....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

<u>Klausur „Strömungsmechanik II“</u>

05. 08. 2022

1. Aufgabe

a) stationär: $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \ \rightarrow \nabla \cdot \begin{pmatrix} \varrho u \\ \varrho v \end{pmatrix} = \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0$

In inkompressiblen Strömungen gilt $\varrho = konst \rightarrow \varrho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = \mathrm{div}\vec{v} = 0$

b) Impulsgleichungen: $\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_y \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} p$

dimensionslose Größen: $\bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \bar{v} = \frac{v}{u_\infty}, \bar{p} = \frac{p}{\Delta p}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{L}$

x-Impuls:

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\
\bar{u}u_\infty \frac{\partial \bar{u}u_\infty}{\partial \bar{x}L} + \bar{v}u_\infty \frac{\partial \bar{u}u_\infty}{\partial \bar{y}L} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}\Delta p}{\partial \bar{x}L} \\
\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} &= -\frac{1}{\rho}\frac{L}{u_\infty^2}\frac{\Delta p}{L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \\
K_1 &= \frac{\Delta p}{\rho u_\infty^2}
\end{aligned}$$

y-Impuls:

$$\begin{aligned}
u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \\
\bar{u}u_\infty \frac{\partial \bar{v}u_\infty}{\partial \bar{x}L} + \bar{v}u_\infty \frac{\partial \bar{v}u_\infty}{\partial \bar{y}L} &= g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}\Delta p}{\partial \bar{y}L} \\
\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} &= \frac{g_y L}{u_\infty^2} - \frac{1}{\rho}\frac{L}{u_\infty^2}\frac{\Delta p}{L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \\
K_2 &= \frac{g_y L}{u_\infty^2}, \\
K_3 &= \frac{\Delta p}{\rho u_\infty^2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
K_1 = K_3 &= \frac{\Delta p}{\rho u_\infty^2} = Eu \\
K_2 &= \frac{g_y L}{u_\infty^2} = \frac{1}{Fr^2}
\end{aligned}$$

2. Aufgabe

a) Integration der gegebenen Gleichung in y-Richtung:

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}y + C_1 \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Randbedingungen:

$$u(y=0) = u_w \quad \Rightarrow \quad C_2 = u_w$$
$$u(y=H(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{H(x)}\left(\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{H^2(x)}{2} + u_w\right)$$
$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - H(x)y\right) + u_w\left(1 - \frac{y}{H(x)}\right)$$

b) Volumenstrom $\dot{V}$ durch den Spalt: $\dot{V} = B\int_0^{H(x)} u(x,y)dy$

$$\Rightarrow \dot{V} = B\left[\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{H(x)}{2}y^2\right) + u_w\left(y - \frac{y^2}{2H(x)}\right)\right]_0^{H(x)}$$
$$\Leftrightarrow \dot{V} = \frac{Bu_wH(x)}{2} - \frac{BH^3(x)}{12\eta}\frac{dp}{dx}$$

c) Die Gleichung für $\dot{V}$ aus Teil b) nach $\frac{dp}{dx}$ umgestellt liefert:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_w}{H^2(x)} - \frac{12\eta\dot{V}_{max}}{BH^3(x)}\,.$$

Da der Volumenstrom konstant ist, liefert die Integration:

$$\Rightarrow \int_{p_1}^{p_2} dp = p_2 - p_1 = \Delta p = 6\eta u_w\int_0^L \frac{dx}{H^2(x)} - \frac{12\eta\dot{V}_{max}}{B}\int_0^L \frac{dx}{H^3(x)}$$

