

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik I

17. 02. 2025

M U S T E R L Ö S U N G E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

Klausur Aerodynamik I

Fragenteil, Konforme Abbildung, Tropfen-Theorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n=p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n=p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall \quad |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

1. Erklären Sie anhand eines Strömungsbeispiels wie eine stationäre zweidimensionale drehungs- und reibungsfreie Strömung lokal in Rotation versetzt werden kann. Wie heißt der Wirbelsatz, der diesen Vorgang quantitativ beschreibt (Angabe der Formel nicht notwendig)?

2. Leiten Sie mithilfe des Biot-Savart Gesetzes

$$d\vec{u}_i = -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\vec{a} \times d\vec{s}}{||\vec{a}||^3}$$

den durch einen kreisförmigen Wirbel induzierten Geschwindigkeitsbetrag im Mittelpunkt des Kreises, also im Ursprung in Abbildung 1, her. Geben Sie das Ergebnis als Funktion des Radius $||\vec{a}||$ und der Zirkulation Γ an.

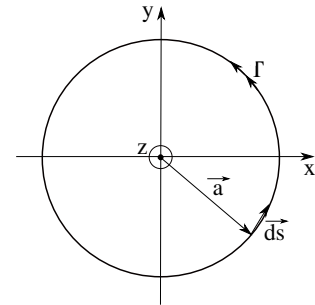


Abbildung 1: Kreiswirbelsystem.

3. Im Windkanal sollen ein einseitig und ein beidseitig eingespannter Flügel untersucht werden (Abb. 2).

- (a) Skizzieren Sie die Wirbellinien so, dass die Flügel eine Kraft in positive z-Richtung erzeugen.
- (b) Erläutern Sie Ihre Skizze kurz auf Basis der Helmholtz'schen Wirbelsätze.

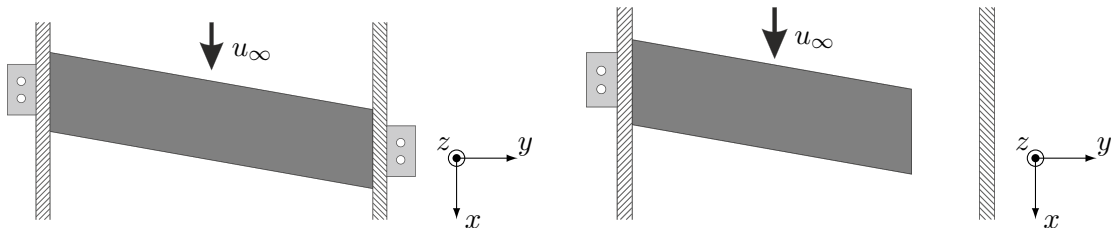


Abbildung 2: Einseitig und beidseitig eingespannter Flügel im Windkanal.

4. Betrachtet werden zwei Flügelprofile des Typs NACA 2406 und NACA 0015.

- (a) Erläutern Sie die geometrischen Eigenschaften des NACA-2406-Profiles auf Basis der Nomenklatur der 4-stelligen NACA-Reihe.
- (b) Ordnen Sie die Auftriebspolaren I und II in Abbildung 3 dem jeweiligen Profil zu.
- (c) Welches Profil eignet sich für die Verwendung als Seitenleitwerk. Begründen Sie Ihre Antwort kurz.

