....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik II“

14. 09. 2023

1. Aufgabe (10 Punkte)

a)

$$\begin{aligned}
\text{Einflussgrößen: } k: &\quad u_\infty, \rho, \eta, D, n \\
\text{Dimensionen: } r: &\quad M, L, T \quad \text{(3 wiederkehrende Variablen)} \\
&\Rightarrow k = 5, r = 3 \rightarrow k - r = 2 \text{ Kennzahlen}
\end{aligned}$$

b) Wahl der wiederkehrenden Variablen z.B.: n, D, ρ

$$\begin{aligned}
\Pi_1 = & u_\infty n^{\alpha_1} D^{\beta_1} \rho^{\gamma_1} \\
& M: 0 + 0\alpha_1 + 0\beta_1 + 1\gamma_1 = 0 \rightarrow \gamma_1 = 0 \\
& L: 1 + 0\alpha_1 + 1\beta_1 - 3\gamma_1 = 0 \rightarrow \beta_1 = 3\gamma_1 - 1 = -1 \\
& T: -1 - 1\alpha_1 + 0\beta_1 + 0\gamma_1 = 0 \rightarrow \alpha = -1 \\
& \Rightarrow \Pi_1 = u_\infty n^{-1} D^{-1} \rho^0 = \frac{u_\infty}{nD}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_2 = & \eta\, n^{\alpha_2} D^{\beta_2} \rho^{\gamma_2} \\
& M: 1 + 0\alpha_2 + 0\beta_2 + 1\gamma_2 = 0 \rightarrow \gamma_2 = -1 \\
& L: -1 + 0\alpha_2 + 1\beta_2 - 3\gamma_2 = 0 \rightarrow \beta_2 = 3\gamma_2 + 1 = -2 \\
& T: -1 - 1\alpha_2 + 0\beta_2 + 0\gamma_2 = 0 \rightarrow \alpha = -1 \\
& \Rightarrow \Pi_2 = \eta\, n^{-1} D^{-2} \rho^{-1} = \frac{\eta}{nD^2\rho}
\end{aligned}$$

c) Mit der Umfangsgeschwindigkeit der Blattspitzen $u_\Theta = \pi D n$ verdeutlicht sich die Umformung der zweiten Kennzahl.

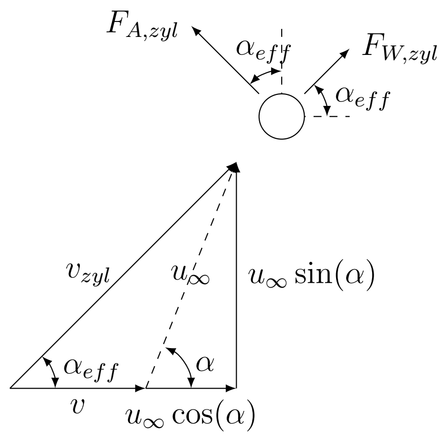
$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{u_\infty}{nD} = \frac{1}{Sr} \\
\Pi_2 &= \frac{\eta}{nD^2\rho} = \frac{\eta}{\rho D(\underbrace{nD}_{=u_\Theta/\pi})} = \frac{1}{Re}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
Re = Re': &\ \frac{\rho D^2 n}{\eta} = \frac{\rho D'^2 n'}{\eta} \rightarrow D^2 n = D'^2 n' \rightarrow n = n' \left(\frac{D'}{D}\right)^2 \\
Sr = Sr': &\ \frac{nD}{u_\infty} = \frac{n' D'}{u'_\infty} \rightarrow u'_\infty = u_\infty \frac{n'}{n} \frac{D'}{D} = u_\infty \frac{D}{D'} \\
C_M = C'_M: &\ \frac{M}{\rho u_\infty^2 D^3 \pi} = \frac{M'}{\rho u_\infty'^2 D'^3 \pi} \rightarrow M = M' \left(\frac{u_\infty}{u'_\infty}\right)^2 \left(\frac{D}{D'}\right)^3 = M' \frac{D}{D'}
\end{aligned}$$

e) Um die Schallgeschwindigkeit c ähnlich zu wählen, muss die Machzahl $M = u/c$ eingehalten werden.
Um gleichzeitig Re und M einzuhalten werden daher i) die Temperatur abgesenkt, da $c = c(T)$ und/oder ii) das Strömungsmedium geändert.

