....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik II“

14. 03. 2023

1. Aufgabe (10 Punkte)

Eine ebene Platte der Länge L wird parallel zu ihrer Oberfläche angeströmt (Geschwindigkeit u_∞, Dichte ρ_∞, konstante dynamische Viskosität η).

a) Zeigen Sie, dass physikalisch sinnvolle Referenzgrößen y_{ref} und v_{ref} für die sich ausbildende Grenzschichtströmung durch

$$y_{ref} \sim \sqrt{\frac{\eta L}{\rho_\infty u_\infty}} \quad \text{und} \quad v_{ref} \sim \sqrt{\frac{u_\infty \eta}{\rho_\infty L}}$$

gegeben sind.

Die zweidimensionale Energiegleichung für eine stationäre Strömungen mit konstanten Stoffgrößen ($\lambda,\ \eta,\ c_p$) über eine ebene Platte lautet

$$\begin{aligned}\rho c_p \left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) =& \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)\\ &+ \eta\left[2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right].\end{aligned}$$

b) Schreiben Sie die Energiegleichung in dimensionsloser Form. Wählen Sie hierbei die Referenzgrößen derat, dass die dimensionslosen Variablen für Grenzschichtströmungen von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ sind.

c) Bestimmen Sie mit der Methode der Differentialgleichungen alle relevanten Kennzahlen des Problems.

d) Wenn möglich, drücken Sie die erhaltene(n) Kennzahl(en) durch eine oder mehrere in der Strömungsmechanik häufig verwendete Kennzahl(en) aus.

Gegeben:

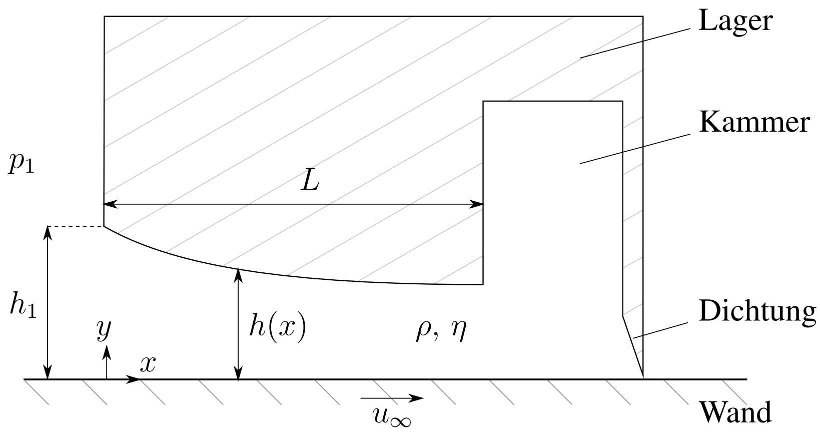
Alle notwendigen Referenzgrößen.

Hinweise:

- $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$

2. Aufgabe (13 Punkte)

In einem Gleitlager strömt ein Schmiermittel der Dichte ρ und dynamische Viskosität η. Die Wand bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_∞ relativ zum Gleitschuh. Der Verlauf der Spalthöhe ist gegeben durch die Funktion $h(x) = h_1 e^{-\frac{x}{5L}}$. Die Spaltbreite ist B.



Für eine stationäre inkompressible Strömung eines Fluids mit konstanter Dichte ρ und Zähigkeit η ist die y-Impulsgleichung in dimensionsbehafteter Form gegeben

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) .$$

a) Formulieren Sie die y-Impulsgleichung in dimensionsloser Form für eine schleichende Spaltströmung. Vereinfachen Sie diese mittels einer Größenordnungsabschätzung der einzelnen Terme.

b) Die vereinfachte x-Impulsgleichung in dimensionsloser Form lautet

$$\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} \simeq \frac{1}{Re_L} \frac{L^2}{h_1^2} \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2} .$$

Zeigen Sie mithilfe der beiden vereinfachten dimensionslosen Impulsgleichungen, dass der Druck p im Gleitlager nur eine Funktion von x ist.

Aufgrund eines Unfalls ist die Dichtung beschädigt, sodass ein konstanter Leckagestrom die Folge ist. Hierbei bleibt die Kammer (siehe Abbildung) stets gefüllt.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$ im Spalt und den Volumenstrom $\dot{V}$ jeweils in Abhängigkeit von $\frac{dp}{dx}$ und $h(x)$.

