

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

11. 02. 2025

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Skelett-Theorie, Traglinientheorie und numerische Verfahren

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

1. Der in Abbildung 1.1 dargestellte Zylinder wird mit einer Machzahl von $M_\infty = 2.6$ umströmt.
 - (a) Skizzieren Sie das Stoßsystem sowie die Verläufe der Stromlinien, welche die Punkte A und B durchlaufen.
 - (b) Stellen Sie die Zustandsänderungen über den Verdichtungsstoß entlang der beiden durch die Punkte A und B verlaufenden Stromlinien qualitativ in der Hodographenebene dar. Gehen Sie für beide Stromlinien davon aus, dass hinter dem Stoß die starke Lösung vorliegt.
 - (c) Bestimmen Sie den Druck im Staupunkt P auf der Oberfläche des Zylinders in Abhängigkeit von p_∞ . Nutzen Sie dazu die Diagramme in den Abbildungen 1.2 - 1.4 auf der folgenden Seite.
 - (d) Können Sie den Druck im Staupunkt P auch mittels der linearisierten Potentialtheorie bestimmen? Begründen Sie Ihre Antwort.

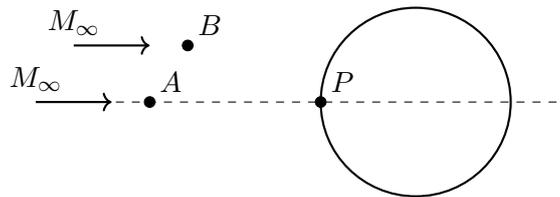


Abbildung 1.1: Zylinder in Überschallströmung bei $M_\infty = 2.6$.

2. Während des Vorentwurfs eines im Transschall operierenden Passagierflugzeuges untersuchen Sie den Einfluss des Pfeilungswinkels auf die Flügelaerodynamik.
 - (a) Erläutern Sie kurz den Begriff des kritischen Druckbeiwertes.
 - (b) Skizzieren Sie den Verlauf des Druckbeiwertes in der Saugspitze $c_{p, \min}$ und des kritischen Druckbeiwertes c_p^* für einen ungepfeilten und einen gepfeilten Flügel als Funktion der Freistrom-Machzahl M_∞ . Markieren Sie die kritische Machzahl $M_{\infty, \text{krit}}$ für beide Fälle.
3. Mittels drucksensitiver Farbe haben Sie experimentell den qualitativen Druckverlauf auf einer Profiloberfläche bestimmt. Sie vermuten eine Strömungsablösung auf der Profiloberseite und wollen diese im Detail untersuchen. Zunächst stellen Sie fest, dass sich der Druckbeiwert durch die Funktion

$$c_p(X) = -30 \left(\frac{1}{3} X^3 - \frac{3}{4} X^2 + \frac{1}{2} X \right) + 1 \quad \text{für } 0 \leq X \leq 1$$

beschreiben lässt.

- (a) Wie lautet die notwendige Bedingung, die der Druckverlauf erfüllen muss, damit eine Ablösung auftreten kann.
- (b) Bestimmen Sie für das von Ihnen vermessene Profil den Bereich, in dem eine Ablösung der Strömung möglich ist.

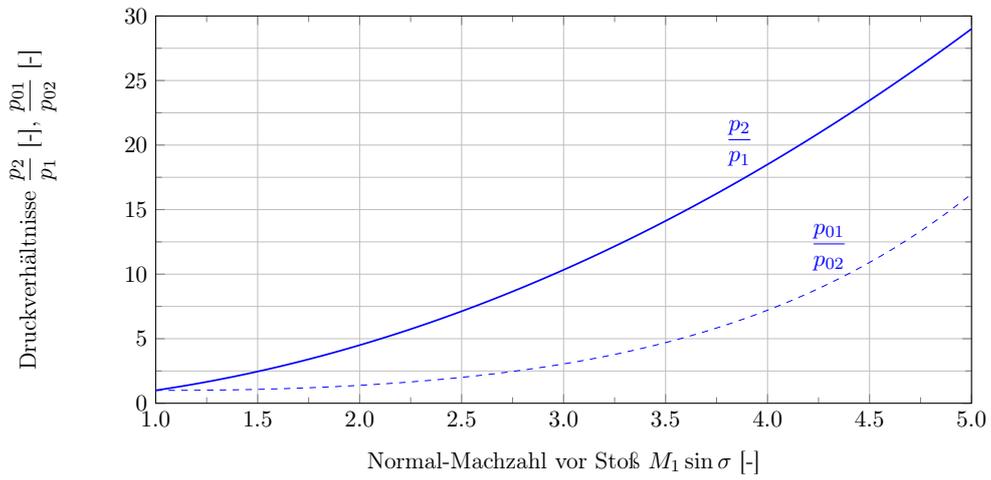


Abbildung 1.2: Statisches und Ruhedruckverhältnis über schrägen Verdichtungsstoß.

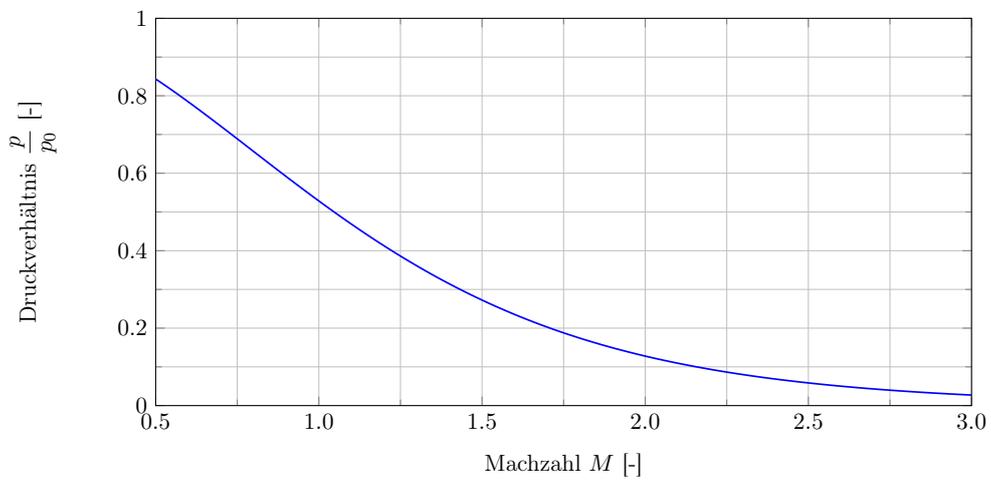


Abbildung 1.3: Isentropenbeziehung für Druck.

