....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik II“

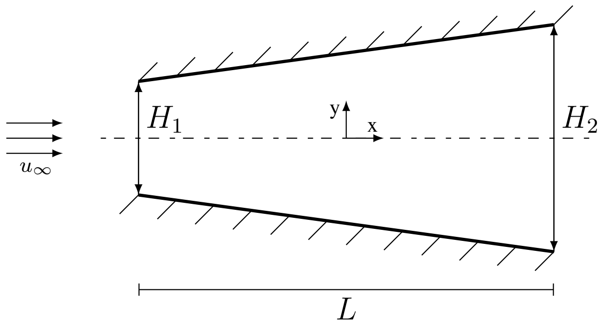
10. 09. 2025

1. Aufgabe (22 Punkte)

Gegeben sind die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls für instationäre, inkompressible Strömungen.

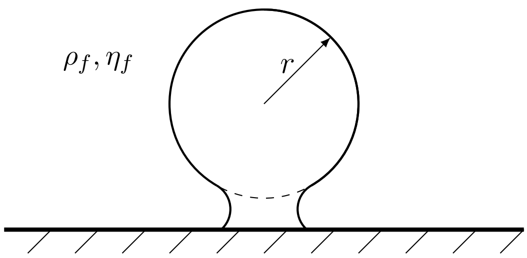
$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$
$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

a) Formulieren Sie die Gleichungen für eine stationäre, reibungsfreie und zweidimensionale Strömung in einem kartesischen Koordinatensystem.



b) Die Gleichungen werden zur Beschreibung der Strömung durch einen divergenten Kanal verwendet. Zwischen Einlass und Auslass wird die statische Druckdifferenz Δp gemessen. Ermitteln Sie die Kennzahlen des Problems mittels der Methode der Differenzialgleichungen.

Beim Betrieb von Elektrolyseanlagen haben Gasblasen erheblichen Einfluss auf die Effizienz der Anlage. Eine beispielhafte Gasblase bildet sich innerhalb einer Flüssigkeit auf einer Oberfläche, bedingt durch eine langsame Gaszufuhr eines Gases mit der Dichte ρ_g. Die Form der Gasblase soll anhand ihres Radius r untersucht werden. Die Elektrolytflüssigkeit hat die Dichte ρ_f und die Viskosität η_f. Die Oberflächenspannung γ ist ebenfalls eine Eigenschaft des Fluids.



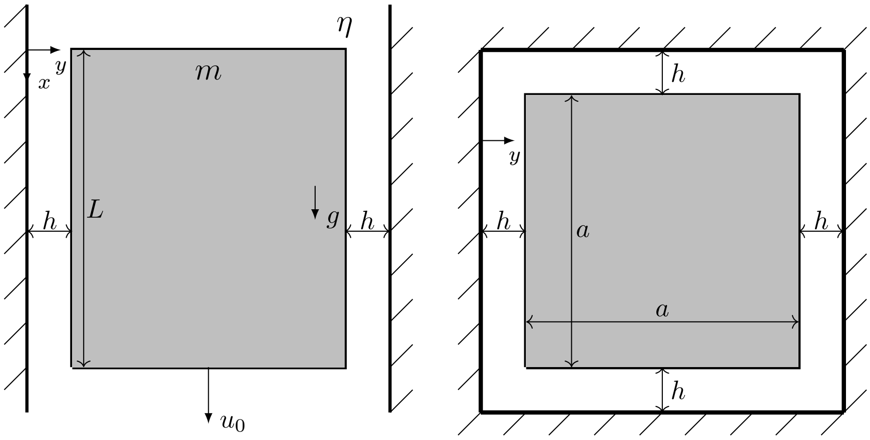
c) Bestimmen Sie die Anzahl der Kennzahlen, die mithilfe des Π-Theorems gefunden werden können.

Hinweise:

- Einheit der Oberflächenspannung γ : $\dfrac{N}{m}$

2. Aufgabe (22 Punkte)

Ein schwerkraftgetriebenes Transportsystem soll durch seine spezielle strömungsmechanische Auslegung gegen unkontrolliertes Abstürzen gesichert werden. Die Spalte zwischen der Transportkapsel und der Wand sowie die Eigenschaften des die Kapsel umgebenden Fluids werden so gewählt, dass sich bei freiem Fall der Transportkapsel eine schleichende Strömung zwischen Transportkapsel und Wand einstellt.