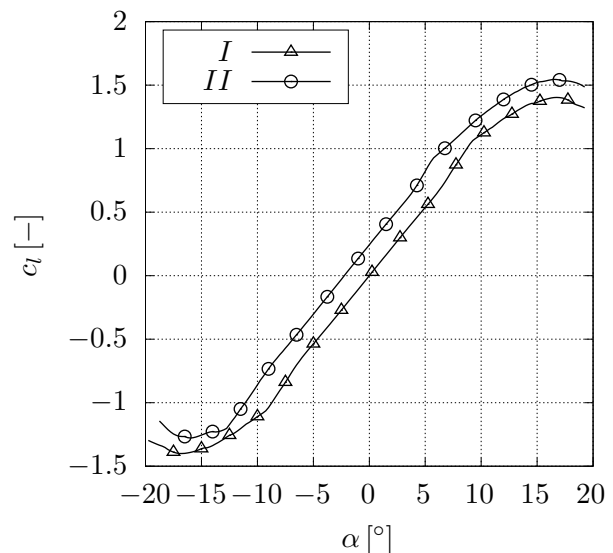


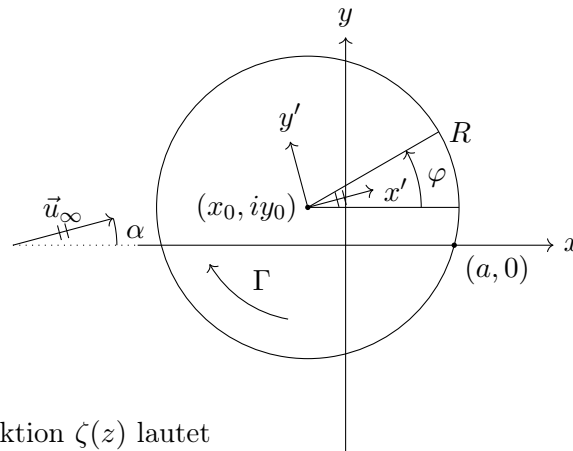
Abbildung 3: Auftriebspolaren der Profile I und II .

5. Skelett-Theorie

- (a) Nennen Sie 4 Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Skelett-Theorie.
- (b) Erläutern Sie die kinematische Randbedingung der Skelett-Theorie.

2. Aufgabe: Konforme Abbildung (18 Punkte)

Gegeben ist ein Kreiszyylinder mit dem Radius R und dem Mittelpunkt $z_0 = x_0 + iy_0$, welcher sich in einer Parallelströmung mit der Zirkulation Γ befindet. Dabei bildet die Anströmgeschwindigkeit u_∞ den Winkel α mit der x -Achse.



Die Zhukovski-Abbildungsfunktion $\zeta(z)$ lautet

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}.$$

1. Zeigen Sie, dass diese Abbildungsfunktion einen parallel angeströmten Kreiszyylinder mit Radius $R = a$ und Zentrum im Ursprung der z -Ebene auf eine doppelt durchlaufene ebene Platte der Länge $4a$ in der ζ -Ebene abbildet.
2. Erläutern Sie kurz die Auswirkungen der Verschiebung des Kreises in x - bzw. y - Richtung auf die abgebildete Kontur in der ζ -Ebene. Geben Sie zusätzlich die komplexe z -Koordinate der Hinterkante für den Fall des aus dem Ursprung verschobenen Kreises an.
3. Stellen Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ für den gegebenen Fall auf. Bestimmen Sie zudem die konjugiert komplexe Geschwindigkeit $\overline{w_z}(\varphi, R, z_0)$ auf der Kreiskontur. Nehmen Sie für diesen Aufgabenteil die Zirkulation Γ als gegeben an.
4. Bestimmen Sie die Zirkulation Γ so, dass die Kutta'sche Abflussbedingung erfüllt ist. Zeichnen Sie für diesen Fall qualitativ die Umströmung des Kreiszyinders in der z -Ebene und die des zugehörigen Profils in der ζ -Ebene.
5. Bestimmen Sie die komplexe Kraft auf das Profil in der z -Ebene. Hinweis: Verwenden Sie nur die für das Residuentheorem bzw. die Kraftberechnung notwendigen Terme und benutzen Sie folgende Vereinfachungen:

$$\frac{1}{z - z_0} \approx \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{(z - z_0)^2} \approx \frac{1}{z^2} + \frac{2z_0}{z^3}.$$

Gegeben: $R, \alpha, u_\infty, \rho_\infty, x_0 < 0, y_0 > 0$

Hinweise:

Potentialströmungen:

Translationsströmung: $F(z') = u_\infty z'$

Dipol: $F(z') = \frac{M}{2\pi z'}$ mit $M = 2\pi u_\infty R^2$

Potentialwirbel: $F(z') = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$

1. Blasius-Formel:

$$F_z = \frac{i\rho_\infty}{2} \oint \overline{w(z)}^2 dz$$

Residuentheorem:

$$\oint f(z) dz = i2\pi B_1 \quad \text{für}$$

$$f(z) = B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \dots + \frac{B_n}{z^n} + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n$$

3. Aufgabe: Tropfen-Theorie (17 Punkte)

Gegeben ist die parametrisierte Darstellung für einen Profiltropfen $Z^{(t)}(X)$ mit

$$Z^{(t)}(X) = B\sqrt{X - X^2}(1 - X), \quad X = \frac{x}{l}, \quad Z^{(t)} = \frac{z^{(t)}}{l}, \quad X \in [0, 1], \quad B > 0$$

Der Profiltropfen wird ohne Anstellwinkel mit u_∞ angeströmt.

1. Bestimmen Sie zunächst alle Koeffizienten des Reihenansatzes nach Riegels:

$$Z^{(t)}(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\varphi)$$

2. Bestimmen Sie die dimensionslose axiale Störgeschwindigkeit $u_a(\varphi)$ in Abhängigkeit des Parameters B .
3. Bestimmen Sie den Wert des Parameters B , so dass die maximale positive axiale Störgeschwindigkeit $u_a = 0.1$ beträgt. Bestimmen Sie hierfür zunächst die Position der maximalen axialen Störgeschwindigkeit.
4. Erläutern Sie kurz die Bedeutung des Riegels-Faktors.
5. Bestimmen Sie mithilfe des Riegels-Faktors κ die Konturgeschwindigkeit V_k als Funktion von φ .
6. Bestimmen Sie den Druckbeiwert c_p auf der Kontur als Funktion von φ .

Hinweise:

- Transformation:

$$X = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$$

- Quellstärke als Funktion der Profilsteigung:

$$q(X) = 2u_\infty \frac{dZ^{(t)}}{dX}$$

- Definition des Riegels-Faktors:

$$\kappa = \sqrt{1 + \left(\frac{dZ^{(t)}}{dX} \right)^2}$$

- Entdimensionierte axiale Störgeschwindigkeit an der Profiloberfläche:

$$u_a(X) = \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

1. Eine stationäre zweidimensionale drehungs- und reibungsfreie Anströmung kann z.B. durch einen gekrümmten Verdichtungsstoß lokal in Rotation ($rot(\vec{V}) \neq \vec{0}$) versetzt werden.

Nach einem gekrümmten Verdichtungsstoß besitzt das Feld einen Entropiegradienten normal zu den Stromlinien, da der Stoßwinkel entlang des Stoßes variiert.

Aus dem Crocco'schen Wirbelsatz folgt, dass das Strömungsfeld stromab des Verdichtungsstoßes drehungsbehaftet ist ($rot(\vec{V}) \neq \vec{0}$).

2. Herleitung:

mit $||\vec{a}|| = \text{konst.} = R$ folgt:

$$d\vec{u}_i = -\frac{\Gamma}{4\pi R^3} \cdot \vec{a} \times d\vec{s}.$$

Für den Betrag kann das Kreuzprodukt umgeschrieben werden mit $||\vec{a} \times d\vec{s}|| = R||d\vec{s}|| \cdot \sin(\alpha)$ wobei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist. Somit ergibt sich durch die Integration entlang des Kreises

$$||\vec{u}_i|| = \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \oint ||d\vec{s}||.$$

Mit der Transformation nach φ durch $||d\vec{s}|| = d\varphi R$ folgt

$$||\vec{u}_i|| = \frac{\Gamma}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

Das Integral ergibt

$$||\vec{u}_i|| = \frac{\Gamma}{2R}.$$

Alternativ kann das Linienintegral über den Kreis verwendet werden, aus dem sich direkt der Kreisumfang

$$\oint ||d\vec{s}|| = 2\pi R$$

ergibt.