2. Aufgabe (10 Punkte)



a)

$$v_{zyl} = |\vec{v}_{zyl}| = \left| \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_\infty \cos(\alpha) \\ u_\infty \sin(\alpha) \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(v + u_\infty \cos(\alpha))^2 + (u_\infty \sin(\alpha))^2}$$

$$\alpha_{eff} = \arctan\left(\frac{u_\infty \sin(\alpha)}{v + u_\infty \cos(\alpha)}\right)$$

b) Der Auftriebessatz von Kutta-Zhukhovski setzt den Auftrieb/Länge F_L, die Zirkulation Γ, sowie die Anströmgeschwindigkeit v_{an} in Beziehung.

$$F_L = \rho v_{an} |\Gamma|$$

$$\text{wobei} \qquad \Gamma = \oint \vec{v} d\vec{s} \qquad \text{(Satz von Stokes)}$$

$$= 2 \int \omega dA = \frac{1}{2} \pi D^2 \omega$$

$$\rightarrow F_{A,zyl} = F_L H = \frac{1}{2} \pi D^2 H \rho \omega v_{zyl}$$

c) Aufstellen einer Kräftebilanz in x-Richtung:

$$\sum F_x = F_{W,R} + F_{W,zyl} \cos(\alpha_{eff}) - F_{A,zyl} \sin(\alpha_{eff}) = 0$$

$$\text{Widerstandskraft Fahrzeug} \quad F_{W,R} = \frac{1}{2} \rho v_R^2 A_R c_{W,R} \quad \text{mit} \quad v_R = v + u_\infty \cos(\alpha)$$

$$\text{Widerstandskraft Zylinder} \quad F_{W,zyl} = \frac{1}{2} \rho v_{zyl}^2 D H c_{W,zyl}$$

$$\text{Auftriebskraft Zylinder} \quad F_{A,zyl} = F_L H = \frac{1}{2} \pi D^2 H \rho \omega v_{zyl}$$

Einsetzen und anschließendes Umformen liefert die gesuchte Höhe H

$$\Rightarrow H = \frac{v_R^2 A_R c_{W,R}}{\pi D^2 \omega v_{zyl} \sin(\alpha_{eff}) - v_{zyl}^2 D C_{W,zyl} \cos(\alpha_{eff})}$$

d) Die Vortriebsleistung bestimmt sich aus dem Produkt der vom Zylinder generierten Kraft in Fahrtrichtung und der Fahrgeschwindigkeit:

$$P = F_{Vortrieb} v = [F_{A,zyl} \sin(\alpha_{eff}) - F_{W,zyl} \cos(\alpha_{eff})] v$$

3. Aufgabe (12 Punkte)

a) Mit der Geschwindigkeit U_∞, der Quellenergiebigkeit E und der Zirkulation Γ folgt:

$$F(z) = U_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln(z) + \mathrm{i}\frac{\Gamma}{2\pi}\ln(z) \quad \text{für} \quad U_\infty, E, \Gamma > 0\,.$$

b) Über die Definition der konjugiert komplexen Geschwindigkeit folgt

$$\overline{w} = u - \mathrm{i}v = \frac{dF}{dz} = U_\infty + \frac{E}{2\pi}\frac{1}{z} + i\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z}\,.$$

Durch Erweiterung mittels des konjugiert komplexen Nenners

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+\mathrm{i}y} = \frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}$$

kann der Ausdruck vereinfacht und nach Real- und Imaginärteil sortiert werden

$$\frac{dF}{dz} = \underbrace{\left[U_\infty + \frac{E}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\right]}_{=u(x,y)} - \mathrm{i}\underbrace{\left[\frac{E}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\right]}_{=v(x,y)}\,.$$

c) Im Staupunkt gilt $(u,v)_s = (0,0)$.
Zusätzlich soll gelten, dass $x_s = y_s$ ist, woraus folgt