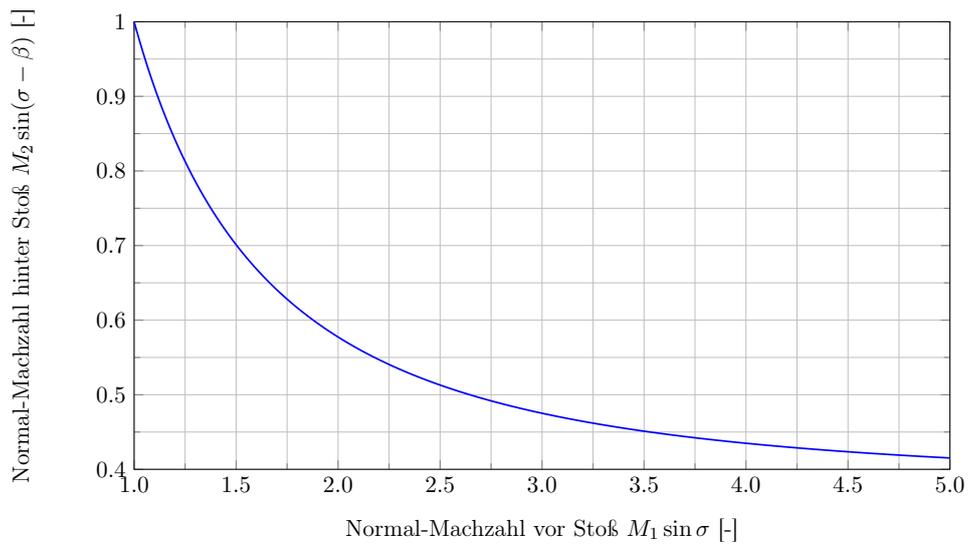


Abbildung 1.4: Verhältnis der Normal-Machzahlen über schrägen Verdichtungsstoß.

2. Aufgabe: Skelett-Theorie (17 Punkte)

Im Folgenden soll mithilfe der Skelett-Theorie ein Profil untersucht werden, das sich aufgrund von aerodynamischen Kräften elastisch verformt. Die Skelettlinie des Profils sei infolge der Aeroelastizität eine Funktion des Anstellwinkels α und durch den Ausdruck

$$Z^{(s)} = C_1 X (X - 1)(X - C_2 \alpha)$$

gegeben, wobei C_1 und C_2 bekannte Konstanten sind. Es werden ausschließlich stationäre Zustände betrachtet.

1. Bestimmen Sie die Koeffizienten des Ansatzes nach Birnbaum-Ackermann für das gegebene Profil.
2. Leiten Sie den Ausdruck

$$\Delta c_p \approx 2 \frac{\gamma}{u_\infty}$$

für die Differenz der Druckbeiwerte auf der Unter- und der Oberseite der Wirbelschicht unter den Annahmen der Skelett-Theorie her, wobei γ die Zirkulationsverteilung entlang der Wirbelschicht und u_∞ die Anströmgeschwindigkeit darstellt. Begründen Sie jegliche Näherungen, die Sie im Verlauf der Herleitung verwenden. Zeichnen Sie anschließend qualitativ den Verlauf des Differenzdruckbeiwertes Δc_p als Funktion des Winkels φ entlang des Profils für einen Anstellwinkel von $\alpha > 0^\circ$.

3. Leiten Sie ausgehend von dem oben gegebenen Ausdruck für Δc_p die Formeln

$$C_l = \pi(2A_0 + A_1)$$
$$C_{m, VK} = -\frac{\pi}{4}(2A_0 + 2A_1 + A_2)$$

für den Auftriebsbeiwert und den Nickmomentenbeiwert um die Vorderkante des Profils her.

4. Geben Sie die Definition des Neutralpunktes an und berechnen Sie dessen Lage für das gegebene Profil. Vergleichen Sie die Lage mit jener für starre Profile in der Skelett-Theorie.

Gegeben: C_1, C_2

Hinweise:

- Ansatz nach Birnbaum-Ackermann:

$$\gamma(\varphi) = 2u_\infty \left[A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \right]$$

- Transformation:

$$X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$$

- Fundamentalgleichung der Skelett-Theorie:

$$\alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} = \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi)$$

- Axiale Störgeschwindigkeit an Wirbelschicht:

$$u = \pm \frac{\gamma}{2}$$

3. Aufgabe: Traglinientheorie und Numerische Methoden (18 Punkte)

Im Folgenden soll eine geeignete Tragflügelgeometrie für ein Löschflugzeug bestimmt werden, welches für den Flug bei geringen Machzahlen ausgelegt ist. Aus Kostengründen werden ausschließlich unverwundene trapezförmige Flügel betrachtet und wegen der geringen Flugmachzahlen wird auf Pfeilung gänzlich verzichtet. Es soll das optimale Zuspitzungsverhältnis λ bestimmt werden, mit dem ein minimaler induzierter Widerstand erreicht wird.

1. Nennen Sie die Bedingungen, welche die Geometrie des Flügels für die Gültigkeit der klassischen Prandtl'schen Traglinientheorie erfüllen muss.
2. Leiten Sie die Fundamentalgleichung der Prandtl'schen Traglinientheorie

$$\alpha(\theta) = \frac{2b}{\pi c(\theta)} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) + \alpha_{L=0}(\theta) + \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

anhand einer Zeichnung her unter Berücksichtigung der gegebenen Hinweise.

3. Beschreiben Sie, wie die Koeffizienten A_1 bis A_N aus der Fundamentalgleichung numerisch bestimmt werden können. Geben Sie den dazugehörigen Ansatz explizit als Formel an.
4. Unter den gleichen Voraussetzungen wie die Prandtl'sche Integralbeziehung kann die Formel

$$C_{D,i} = \frac{C_L^2}{\pi \Lambda} \left(1 + \sum_{n=2}^N n \left(\frac{A_n}{A_1} \right)^2 \right) \equiv \frac{C_L^2}{\pi \Lambda} (1 + \delta)$$

hergeleitet werden, welche die Koeffizienten A_1 bis A_N mit dem induzierten Widerstandsbeiwert $C_{D,i}$ des Flügels in Beziehung setzt. Erläutern Sie kurz, wie das Zuspitzungsverhältnis λ in diese Gleichung einfließt.

5. Bei der Auslegungshöhe h_a und -geschwindigkeit u_a seien die Triebwerke des Flugzeugs dafür ausgelegt, einen kontinuierlichen Schub von F_a zu erzeugen. Alle Widerstandskomponenten außer dem induzierten Widerstand seien im Auslegungszustand durch den konstanten Beiwert $C_{D,r}$ gegeben. Bestimmen Sie die relative Zunahme der Masse des Löschflugzeugs, welche durch eine Verringerung des Faktors δ von δ_1 auf δ_2 bei gleichbleibender Flügelfläche und Spannweite für den stationären Geradeausflug im Auslegungszustand ermöglicht wird.
6. Können mithilfe der Ergebnisse für den betrachteten Flügel unter Heranziehen der Ähnlichkeitsregel nach Göthert Rückschlüsse auf die Beiwerte desselben Flügels bei Machzahlen $M > 0$ gezogen werden? Begründen Sie Ihre Antwort!