3. (a)

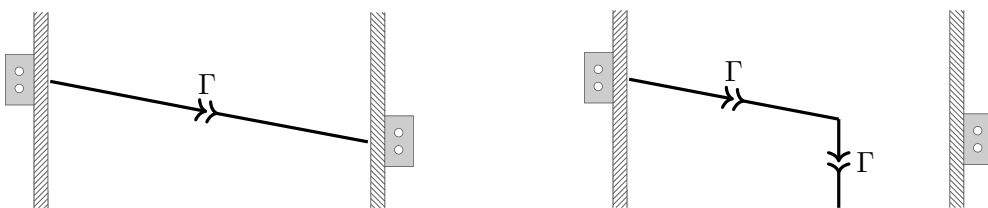


Abbildung 4: Wirbellinien des beidseitig und einseitig eingespannten Flügels.

- (b) Nach dem 3. Helmholtz'schen Wirbelsatz muss eine Wirbellinie geschlossen sein oder auf einer festen Wand enden. Daraus ergibt sich für den einseitig eingespannten Flügel die Entstehung des Flügelspitzenwirbels.
- (a) Die Nomenklatur der vierstelligen NACA-Reihe gibt Auskunft über
 - i. 1. Ziffer: maximale Profilwölbung in $f_{max}/l \cdot 100$
 - ii. 2. Ziffer: Wölbungsrücklage in $(x/l) \cdot 10$
 - iii. 3. & 4. Ziffer: maximale Profildicke in $d/l \cdot 100$

Die maximale Dickenrücklage liegt bei der vierstelligen NACA-Reihe stets bei 30%. Für das gegebene NACA 2406 ergibt sich entsprechend eine maximale Wölbung von 2%, eine Wölbungsrücklage von 40% und eine maximale Profildicke von 6%.

- (b) Da bei Polare I der Auftrieb null beträgt bei einem Anstellwinkel von null Grad, handelt es sich um ein symmetrisches Profil und somit um das NACA 0015. Das andere Profil erzeugt bei einem Anstellwinkel von null Grad bereits Auftrieb und muss daher gewölbt sein. Es handelt sich folglich um das NACA 2406.
 - (c) Zur Verwendung als Seitenleitwerk ist lediglich das symmetrische NACA 0015 geeignet. Das gewölbte NACA 2406 würde im schiebewinkelfreien Geradeausflug bereits eine Seitenkraft erzeugen, die das Flugzeug von seiner Bahn abbringt.
5. (a) Die Voraussetzungen zur Anwendung der Skelett-Theorie sind:
- Potentialströmung (drehungsfrei)
 - inkompressible Strömung
 - reibungsfreie Strömung
 - schlanke Profile (dünne Profile mit geringer Wölbung)
 - kleine Anstellwinkel
- (b) Die kinematische Randbedingung der Skelett-Theorie besagt, dass die Skelettlinie zur Stromlinie wird: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

Lösung 2. Aufgabe: Konforme Abbildung (18 Punkte)

1. Mit der Zhukovski-Abbildungsfunktion $\zeta = z + \frac{a^2}{z}$ erhält man unter Verwendung der Exponentialdarstellung $z = x + iy = r \cdot e^{i\phi} = r(\cos \phi + i \sin \phi)$

$$\zeta = r(\cos \phi + i \sin \phi) + \frac{a^2}{r(\cos \phi + i \sin \phi)} \quad . \quad (1)$$