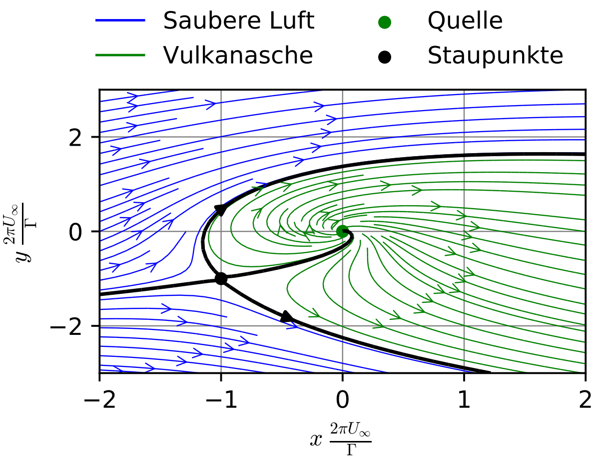
$$v(x_s, y_s = x_s) = 0 = \frac{E}{2\pi}\frac{x_s}{x_s^2+x_s^2} - \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x_s}{x_s^2+x_s^2} \Rightarrow E = \Gamma\,.$$

Durch analoges Vorgehen für u folgt

$$u(x_s, y_s = x_s, E = \Gamma) = 0 = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x_s}{x_s^2+x_s^2} + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x_s}{x_s^2+x_s^2} = U_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{x_s}$$
$$\rightarrow x_s = -\frac{\Gamma}{2\pi U_\infty} = y_s$$

d) Umschreiben der komplexen Potentialfunktion, so dass nach Real- und Imaginärteil sortiert werden kann.

$$\ln(z) = \ln(re^{\mathrm{i}\phi}) = \ln(r) + \mathrm{i}\phi\,, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \quad \phi = \arctan\frac{y}{x}$$
$$F(z) = \left(U_\infty x + \frac{E}{2\pi}\ln r - \frac{\Gamma}{2\pi}\phi\right) + \mathrm{i}\left(U_\infty y + \frac{E}{2\pi}\phi + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln(r)\right)$$
$$\Psi(x,y) = \mathrm{Im}(F(z)) = U_\infty y + \frac{E}{2\pi}\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln(\sqrt{x^2+y^2})$$
$$\Psi_s = \Psi(x_s, y_s) = U_\infty x_s + \frac{5}{8}E + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln(\sqrt{2}\,x_s)$$



Stromlinien
Staupunkte
Vulkanasche-Bereich

4. Aufgabe (12 Punkte)

a) Mittels drei Randbedingungen können die unbekannten a_i bestimmt werden

$$\begin{aligned}
\text{Haftbedingung:} \quad & \frac{y}{\delta} = 0 : u = 0 \rightarrow a_0 = 0 \\
\text{Grenzschichtrand:} \quad & \frac{y}{\delta} = 1 : u = u_a \rightarrow a_2 = 1 \\
\text{Wandbindung aus x-Impulsgl.:} \quad & \frac{y}{\delta} = 0 : v \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\eta}{\rho} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0}
\end{aligned}$$

Einsetzen der bisher bekannten Koeffizient in die Geschwindigkeitsverteilung sowie mit der Definition des Volumenstromes $v|_{y=0} = -\dfrac{\dot{V}}{BL}$

$$\begin{aligned}
\frac{u}{u_a} = a_1 \frac{y}{\delta} + \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{u_a}\right) &= a_1 \left(\frac{1}{\delta} - \frac{3y^2}{\delta^3}\right) + \frac{2y}{\delta^2} \\
\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{u}{u_a}\right) &= a_1 \left(-\frac{6y}{\delta^3}\right) + \frac{2}{\delta^2}
\end{aligned}$$

$$\text{Einsetzen in RB liefert:} \quad -\frac{\dot{V}}{BL}\frac{a_1 u_a}{\delta} = \frac{\eta}{\rho}\frac{2u_a}{\delta^2} \rightarrow a_1 = -\frac{2BL\eta}{\rho\delta\dot{V}}$$

b) Für das gegebene Problem vereinfacht sich die von Kármánsche Integralbeziehung zu

$$\frac{du_a}{dx} = 0\,, \quad \frac{d\delta_2}{dx} = 0\,, \quad v_a = -\frac{\dot{V}}{BL} \quad \Rightarrow \frac{\tau_W}{\rho u_a} = \frac{\dot{V}}{BL}$$

