

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr. sc. D. Krug

Klausur

Aerodynamik I

18. 08. 2025

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

Klausur Aerodynamik I

Fragenteil, Biot-Savart, Konforme Abbildung

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n=p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n=p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall \quad |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (16 Punkte)

1. Im Folgenden soll ein mit der Machzahl $Ma_\infty = 3.0$ angeströmter Zylinder betrachtet werden, siehe Abb. 1. Die Strömung sei stationär und isoenergetisch. Begründen Sie anhand des Crocco'schen Wirbelsatzes

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} h_0 = T \vec{\nabla} s + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

warum die Potentialtheorie nicht auf den Bereich hinter dem Stoß angewendet werden kann.

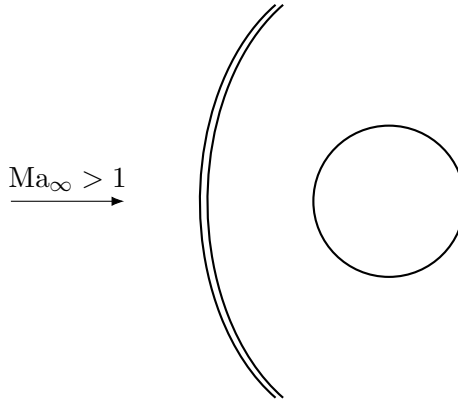


Abbildung 1: Mit Überschall angeströmter Zylinder.

2. Zeigen Sie, dass unter den Annahmen der Skelett-Theorie die Differenz der Druckbeiwerte der Unter- und Oberseite $\Delta c_p(X)$ von Profilen direkt proportional ist zu der lokalen Wirbelstärke $\gamma(X)$. Nehmen Sie den Zusammenhang

$$u(X) = \pm \frac{\gamma(X)}{2}$$

zwischen der axialen Störgeschwindigkeit entlang der Wirbelschicht und der Wirbelstärke als gegeben an. Gehen Sie von einer Anströmung mit V_∞ unter dem Anstellwinkel α aus.

3. Es soll der Verlauf des Druckbeiwertes um ein NACA 0012-Profil für unterschiedliche Machzahlen und Anstellwinkel betrachtet werden.
- Geben Sie die Bedeutung der einzelnen Ziffern der NACA 4er-Reihe an.
 - Zeichnen Sie qualitativ die Verläufe des Druckbeiwertes $c_p(X)$ entlang der Ober- und Unterseite des Profils in inkompressibler Strömung jeweils für einen Anstellwinkel von $\alpha_1 = 0$ und $\alpha_2 > 0$. Verwenden Sie für beide Anstellwinkel jeweils ein Diagramm mit beschrifteten Achsen. Kennzeichnen Sie insbesondere die Position und die Druckbeiwerte der Staupunkte.
 - Für welche Machzahlen können anhand der Ergebnisse aus Teilaufgabe 3b und der Prandtl-Glauert-Regel weitere Druckverläufe hergeleitet werden? Begründen Sie Ihre Antwort.
4. Der Druckverlauf aus Teilaufgabe 3b für den Anstellwinkel α_1 soll nun mithilfe der Tropfen-Theorie berechnet werden.

- Leiten Sie die Fundamentalgleichung der Tropfen-Theorie

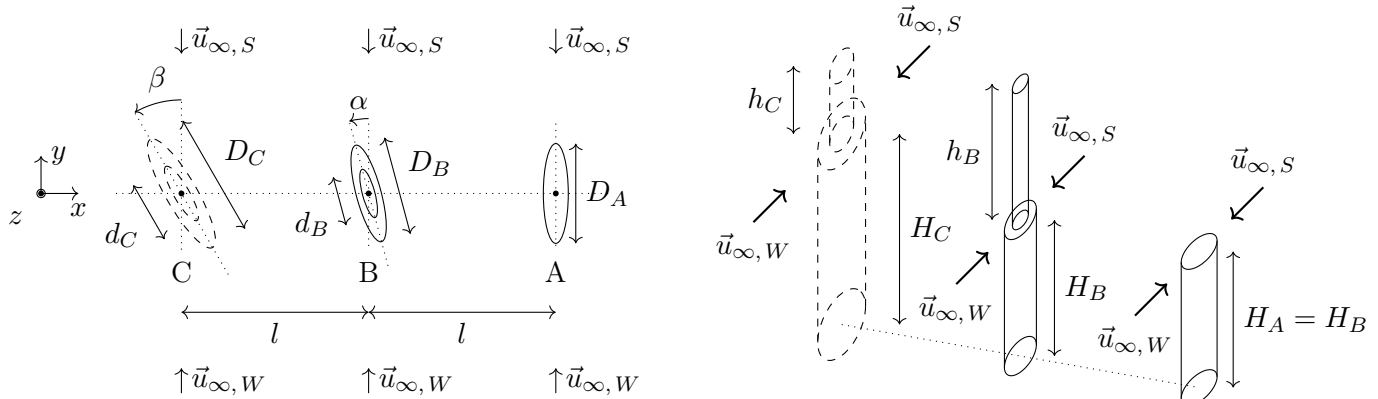
$$q(X) = 2u_\infty \frac{dZ^{(t)}}{dX}$$

mithilfe der Kontinuitätsgleichung her.

- Erklären Sie kurz, warum in der Tropfen-Theorie der Riegels-Faktor eingeführt wird.

2. Aufgabe: Biot-Savart (17 Punkte)

Im Folgenden werden zwei Hochhäuser A und B betrachtet, welche die in Abb. 2a dargestellten elliptischen Grundrisse aufweisen und auf welche infolge des Windes eine Seitenkraft wirke. Der Grundriss des Hochhauses B ist für $z \geq H_B$ gegenüber jenem für $z < H_B$ um den Faktor 0.5 skaliert, während das Hochhaus A die gleiche Form und die gleichen Halbachsenlängen über die gesamte Höhe aufweist, siehe Abb. 2b. Bedingt durch die geographische Lage der Hochhäuser sind diese typischerweise Wind aus einer von zwei charakteristischen Richtungen ausgesetzt. Im Sommer und Winter seien dies jeweils die Anströmgeschwindigkeiten $\vec{u}_{\infty, S}$ und $\vec{u}_{\infty, W}$ aus den Abb. 2a und 2b.



(a) Schema der Grundrisse der Hochhäuser.

(b) Schema der Seitenansicht der Hochhäuser.

Abbildung 2: Von Wind umströmte Hochhäuser.

- Skizzieren Sie die zu den Hochhäusern A und B gehörigen Wirbelsysteme für die Windrichtung $\vec{u}_{\infty, S}$ aus Abb. 2a. Geben Sie die Richtung der auf die Häuser wirkenden Seitenkräfte sowie die Richtung und den Betrag der Zirkulation aller Wirbel als Funktion der gegebenen Größen an. Wie verändert sich das Wirbelsystem, wenn sich die Windrichtung im Winter um 180° dreht?
- Leiten Sie die durch einen halbinendlichen geraden Wirbel induzierte Geschwindigkeit

$$v_i = \frac{\Gamma}{4\pi R}$$

anhand einer Skizze her, wobei R der normal zur Wirbellinie gemessene Abstand zwischen dem Wirbelstartpunkt und dem Aufpunkt ist.