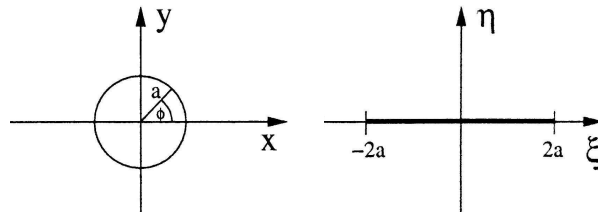
Nach Erweiterung des 2. Terms mit der konjugiert-Komplexen folgt

$$\zeta = r(\cos \phi + i \sin \phi) + \frac{a^2}{r}(\cos \phi - i \sin \phi) \quad . \quad (2)$$

Die Zerlegung in Real- und Imaginäranteil ergibt

$$\operatorname{Re}(\zeta) = \xi = \left(r + \frac{a^2}{r}\right) \cos \phi \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(\zeta) = \eta = \left(r - \frac{a^2}{r}\right) \sin \phi. \quad (3)$$

Für einen unverschobenen Kreis mit dem Radius $r = a$ folgt daraus $\xi = 2a \cos \phi$ und $\eta = 0$ mit $\phi \in [0, 2\pi]$



2. Durch eine Verschiebung des Kreises entlang der x-Achse wird die Dickenverteilung variiert. Eine Verschiebung entlang der y-Achse verändert die Wölbung des Profils. Für die hier vorhandene Verschiebung ergibt sich folglich ein gewölbter Profiltropfen in der ζ -Ebene.

Die Profilkordinaten der HK des verschobenen Kreiszyinders sind

$$z = a = \sqrt{R^2 - y_0^2} + x_0$$

mit dem rechtwinkligen Dreieck $R^2 = y_0^2 + (a - x_0)^2$

3. Die komplexe Potentialfunktion $F(z')$ als Kombination von Anströmung, Dipol und Wirbel ergibt

$$F(z') = u_\infty z' + \frac{u_\infty R^2}{z'} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$$

Transformation in z :

um z_0 verschoben und um α gedreht da der Dipol senkrecht zur Anströmung steht.

$$z = Re^{i\varphi} + z_0 = Re^{i(\varphi' + \alpha)} + z_0 = Re^{i\varphi'} e^{i\alpha} + z_0 = z' e^{i\alpha} + z_0$$

$$z' = (z - z_0) e^{-i\alpha}$$

Potentialfunktion $F(z)$:

$$F(z) = u_\infty e^{-i\alpha} (z - z_0 - iy_0) + \frac{u_\infty e^{i\alpha} R^2}{z - z_0 - iy_0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0 - iy_0) + \left(\frac{\Gamma\alpha}{2\pi}\right)$$

konjugiert komplexe Geschwindigkeitsfunktion $\bar{w}_z(z)$:

$$\bar{w}_z(z) = \frac{dF(z)}{dz} = u_\infty e^{-i\alpha} - \frac{u_\infty e^{i\alpha} R^2}{(z - z_0 - iy_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z - z_0 - iy_0)}$$

auf der Kreiskontur mit $z = Re^{i\varphi} + x_0 + iy_0$

$$\overline{w_z(\varphi, R)} = u_\infty e^{-i\alpha} - \frac{u_\infty e^{i\alpha} R^2}{R^2 e^{2i\varphi}} + \frac{i\Gamma}{2\pi R e^{i\varphi}} = u_\infty (e^{-i\alpha} - e^{i(\alpha-2\varphi)}) + \frac{i\Gamma}{2\pi R e^{i\varphi}}$$

4. Die Kutta-Bedingung besagt, dass es an einer unendlich dünnen Hinterkante nicht zur Umströmung kommt und das Fluid glatt abfließt. In der ζ -Ebene muss somit die Geschwindigkeit an der Hinterkante $\overline{w}_\zeta(z = a)$ endlich sein. Betrachtet man den Kreiszylinder in der z -Ebene, so befindet sich an der Stelle $z = a$ ein Staupunkt, womit die Bedingung $\overline{w}_z(z = a) = 0$ erfüllt sein muss.