Die Tangentialkraft ergibt sich somit aus

$$F_T = \int_L \tau_W B dx = \int_L \frac{\rho \dot{V} u_a}{BL} B dx = \rho \dot{V} u_a$$

c) Für die ausgeschaltete Anlage (hier index aus) stellt sich <u>keine</u> konstante Grenzschichtdicke ein.
Das Geschwindigkeitsprofil ist gegeben durch $\dfrac{u^{aus}}{u_a} = \dfrac{y}{\delta^{aus}(x)}$. Es folgt:

$$\frac{du_a}{dx} = 0\,, \quad v_a = 0\,, \quad \frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{u_a}\left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_0^1 \frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\frac{d\delta}{dx} = \frac{\tau_W}{\rho u_a^2} = \frac{1}{\rho u_a}\eta \left.\frac{\partial u/u_a}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\eta}{\rho u_a \delta} \quad \rightarrow \quad \delta d\delta = \frac{6\eta}{\rho u_a}dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{6\eta}{\rho u_a}x$$

$$\rightarrow \delta^{aus} = \sqrt{\frac{12\eta}{\rho u_a}}\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \tau_W^{aus} = \frac{\eta u_a}{\delta^{aus}} = \frac{\sqrt{\eta\rho u_a}u_a}{\sqrt{12}}\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow F_T^{aus} = \int_L \tau_W^{aus} B dx = \frac{\sqrt{\eta\rho u_a}u_a}{\sqrt{3}}\sqrt{x}\Big|_0^L = \frac{\sqrt{\eta\rho u_a}u_a}{\sqrt{3}}\sqrt{L}$$

d) Die Anwendung ist gerade dann noch sinnvoll, wenn die Einsparung der Leistung ΔP_W, mindestens gleich der aufgebrachten Leistung P_a ist, d.h., $\Delta P_W \geq P_a$.

$$\begin{aligned}\Delta P_W &= (F_T^{aus} - F_T)u_a \\ P_a &= \dot{V}\Delta p_{tot} = \dot{V}\frac{\rho}{2}(u_a^2 - v_a^2) = \dot{V}\frac{\rho}{2}\left(u_a^2 - \left(\frac{\dot{V}}{BL}\right)^2\right)\end{aligned}$$

5. Aufgabe (8 Punkte)

a) Mittels der idealen Gasgleichung und isentropen Beziehung folgt

$$p = \rho R T\,, \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$$
$$\Rightarrow \frac{p}{p_0} = \left(\frac{p}{p_0}\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma} \to \frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\,.$$

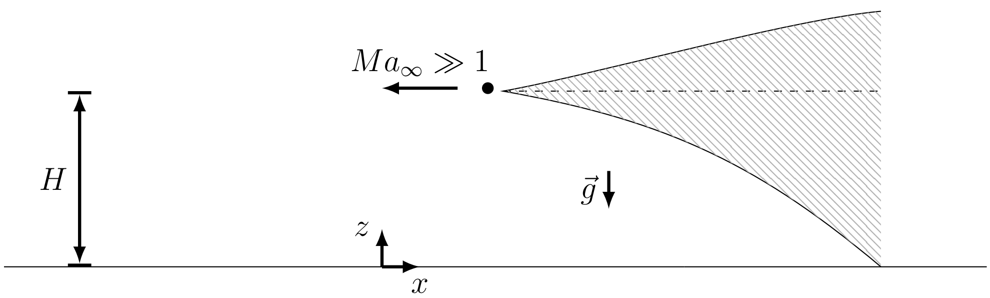
Aus einem Kräftegleichgewicht an einem infinitesimalen Element ergibt sich