Um den Flügel höheren Machzahlen zugänglich zu machen, soll er zusätzlich gepfeilt und die zugehörigen Beiwerte numerisch bestimmt werden. Dabei stehen sowohl ein auf der Tragflächentheorie basierender Löser als auch ein Navier-Stokes-Löser zur Verfügung.

7. Erläutern Sie die Unterschiede zwischen den beiden numerischen Verfahren im Hinblick auf die folgenden Aspekte:
 - In Lösung enthaltene Widerstandskomponenten,
 - Diskretisierung des geometrischen Raumes,
 - Rechenaufwand,
 - Berechenbare Reynolds- und Machzahlen.

Gegeben: δ_1, δ_2

Hinweise:

- Reihenansatz für Zirkulationsverteilung:

$$\Gamma(\theta) = 2bu_\infty \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta)$$

- Von Wirbelschicht induzierter Abwind nach Biot-Savart:

$$w_i(\theta) = -\frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}$$

- Transformation:

$$y = -\frac{b}{2} \cos(\theta)$$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

1. (a) Kommentar zu Abbildung 1.1: Stromlinie A trifft senkrecht auf den abgelösten Stoß und erfährt keine Ablenkung bis zum Staupunkt P . Stromlinie B hingegen trifft nicht senkrecht auf den abgelösten Stoß und wird durch diesen umgelenkt.

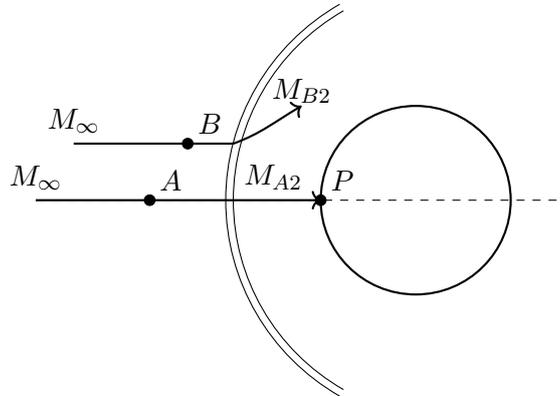


Abbildung 1.1: Zylinder in Überschallströmung bei $M_\infty = 3$.

- (b) Kommentar zu Abbildung 1.2: Da Stromlinie A normal auf den Stoß trifft, erfährt sie keine Umlenkung und der Zustand A_2 liegt auf der Geraden zwischen A_1 und dem Ursprung der Hodographenebene. Dies bedeutet zudem, dass der Zustand auf Stromlinie A hinter dem Stoß im Unterschallbereich liegt.

Stromlinie B erfährt infolge des Stoßes eine Umlenkung, da sie nicht mittig auf diesen trifft. Hinter dem Stoß ist die Strömung entlang der Stromlinie B ebenfalls im Unterschallbereich, da in der Aufgabenstellung angegeben wurde, dass die starke Lösung vorliegt.

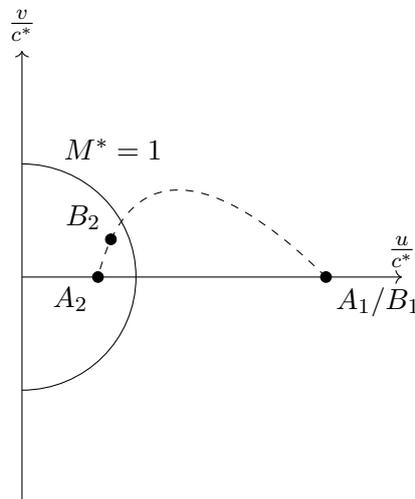


Abbildung 1.2: Zustandsänderungen entlang der Stromlinien A und B in Hodographenebene.

- (c) Gesucht ist das Druckverhältnis $\frac{p_P}{p_\infty}$. Da der Punkt P im Staupunkt liegt, entspricht der Druck dort dem Staudruck hinter dem Stoß auf der Stromlinie A: $p_P = p_{A02}$.

$$\frac{p_P}{p_\infty} = \frac{p_{A02}}{p_\infty} = \frac{p_{A02}}{p_{A2}} \frac{p_{A2}}{p_\infty}$$

Dabei gilt $p_\infty = p_{A_1}$, sodass sich folgende Werte aus den Diagrammen ablesen lassen:

$$\text{Senkrechter Verdichtungsstoß mit } M_\infty = 2.6: \quad \frac{p_{A_2}}{p_{A_1}} = 7.5 \quad M_{A_2} = 0.5$$

$$\text{Verhältnis von Staudruck zu statischem Druck für } M = 0.5: \quad \frac{p_{A_{02}}}{p_{A_2}} = 1.2$$

$$\text{Insgesamt folgt: } \frac{p_P}{p_\infty} = \frac{p_{A_{02}}}{p_{A_2}} \frac{p_{A_2}}{p_\infty} = 1.2 \cdot 7.5 = \frac{6}{5} \cdot \frac{15}{2} = 9$$

(d) Da die linearisierte Potentialtheorie nur von kleinen Störungen ausgeht, ist eine Berechnung des Druckes im Staupunkt P nicht möglich. Eine Reduktion der Machzahl auf $M = 0$ ist nicht als kleine Störung zu werten und durchläuft zudem den transonischen Bereich, in welchem die linearisierte Potentialtheorie nicht gültig ist.

2. (a) Der kritische Druckbeiwert c_p^* ist der Druckbeiwert an der Position, bei der lokal die Schallgeschwindigkeit erreicht wird.
 (b)