- Auf dem Dach von Hochhaus A befindet sich eine Terrasse. Die lokalen Zulassungsbehörden erlauben die Öffnung dieser Terrasse jedoch nur in Abwesenheit einer Aufwindkomponente in positive z -Richtung. Begründen Sie anhand einer Skizze und des Gesetzes nach Biot-Savart, zu welchen Jahreszeiten die Terrasse geöffnet werden darf. Berechnen Sie den Betrag der durch das Wirbelsystem induzierten Aufwindkomponente auf der Dachterrasse.
- Das Stadtviertel werde um ein drittes Hochhaus C erweitert, welches an dem in Abb. 2a markierten Ort entsteht. Dieses soll analog zu Hochhaus B zwei verschiedene Grundrisse in verschiedenen Höhen aufweisen, siehe Abb. 2b. Die Formen der Grundrisse von Hochhaus C sind identisch zu jenen von Hochhaus B, dürfen aber beliebig skaliert werden. Zudem darf der Winkel β in Abb. 2a beliebig gewählt werden im Intervall $\beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Entwerfen Sie das Hochhaus unter diesen Freiheitsgraden so, dass die Terrasse auf Hochhaus A das ganze Jahr über geöffnet werden kann. Hinweis: Falls Sie Teilaufgabe 1 nicht lösen konnten, gehen Sie im Folgenden davon aus, dass jeweils $\Gamma_B \propto \alpha$ und $\Gamma_C \propto \beta$ für alle Zirkulationen der Wirbelsysteme der Hochhäuser B und C gilt.

Gegeben: $\frac{\partial C_l}{\partial \alpha}$, α , $\alpha > 0$, $u_{\infty, S}$, $u_{\infty, W}$, D_B , $d_B = 0.5D_B$, D_A , l , $H_A = H_B$, h_B
Hinweise:

- Alle Grundrissformen in Abb. 2a sind symmetrisch und weisen die gleichen Werte für $\frac{\partial C_l}{\partial \alpha} = \frac{\partial C_l}{\partial \beta}$ auf. Die Zusammenhänge zwischen C_l und α bzw. zwischen C_l und β seien für sämtliche betrachteten Anstellwinkel linear.
- Gehen Sie davon aus, dass die parallele Anströmung der Hochhäuser durch das Wirbelsystem unverändert bleibt.
- Biot-Savart-Gesetz:

$$d\vec{v}_i(\vec{x}, \vec{s}) = \frac{-\Gamma}{4\pi} \frac{\vec{a}(\vec{x}, \vec{s}) \times d\vec{s}}{\|\vec{a}(\vec{x}, \vec{s})\|^3}$$

3. Aufgabe: Konforme Abbildung (17 Punkte)

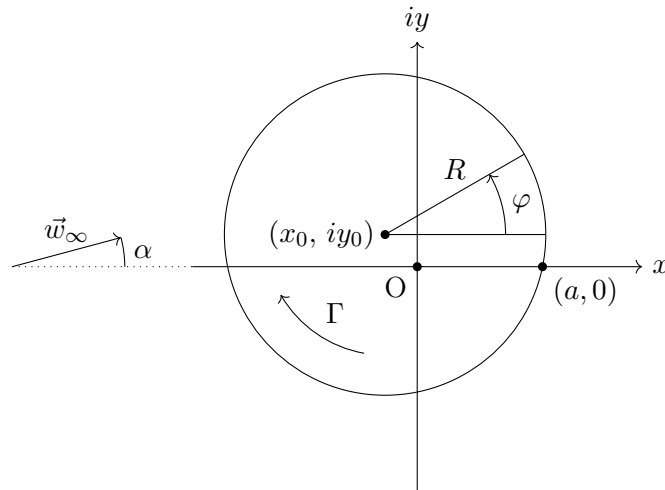


Abbildung 3: Umströmter Kreis mit Zirkulation.

Im Folgenden liegt der Fokus auf der Zhukovski'schen konformen Abbildung

$$f(z) = z + \frac{a^2}{z}$$

sowie auf dem Kreis in Abb. 3, gegeben durch

$$z_k = z_0 + R e^{i\varphi},$$

welcher in der Strömung liegt, welche durch die komplexe Potentialfunktion

$$F(z) = w_\infty e^{-i\alpha} (z - z_0) + w_\infty e^{i\alpha} \frac{R^2}{z - z_0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0)$$

beschrieben wird.

1. Zeigen Sie, dass die konforme Abbildung den Punkt $z = a$ auf eine spitze Kante abbildet und bestimmen Sie deren Position.
2. Leiten Sie Ausdrücke für die Profilkontur, welche durch die konforme Abbildung des Kreises erhalten wird, in folgenden Darstellungen her:
 - (a) als komplexe Funktion $z_p(\varphi)$,
 - (b) als Parameterdarstellung $\vec{p}(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi))^T$.
3. Leiten Sie einen Ausdruck für die Geschwindigkeit $w_z(z)$ auf der Oberfläche des Kreises her. Geben Sie alle Geschwindigkeitskomponenten explizit an. Wie hängt diese Geschwindigkeit mit der Geschwindigkeit $w_\zeta(\zeta)$ auf der Oberfläche des Profils aus Teilaufgabe 2 zusammen? Geben Sie lediglich den zugehörigen Ansatz an, ohne die Geschwindigkeit auf der Profilkontur explizit zu berechnen.
4. Durch welchen Parameter kann die Geometrie des Profils für eine gegebene konforme Abbildung angepasst werden? Wie würden Sie diesen Parameter bei Verwendung der Zhukovski-Abbildungsfunktion jeweils verändern, um die Dicke und die Wölbung des Profils anzupassen?
5. Vereinfachen Sie die Parameterdarstellung aus Teilaufgabe 2 für den Fall $z_0 = 0$ und $R = a$. Beschreiben Sie die erhaltene Geometrie.

6. Leiten Sie für den Fall $z_0 = 0$ und $R = a$ einen Ausdruck für den Druckbeiwert c_p entlang der Körperkontur her. Zeichnen Sie den Verlauf des Differenzdruckbeiwertes Δc_p entlang der Körperkontur und begründen Sie dessen Werte an Vorder- und Hinterkante. Sehen Sie den Ausdruck

$$\overline{w}_{\zeta,p} = w_\infty \cos(\alpha) \pm \frac{w_\infty \sin(\alpha)[2a - \xi]}{\sqrt{4a^2 - \xi^2}}$$

für die komplex-konjugierte Geschwindigkeit an der Oberfläche der Profilkontur als gegeben an.

Gegeben: $\alpha, \Gamma, a, x_0, y_0, R$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (16 Punkte)

1. Die Potentialtheorie ist nur gültig für rotationsfreie Strömungen. Aus dem Satz von Crocco folgt jedoch gerade die Aussage, dass die Strömung hinter einem gekrümmten Verdichtungsstoß rotationsbehaftet ist. Diese Aussage wird im Folgenden hergeleitet.

Da die Strömung stationär und isoenergetisch ist, kann der Crocco'sche Wirbelsatz zunächst vereinfacht werden zu

$$0 = T\vec{\nabla}s + \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \quad (1)$$

$$\implies T\vec{\nabla}s = -\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}). \quad (2)$$

Aus Gleichung (2) folgt, dass nicht-triviale Strömungen mit $\vec{v} \neq 0$ rotationsfrei sind, wenn diese stationär und isoenergetisch sind und der Entropiegradient überall null beträgt.

Die Kontraposition dieser Aussage ist, dass stationäre, isoenergetische Strömungen rotationsbehaftet sind, insofern ein Entropiegradient vorliegt. Es reicht also aus, zu zeigen, dass hinter dem Verdichtungsstoß ein Entropiegradient vorliegt, um zu begründen, warum die Potentialtheorie dort nicht anwendbar ist.

