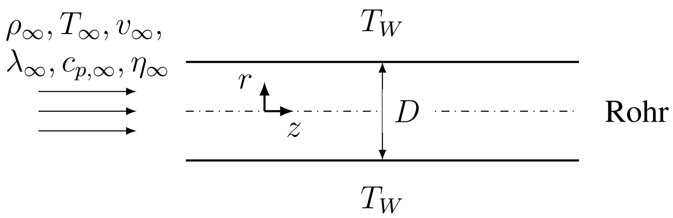
....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik II“

12. 08. 2024

1. Aufgabe (13 Punkte)

Die Strömung eines inkompressiblen Fluids in einem zylindrischen Heizungsrohr mit Durchmesser D sowie konstanter Wandtemperatur T_W wird als stationär, rotationssymmetrisch, laminar und ausgebildet angenommen. Zusätzlich zu dem Strömungsfeld wird das Temperaturfeld betrachtet.



Gegeben sind die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie für rotationssymmetrische, instationäre und inkompressible Strömungen in Zylinderkoordinaten

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} &= 0\\
\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right) + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]\\
\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]\\
\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r\frac{\partial T}{\partial r} + v_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) &= \frac{dp}{dt} + \lambda\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right]\\
&\quad + 2\eta\left\{\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{v_r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)^2\right\} + \eta\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)^2 .
\end{aligned}
$$

a) Vereinfachen Sie das gegebene Gleichungssystem für das oben beschriebene Problem.

b) Bestimmen Sie die Kennzahl(en) des Problems mithilfe der Methode der Differentialgleichungen.

c) Überführen Sie, falls möglich, die Kennzahlen auf in der Strömungsmechanik übliche Ähnlichkeitsparameter.

d) Welche physikalische Bedeutung hat die Prandtl-Zahl?

Gegeben:

D, T_W, ρ_∞, T_∞, v_∞, λ_∞, $c_{p,\infty}$, η_∞

Hinweise:

- Eckert-Zahl: $Ec = \dfrac{v_\infty^2}{c_{p,\infty}\Delta T}$

2. Aufgabe (10 Punkte)

Die Erhaltungsgleichungen für inkompressible Strömungen mit konstanter dynamischer Viskosität η und Dichte ρ sind

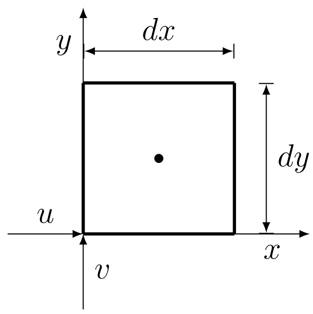
$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$
$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \nabla f \, .$$

a) Formulieren Sie diese Erhaltungsgleichungen in kartesischen Koordinaten für zweidimensionale Strömungen.

b) Leiten Sie ausgehend von diesen Erhaltungsgleichungen die zweidimensionale Wirbeltransportgleichung in kartesischen Koordinaten her

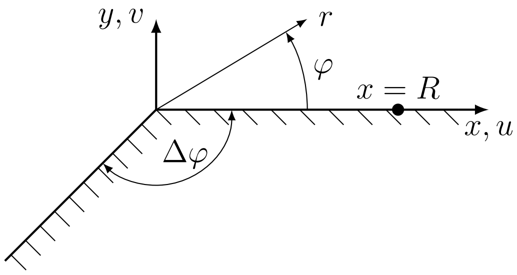
$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right) \, .$$

c) Leiten Sie einen Zusammenhang zwischen der Zirkulation Γ um die Randkurve ∂A und dem Wirbelfluss $\int_A \omega_z dA$ durch diese Fläche her. Betrachten Sie in Ihrer Herleitung das folgende infinitesimale Fluidelement:



3. Aufgabe (10 Punkte)

Die Umströmung einer konvexen Ecke mit Winkel $\Delta\varphi$ soll mittels der Potentialtheorie analysiert werden. Nehmen Sie an, dass die Geschwindigkeit an der Stelle $(x, y) = (R, 0)$ den Betrag $|\vec{v}(R, 0)| = v_R$ habe.



a) Stellen Sie für das Problem eine geeignete komplexe Potentialfunktion $F(z)$ auf.

b) Bestimmen Sie die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten $u(r, \varphi)$ sowie $v(r, \varphi)$.

c) Bestimmen Sie die unbekannten Konstanten der komplexen Potentialfunktion.

d) Berechnen Sie die Verteilung des Druckbeiwertes $c_p(r)$ auf der Kontur, wobei Sie den Zustand an der Stelle $(x, y) = (R, 0)$ als Referenz wählen.