Mit $\varphi = -\beta = \arcsin(-\frac{y_0}{R}) = -\arccos(\frac{a}{R})$ an der Hinterkante folgt:

$$\overline{w}_z(a) = u_\infty e^{-i\alpha} - u_\infty e^{i(\alpha+2\beta)} + \frac{i\Gamma}{2\pi R e^{-i\beta}} \stackrel{!}{=} 0$$

Dies lässt sich umformen zu

$$i\Gamma = -2\pi R e^{-i\beta} u_\infty e^{-i\alpha} + 2\pi R u_\infty e^{i\alpha} e^{i\beta}$$

$$i\Gamma = 2\pi R u_\infty \left(-e^{-i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha+\beta)} \right)$$

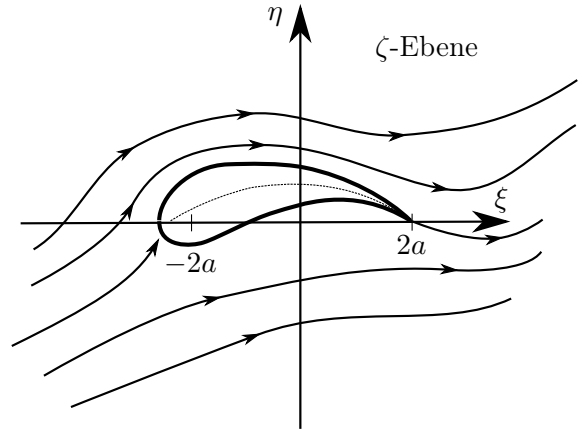
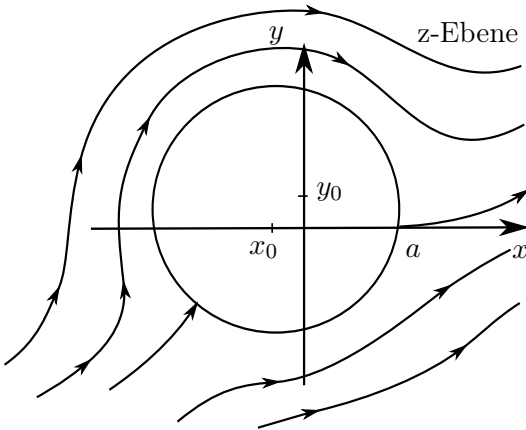
$$i\Gamma = 2\pi R u_\infty (-\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

$$\Gamma = 4\pi R u_\infty \sin(\alpha + \beta)$$

Nach Einsetzen von β ergibt sich für die Zirkulation Γ

$$\Gamma = 4\pi R u_\infty \left(\sin(\alpha) \frac{\sqrt{R^2 - y_0^2} + x_0}{R} + \cos(\alpha) \frac{y_0}{R} \right) .$$

Skizze der Strömungsfelder:



5. Bestimmung von F_z anhand von $\overline{w_z(z)}$:

$$\overline{w_z(z)} = u_\infty e^{-i\alpha} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z - x_0 - iy_0)} - \frac{u_\infty e^{i\alpha} R^2}{(z - x_0 - iy_0)^2}$$

Darstellung von $\overline{w_z(z)}$ als Quotientenreihe analog zu der Reihe aus dem gegebenen Residuentheorem :

$$\overline{w_z(z)} = A_0 + \frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2} \quad \text{mit}$$

$$A_0 = u_\infty e^{-i\alpha}, \quad A_1 = \frac{i\Gamma}{2\pi}, \quad A_2 = -u_\infty e^{i\alpha} R^2$$

$\left(\overline{w_z(z)}\right)^2$ kann somit als:

$$\left(\overline{w_z(z)}\right)^2 = \left(A_0 + \frac{A_1}{z - z_0} + \frac{A_2}{(z - z_0)^2}\right)^2$$

formuliert werden.