Um diese Aussage zu treffen, wird zunächst der Zusammenhang

$$\Delta s = \Delta s(\sigma, \text{Ma}_1) \quad (3)$$

aus der Gasdynamik herangezogen, wobei Δs die Entropieerhöhung entlang einer Stromlinie über einen Verdichtungsstoß, σ den lokalen Stoßwinkel und Ma_1 die Machzahl auf der Stromlinie vor dem Stoß darstellt. Das Strömungsfeld vor dem Stoß wird als homogen angenommen, das heißt die Machzahl Ma_1 ist entlang des Stoßes konstant. Abbildung 4 zeigt beispielhaft anhand zweier Stromlinien entlang eines gekrümmten Stoßes, dass für eine parallele Anströmung, wie sie in diesem Beispiel vorliegt, der Stoßwinkel entlang von gekrümmten Stoßen variiert. Aus 3 folgt dann, dass auch die Entropieerhöhung von Stromlinie zu Stromlinie variiert und hinter dem Verdichtungsstoß somit ein Entropiegradient vorliegt. Aus diesem Umstand folgt dann die Aussage aus der Aufgabenstellung.

2. Die Definition des Druckbeiwertes lautet

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2}. \quad (4)$$

Da die Skelett-Theorie in der Potentialtheorie angesiedelt ist, kann in dieser der Satz von Bernoulli zwischen beliebigen Punkten angesetzt werden, also auch zwischen einem Punkt in der freien Anströmung und einem Punkt auf der Wirbelschicht. Hieraus folgt für den Druck p und die Geschwindigkeit V auf der Wirbelschicht, dass

$$p + \frac{\rho}{2} V^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2. \quad (5)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (4) folgt für den Druckbeiwert auf der Wirbelschicht

$$c_p = \frac{p_\infty + \frac{\rho}{2} V_\infty^2 - \frac{\rho}{2} V^2 - p_\infty}{\frac{\rho}{2} V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2, \quad (6)$$

d.h. dieser hängt nur von dem Quadrat der Geschwindigkeit auf der Wirbelschicht ab. Der Geschwindigkeitsvektor ergibt sich aus der Superposition der freien Anströmung und der Störgeschwindigkeiten

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} v_\infty \cos(\alpha) + u \\ v_\infty \sin(\alpha) + w \end{pmatrix}, \quad (7)$$

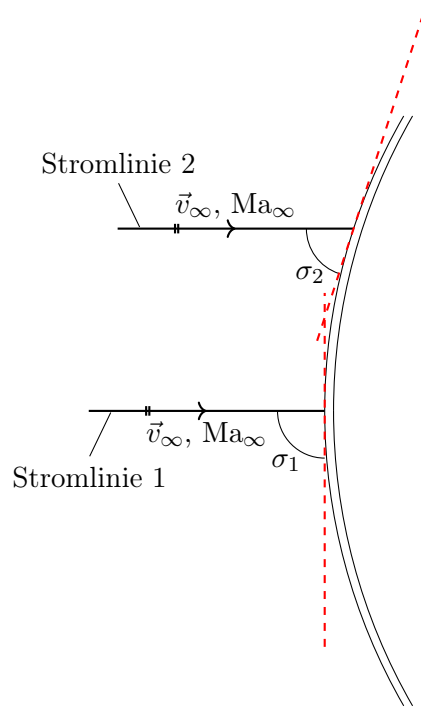


Abbildung 4: Veränderliche Stoßwinkel entlang eines gekrümmten Verdichtungsstoßes.

sodass für das Quadrat der Geschwindigkeit folgt, dass

$$V^2 = (V_\infty \cos(\alpha) + u)^2 + (V_\infty \sin(\alpha) + w)^2. \quad (8)$$

In der Skelett-Theorie gelten die Annahmen $V_\infty \gg u, w$ und $\alpha \ll 1$ bzw. $\cos(\alpha) \approx 1$ und $\sin(\alpha) \approx \alpha$. Daraus folgt:

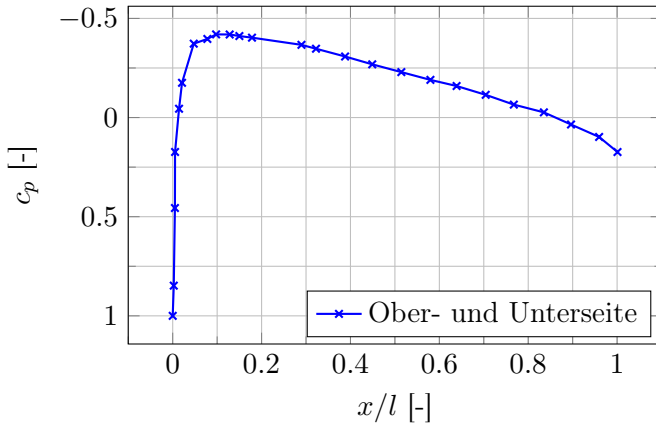
$$V^2 \approx V_\infty^2 + 2V_\infty u + \underbrace{u^2 + V_\infty^2 \alpha^2 + V_\infty \alpha w + w^2}_{\text{von höherer Ordnung klein}} \\ \Rightarrow c_p = 1 - \left(\frac{V}{V_\infty} \right)^2 \approx 1 - \left(1 + 2 \frac{u}{V_\infty} \right) = -2 \frac{u}{V_\infty} = \begin{matrix} \text{Oberseite} \\ \mp \\ \text{Unterseite} \end{matrix} \frac{\gamma(X)}{V_\infty} \quad (9)$$

Für die Druckdifferenz zwischen Ober- und Unterseite (der Wirbelschicht) gilt:

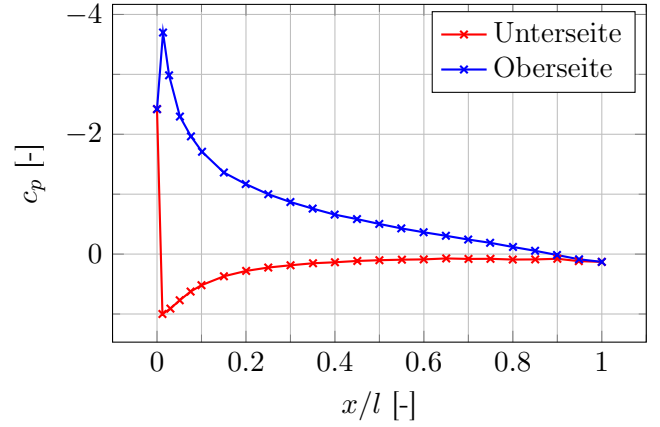
$$\Delta c_p = c_{p,u} - c_{p,o} = 2 \frac{\gamma(X)}{V_\infty}. \quad (10)$$

Folglich ist die Druckdifferenz lokal direkt proportional zur Wirbelstärke.

3. (a)
 - Die erste Ziffer beschreibt die maximale Wölbung $f_{\max}$ des Profils in Prozent der Sehnenlänge l .
 - Die zweite Ziffer beschreibt die Wölbungsrücklage x_f , d.h. die Position, an der die maximale Wölbung vorliegt in Mehrfachen von 10 Prozent der Sehnenlänge l .
 - Die dritte und vierte Ziffer werden als eine Zahl gelesen und beschreiben die maximale Dicke $d_{\max}$ des Profils in Prozent der Sehnenlänge l .
- (b) In Abbildung 5a ist insbesondere auf den Staupunkt mit $c_p = 1$ an der Vorderkante zu achten sowie auf die Symmetrie der Verläufe an Ober- und Unterseite. In Abbildung 5a liegt der Staupunkt auf der Unterseite und es bildet sich eine Saugspitze auf der Oberseite.
- (c) Das Ähnlichkeitsgesetz nach Prandtl und Glauert basiert auf der linearisierten Potentialtheorie. Folglich hat dieses lediglich Gültigkeit für sub- und supersonische Strömungen und ist insbesondere



(a) Verlauf des Druckbeiwertes entlang eines NACA 0012-Profils für $\alpha = 0^\circ$



(b) Verlauf des Druckbeiwertes entlang eines NACA 0012-Profils für $\alpha = 10^\circ$

Abbildung 5: Verläufe des Druckbeiwertes entlang eines NACA 0012-Profils für verschiedene Anstellwinkel

ungültig für trans- und hypersonische Strömungen. Darüber hinaus liefert die Skelett-Theorie lediglich eine Referenzmachzahl im subsonischen Bereich bei $Ma = 0$. Die Prandtl-Glauert-Regel setzt lediglich zwei sub- oder zwei supersonische Strömungen in Beziehung, nicht aber eine sub- und eine supersonische. Somit können mithilfe der Ähnlichkeitsregel und der Skelett-Theorie lediglich Druckverläufe im subsonischen Machzahlbereich $Ma \in [0.0, 0.8]$ berechnet werden.