Vorderansicht Draufsicht

Gegeben:

$a,\ h,\ L,\ g,\ m,\ u_0,\ a \gg h$

Berechnen Sie in Abhängigkeit der dynamischen Viskosität η und des Druckgradienten $\frac{\partial p}{\partial x}$:

a) Das Geschwindigkeitsprofil $u(y)$ im Spalt zwischen Transportkapsel und Wand.

b) Die Reibungskraft F_r, die auf eine einzelne Seitenfläche der Transportkapsel wirkt.

Die Transportkapsel mit der Masse m soll im freien Fall eine Geschwindigkeit u_0 erreichen.

c) Berechnen Sie $\frac{\partial p}{\partial x}(x)$ im Spalt. Nutzen Sie als zusätzliche Gleichung den verdrängten Volumenstrom der Kapsel.

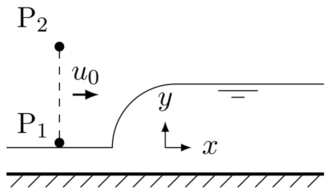
d) Berechnen Sie die mindestens notwendige Viskosität des Fluids, damit die Transportkapsel die maximale Geschwindigkeit u_0 nicht überschreitet, über ein Kräftgleichgewicht der auf die Kapsel wirkenden Kräfte. In diesem Aufgabenteil können Sie die Druckdifferenz über den Spalt Δp als konstant annehmen und in ihren Rechnungen benutzen.

Hinweise:

- Es handelt sich um ein Newtonsches Fluid, die Strömung kann in den Spalten als zweidimensional und laminar angesehen werden, Volumenkräfte können vernachlässigt werden.
- Die Impulsgleichung für eine stationäre, inkompressible schleichende Strömung unter Berücksichtigung der Schwerkraft lautet: $$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

3. Aufgabe (26 Punkte)

Stromab des Auslasses eines Staudamms bildet sich in einem Kanal mit der Breite B ein Wassersprung. Die Luftströmung, die über den Wassersprung strömt, soll mithilfe der Potentialtheorie modelliert werden. Zunächst wird eine Quelle mit einer Parallelströmung überlagert.



a) Stellen Sie die komplexe Potentialfunktion $F_I(z)$ als Kombination der Elementarfunktionen auf, die das Problem näherungsweise beschreibt. Geben Sie die Vorzeichen der Konstanten an.

b) Bestimmen Sie den Volumenstrom $\dot{V}_I$ zwischen den beiden Punkten P_1 und P_2.

Messungen haben ergeben, dass das oben angenommene Modell um einen Faktor $\Omega > 0$ von der Realität abweicht. Für eine genauere Modellierung der Strömung soll außerdem ein Potentialwirbel zur komplexen Potentialfunktion hinzugefügt werden.

c) Stellen Sie die komplexe Potentialfunktion $F_{II}(z)$ als Kombination der Elementarfunktionen auf, die die neue Problemstellung näherungsweise beschreibt.

d) Berechnen Sie die Geschwindigkeitskomponenten $u(x, y)$ und $v(x, y)$ für $F_{II}(z)$.

e) Berechnen Sie $\Gamma = f(\Omega)$ so, dass $\Omega \cdot \dot{V}_I = \dot{V}_{II}$.

Gegeben: u_∞, B, L, $\mathrm{P}_1 = (-L \,|\, 0)$ und $\mathrm{P}_2 = (-L \,|\, L)$

Hinweise:

- $v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \qquad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$
- $z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$
- $\frac{\partial}{\partial x} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$

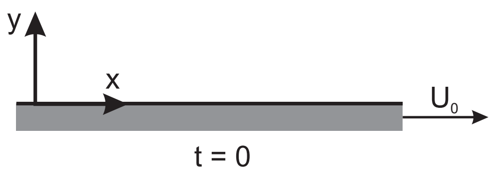
φ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$\sin\varphi$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\varphi$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Komplexe Potentialfunktionen:

Parallelströmung:	$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$	Staupunktströmung:	$F(z) = \alpha z^2$
Potentialwirbel:	$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$	Quelle/Senke:	$F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$
Dipol:	$F(z) = \frac{M}{2\pi z}$		

