....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik II“

12. 08. 2024

1. Aufgabe (13 Punkte)

a) Die folgenden Vereinfachungen werden getroffen:

$$\begin{aligned}
\text{stationär:} \quad & \frac{\partial}{\partial t} = 0 \\
\text{ausgebildet:} \quad & \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = 0 \\
\text{rotationssym.:} \quad & \frac{\partial}{\partial \theta} = 0
\end{aligned}$$

Die Massenerhaltung ergibt sich

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0 \rightarrow r v_r = konst. \rightarrow v_r = 0 \text{ , aus Haftrandbedingung .}$$

Eingesetzt vereinfacht sich das Gleichungssystem zu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} &= 0 \\
\rho \left(\cancel{\frac{\partial v_r}{\partial t}} + \cancel{v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}} + \cancel{v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\cancel{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)} \right) + \cancel{\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}} \right] \\
\rho \left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + \cancel{v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}} + \cancel{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \cancel{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}} \right] \\
\rho c_p \left(\cancel{\frac{\partial T}{\partial t}} + \cancel{v_r \frac{\partial T}{\partial r}} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) &= \frac{dp}{dt} + \lambda \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \\
& \quad + 2\eta \left\{ \left(\cancel{\frac{\partial v_r}{\partial r}} \right)^2 + \left(\cancel{\frac{v_r}{r}} \right)^2 + \left(\cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} \right)^2 \right\} + \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \cancel{\frac{\partial v_r}{\partial z}} \right)^2
\end{aligned}$$

und ergibt unter Berücksichtigung von

$$\frac{dp}{dt} = \cancel{\frac{\partial p}{\partial t}} + \vec{v} \cdot \nabla p = v_z \frac{\partial p}{\partial z} \text{ , da } v_r = v_\theta = 0 \,,$$

dass für das Problem vereinfachte System

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{\partial p}{\partial r} \\
0 &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \\
\rho c_p v_z \frac{\partial T}{\partial z} &= v_z \frac{\partial p}{\partial z} + \lambda \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \eta \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2
\end{aligned}$$

b) Einführung der dimensionslosen Größen mithilfe von $\Delta T = T_w - T_\infty$

$$\begin{aligned}
& \bar{r} = \frac{r}{D}, \ \bar{z} = \frac{z}{D}, \ \bar{v_z} = \frac{v_z}{v_\infty}, \ \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \\
& \bar{p} = \frac{p}{\rho_\infty v_\infty^2}, \ \bar{T} = \frac{T}{\Delta T}, \ \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_\infty}, \ \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_\infty}, \ \bar{c_p} = \frac{c_p}{c_{p,\infty}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= -\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{D}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} \quad \rightarrow \text{Keine Kennzahl}\\
0 &= -\frac{\rho_\infty v_\infty^2}{D}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\eta_\infty v_\infty}{D^2}\frac{\bar{\eta}}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}}\right)\\
\frac{\rho_\infty c_{p,\infty} v_\infty \Delta T}{D}\bar{\rho}\bar{c}_p\bar{v}_z\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{z}} &= \frac{\rho_\infty v_\infty^3}{D}\bar{v}_z\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\lambda_\infty \Delta T}{D^2}\frac{\bar{\lambda}}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}}\right)\\
&\quad + \frac{\lambda_\infty \Delta T}{D^2}\bar{\lambda}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{z}^2} + \frac{\eta_\infty v_\infty^2}{D^2}\bar{\eta}\left(\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}}\right)^2\\
\text{Impuls}/\frac{\eta_\infty v_\infty}{D^2}&: \rightarrow K_1 = \frac{\rho_\infty v_\infty D}{\eta_\infty}\\
\text{Energie}/\frac{\rho_\infty v_\infty^3}{D}&: \rightarrow K_2 = \frac{c_{p,\infty}\Delta T}{v_\infty^2}, \quad K_3 = \frac{\lambda_\infty \Delta T}{\rho_\infty v_\infty^3 D}, \quad K_4 = \frac{\eta_\infty}{\rho_\infty v_\infty D}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \frac{\rho_\infty v_\infty D}{\eta_\infty} = Re\\
K_2 &= \frac{c_{p,\infty}\Delta T}{v_\infty^2} = \frac{1}{Ec}\\
K_3 &= \frac{\lambda_\infty \Delta T}{\rho_\infty v_\infty^3 D} = \frac{\lambda_\infty}{\rho_\infty v_\infty D c_{p,\infty}}\frac{c_{p,\infty}\Delta T}{v_\infty^2} = \frac{\lambda_\infty}{c_{p,\infty}\eta_\infty}\frac{\eta_\infty}{\rho_\infty v_\infty D}\frac{1}{Ec} = \frac{1}{Pr\ Re\ Ec}\\
K_4 &= \frac{\eta_\infty}{\rho_\infty v_\infty D} = \frac{1}{Re}
\end{aligned}
$$

d) Die Prandtl-Zahl $\left(Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda}\right)$ beschreibt das Verhältniss aus durch Reibung freigesetzte Wärme <u>in</u> einer Strömung zur fortgeleiteten Wärme in diesem Fluid.