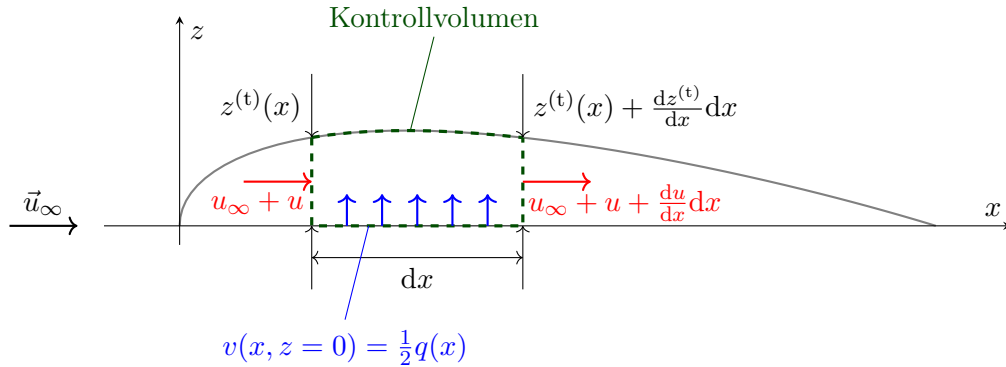


Abbildung 6: Kontrollvolumen in Herleitung der Fundamentalgleichung der Tropfen-Theorie

4. (a) In dieser Herleitung wird von dünnen Profilen ausgegangen. Diese Annahme erlaubt die Vernachlässigung der Abhängigkeit der Störgeschwindigkeiten u und v von z und sorgt dafür, dass diese über weite Strecken des Profils ggü. der freien Anströmung klein sind, d.h., $u_\infty \gg u, v$. Zur Herleitung der Fundamentalgleichung wird nun die Massenbilanz für das in Abbildung 6 eingezeichnete Kontrollvolumen aufgestellt. Für inkompressible, stationäre Strömungen ist die Kontinuitätsgleichung gleichbedeutend damit, dass die aus dem Kontrollvolumen ein- und austretenden Volumenströme gleich groß sein müssen. Über den oberen Rand des Kontrollvolumens fließt kein Volumenstrom, da dieser mit der Profilkontur zusammenfällt, welche wiederum einer Stromlinie

entspricht. Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned}
\dot{V}_{\text{ein}} &= \dot{V}_{\text{aus}} & (11) \\
\Rightarrow (u_\infty + u)z^{(t)}(x) + \frac{1}{2}q(x)dx &= \left(u_\infty + u + \frac{du}{dx}dx\right) \left(z^{(t)}(x) + \frac{dz^{(t)}(x)}{dx}\right) \\
\Rightarrow \frac{1}{2}q(x)dx &= \underbrace{(u_\infty + u)\frac{dz^{(t)}}{dx}dx + \frac{du}{dx}z^{(t)}dx}_{\approx u_\infty \frac{dz^{(t)}}{dx}, \text{ da } u_\infty \gg u} + \underbrace{\frac{du}{dx}\frac{dz^{(t)}}{dx}dx^2}_{\text{Von höherer Ordnung klein wegen } dx^2} \\
\Rightarrow \frac{1}{2}q(x)dx &= u_\infty \frac{dz^{(t)}}{dx}dx \\
\Rightarrow q(x) &= 2u_\infty \frac{dz^{(t)}}{dx} \frac{l}{l} \\
\Rightarrow q(x) &= 2u_\infty \frac{dZ^{(t)}}{dX} & (12)
\end{aligned}$$

mit $Z^{(t)} = \frac{z^{(t)}}{l}$ und $X = \frac{x}{l}$.

- (b) Der Herleitung in 4a liegt die Annahme zugrunde, dass die Störgeschwindigkeiten ggü. der freien Anströmung vernachlässigbar klein sind. Dies ist jedoch in der Nähe der Vorderkante nicht der Fall. Dort ist insbesondere die axiale Störgeschwindigkeit gleich der Gegenzahl der freien Anströmung. Die Tropfen-Theorie ist deshalb a priori in diesem Bereich nicht gültig. Der Riegels-Faktor dient dazu, die Gültigkeit der Tropfen-Theorie auf den Bereich nahe der Vorderkante zu erweitern.

Lösung 2. Aufgabe: Biot-Savart (17 Punkte)

1. Das Hochhaus A weist kein Wirbelsystem auf, da es einen symmetrischen Grundriss hat und die Sehne des Grundrisses keinen Anstellwinkel mit der Anströmung bildet. Es wirkt also keine Seitenkraft auf das Gebäude und infolge des Satzes von Kutta-Zhukovski kann geschlossen werden, dass auch kein gebundener Wirbel vorliegt.

Hochhaus B bildet einen Anstellwinkel mit der Anströmung und weist folglich einen gebundenen Wirbel auf. Für die Seitenkraft pro Einheitshöhe $\hat{L}$ gilt gemäß des Satzes von Kutta-Zhukovski

$$\hat{L} = \rho u_\infty \Gamma. \quad (13)$$

Anhand der gegebenen Größen kann hieraus ein Ausdruck für die Zirkulation des gebundenen Wirbels hergeleitet werden:

$$\Gamma = \frac{\hat{L}}{\rho u_\infty} \quad (14)$$

$$= \frac{\frac{\partial C_l}{\partial \alpha}(\alpha - \alpha_0) \frac{\rho}{2} u_\infty^2 l}{\rho u_\infty} \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial C_l}{\partial \alpha} (\alpha - \alpha_0) u_\infty l. \quad (16)$$

Da alle Grundrisse symmetrisch sind, gilt $\alpha_0 = 0$. Hochhaus B weist zwei verschiedene Sehnenlängen l auf als Funktion der Höhe, d_B und D_B . Es gilt folglich

$$\Gamma_{z \leq H_B} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty D_B \quad (17)$$

$$= \frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty d_B \quad (18)$$

$$\Gamma_{z > H_B} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty d_B, \quad (19)$$

wobei der Hinweis, dass der Auftriebsanstieg $\frac{\partial C_l}{\partial \alpha}$ für alle Querschnitte identisch ist, herangezogen wurde. Gemäß des 3. Helmholtz'schen Wirbelsatzes muss sich bei der Höhe $z = H_B$ ein freier Wirbel bilden, dessen Zirkulation

$$\Gamma_{z=H_B} = \Gamma_{z \leq H_B} - \Gamma_{z > H_B} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty d_B \quad (20)$$

betragen muss. Wiederum aus dem 3. Helmholtz'schen Wirbelsatz folgt, dass sich in der Höhe $z = H_B + h_B$ ein freier Wirbel mit Zirkulation

$$\Gamma_{z=H_B+h_B} = \frac{1}{2} \Gamma_{z > H_B} = \frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty d_B \quad (21)$$

bilden muss. Die freien Wirbel schwimmen parallel zu der freien Anströmung ab. Die Richtung der Zirkulation der gebundenen Wirbel folgt aus der Richtung der Seitenkraft und der rechten-Hand-Regel. Abbildung 7 zeigt das Wirbelsystem des Hochhauses B im Sommer. Wenn sich die Windrichtung im Winter dreht, wirkt sich dies wie folgt aus. Zum einen zeigt die Seitenkraft genauso wie die Anströmung in die entgegengesetzte Richtung. In Summe bleibt die Richtung der gebundenen Wirbel deshalb unverändert. Die freien Wirbel schwimmen im Winter jedoch in die entgegengesetzte Richtung ab. Abb. 8 fasst dies zusammen.