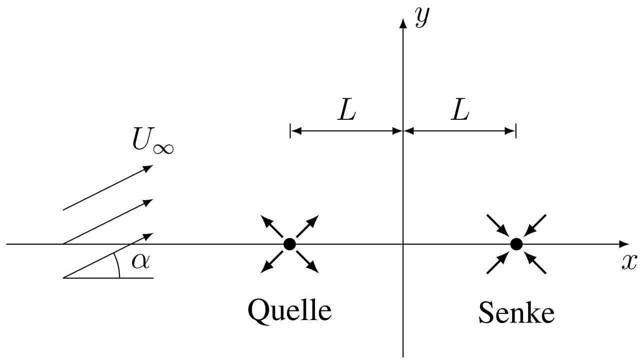
d) Berechnen Sie die Druckverteilung $p(x)$ im Spalt ($0 \leq x \leq L$) als Funktion von $p_1 = p(x = 0)$ und dem Volumenstrom $\dot{V}$.

Gegeben:

$\rho,\ \eta,\ u_\infty,\ h_1,\ L,\ B,\ h(x) = h_1 e^{-\frac{x}{5L}},\ h_1 \ll L,\ Re_L \approx 1,\ p_1$

3. Aufgabe (13 Punkte)

Gegeben ist die Überlagerung einer Quelle, einer Senke sowie einer Parallelströmung von einem Betrag U_∞ unter einem Anströmwinkel α.



a) Stellen Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ auf, mit der sich das beschriebene Problem darstellen lässt. Geben Sie die Vorzeichen der Konstanten an, die in den Elementarfunktionen vorhanden sind.

b) Bestimmen Sie die sich ergebenden Geschwindigkeitskomponenten $u(x, y)$ sowie $v(x, y)$ mithilfe der konjugiert komplexen Geschwindigkeit $\overline{w}$.

Für den Anströmwinkel $\alpha = 0$ sei bekannt, dass ein Staupunkt bei $x_s = -2L$ liegt sowie dass die zugehörige Staupunktstromlinie symmetrisch zur y-Achse ist.

c) Bestimmen Sie die Ergiebigkeiten der Quelle und der Senke.

d) Berechnen Sie die Positionen vorhandener Staupunkte für den Anströmwinkel $\alpha = \pi$ und skizzieren Sie qualitative das zugehörige Strömungsfeld.

Gegeben:

U_∞, L, α

Bekannte komplexe Potentialfunktionen:

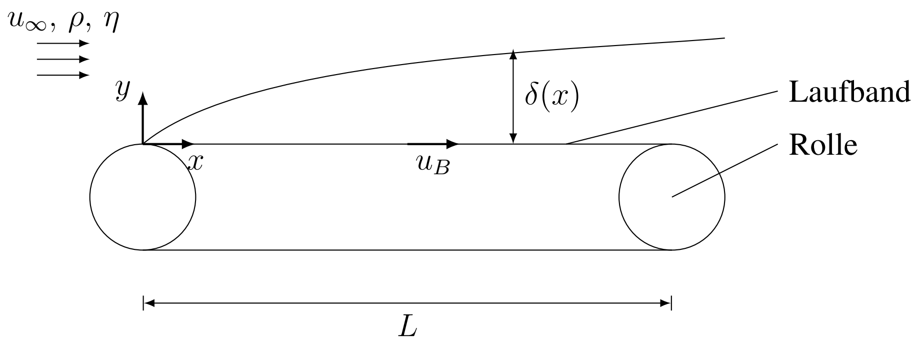
Parallelströmung:	$F(z) = (u_\infty - \mathrm{i}v_\infty)z$
Potentialwirbel:	$F(z) = -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi} \ln z$
Quelle/Senke:	$F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$
Staupunktströmung:	$F(z) = az^2$
Dipol:	$F(z) = \frac{M}{2\pi z}$

Hinweise:

- $z = x + \mathrm{i}y = r \cdot e^{\mathrm{i}\phi} = r(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)$
- $\dfrac{1}{z \pm a} = \dfrac{1}{(x \pm a) + \mathrm{i}y}$

4. Aufgabe (11 Punkte)

Ein Laufband der Länge L wird auf einer Seite parallel mit der Geschwindigkeit u_∞ von einem inkompressiblen Newtonschen Fluid (Dichte ρ, Viskosität η) angeströmt. Das Band bewegt sich hierbei in Strömungsrichtung mit der Geschwindigkeit $u_B = K u_\infty$.