2. Aufgabe (10 Punkte)

a) Umschreiben in zweidimensionale kartesische Koordinaten

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} \tag{2}$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \tag{3}$$

b) Rotation der Impulsgleichung $\left(\frac{\partial}{\partial x}(3) - \frac{\partial}{\partial y}(2) \right)$:

$$\rho \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dv}{dt} \right) \right] = \eta \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right]$$

Mit $\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ folgt

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v \right) \right] = -\frac{\eta}{\rho} \Delta 2\omega_z$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + u \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + v \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ (Konti)}} - \frac{\partial v}{\partial y} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ (Konti)}} = -\frac{\eta}{\rho} \Delta 2\omega_z$$

$$\Rightarrow -2 \frac{\partial \omega_z}{\partial t} - 2u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - 2v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = -\frac{\eta}{\rho} \Delta 2\omega_z$$

$$\rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u \frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho} \Delta \omega_z$$

$$\rightarrow \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right)$$

c)

$$\Gamma := \oint_{\partial A} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \oint_{\partial A} v_t |d\vec{s}|$$

$$d\Gamma = + \left(u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dx + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dy$$

$$- \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) dx - \left(v + \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) dy$$

$$= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx\, dy = 2\omega_z dA$$

$$\Rightarrow \Gamma = 2 \int_A \omega_z dA$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

a) $F(z) = \frac{a}{n} z^n = \frac{a}{n} \left(re^{\mathrm{i}\varphi}\right)^n = \frac{a}{n} r^n \left[\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)\right]$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dz} &= \overline{w} = u - \mathrm{i}v \\
&= az^{n-1} = ar^{n-1}\left[\cos((n-1)\varphi) + \mathrm{i}\sin((n-1)\varphi)\right] \\
&\to u(r,\varphi) = ar^{n-1}\cos((n-1)\varphi) \\
&\to v(r,\varphi) = -ar^{n-1}\sin((n-1)\varphi)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\Psi &= \mathrm{Im}\{F(z)\} = \frac{a}{n} r^n \sin(n\varphi) \\
\text{Kontur: } \Psi_k &= konst. = \Psi(r=0,\varphi) = 0 \\
\Psi_k &= 0 = \frac{a}{n} r_k^n \sin(n\varphi_k) \;\to\; \sin(n\varphi_k) \stackrel{!}{=} 0 \;\to\; n\varphi_k = k\pi, \text{ for } k \in \mathbb{N}^+ \\
n(2\pi - \Delta\varphi) &= k\pi \to n = \frac{k\pi}{2\pi - \Delta\varphi} \stackrel{k=1}{=} \frac{4}{5} \\
\varphi = 0, r = R: \quad u &= v_R = aR^{n-1} \to a = \frac{v_R}{R^{n-1}} = v_R R^{\frac{1}{5}}
\end{aligned}$$

d)

$$|\vec{v}|^2 = a^2 r^{2n-2} \underbrace{\left[\cos^2((n-1)\varphi) + \sin^2((n-1)\varphi)\right]}_{=1} = v_R^2 R^{\frac{2}{5}} r^{-\frac{2}{5}} = v_R^2 \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{2}{5}}$$

$$\begin{aligned}
c_p(r) &= \frac{p - p_R}{\frac{1}{2}\rho v_R^2} = 1 - \left(\frac{|\vec{v_k}|}{v_R}\right)^2 \\
&= 1 - \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{2}{5}}
\end{aligned}$$