2. Die Herleitung wird anhand der Skizze in Abbildung 9 vorgenommen. Es wird der Umstand genutzt, dass die Richtung des Geschwindigkeitsvektors bekannt ist. Dies liegt daran, dass jedes infinitesimale Wirbelsegment einen Geschwindigkeitsvektor senkrecht zu der Ebene in Abb. 9 induziert. Folglich muss

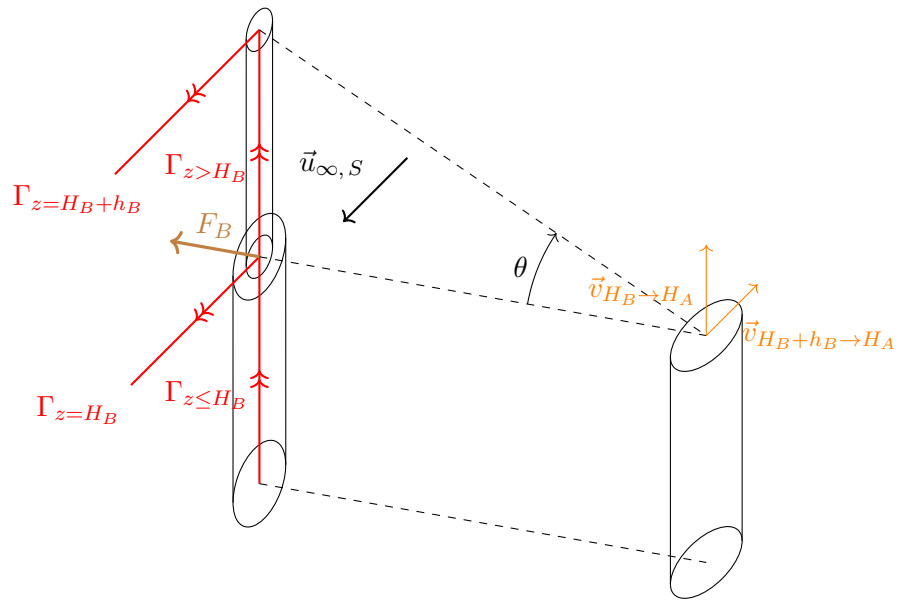


Abbildung 7: Wirbelsystem und induzierte Geschwindigkeiten im Sommer.

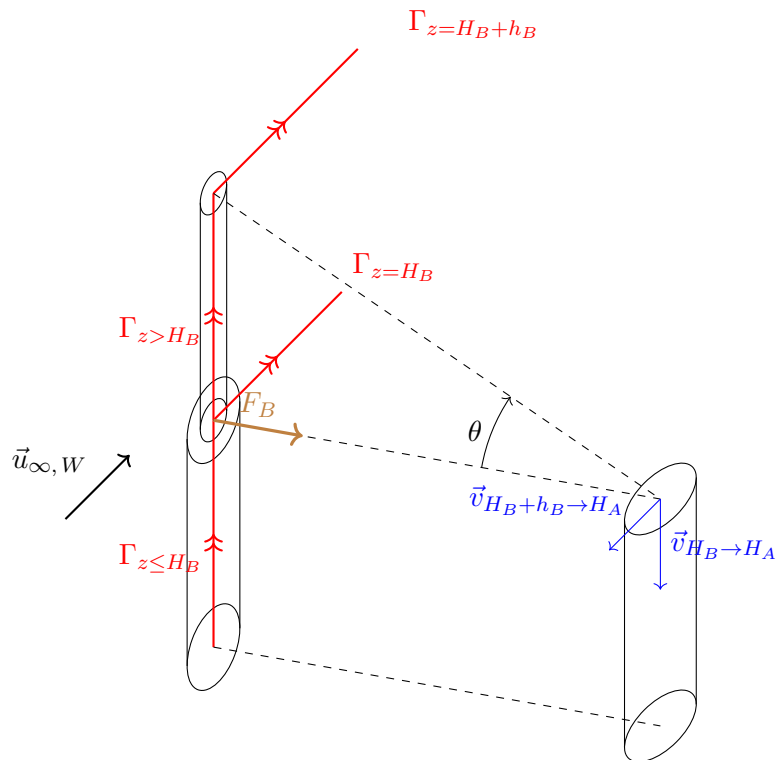


Abbildung 8: Wirbelsystem und induzierte Geschwindigkeiten im Winter.

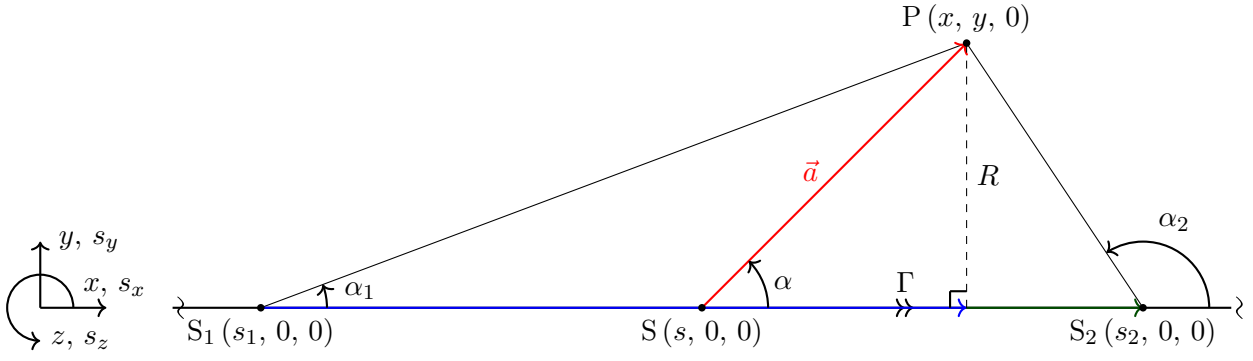


Abbildung 9: Gerade Wirbellinie.

auch der resultierende Geschwindigkeitsvektor normal auf dieser Ebene stehen. Im Folgenden wird lediglich Betrag des Geschwindigkeitsvektors berechnet.

Für ein Wirbelelement gilt:

$$\|\mathrm{d}\vec{v}\| = \frac{\Gamma}{4\pi\|\vec{a}\|^3} \|\vec{a} \times \mathrm{d}\vec{s}\| = \frac{\Gamma}{4\pi\|\vec{a}\|^3} \|\vec{a}\| \cdot \underbrace{\|\mathrm{d}\vec{s}\|}_{=\mathrm{d}s} \cdot \sin(\alpha) \quad (22)$$

wobei α der Winkel zwischen $\mathrm{d}\vec{s}$ und $\vec{a}$ ist mit $\alpha \in [0; \pi]$. Für $\alpha \in [\pi; 2\pi]$ wäre die rechte Seite von Gleichung (22) negativ, was nicht mit der Definition eines Betrags zu vereinbaren ist. Durch Integration über alle infinitesimalen Geschwindigkeitsbeträge $\|\mathrm{d}\vec{v}\|$ folgt:

$$\|\vec{v}\| = \int_1^2 \|\mathrm{d}\vec{v}\| = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\sin(\alpha)}{\|\vec{a}\|^2} \mathrm{d}s \stackrel{\text{erweitere mit } \sin^2(\alpha)}{=} \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{s_1}^{s_2} \frac{\sin^3(\alpha)}{\sin^2(\alpha)\|\vec{a}\|^2} \mathrm{d}s \quad (23)$$