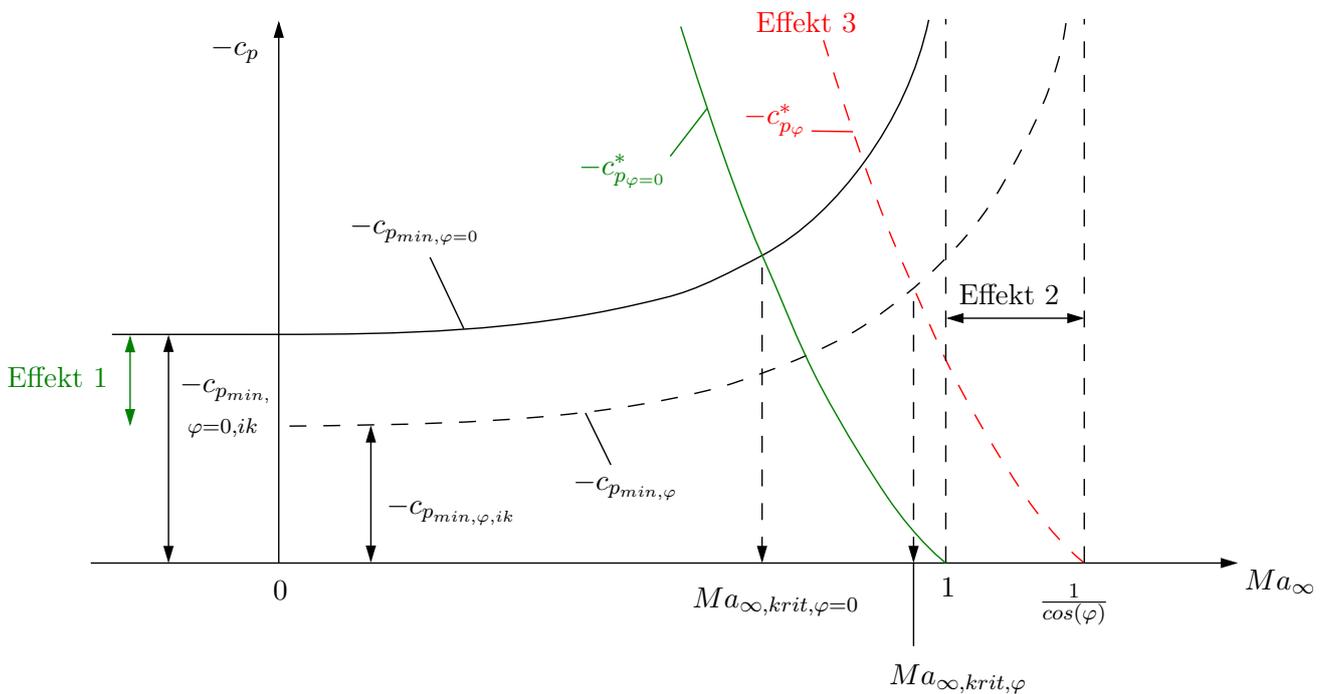


Abbildung 1.3: Einflüsse der Pfeilung auf c_p und c_p^* in Abhängigkeit der Machzahl.

3. (a) Eine Strömungsablösung setzt einen positiven Druckgradienten voraus.
 (b) Zunächst wird die Ableitung bestimmt, um den Verlauf des Druckgradienten beurteilen zu können:

$$\frac{dc_p}{dX} = -30 \left(X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2} \right)$$

Nun werden die Nullstellen bestimmt, um die Bereiche $\frac{dc_p}{dX} > 0$ und $\frac{dc_p}{dX} < 0$ zu identifizieren:

$$0 = X^2 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}$$

$$X_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16}} = -\frac{3}{4} \pm \frac{1}{4}$$

$$X_1 = \frac{1}{2} \quad X_2 = 1$$

Innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Funktion des Druckverlaufes zwischen $X = 0$ und $X = 1$ ändert die Ableitung des Druckverlaufes ihr Vorzeichen. Einsetzen von Zwischenwerten liefert den gesuchten Bereich mit positivem Druckgradienten:

$$\begin{aligned}\frac{dc_p}{dX}\Big|_{X=\frac{1}{4}} &= -\frac{45}{8} \\ \frac{dc_p}{dX}\Big|_{X=\frac{3}{4}} &= \frac{15}{8}\end{aligned}$$

Damit liegt ein positiver Druckgradient und somit die Gefahr einer Ablösung im Bereich $\frac{1}{2} \leq X \leq 1$ vor.

Lösung 2. Aufgabe: Skelett-Theorie (17 Punkte)

1. Die Koeffizienten folgen aus einem Koeffizientenvergleich zwischen der linken und der rechten Seite der als Hinweis gegebenen Fundamentalgleichung der Skelett-Theorie. Hierfür muss zunächst die Funktion $Z^{(s)}$ nach X abgeleitet werden:

$$Z^{(s)} = C_1(X^3 - (C_2 \alpha + 1)X^2 + C_2 \alpha X)$$

$$\frac{dZ^{(s)}}{dX} = C_1(3X^2 - 2(C_2 \alpha + 1)X + C_2 \alpha).$$

Dieser Ausdruck muss mithilfe der gegebenen Transformationsregel transformiert werden:

$$X^2 = \frac{1}{4}(1 + 2 \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{2} + 2 \cos(\varphi) + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \right)$$

$$X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$$

$$\Rightarrow \alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} = \alpha - C_1 \left(\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2} - C_2 \alpha \right) \cos(\varphi) + \frac{3}{8} \cos(2\varphi) \right)$$

$$\stackrel{!}{=} \sum_{n=0}^N A_n \cos(n\varphi)$$

Für die Koeffizienten folgt daraus:

$$A_0 = \alpha - \frac{C_1}{8} \quad A_1 = -C_1 \left(\frac{1}{2} - C_2 \alpha \right) \quad A_2 = -\frac{3}{8} C_1 \quad A_n = 0 \quad (\forall n \geq 3)$$

2. Der Druckbeiwert ist wie folgt definiert:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2}.$$

Da die Skelett-Theorie sich im Rahmen der inkompressiblen Potentialtheorie bewegt, ist der Satz von Bernoulli gültig:

$$p = p_\infty + \frac{\rho}{2} u_\infty^2 - \frac{\rho}{2} V^2,$$

wobei p und V den lokalen Werten des Druckes und der Geschwindigkeit entlang der Wirbelschicht entsprechen. Eingesetzt in die Definition des Druckbeiwertes folgt daraus:

$$c_p = \frac{\frac{\rho}{2} u_\infty^2 + p_\infty - \frac{\rho}{2} V^2 - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \left(\frac{V}{u_\infty} \right)^2.$$

Der lokale Geschwindigkeitsvektor entlang der Wirbelschicht ist gegeben durch

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u_\infty \cos(\alpha) + u \\ u_\infty \sin(\alpha) + w \end{pmatrix}.$$

Für kleine Anstellwinkel kann dieser Ausdruck angenähert werden durch

$$\vec{V} \approx \begin{pmatrix} u_\infty + u \\ u_\infty \alpha + w \end{pmatrix}.$$

Eingesetzt in die Definition des Druckbeiwertes folgt daraus:

$$c_p = 1 - \left(1 + 2 \frac{u}{u_\infty} + \left(\frac{u}{u_\infty} \right)^2 + \alpha^2 + 2\alpha \frac{w}{u_\infty} + \left(\frac{w}{u_\infty} \right)^2 \right)$$

$$= -2 \frac{u}{u_\infty} - \left(\frac{u}{u_\infty} \right)^2 - \alpha^2 - 2\alpha \frac{w}{u_\infty} - \left(\frac{w}{u_\infty} \right)^2$$

Unter den Annahmen der Skelett-Theorie, das heißt für kleine Anstellwinkel und im Vergleich zur Anströmgeschwindigkeit kleinen Störgeschwindigkeiten, sind alle Terme außer der erste von höherer Ordnung klein und es kann deshalb näherungsweise geschrieben werden:

$$c_p \approx -2 \frac{u}{u_\infty}.$$

Der Differenzdruckbeiwert folgt aus der Differenz der Druckbeiwerte an Unter- und Oberseite der Wirbelschicht:

$$\Delta c_p = c_{p,u} - c_{p,o}.$$

Mit der Formel aus dem Hinweis

$$u_u = -\frac{\gamma}{2} \qquad u_o = \frac{\gamma}{2}$$

folgt für die Druckbeiwerte an der Skelettlinie

$$c_{p,u} = \frac{\gamma}{u_\infty}$$

$$c_{p,o} = -\frac{\gamma}{u_\infty}$$

und für den Differenzdruckbeiwert

$$\Delta c_p = 2 \frac{\gamma}{u_\infty}.$$

Kommentar zu Abbildung 2.1: Volle Punktzahl bei Berücksichtigung der Singularität an der Vorderkante bei $\varphi = 180^\circ$ und der Kutta'schen Abflussbedingung an der Hinterkante bei $\varphi = 0^\circ$.