Mit Verwendung der Hinweise: $\frac{1}{z - z_0} \approx \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2}$ und $\frac{1}{(z - z_0)^2} \approx \frac{1}{z^2} + \frac{2z_0}{z^3}$ kann dies umgeformt werden zu:

$$\left(\overline{w_z(z)}\right)^2 = \left(A_0 + A_1 \left(\frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2}\right) + A_2 \left(\frac{1}{z^2} + \frac{2z_0}{z^3}\right)\right)^2.$$

$$\left(\overline{w_z(z)}\right)^2 = A_0^2 + 2A_0A_1\frac{1}{z} + \frac{A_1^2 + 2A_0A_1z_0 + 2A_2A_0}{z^2} + \dots$$

Nach dem Residuentheorem ist lediglich der Term mit $\frac{1}{z}$ von Relevanz für die Integration, sodass lediglich ein Term nach Bildung des Quadrates berücksichtigt werden muss. Es gilt:

$$B_1 = 2A_0A_1$$

sodass für die Kraft in der z -Ebene gilt:

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{i\rho_\infty}{2} (2\pi i 2A_0A_1) \\ &= -\rho_\infty \pi (u_\infty e^{-i\alpha}) \left(\frac{i\Gamma}{\pi}\right) \\ &= -i\rho_\infty u_\infty e^{-i\alpha} \Gamma \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von Γ ergibt sich:

$$F_z = -i4\pi R \rho_\infty u_\infty^2 e^{-i\alpha} \left(\sin(\alpha) \frac{\sqrt{R^2 - y_0^2} + x_0}{R} + \cos(\alpha) \frac{y_0}{R} \right).$$

Lösung 3. Aufgabe: Tropfen-Theorie (17 Punkte)

1. Bestimmung der Fourier-Reihe nach Riegels unter Nutzung der Transformation $X = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$ mit $\varphi \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} Z^{(t)}(\varphi) &= B \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) - \frac{1}{4}(1 + 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi)} \left(1 - \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)\right) \\ &= \frac{B}{4} \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} (1 - \cos \varphi) \\ &= \frac{B}{4} \sin \varphi (1 - \cos \varphi) \\ &= \frac{B}{4} \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \end{aligned}$$

Die Koeffizienten des Reihenansatzes nach Riegels betragen somit:

$$b_1 = \frac{B}{2}; \quad b_2 = -\frac{B}{4}; \quad b_n = 0 \quad \forall \quad n \geq 3$$

2. Bestimmung der axialen Störgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} u_a(X) &= \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'} \\ \Rightarrow u_a(\varphi) &= \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_\pi^0 q(\varphi') \frac{\frac{dX'}{d\varphi'} d\varphi'}{\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) - \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi')} \\ &= \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_\pi^0 2u_\infty \frac{dZ}{dX'} \frac{\frac{dX'}{d\varphi'} d\varphi'}{\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) - \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi')} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_\pi^0 \frac{dZ}{d\varphi'} \frac{d\varphi'}{dX'} \frac{\frac{dX'}{d\varphi'} d\varphi'}{\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) - \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi')} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_\pi^0 \frac{dZ}{d\varphi'} \frac{d\varphi'}{\frac{1}{2}(1 + \cos \varphi) - \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi')} \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{d\varphi'} \frac{d\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} \end{aligned}$$

Ableiten des Reihenansatzes nach Riegels liefert:

$$\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N n b_n \cos n\varphi$$

Einsetzen in den Ansatz für die axiale Störgeschwindigkeit:

$$\begin{aligned} u_a(\varphi) &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N n b_n \cos n\varphi d\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sum_{n=1}^N n b_n \cos n\varphi d\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N n b_n \left[-\pi \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} \right] \\ &= \sum_{n=1}^N n b_n \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} \end{aligned}$$