Aus Abbildung 9 folgt, dass $\|\vec{a}\|\sin(\alpha) \equiv R = \text{konst.}$ für alle s . Somit kann der Nenner in Gleichung (23) vor das Integral gezogen werden kann:

$$\|\vec{v}\| = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \int_{s_1}^{s_2} \sin^3(\alpha) \mathrm{d}s \quad (24)$$

Durch Anwendung der Substitutionsregel der Integralrechnung folgt:

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} \mathrm{d}\alpha \rightarrow \text{Benötige Ausdruck } s(\alpha) \quad (25)$$

Aus Abbildung 9 folgt:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha) &= \frac{R}{x-s} \Rightarrow x-s = \frac{R}{\tan \alpha} \Rightarrow s = x - \frac{R}{\tan(\alpha)} \\ &\Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\alpha} = R \frac{1 + \tan^2(\alpha)}{\tan^2(\alpha)} = \frac{R}{\sin^2(\alpha)} \end{aligned} \quad (26)$$

Einsetzen in (24) liefert schließlich:

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin^3(\alpha) \frac{R}{\sin^2(\alpha)} \mathrm{d}\alpha = \frac{\Gamma}{4\pi R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin(\alpha) \mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi R} [\cos(\alpha_1) - \cos(\alpha_2)]. \end{aligned} \quad (27)$$

Für den Spezialfall des halbumendlichen geraden Wirbelfadens werden die Winkel $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha_2 \rightarrow \pi$ eingesetzt. Daraus folgt:

$$\|\vec{v}\| = \frac{\Gamma}{4\pi R} \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(\pi) \right] = \frac{\Gamma}{4\pi R}. \quad (28)$$

3. Die gebundenen Wirbel induzieren gemäß der rechten-Hand-Regel lediglich Geschwindigkeitsvektoren in y -Richtung und sind folglich für die Betrachtung in dieser Teilaufgabe nicht von Bedeutung. Aus der Richtung der Zirkulation der gebundenen Wirbel in Teilaufgabe 1 in Kombination mit der rechten-Hand-Regel folgt, dass die freien Wirbel nur im Sommer Aufwindkomponenten induzieren, siehe Abb. 7 und 8. Der gesamte induzierte Aufwind auf der Dachterrasse v_{z, H_A} ist dann gegeben durch

$$v_{z, H_A} = v_{z, H_B \rightarrow H_A} + v_{z, H_B + h_b \rightarrow H_A}, \quad (29)$$

wobei $v_{z, H_B \rightarrow H_A}$ die vom unteren und $v_{z, H_B + h_b \rightarrow H_A}$ die vom oberen freien Wirbel von Hochhaus B induzierte Geschwindigkeiten in positive z -Richtung auf der Dachterrasse sind. Die Geschwindigkeitsbeträge der induzierten Vektoren können mithilfe (28) berechnet werden. Für den freien Wirbel in der Höhe $z = H_B$ gilt

$$R_{H_B \rightarrow H_A} = l \quad (30)$$

$$\Gamma_{z=H_B} = \Gamma_{z \leq H_B} - \Gamma_{z > H_B} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty d_B \quad (31)$$

$$v_{H_B \rightarrow H_A} = \frac{\frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty d_B}{8\pi l}. \quad (32)$$

Diese Geschwindigkeitskomponente zeigt in positive z -Richtung, siehe Abbildung 7. Es gilt also

$$v_{z, H_B \rightarrow H_A} = v_{H_B \rightarrow H_A} = \frac{\frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty d_B}{8\pi l}. \quad (33)$$

Für die vom freien Wirbel in der Höhe $z = H_B + h_B$ induzierte Geschwindigkeit gilt:

$$R_{H_B + h_B \rightarrow H_A} = \sqrt{h_B^2 + l^2} \quad (34)$$

$$\Gamma_{z=H_B + h_B} = \frac{1}{2} \frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty d_B \quad (35)$$

$$\|\vec{v}_{h_B + H_B \rightarrow H_A}\| = \frac{\frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty d_B}{8\pi \sqrt{h_B^2 + l^2}}. \quad (36)$$

Im Gegensatz zu dem Vektor $\vec{v}_{H_B \rightarrow H_A}$ zeigt $\vec{v}_{H_B + h_B \rightarrow H_A}$ jedoch nicht genau in z -Richtung. Aus Abbildung 7 folgt, dass dies lediglich für die Komponente

$$v_{z, H_B + h_b \rightarrow H_A} = v_{H_B + h_B \rightarrow H_A} \cos(\theta) \quad (37)$$

der Fall ist, wobei $\cos(\theta) = \frac{l}{\sqrt{l^2 + h_B^2}}$. Insgesamt liegt im Winter damit die folgende Aufwindkomponente vor:

$$v_{z, H_A} = \frac{\frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty d_B}{8\pi l} + \frac{l}{l^2 + h_B^2} \frac{\frac{\partial C_l}{\partial \alpha} \alpha u_\infty d_B}{8\pi}. \quad (38)$$

4. Damit die Terrasse auf Hochhaus A das ganze Jahr über geöffnet bleiben kann, müssen die freien Wirbel von Hochhaus C die Aufwindkomponenten der von Hochhaus B induzierten Geschwindigkeiten genau ausgleichen. Wie schon bei Hochhaus B induzieren auch die gebundenen Wirbel von Hochhaus C keine Aufwindkomponente.

Zunächst muss konstruktiv dafür gesorgt werden, dass die freien Wirbel von Hochhaus C in die entgegengesetzte Richtung rotieren als für Hochhaus B. Dies ist dann der Fall, wenn die Seitenkraft in die entgegengesetzte Richtung zeigt, was mit Anstellwinkeln $\beta < 0$ erreicht wird.

Gleichung (28) kann entnommen werden, dass der induzierte Geschwindigkeitsbetrag sowohl von dem Abstand R als auch von dem Betrag der Zirkulation Γ abhängt. Da sich Hochhaus C weiter entfernt von Hochhaus A befindet als Hochhaus B, muss die Zirkulation von Hochhaus C größer ausfallen als

für Hochhaus B. Dies kann entweder durch im Vergleich zu α betragsmäßig größere Anstellwinkel β oder durch größere Sehnslängen erreicht werden.

Schließlich muss dafür gesorgt werden, dass sich die Geschwindigkeiten genau gegenseitig aufheben. Im Folgenden wird eine Konstruktion gezeigt, die genau dies erreicht.

Der untere Teil von Hochhaus C habe die Höhe $H_C = H_B = H_A$. Infolgedessen induziert der freie Wirbel in dieser Höhe eine Geschwindigkeit in z -Richtung auf dem Dach von Hochhaus A. Damit diese genau den Aufwind infolge des freien Wirbels in der Höhe $z = H_B$ von Hochhaus B ausgleicht, wird $\beta = -\alpha$, $D_C = 2D_B$ und $d_C = 2d_b$ gewählt. $\beta = -\alpha$ stellt identische Werte für C_l sicher, während die doppelte Sehnslänge zu einem doppelt so großen Auftrieb pro Einheitshöhe führt und den doppelten Abstand in Gleichung (28) kompensiert.

Der obere Teil von Hochhaus C habe die Höhe $h_C = 2h_B$. Somit liegen die Spitzen der drei Hochhäuser auf einer Linie und die oberen freien Wirbel von Hochhaus B und C induzieren an der Spitze von Hochhaus A parallele Geschwindigkeitsvektoren. Auch für die oberen freien Wirbel gilt, dass jener von Hochhaus C doppelt so weit von der Spitze von Hochhaus A entfernt ist als jener von Hochhaus B. Weiter oben wurde bereits festgelegt, dass $d_C = 2d_B$. Infolgedessen hat der obere freie Wirbel von Hochhaus C eine doppelt so große Zirkulation verglichen mit jenem von Hochhaus B und hebt dessen induzierte Geschwindigkeit auf der Dachterrasse auf A genau auf. Abbildung 10 fasst das Wirbelsystem und die induzierten Geschwindigkeiten nach dem Bau von Hochhaus C zusammen.