Kommentar zu Abbildung 2.2: Nicht gefordert in Klausur, Abbildung dient nur zu Anschauungszwecken.

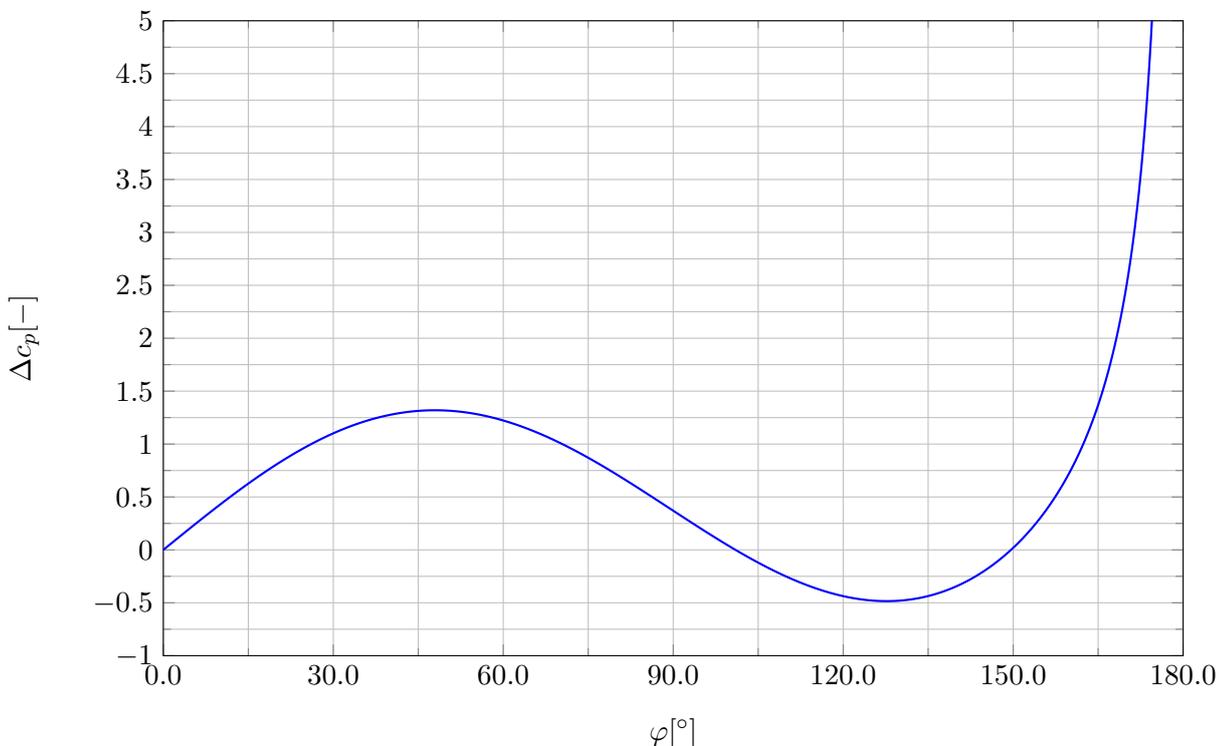


Abbildung 2.1: Beispielhafter Verlauf des Differenzdruckbeiwertes für $\alpha = 0.1$, $C_1 = 0.3$, $C_2 = 9.0$

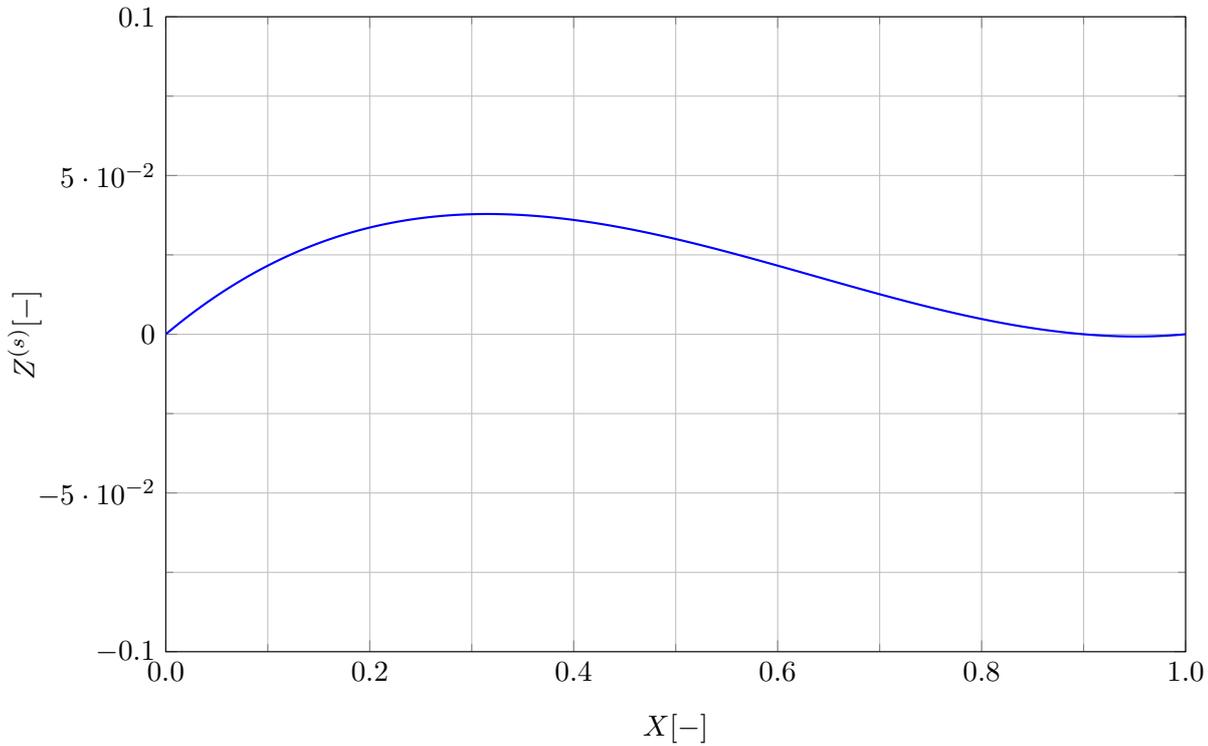


Abbildung 2.2: Beispielhafter Verlauf der Skelettlinie für $\alpha = 0.1$, $C_1 = 0.3$, $C_2 = 9.0$

3. Der Auftriebsbeiwert wird in der Skelett-Theorie angenähert durch:

$$C_l = \int_0^1 \Delta c_p dX.$$

Dieses Integral wird zunächst in den φ -Raum transformiert.