4. Aufgabe (16 Punkte)

Eine unendlich ausgedehnte ebene Platte wird zum Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich aus dem Stillstand mit der Geschwindigkeit U_0 in Bewegung gesetzt. Da die Platte unendlich ausgedehnt ist, stellt sich sofort ein in x-Richtung ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht zwischen der ruhenden Außenströmung und der Platte ein. Der Druck in der ruhenden Außenströmung ist konstant.



a) Skizzieren Sie für einen Zeitpunkt $t > 0$ das Geschwindigkeitsprofil über der Platte.

b) Vereinfachen Sie für dieses Problem die Navier-Stokes-Gleichungen (siehe Hinweis). Das Fluid ist inkompressibel und besitzt eine konstante Viskosität.

c) Geben Sie Anfangsbedingungen ($t \leq 0$) und Randbedingungen ($t > 0$) für die Lösung der aus b) resultierenden Gleichungen an.

Im Folgenden wird die Strömung über eine ruhende ebene Platte betrachtet.

d) Zeichnen Sie für die Strömung entlang einer ebenen Platte die Geschwindigkeitsprofile einer laminaren Grenzschicht, einer turbulenten Grenzschicht sowie einer Strömung mit verschwindender Wandschubspannung ($\tau_w = 0$) bei jeweils gleicher Reynolds-Zahl. Arbeiten Sie die Unterschiede und Merkmale deutlich heraus.

Gegeben: U_0

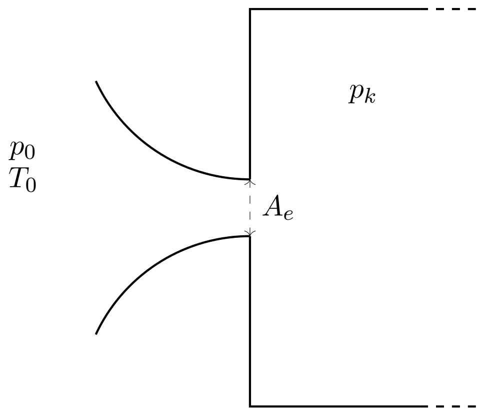
Hinweise:

- Beschleunigungsvorgänge der Platte können vernachlässigt werden, d.h. es kann angenommen werden, dass sich die Platte sofort mit der angegebenen Geschwindigkeit U_0 bewegt.
- Die Navier-Stokes-Gleichungen lauten für eine instationäre, ebene und inkompressible Strömung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}$$

5. Aufgabe (20 Punkte)

Durch eine konvergente Düse wird Luft aus der Umgebung in einen großen Kessel gesaugt.



a) Was wird im Rahmen der Gasdynamik als kritischer Zustand bezeichnet? Leiten Sie das kritische Druckverhältnis p^*/p_0 her und untersuchen Sie unter Berücksichtigung der gegebenen Größen, ob bei dem oben beschriebenen Problem ein kritischer Zustand eintritt.

b) Bestimmen Sie den Massenstrom durch die Düse.

c) Erklären Sie, wie sich die Düsenströmung im Vergleich zur Lösung aus Aufgabenteil b) verhält, wenn im Kessel ein nahezu vollständiges Vakuum $(p_k \to 0)$ erzeugt wird.

Gegeben: $A_e,\ p_0,\ R,\ T_0,\ \dfrac{p_K}{p_0} = 0.75, \gamma_{\text{Luft}} = 1.4,\ \dfrac{p^*}{p_0} = 0.528$

Hinweise:

- $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$
- Isentropenbeziehung: $\dfrac{T_a}{T_0} = \left(\dfrac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\dfrac{\rho_a}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$

6. Aufgabe (14 Punkte)

a) Definieren Sie die Prandtl-Zahl. Bei welchen Strömungen ist die Prandtl-Zahl eine relevante Kennzahl?

b) Nennen Sie die allgemeine Bedingung für die Ausbildung einer schleichenden Strömung? Geben Sie ein Beispiel an, bei dem schleichende Strömung auftritt.

c) Die Geschwindigkeitsverteilung eines Potentialwirbels mit der Stärke Γ lautet:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Rotation dieses Vektorfelds und erklären Sie die Bedeutung des Ergebnisses.

d) Geben Sie die physikalische Bedeutung der Verdrängungsdicke δ_1 an und erläutern Sie die Definition mit einer Skizze.