In Summe werden mit dieser Konstruktion alle Aufwindkomponenten aufgehoben und die Dachterrasse kann das ganze Jahr über geöffnet bleiben.

Eine alternative Konstruktion, die den gleichen Effekt erzielt, wäre jene mit $\beta = -2\alpha$, $D_C = D_B$, $d_c = d_b$, $H_C = H_B$ und $h_c = h_b$.

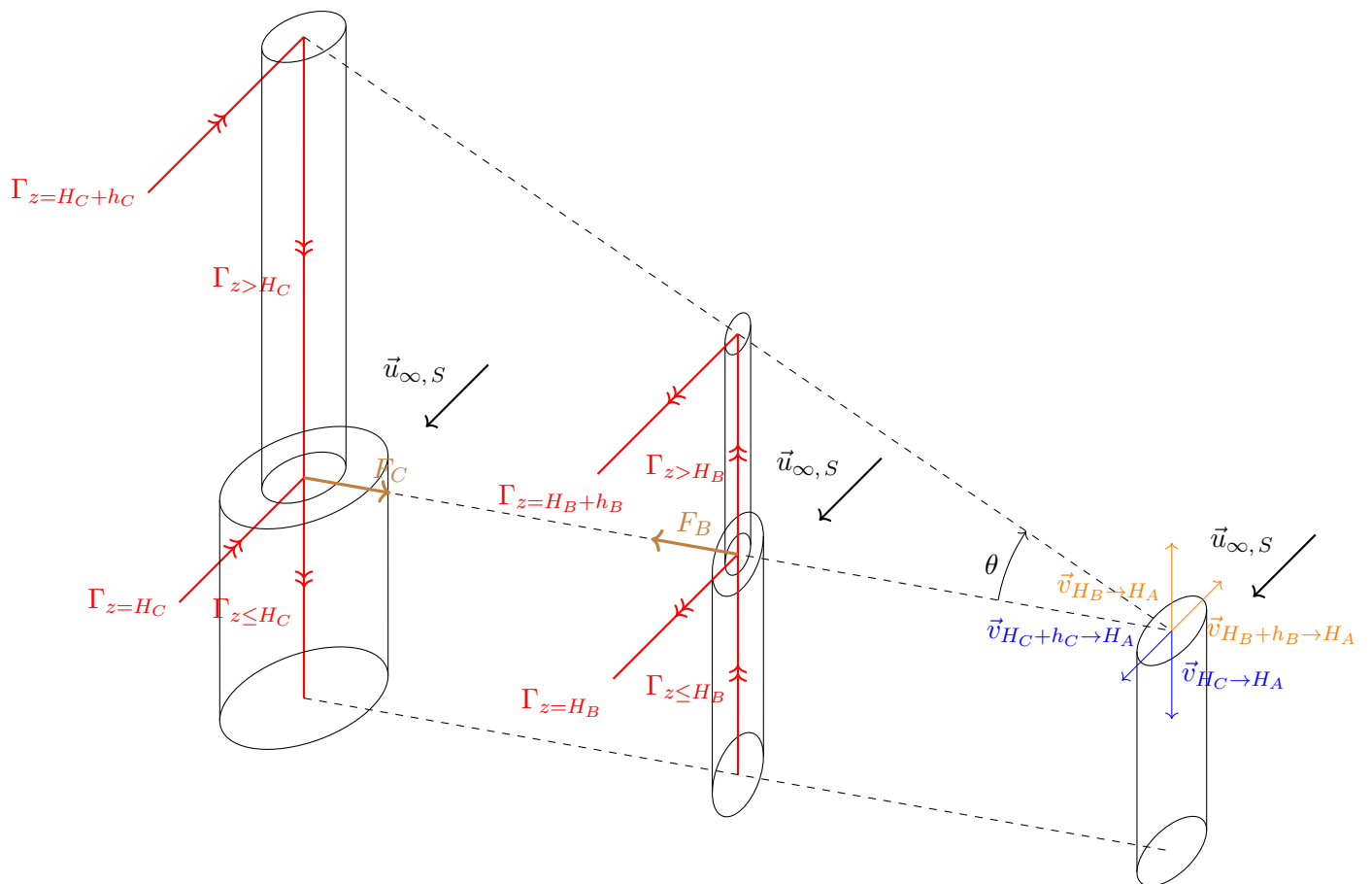


Abbildung 10: Wirbelsystem und induzierte Geschwindigkeiten im Sommer nach dem Bau von Hochhaus C.

Lösung 3. Aufgabe: Konforme Abbildung (17 Punkte)

1. Abbildungsfunktionen bilden Punkte auf Knicke ab, für die die erste Ableitung der Abbildungsfunktion eine Nullstelle aufweist. Insofern es sich um eine einfache Nullstelle handelt, handelt es sich bei dem Knick um eine Spitze. Die Ableitung der Zhukovski-Abbildungsfunktion ist gegeben durch

$$f'(z) = 1 - \frac{a^2}{z^2} \quad (39)$$

und weist einfache Nullstellen bei $z = \pm a$ auf. Somit wird die Stelle $z = a$ auf eine spitze (Hinter-)Kante abgebildet. Die Abbildung erfolgt auf den Punkt

$$f(z = a) = a + \frac{a^2}{a} = 2a \quad (40)$$

in der ζ -Ebene.

2. Die geforderte Parameterdarstellung ist gegeben durch

$$\vec{p}(\varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(f(z_k)) \\ \operatorname{Im}(f(z_k)) \end{pmatrix}. \quad (41)$$

Um diese zu bestimmen, muss also die komplexe Darstellung des Kreises z_k in die konforme Abbildung eingesetzt werden und anschließend der Real- und Imaginärteil des resultierenden Ausdrucks bestimmt werden. Es gilt

$$f(z_k) = z_k + \frac{a^2}{z_k} \quad (42)$$

$$= z_0 + R e^{i\varphi} + \frac{a^2}{z_0 + R e^{i\varphi}}. \quad (43)$$

Um diesen Ausdruck in Real- und Imaginärteil zu zerlegen, wird $z_0 = x_0 + i y_0$ eingesetzt und der Bruch erweitert mit dem komplex Konjugierten des Nenners:

$$f(z_k) = x_0 + i y_0 + R \cos(\varphi) + i R \sin(\varphi) + a^2 \frac{x_0 + R \cos(\varphi) - i(y_0 + R \sin(\varphi))}{(x_0 + R \cos(\varphi))^2 + (y_0 + R \sin(\varphi))^2} \quad (44)$$

$$= x_0 + R \cos(\varphi) + a^2 \frac{x_0 + R \cos(\varphi)}{(x_0 + R \cos(\varphi))^2 + (y_0 + R \sin(\varphi))^2} + i \left(y_0 + R \sin(\varphi) - a^2 \frac{y_0 + R \sin(\varphi)}{(x_0 + R \cos(\varphi))^2 + (y_0 + R \sin(\varphi))^2} \right). \quad (45)$$

Für die Parametrisierung gilt also

$$\vec{p}(\varphi) = \begin{pmatrix} x_0 + R \cos(\varphi) + a^2 \frac{x_0 + R \cos(\varphi)}{(x_0 + R \cos(\varphi))^2 + (y_0 + R \sin(\varphi))^2} \\ y_0 + R \sin(\varphi) - a^2 \frac{y_0 + R \sin(\varphi)}{(x_0 + R \cos(\varphi))^2 + (y_0 + R \sin(\varphi))^2} \end{pmatrix} \quad (46)$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$.