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi)) \\ X = 0 &\implies \varphi = \pi \\ X = 1 &\implies \varphi = 0 \\ dX &= \frac{dX}{d\varphi} d\varphi = -\frac{1}{2} \sin(\varphi) d\varphi \\ \implies C_l &= - \int_{\pi}^0 \frac{\Delta c_p}{2} \sin(\varphi) d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{\Delta c_p}{2} \sin(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der obigen Formel für Δc_p und des Ansatzes nach Birnbaum und Ackermann folgt unter Verwendung der Formel $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\varphi)}{\sin(\varphi)}$ aus der Formelsammlung:

$$\begin{aligned} C_l &= 2A_0 \int_0^{\pi} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) d\varphi + 2 \sum_{n=1}^N A_n \int_0^{\pi} \sin(n\varphi) \sin(\varphi) d\varphi \\ &= 2A_0 \int_0^{\pi} (1 - \cos(\varphi)) d\varphi + 2 \sum_{n=1}^N A_n \int_0^{\pi} \sin(n\varphi) \sin(\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Für das erste Integral gilt

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos(\varphi)) d\varphi = [\varphi - \sin(\varphi)]_0^{\pi} = \pi.$$

Das zweite Integral kann der Formelsammlung entnommen werden:

$$\int_0^\pi \sin(n\varphi) \sin(\varphi) d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } n = 1 \\ 0, & \text{wenn } n > 1 \end{cases}$$

Insgesamt folgt daraus für den Auftriebsbeiwert

$$C_l = \pi(2A_0 + A_1).$$

Der Momentenbeiwert um die Vorderkante ist gegeben durch

$$C_{m, VK} = - \int_0^1 \Delta c_p X dX,$$

wobei per Kovention positive Momente zu einem Aufnicken des Profils führen. Dieses Integral wird analog zu dem Auftriebsbeiwert zunächst in den φ -Raum transformiert.

$$C_{m, VK} = -\frac{1}{4} \int_0^\pi (1 + \cos(\varphi)) \sin(\varphi) \Delta c_p d\varphi.$$

Die beiden Terme im Integranden werden separat integriert. Im zweiten Term wird die Formel $\sin(2\varphi) = 2 \sin(\varphi) \cos(\varphi)$ aus der Formelsammlung verwendet, um den Ausdruck

$$C_{m, VK} = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\Delta c_p}{2} \sin(\varphi) d\varphi - \frac{1}{8} \int_0^\pi \sin(2\varphi) \Delta c_p d\varphi$$

zu erhalten. Aus einem Vergleich mit den obigen Formeln folgt, dass das erste Integral dem Auftriebsbeiwert entspricht. Für das zweite Integral gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin(2\varphi) \Delta c_p d\varphi &= 4 \int_0^\pi \sin(2\varphi) \left[A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \right] d\varphi \\ &= 8A_0 \int_0^\pi (\cos(\varphi) - \cos^2(\varphi)) d\varphi + 4 \sum_{n=1}^N A_n \int_0^\pi \sin(2\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Für das erste dieser Integrale gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi (\cos(\varphi) - \cos^2(\varphi)) d\varphi &= \left[\sin(\varphi) \right]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\varphi) \right) d\varphi \\ &= \left[-\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_0^\pi \\ &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Das zweite Integral folgt direkt aus der Formelsammlung:

$$\int_0^\pi \sin(n\varphi) \sin(2\varphi) d\varphi = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{wenn } n = 2 \\ 0, & \text{wenn } n \neq 2 \end{cases}.$$

Durch Einsetzen der Werte der Integrale in die Formel für $C_{m, VK}$ folgt:

$$\begin{aligned} C_{m, VK} &= -\frac{1}{2} C_l - \frac{1}{8} \left(-8A_0 \frac{\pi}{2} + 4A_2 \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} (2A_0 + A_1) - \frac{\pi}{2} \left(-A_0 + \frac{1}{2} A_2 \right) \\ &= -\frac{\pi}{4} (2A_0 + 2A_1 + A_2) \end{aligned}$$

4. Der Neutralpunkt ist definiert als die Position X_N entlang des Profils, für die gilt:

$$\left. \frac{dC_m}{d\alpha} \right|_{X=X_N} = 0$$

wobei C_m der Momentenbeiwert um einen beliebigen Punkt X ist. Die Formel für C_m kann aus jener für $C_{m,VK}$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned} C_m &= - \int_0^1 (X' - X) \Delta c_p dX' \\ &= X \int_0^1 \Delta c_p dX' - \int_0^1 X' \Delta c_p dX' \\ &= X C_l + C_{m,VK} \\ &= X \pi (2A_0 + A_1) - \frac{\pi}{4} (2A_0 + 2A_1 + A_2). \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck werden die Koeffizienten durch die oben ermittelten Werte ersetzt, so dass

$$C_m = \pi \left[X \left(\alpha(2 + C_1 C_2) - \frac{3}{4} C_1 \right) - \left(\alpha \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} C_1 C_2 \right) - \frac{23}{32} C_1 \right) \right].$$

Die Ableitung des Momentenbeiwertes nach α ist gegeben durch

$$\frac{dC_m}{d\alpha} = \pi \left[X(2 + C_1 C_2) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} C_1 C_2 \right) \right].$$

Aus der Definition des Neutralpunktes folgt dann, dass

$$\begin{aligned} \left. \frac{dC_m}{d\alpha} \right|_{X=X_N} &= 0 \\ \implies X_N &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} C_1 C_2}{2 + C_1 C_2}. \end{aligned}$$

Für starre Flügel sagt die Skelett-Theorie voraus, dass der Neutralpunkt immer bei $X_N = 1/4$ liegt. Wird der Faktor C_2 , welcher die Elastizität des Profils im vorliegenden Fall beschreibt, zu null gesetzt, führt die oben hergeleitete Formel erwartungsgemäß ebenfalls zu diesem Wert.

Lösung 3. Aufgabe: Traglinientheorie und numerische Verfahren (18 Punkte)

- Ungefeilte Flügel, d.h., $l/4$ -Linie senkrecht zu Längsrichtung.
 - Schlanke Profile, für die $\frac{dC_l}{d\alpha} = 2\pi$ gilt.
 - Flügel mit hinreichend großer Streckung, damit Strömung nahezu zweidimensional und somit Satz von Kutta-Zhukovski gültig ist.
 - Flügel ohne V-Stellung.