Gegeben:

$\Delta\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$, v_R, R

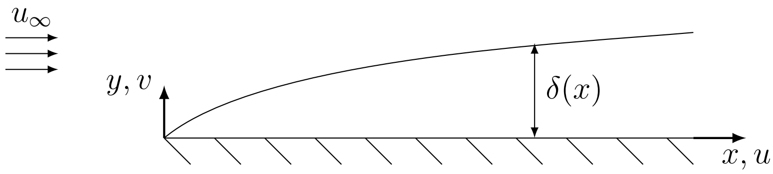
Für a) und b) alle Konstanten der Elementarströmungen.

Bekannte komplexe Potentialfunktionen:

Parallelströmung:	$F(z) = (u_\infty - \mathrm{i}v_\infty)z$
Potentialwirbel:	$F(z) = -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi} \ln z$
Quelle/Senke:	$F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$
Staupunktströmung:	$F(z) = az^2$
Dipol:	$F(z) = \frac{M}{2\pi z}$
Eckenströmung:	$F(z) = \frac{a}{n} z^n$

4. Aufgabe (11 Punkte)

Eine ebene Platte wird parallel zu ihrer Oberfläche mit einem inkompressiblen Newtonschen Fluid (Dichte ρ, dynamischer Viskosität η) mit konstanter Geschwindigkeit u_∞ angeströmt.



Die auf der Platte entstehende Grenzschicht wird als laminar angenommen, wobei das tangentiale Geschwindigkeitsprofil innerhalb der Grenzschicht durch folgendes Polynom dritten Grades dargestellt werden soll

$$\frac{u(x,y)}{u_\infty} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 .$$

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 und a_3 des Geschwindigkeitsprofils $u(y/\delta)$.

b) Bestimmen Sie die Wandschubspannung $\tau_W(x)$ mithilfe der von Kármánschen Integralbeziehung:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_\infty}\frac{du_\infty}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) = \frac{\tau_W}{\rho u_\infty^2} .$$

c) Die Platte soll sich nun entgegen der Strömungsgeschwindigkeit bewegen. Muss in den vorherigen Teilaufgaben für diese Fall etwas zusätzlich berücksichtigt werden? Welchen Einfluss hat dies auf die Grenzschichtdicke?

Gegeben:

ρ, η, $u_\infty = konst.$

Hinweis:

- Grenzschichtgleichungen (2D, inkompressibel)

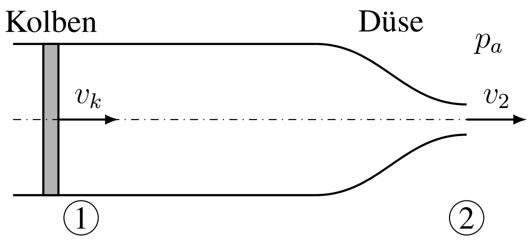
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

5. Aufgabe (10 Punkte)

Eine Konstruktion aus einem zylindrischen Einlauf mit konstantem Querschnitt A_1 sowie einer konvergenten Düse mit Auslassquerschnitt A_2 wird betrachtet. Im Einlauf befindet sich ein Kolben, welcher mit der Geschwindigkeit v_k in Richtung Düse bewegt wird. Der Druck in der Umgebung sei der konstante Atmosphärendruck p_a. Die Strömung ist eindimensional, stationär, kompressibel, adiabat und reibungsfrei.



a) Welche Machzahl M_2 kann maximal durch eine Erhöhung von v_k erreicht werden? (kurze Begründung)

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_k, bei der an der Stelle 1 der statische Druck p_1 und die statische Temperatur T_1 konstant bleiben sowie die Düse im Unterschall durchströmt wird.

c) Wie wirkt sich eine Erhöhung der Kolbengeschwindigkeit qualitative auf den statischen Druck p_1, die statische Temperatur T_1 und die Machzahl M_2 aus?

Gegeben:

$A_1,\ A_2,\ p_a,\ p_1,\ T_1,\ \gamma,\ R$

Hinweise:

- $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$
- Isentropenbeziehung: $\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\gamma-1}$

6. Aufgabe (6 Punkte)

a) In einem kryogenen Windkanal wird bei gleichbleibender Strömungsgeschwindigkeit u_∞ und konstantem Staudruck q die statische Temperatur stark verringert. Wie verändern sich die Reynoldszahl Re und die Machzahl M?
Hinweis: Die verringerte Temperatur führt zur einer geringeren Viskosität des Gases im Windkanal.

b) Unter welcher Bedingung gilt eine Strömung als schleichende Strömung? Geben Sie ein Beispiel für eine schleichende Strömung an.

c) Ein ideales Gas wird durch eine Lavaldüse aus dem Ruhezustand auf $M > 1$ beschleunigt. Skizzieren sie den Verlauf der Verhältnisse des statischen Drucks sowie des Totaldrucks zum Ruhedruck und der statischen Temperatur zur Totaltemperatur. Skizzieren Sie ebenfalls den Verlauf der Machzahl. Nehmen Sie an, dass es sich um eine eindimensionale isentrope Strömung handelt.