3. Die konjugiert-komplexe Geschwindigkeit $\bar{w}_z$ ist gegeben durch die Ableitung der komplexen Potentialfunktion, welche den Hinweisen entnommen werden kann:

$$\bar{w}_z = \frac{dF}{dz}. \quad (47)$$

$$= w_\infty e^{-i\alpha} - w_\infty e^{i\alpha} \frac{R^2}{(z - z_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z - z_0)}. \quad (48)$$

Speziell an der Oberfläche gilt $z = z_k$. Für die konjugiert-komplexe Geschwindigkeit auf der Oberfläche des Zylinders folgt daraus:

$$\bar{w}_z(z_k) = w_\infty e^{-i\alpha} - w_\infty e^{i\alpha} \frac{R^2}{(Re^{i\varphi})^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(Re^{i\varphi})} \quad (49)$$

$$= w_\infty e^{-i\alpha} - w_\infty e^{i\alpha} e^{-2i\varphi} + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{-i\varphi} \quad (50)$$

$$= w_\infty e^{-i\alpha} - w_\infty e^{i(\alpha-2\varphi)} + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{-i\varphi} \quad (51)$$

$$= w_\infty \cos(\alpha) - w_\infty \cos(\alpha - 2\varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi R} \sin(\varphi) + i \left[-w_\infty \sin(\alpha) - w_\infty \sin(\alpha - 2\varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi R} \cos(\varphi) \right]. \quad (52)$$

Für die Geschwindigkeit an der Oberfläche des Zylinders gilt also

$$w_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\bar{w}_z) \\ -\operatorname{Im}(\bar{w}_z) \end{pmatrix} \quad (53)$$

$$= \begin{pmatrix} w_\infty \cos(\alpha) - w_\infty \cos(\alpha - 2\varphi) + \frac{\Gamma}{2\pi R} \sin(\varphi) \\ w_\infty \sin(\alpha) + w_\infty \sin(\alpha - 2\varphi) - \frac{\Gamma}{2\pi R} \cos(\varphi) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Die konjugiert-komplexe Geschwindigkeit $\bar{w}_z$ an der Stelle z_k auf dem Zylinder und die konjugiert-komplexe Geschwindigkeit $\bar{w}_\zeta$ an der Stelle $f(z_k)$ auf dem Profil stehen über die Beziehung

$$\bar{w}_\zeta = \bar{w}_z \left(\frac{df}{dz} \right)^{-1} \quad (55)$$

in Zusammenhang.

4. Für eine gegebene Abbildungsfunktion kann die Form des Profils durch Verschieben des Zentrums z_0 des Kreises angepasst werden. Durch Verändern des Realteils x_0 wird in erster Linie die Dicke des Profils angepasst, durch Verändern des Imaginärteils y_0 die Wölbung. Der Radius wird in der Regel genau so gewählt, dass der Kreis den Punkt $z = a$ schneidet und das Profil eine spitze Hinterkante aufweist.
5. Durch Einsetzen von $z_0 = 0$ und $R = a$ in (46) wird die Parametrisierung

$$\vec{p}(\varphi) = \begin{pmatrix} 2a \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (56)$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ erhalten, welche eine ebene Platte mit Sehnenlänge $l = 4a$ beschreibt.

6. Die Theorie der konformen Abbildung basiert auf der inkompressiblen Potentialtheorie, in der wiederum der Satz von Bernoulli gültig ist, und das nicht nur entlang von Stromlinien, sondern zwischen beliebigen Punkten des Strömungsfeldes. Der Satz von Bernoulli wird zwischen der freien Anströmung und der Oberfläche der ebenen Platte formuliert:

$$p_\infty + \frac{\rho}{2} w_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2} |w_{\zeta,P}|^2 \quad (57)$$

Es gilt also für den Druckbeiwert:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} w_\infty^2} = \frac{p_\infty + \frac{\rho}{2} w_\infty^2 - p - \frac{\rho}{2} |w_{\zeta,P}|^2}{\frac{\rho}{2} w_\infty^2} = 1 - \left(\frac{w_{\zeta,P}}{w_\infty} \right)^2, \quad (58)$$

wobei $w_{\zeta, P}$ die Geschwindigkeit auf der ebenen Platte ist. Auf der Oberfläche der Platte ist $\overline{w}_{\zeta, P} = u_{\zeta, P} - iv_{\zeta, P}$ rein reell, denn es liegt keine Geschwindigkeit normal zur Platte in η -Richtung vor. Daraus folgt $|w_{\zeta, P}| = |\overline{w}_{\zeta, P}| = |u_{\zeta, P}|$ und es gilt

$$|w_{\zeta, P}|^2 = \left(u_{\infty} \mp \frac{w_{\infty} \sin(\alpha) [\frac{l}{2} - \xi]}{\sqrt{(\frac{l}{2})^2 - \xi^2}} \right)^2, \quad (59)$$

wobei der Ausdruck für die Geschwindigkeit der Aufgabenstellung entnommen werden kann. Durch Einsetzen von Gleichung (59) in (58) folgt:

$$\Rightarrow c_p = 1 - \left[\cos(\alpha) \pm \frac{\sin(\alpha) [\frac{l}{2} - \xi]}{\sqrt{(\frac{l}{2})^2 - \xi^2}} \right]^2 = 1 - \left[\cos(\alpha) \begin{matrix} \text{Oberseite} \\ \pm \\ \text{Unterseite} \end{matrix} \sin(\alpha) \sqrt{\frac{\frac{l}{2} - \xi}{\frac{l}{2} + \xi}} \right]^2 \quad (60)$$

Der Differenzdruckbeiwert ist definiert als

$$\begin{aligned} \Delta c_p = c_{p,u} - c_{p,o} &= 1 - \left[\cos^2(\alpha) - 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \sqrt{\frac{\frac{l}{2} - \xi}{\frac{l}{2} + \xi}} + \sin^2(\alpha) \frac{\frac{l}{2} - \xi}{\frac{l}{2} + \xi} \right] \\ &\quad - \left\{ 1 - \left[\cos^2(\alpha) + 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \sqrt{\frac{\frac{l}{2} - \xi}{\frac{l}{2} + \xi}} + \sin^2(\alpha) \frac{\frac{l}{2} - \xi}{\frac{l}{2} + \xi} \right] \right\} \\ &= 4 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \sqrt{\frac{\frac{l}{2} - \xi}{\frac{l}{2} + \xi}} \end{aligned} \quad (61)$$

Die Asymptote bei $\xi = -\frac{l}{2}$ deutet auf einen unendlich großen Druckunterschied an der Vorderkante

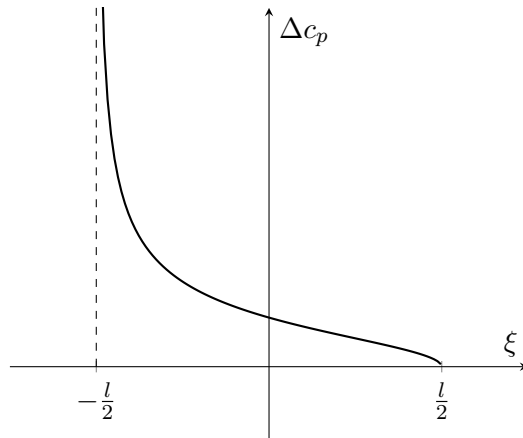


Abbildung 11: Verlauf des Differenzdruckbeiwertes entlang der ebenen Platte.

hin. Dieser entsteht durch die Umströmung der unendlich dünnen Vorderkante. Im Gegensatz zur Hinterkante darf die Vorderkante umströmt werden. An der Hinterkante liegen auf Ober- und Unterseite wegen der Kutta'schen Abflussbedingung die gleichen Drücke vor. Folglich geht der Differenzdruckbeiwert dort gegen null.