$$\begin{aligned}
dp &= -\rho\, g\, dz \\
&= -\frac{pg}{RT}dz = -\frac{pg}{RT_0}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} dz = -\frac{g}{RT_0}p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\, p^{\frac{1}{\gamma}}\, dz \\
\to p^{-\frac{1}{\gamma}}\, dp &= -\frac{g}{RT_0}p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\, dz \qquad \Big| \int_{z=0}^{z=z} \\
\to \frac{\gamma}{\gamma-1}p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\Big|_{p_0}^{p} &= -\frac{g}{RT_0}p_0^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\, z \quad \to \quad \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{gz}{RT_0} \\
\Rightarrow T(z) &= T_0\left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{gz}{RT_0}\right) = T_0 - \underbrace{\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{g}{R}}_{=:K} z
\end{aligned}$$

b) Die Schallgeschwindigkeit ist gegeben durch $c(z) = \sqrt{\gamma R T(z)}$

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \int_H^0 \frac{1}{-c(z)}dz \\
&= \int_H^0 \frac{1}{-\sqrt{\gamma R (T_0 - Kz)}}dz = \left[\frac{2}{K}\frac{1}{\sqrt{\gamma R}}\sqrt{T_0 - Kz}\right]_H^0 \\
&= \frac{2}{K\sqrt{\gamma R}}(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_0 - KH})
\end{aligned}$$

c) Die Krümmungen des Randes des Ausbreitungsgebietes ergeben sich aus der Abhñgigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Höhe $c \sim -z$.



6. Aufgabe (8 Punkte)

a)

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\vec{v} = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\rho\right) + \rho\nabla\cdot\vec{v} \quad \text{Stationär: } \frac{\partial(\,)}{\partial t} = 0$$

$$\rightarrow \vec{v}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\vec{v} = \nabla\cdot(\rho\vec{v}) = \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} \quad \text{q.e.d.}$$

b) Strömungen, in denen die Reibungskräfte deutlich größer als die Trägheitskräfte sind, werden als schleichende Strömungen bezeichnet:

$$\frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} \ll 1\,.$$

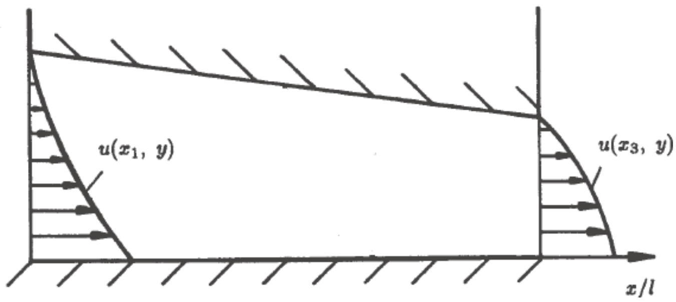
In Spaltströmungen treten schleichende Strömung auf, wenn

$$Re\left(\frac{h}{l}\right)^2 \ll 1$$

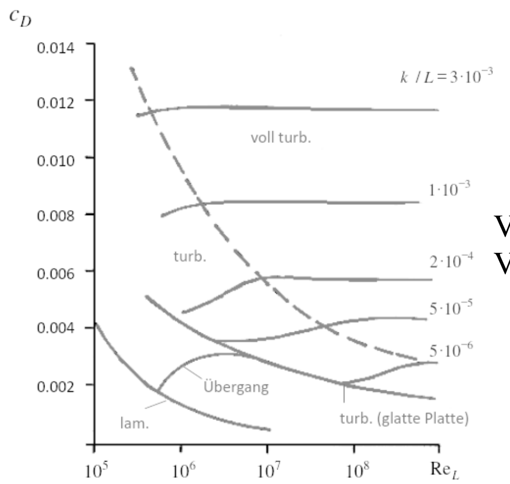
ist. Somit kann bei sehr schlanker Spaltgeometrie $Re > 1$.

c) Die nötigen Randbedingung folgen aus der Haftbedingung an den Wänden sowie aus dem Druck am Ein- und Ausgang der Spaltgeometrie

$$p(x=0) = p(x=l) = p_\infty\,, \quad u(x,y=0) = u_\infty\,, \quad u(x,y=h(x)) = 0$$



d)



Verlauf der zwei glatten Platten
Verlauf voll turbulenter rauher Platte

e) Vorteil: höhere Vermischung wichtig für Wärmeaustausch oder Mischung unterschiedlicher Fluide, erhöhte Ablösungstoleranz durch stärkeren Impulsaustausch in der Grenzschicht
Nachteil: Erhöhte Reibungskraft