Folgender Ansatz soll das Geschwindigkeitsprofil in der laminaren Grenzschicht annähren:

$$\frac{u(x,y)}{u_\infty} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 .$$

a) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil $u(y/\delta)$ in der Grenzschicht.

b) Berechnen Sie den Verlauf der Grenzschichtdicke $\delta(x)$.

c) Wie groß ist die auf das Band wirkenden Reibkraft pro Breite F_R/B?

d) Nennen Sie zwei technische Maßnahmen die zur Entstehung einer turbulenten Grenzschicht führen. Wie wirkt sich diese im Vergleich zu einer laminaren Grenzschicht auf die Reibkraft aus? Begründen Sie Ihre Antwort und skizzieren Sie qualitativ die beiden Geschwindigkeitsprofilformen.

Gegeben:

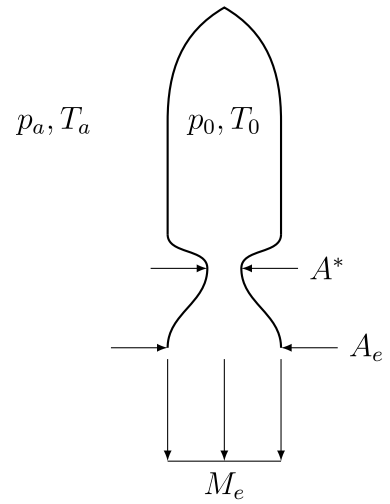
L, u_∞, ρ, η, $u_B = K u_\infty$, B

Hinweis: von Kármánsche Integralbeziehung

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_a}\frac{du_a}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) - \frac{\tau_W}{\rho u_a^2} = 0$$

5. Aufgabe (7 Punkte)

Die Lavaldüse einer Druckluftrakete wird adiabat, isentrop und stationär durchströmt. Hierbei hat das Fluid im Reservoir den konstanten Zustand p_0, T_0. Die Umgebungsluft ist beschrieben über p_a, T_a. Die engste Stelle der Düse weist eine Queschnittsfläche von A^*, die Austrittsfläche von A_e auf. Die Machzahl im engsten Querschnitt beträgt $M = 1$.



a) Was wird im Rahmen der Gasdynamik als kritische Zustand bezeichnet? Leiten Sie das kritische Druckverhältnis $\frac{p^*}{p_0}$ aus der Energiegleichung her.

b) Bestimmen Sie den Massenstrom $\dot{m}$ durch die Düse in Abhängigkeit des engsten Querschnitts A^*.
$\left(\text{Hinweis: Das kritische Temperaturverhältnis ist gegeben durch } \frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma + 1}\right)$

c) Wie muss der engste Querschnitt gewählt werden, damit ein glattes Ausströmen ($p_e = p_a$) möglich ist?

Gegeben:

p_0, T_0, p_a, T_a, A_e, $M^* = 1$, $\gamma = 1.4$ (Luft), R

Hinweise:

- $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$
- Isentropenbeziehung: $\dfrac{T_a}{T_b} = \left(\dfrac{p_a}{p_b}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\dfrac{\rho_a}{\rho_b}\right)^{\gamma-1}$
- $$\frac{A^*}{A} = \frac{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

6. Aufgabe (6 Punkte)

a) Weshalb kann man bei demselben physikalischen Problem mit dem Buckinghamschen Π-Theorem auf eine andere Anzahl von Kennzahlen kommen als mit der Methode der Differentialgleichungen?

b) Zeigen Sie, dass eine ebene Grenzschichtströmung nicht mit einer Potentialströmung abbildbar ist.

c) Erklären Sie, wieso die Wellenfront von Meereswellen für gewöhnlich parallel zu einer seicht ansteigenden Küste verläuft.

d) In der Luftfahrt wird die Geschwindigkeit unter anderem über die Messung des Staudrucks mittels einer Prandtlsonde bestimmt. Darf sich die Öffnung der Sonde innerhalb der Grenzschicht befinden? Begründen Sie Ihre Antwort.

e) Ein Mikrofon erzeugt einen dauerhaften Ton. Skizzieren Sie die Ausbreitung der Schallwellen in einer Ebene für ein i) stehendes, ii) sich mit Unterschall- bzw. iii) Überschallgeschwindigkeit bewegendes Mikrofon. Kennzeichnen Sie die Gebiete, die jeweils von der Druckstörung erfasst werden und tragen Sie den Machschen Winkel in Ihrer Skizze ein. Geben Sie den Zusammenhang zwischen Machschen Winkel und Machzahl an.