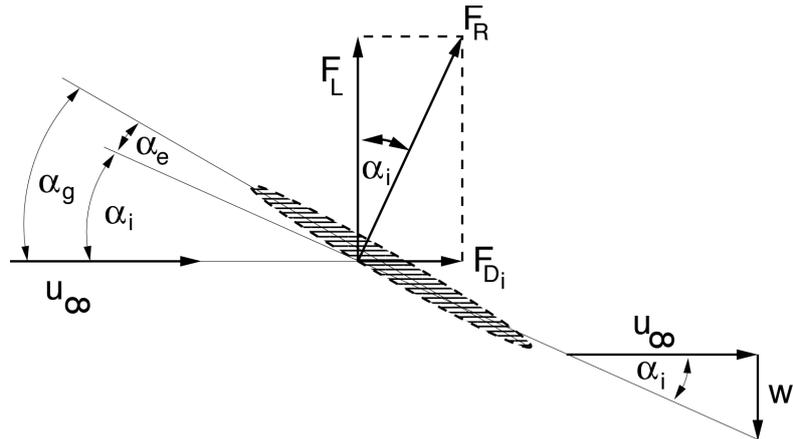


Abbildung 3.1: Geschwindigkeiten und Kräfte an Flügelprofil gemäß Prandtl'scher Traglinientheorie

- Ausgangspunkt für die Herleitung ist die Winkelbeziehung

$$\alpha = \alpha_e + \alpha_i,$$

welche aus Abbildung 3.1 folgt. Der induzierte Anstellwinkel folgt aus dem Geschwindigkeitsdreieck in Abbildung 3.1 unter Verwendung der Kleinwinkelnäherung

$$\alpha_i(y) = -\frac{w_i(y)}{u_\infty} = \frac{1}{4\pi u_\infty} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma}{dy'} \frac{dy'}{y - y'}.$$

Hier ist zu beachten, dass der induzierte Anstellwinkel in Abbildung 3.1 der Übersichtlichkeit halber bewusst größer eingezeichnet wurde, als er es eigentlich ist. Dieses Integral wird zunächst in den θ -Raum transformiert mittels der als Hinweis gegebenen Transformation:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{b}{2} \cos(\theta) \\ y' &= -\frac{b}{2} \cos(\theta') \\ y' = -\frac{b}{2} &\implies \theta' = 0 \\ y' = \frac{b}{2} &\implies \theta' = \pi \\ dy' &= \frac{dy'}{d\theta'} d\theta' = \frac{b}{2} \sin(\theta') d\theta' \\ \frac{d\Gamma}{dy'} &= \frac{d\Gamma}{d\theta'} \frac{d\theta'}{dy'} \end{aligned}$$

und nimmt dann die Form

$$\alpha_i = \frac{1}{4\pi u_\infty} \int_0^\pi \frac{d\Gamma}{d\theta'} \frac{d\theta'}{dy'} \frac{\frac{dy'}{d\theta'} d\theta'}{-\frac{b}{2} \cos(\theta) + \frac{b}{2} \cos(\theta')} = \frac{1}{2\pi u_\infty b} \int_0^\pi \frac{d\Gamma}{d\theta'} \frac{d\theta'}{\cos(\theta') - \cos(\theta)}$$

an. In diesem Ausdruck wird die Zirkulation durch den Reihenansatz

$$\Gamma(\theta') = 2bu_\infty \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta')$$

aus dem Hinweis ersetzt. Die Ableitung dieser Reihe nach θ' ist

$$\frac{d\Gamma}{d\theta'} = 2bu_\infty \sum_{n=1}^N nA_n \cos(n\theta').$$

Es folgt daraus, dass

$$\alpha_i = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N nA_n \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta')}{\cos(\theta') - \cos(\theta)} d\theta'.$$

Dieses Integral kann der Formelsammlung entnommen werden:

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n\theta')}{\cos(\theta') - \cos(\theta)} d\theta' = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Schließlich folgt

$$\alpha_i = \sum_{n=1}^N nA_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}.$$

Der effektive Anstellwinkel α_e steht unter der Annahme schlanker Profile und näherungsweise zweidimensionaler Strömung mit dem Auftriebsbeiwert pro Einheitstiefe $C_l(y)$ und dem lokalen Nullauftriebsanstellwinkel $\alpha_{L=0}(\theta)$ in Beziehung:

$$C_l(y) = 2\pi(\alpha_e(y) - \alpha_{L=0}(y)) \implies \alpha_e(y) = \alpha_{L=0}(y) + \frac{C_l(y)}{2\pi}.$$

Da von näherungsweise zweidimensionaler Strömung ausgegangen wird, gilt für jeden Profilschnitt der Satz von Kutta-Zhukovski:

$$\tilde{L}(y) = \rho u_\infty \Gamma(y) = C_l(y) \frac{\rho}{2} u_\infty^2 c(y) \implies C_l(y) = \frac{2\Gamma(y)}{u_\infty c(y)}.$$

Somit folgt für den effektiven Anstellwinkel:

$$\alpha_e(y) = \alpha_{L=0}(y) + \frac{\Gamma(y)}{\pi u_\infty c(y)}.$$

Durch Einsetzen des gegebenen Reihenansatzes für die Zirkulation folgt dann die Fundamentalgleichung der Traglinientheorie in der Form

$$\alpha(\theta) = \frac{2b}{\pi c(\theta)} \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\theta) + \alpha_{L=0}(\theta) + \sum_{n=1}^N nA_n \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)}$$

3. Die Gleichung aus dem vorigen Aufgabenteil gilt für jede Koordinate $y \in [-b/2; b/2]$ entlang der Spannweite. Da jedoch eine analytische Lösung dieser Gleichung i.A. nicht möglich ist, wird auf ein

Näherungsverfahren zurückgegriffen, bei dem die Fundamentalgleichung der Traglinientheorie lediglich an N diskreten Positionen y_1, y_2, \dots, y_N entlang der Spannweite angesetzt wird. Dies ergibt N Gleichungen für N Unbekannte A_1 bis A_N und führt zu dem folgenden Gleichungssystem

$$M_{nm}A_m = R_n,$$

wobei von der Einstein'schen Summenkonvention Gebrauch gemacht wird und die Komponenten der Vektoren und Matrizen gegeben sind durch

$$R_n = \alpha(\theta_n) - \alpha_{L=0}(\theta_n) \qquad M_{nm} = \left[\frac{2b}{\pi c(\theta_n)} \sin(m\theta_n) + m \frac{\sin(m\theta_n)}{\sin(\theta_n)} \right]$$

mit $m \in \{1, 2, \dots, N\}$ und $n \in \{1, 2, \dots, N\}$. Insofern das so erhaltene Gleichungssystem nicht singulär ist, ist die Lösung für die gewählten Positionen y_n eindeutig. Die Wahl der Positionen y_n ist hingegen beliebig, ebenso wie die gewählte Anzahl N der Koeffizienten A_n . Die Wahl der Positionen und der Anzahl N ist für die Qualität der Lösung von Bedeutung.