Einsetzen der Fourier-Koeffizienten liefert:

$$\begin{aligned}
 u_a(\varphi) &= b_1 + 2b_2 \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi} \\
 &= \frac{B}{2} - \frac{B \sin 2\varphi}{2 \sin \varphi} \\
 &= \frac{B}{2} - \frac{B 2 \sin \varphi \cos \varphi}{2 \sin \varphi} \\
 &= \frac{B}{2} (1 - 2 \cos \varphi)
 \end{aligned}$$

3. Bestimmung des Parameters B , so dass die maximale Störgeschwindigkeit $u_a = 0.1$ beträgt:

$$u_a(\varphi) = \frac{B}{2} (1 - 2 \cos \varphi)$$

Das Maximum der rechten Seite liegt im Definitionsbereich $\varphi \in [0, \pi]$ für $B > 0$ bei $\cos \varphi = -1$. Damit dieses wie gefordert 0.1 entspricht, muss gelten:

$$\begin{aligned}
 0.1 &= \frac{B}{2} (1 + 2) \\
 \Rightarrow B &= \frac{1}{15}
 \end{aligned}$$

4. Der Riegelsfaktor limitiert die resultierende Konturgeschwindigkeit. Für gut gerundete Vorderkanten geht $\frac{dZ}{dX} \rightarrow \infty$. Dies führt lokal zu sehr hohen Störgeschwindigkeiten, wodurch die Tropfentheorie in diesen Bereichen keine Gültigkeit mehr besitzt und fehlerhafte Ergebnisse liefert. Der Riegels-Faktor dient an dieser Stelle als Korrekturfaktor.
5. Bestimmung der Konturgeschwindigkeit mittels des Riegels-Faktors:

$$V_k(\varphi) = \frac{1}{\kappa(\varphi)} (u_a u_\infty + u_\infty) = \frac{u_\infty}{\kappa(\varphi)} (1 + u_a(\varphi))$$

Bestimmung des Riegels-Faktors:

$$\begin{aligned}
 \kappa(\varphi) &= \sqrt{1 + \left(\frac{dZ}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dX} \right)^2} \\
 \kappa(\varphi) &= \sqrt{1 + \left(\frac{B}{4} (\cos \varphi - \cos 2\varphi) \right)^2 \left(\frac{-2}{\sin \varphi} \right)^2}
 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen folgt:

$$\begin{aligned}
 V_k(\varphi) &= \frac{u_\infty \left(1 + \frac{B}{2} (1 - 2 \cos \varphi) \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{4} (\cos \varphi - \cos 2\varphi) \right)^2 \left(\frac{-2}{\sin \varphi} \right)^2}} \\
 &= \frac{u_\infty \left(1 + \frac{1}{20} (1 - 2 \cos \varphi) \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{60} (\cos \varphi - \cos 2\varphi) \right)^2 \left(\frac{-2}{\sin \varphi} \right)^2}} \\
 &= \frac{u_\infty \left(\frac{21}{20} - \frac{1}{10} \cos \varphi \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{60} (\cos \varphi - \cos 2\varphi) \right)^2 \left(\frac{-2}{\sin \varphi} \right)^2}}
 \end{aligned}$$

6. Bestimmung des Druckbeiwertes auf der Kontur:

$$\begin{aligned}
 p_{\infty} + \frac{1}{2}\rho u_{\infty}^2 &= p_k + \frac{1}{2}\rho V_k^2 \\
 \Rightarrow c_{p,k} &= \frac{p_k - p_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho u_{\infty}^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\rho u_{\infty}^2 - \frac{1}{2}\rho V_k^2}{\frac{1}{2}\rho u_{\infty}^2} \\
 &= 1 - \frac{V_k^2}{u_{\infty}^2}
 \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt:

$$c_{p,k} = 1 - \left[\frac{\left(\frac{21}{20} - \frac{1}{10} \cos \varphi\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{60}(\cos \varphi - \cos 2\varphi)\right)^2 \left(\frac{-2}{\sin \varphi}\right)^2}} \right]^2$$