4. Aufgabe (11 Punkte)

a) Mittels vier Randbedingungen können die unbekannten a_i bestimmt werden

$$\text{Haftbedingung:} \quad \frac{y}{\delta} = 0 : u = 0 \to a_0 = 0$$
$$\text{Grenzschichtrand:} \quad \frac{y}{\delta} = 1 : u = u_\infty \to a_1 + a_2 + a_3 = 1$$
$$\text{Wandbindung aus x-Impulsgl.:} \quad \frac{y}{\delta} = 0 : \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = 0 \quad (\text{für ebene Platte mit } \frac{\partial p}{\partial x} = 0)$$
$$\to a_2 = 0$$
$$\text{Stetiger GS-Rand:} \quad \frac{y}{\delta} = 1 : \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \to a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$$
$$\Rightarrow a_1 + a_3 = 1\,; \quad a_1 + 3a_3 = 0 \to a_3 = -\frac{1}{2}\,, \quad a_1 = \frac{3}{2}$$

$$\frac{u(x,y)}{u_\infty} = \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

b)

$$\tau_W = -\tau = +\eta \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = +\eta u_\infty \left.\left(\frac{3}{2}\frac{1}{\delta} - \frac{3}{2}\frac{y^2}{\delta^3}\right)\right|_{y=0} = \frac{3}{2}\frac{\eta u_\infty}{\delta(x)}$$
$$u_\infty = konst. \to \frac{du_\infty}{dx} = 0$$
$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy = \delta \int_0^1 \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$
$$= \delta \int_0^1 \frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 - \left[\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{39}{280}\delta$$
$$\Rightarrow \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_W}{\rho u_\infty^2} \quad \to \quad \frac{39}{280}\frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{3}{2}\frac{\eta}{\delta(x)\rho u_\infty}$$
$$\to \delta\, d\delta = \frac{140}{39}\frac{\eta}{\rho u_\infty} dx \overset{\int}{\to} \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{140}{13}\frac{\eta}{\rho u_\infty} x \to \delta(x) = \sqrt{\frac{280}{13}}\sqrt{\frac{\eta}{\rho u_\infty}}\sqrt{x}$$
$$\Rightarrow \tau_W(x) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{13}{280}}\sqrt{\frac{\rho u_\infty}{\eta x}}\eta u_\infty = \sqrt{\frac{117}{1120}}\sqrt{\frac{\rho u_\infty^3 \eta}{x}}$$

c) Durch das Bewegen der Platte entgegen der Strömung erhöht sich lediglich die relative Anströmgeschwindigkeit auf die Platte bei der Betrachtung in einem mitbewegten Koordinatensystem. Somit bleiben die vorherigen Ansätze identisch mit erhöhtem u_∞, wobei eine dünnere Grenzschicht die Folge ist.

5. Aufgabe (10 Punkte)

a) Im engsten Querschnitt, hier 2, kann die Machzahl maximal den Wert $M_2 = 1$ annehmen.

b) Für eine Strömung im Unterschall gilt $p_2 = p_a$.
Folgende Zusammenhänge lassen sich aufstellen

$$\text{Konti:} \quad \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \quad \text{mit } v_1 = v_k \tag{4}$$

$$\text{Energie:} \quad c_p T_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \tag{5}$$

$$\text{Zustandsgl.:} \quad \rho_1 = \frac{p_1}{RT_1}, \quad \rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} \tag{6}$$

$$\text{Isentropenbeziehung:} \quad \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} . \tag{7}$$

Diese ergeben ein System aus 5 Gleichungen und 5 Unbekannten $(\rho_1, v_1, \rho_2, v_2, T_2)$.

$$(6) \rightarrow (4): \quad \frac{p_1}{RT_1} v_1 A_1 = \frac{p_2}{RT_2} v_2 A_2$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{A_1}{A_2}\frac{p_1}{p_2}\frac{T_2}{T_1} = \frac{A_1}{A_2}\frac{p_1}{p_2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{A_1}{A_2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{-1}{\gamma}}$$

$$\frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{\gamma R T_2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} v_2^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma R T_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right) = \frac{1}{2} v_1^2 \left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{-2}{\gamma}} - 1\right) \quad \text{mit } p_2 = p_a$$

$$\Rightarrow v_k = v_1 = \sqrt{\frac{\frac{2\gamma R T_1}{\gamma-1}\left(1 - \left(\frac{p_a}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \left(\frac{p_a}{p_1}\right)^{\frac{-2}{\gamma}} - 1}}$$

c) Mit einer Erhöhung der Kolbengeschwindigkeit v_k

.. steigt der statische Druck p_1

.. steigt die statische Temperatur T_1

.. steigt die Machzahl M_2 (bis $M_2 = 1$ an)

6. Aufgabe (6 Punkte)

a) 1) Re : Steigt, da η sinkt

2) M : Steigt, da $c = \sqrt{\gamma R T}$ sinkt

b) Bei schleichenden Strömungen sind die Reibungskräfte bedeutend größer als die Trägheitskräfte.
Beispiele: Strömung zwischen zwei Platten der Länge l mit Abstand h, wobei $h/l \ll 1$; Durch Sand strömendes Fluid; ...

c)