4. Das Zuspitzungsverhältnis beeinflusst die Einträge der Matrix aus dem vorigen Aufgabenteil, da M_{nm} von der lokalen Profiltiefe $c(\theta)$ abhängt und diese eben eine Funktion von λ ist. Somit hängt die Lösung des Systems, das heißt die Koeffizienten A_n , ebenfalls von dem Zuspitzungsverhältnis ab. Da die Koeffizienten A_n ihrerseits über δ in der Formel für den induzierten Widerstandsbeiwert vorkommen, wird letzterer also auch vom Zuspitzungsverhältnis beeinflusst.
5. Da sich das Flugzeug in einem Gleichgewichtszustand befindet, muss der Widerstand dem Schub entsprechen. Der Gesamtwiderstandsbeiwert ist dabei gegeben durch

$$C_D = C_{D,r} + C_{D,i}$$

und der Schub ist gleich F_a . Gleichsetzen von Schub und Widerstandskräften führt zu

$$C_D \frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2 S = (C_{D,r} + C_{D,i}) \frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2 S = F_a.$$

Da Flughöhe, -geschwindigkeit und Schub durch den Auslegungszustand festgelegt sind und die Flügelfläche als unveränderlich angenommen wird, bleibt der Gesamtwiderstandsbeiwert ebenfalls konstant. Da die übrigen Widerstandskomponenten $C_{D,r}$ auch als konstant angenommen werden, ist der induzierte Widerstandsbeiwert durch die Änderung des Faktors δ folglich unverändert.

Das Gewicht des Flugzeuges muss darüber hinaus dem Auftrieb entsprechen, das heißt jeweils

$$m_1 g = C_{L,1} \frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2 S \implies C_{L,1} = \frac{2m_1 g}{\rho_\infty u_\infty^2 S}$$

$$m_2 g = C_{L,2} \frac{\rho_\infty}{2} u_\infty^2 S \implies C_{L,2} = \frac{2m_2 g}{\rho_\infty u_\infty^2 S}$$

für zwei Flügel mit unterschiedlichen Werten δ_1 und δ_2 . Der induzierte Widerstandsbeiwert und der Auftriebsbeiwert stehen über die Gleichung

$$C_{D,i} = \frac{C_{L,1}^2}{\pi \Lambda} (1 + \delta_1)$$

$$C_{D,i} = \frac{C_{L,2}^2}{\pi \Lambda} (1 + \delta_2)$$

in Beziehung. Gleichsetzen der beiden rechten Seiten führt zu

$$C_{L,1}^2 (1 + \delta_1) = C_{L,2}^2 (1 + \delta_2),$$

unter Verwendung der Tatsache, dass wenn die Spannweite und die Flügelfläche wie in der Aufgabenstellung angegeben konstant sind, sich die Streckung ebenfalls nicht verändert. Durch Einsetzen der obigen Beziehungen für den Auftriebsbeiwert folgt

$$\frac{2m_1g}{\rho_\infty u_\infty^2 S} \sqrt{1 + \delta_1} = \frac{2m_2g}{\rho_\infty u_\infty^2 S} \sqrt{1 + \delta_2}.$$

Diese Gleichung kann umgestellt werden zu der geforderten relativen Änderung der Gesamtmasse:

$$\frac{m_2}{m_1} = \sqrt{\frac{1 + \delta_1}{1 + \delta_2}} \implies \frac{m_2 - m_1}{m_1} = \frac{\sqrt{1 + \delta_1} - \sqrt{1 + \delta_2}}{\sqrt{1 + \delta_2}}.$$

6. Die für diesen Flügel erhaltenen Ergebnisse können nicht dazu verwendet werden, um mithilfe der Göthert-Regel Aussagen über dengleichen Flügel bei anderen Machzahlen zu treffen. Dies ist dadurch begründet, dass die Göthert-Regel lediglich einen Zusammenhang herstellt zwischen den Ergebnissen eines gegebenen Flügels bei einer bestimmten Machzahl und eines zweiten gestreckten oder gestauchten Flügels bei einer anderen Machzahl.

Dieser Umstand wird beispielhaft anhand des Auftriebsbeiwertes beschrieben. Die Referenzmachzahl ist in diesem Beispiel $M_1 = 0$, da die Prandtl'sche Traglinientheorie auf der inkompressiblen Potentialtheorie aufbaut. Die Streckung des mithilfe der Traglinientheorie untersuchten Flügels betrage Λ_1 und der ermittelte Auftriebsbeiwert betrage $C_{L,1}$ bei einem Anstellwinkel von α_1 . Dann gilt bei einer Machzahl M_2 für einen Flügel mit Streckung $\Lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - M_2^2}} \Lambda_1$, dass der Auftriebsbeiwert $C_{L,2} = \frac{1}{1 - M_2^2} C_{L,1}$ beträgt bei einem Anstellwinkel von $\alpha_2 = \frac{1}{1 - M_2^2} \alpha_1$.

- 7.
- Der Navier-Stokes-Löser erfasst sowohl den induzierten Widerstand, als auch den Reibungswiderstand infolge der Viskosität des Fluids, den Druckwiderstand infolge potentieller Strömungsablösung und den Wellenwiderstand. Der Tragflächen-Löser hingegen erfasst lediglich den induzierten Widerstand, da er von einer reibungsfreien, inkompressiblen Potentialströmung ausgeht.
 - Für den Navier-Stokes-Löser muss der dreidimensionale Raum um den Flügel herum diskretisiert werden. Dies kann z.B. mit strukturierten oder unstrukturierten Gittern erreicht werden. Der Tragflächen-Löser hingegen setzt lediglich eine Diskretisierung der zweidimensionalen Flügelgrundform voraus.
 - Der Rechenaufwand des Navier-Stokes-Lösers fällt i.A. höher aus als jener des Tragflächen-Lösers. Dies liegt u.a. an der höheren Anzahl an Gitterpunkten, welche zu größeren Gleichungssystemen führt.
 - Reynoldszahlen kommen in der Tragflächentheorie nicht vor, da sie von einer reibungsfreien Potentialströmung ausgeht. Darüber hinaus ist die Methode a priori auf eine Machzahl von $M = 0$ beschränkt, da sie neben Reibungsfreiheit auch Inkompressibilität voraussetzt. Es können jedoch Ähnlichkeitsregeln verwendet werden, um den gesamten subsonischen Bereich abzubilden. Der Navier-Stokes-Löser hat im Allgemeinen keine Einschränkungen bezüglich der abbildbaren Mach- und Reynoldszahlen.