda^2-1}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1}{\tan^2\alpha_{max}} + 1} = \frac{1}{\sin\alpha_{max}}$$

Vertikalachswindturbine



Anstellwinkel am Blattelement einer VAWT ($\lambda = 2, \lambda = 5$)