mit $H(x) = H_1 - \frac{H_1 - H_2}{L}x$

$$\Rightarrow \Delta p = 6\eta u_w \frac{\frac{L}{H_1-H_2}}{H_1 - \frac{H_1-H_2}{L}x}\Bigg|_0^L - \frac{12\eta\dot{V}_{max}}{B}\frac{\frac{1}{2}\frac{L}{H_1-H_2}}{\left(H_1 - \frac{H_1-H_2}{L}x\right)^2}\Bigg|_0^L$$
$$\Leftrightarrow \Delta p = 6\eta u_w\frac{L}{H_1-H_2}\left(\frac{1}{H_2} - \frac{1}{H_1}\right) - \frac{12\eta\dot{V}_{max}}{B}\frac{1}{2}\frac{L}{H_1-H_2}\left(\frac{1}{H_2^2} - \frac{1}{H_1^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \Delta p = 6\eta u_w\frac{L}{H_1H_2} - \frac{6\eta\dot{V}_{max}}{B}\frac{L(H_1+H_2)}{H_1^2H_2^2}$$
$$\Leftrightarrow \Delta p = \frac{6\eta L}{H_1H_2}\left(u_w - \frac{\dot{V}_{max}(H_1+H_2)}{BH_1H_2}\right)$$

3. Aufgabe

a)

$$\text{Potentialfunktion: } \Phi = \Re(F(z)) = u_\infty x + \frac{E}{4\pi}\ln(x^2+y^2)$$
$$\text{Stromfunktion: } \Psi = \Im(F(z)) = u_\infty y + \frac{E}{2\pi}\varphi$$
$$\text{Geschwindigkeiten: } u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = u_\infty + \frac{E}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{E}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

Staupunkt: $u = v = 0$

Aus $v = 0$ folgt $y_s = 0(\varphi_s = \pi)$, eingesetzt in $u = 0$ liefert $x_s = -\dfrac{E}{2\pi u_\infty}$

$$\text{Konturstromlinie: } \Psi_k = \Psi_s = \Psi(\varphi_s, r_s) = \Psi(\pi, r_s) = \frac{E}{2}$$
$$\Rightarrow \Psi_k = u_\infty r_k \sin\varphi + \frac{E}{2\pi}\varphi \Rightarrow r_k = \frac{E}{2\pi u_\infty}\frac{\pi-\varphi}{\sin\varphi}$$

Für $x \to \infty$ ist $y \to \dfrac{H}{2}, \varphi \to 0$ und es gilt

$$\Psi(\infty, \frac{H}{2}) = u_\infty\frac{H}{2} \stackrel{!}{=} \Psi_k = \frac{E}{2} \quad \to E = u_\infty H$$
$$\Rightarrow r_k = \frac{H}{2\pi}\frac{\pi-\varphi}{sin\varphi}$$

b) Mit u und v aus a) und $E = Hu_\infty$ folgt mittels Bernoulli

$$\text{Bernoulli: } p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2}(u^2+v^2)$$
$$\text{Druckbeiwert: } c_p = \frac{p-p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2}u_\infty^2} \Rightarrow c_p = 1 - \left[\left(\frac{u}{u_\infty}\right)^2 + \left(\frac{v}{u_\infty}\right)^2\right]$$
$$\Rightarrow c_p = 1 - \left[\left(1 + \frac{H}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\right)^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}\right)^2\right]$$
$$\text{Auf der Kontur: } c_{pk} = 1 - \left[\left(1 + \frac{H}{2\pi}\frac{r_k\cos\varphi}{r_k^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\right)^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\frac{r_k\sin\varphi}{r_k^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}\right)^2\right]$$
$$\text{Mit } r_k \text{ aus b): } c_{pk} = 1 - \left[\left(1 + \frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\pi-\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\sin^2\varphi}{\pi-\varphi}\right)^2\right]$$

c) Forderung laut Aufgabenstellung: $c_p = \dfrac{p-p_\infty}{\frac{\rho_\infty}{2}u_\infty^2} < 0.001$

Daraus folgt mit dem Ergebnis aus Teil b) der Winkel φ_{Soll}. Mit $\tan(\varphi_{Soll}) = \dfrac{\frac{H}{2}}{L-|x_s|}$ lässt sich L berechnen, da auch die Lage des Staupunktes x_s bekannt ist.

4. Aufgabe

a) Vereinfachungen:

- ausgebildete Strömung: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$
- konst. Außenströmung: $\frac{\partial u_\infty}{\partial x} = 0$

vereinfachte Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \xrightarrow{R.B.} \qquad v = -v_0 = konst.$

vereinfachte Impulsgleichung: $v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \xrightarrow{Konti} \qquad -v_0\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

b) I.) Koeffizienten bestimmen

$$u(y) = -\frac{\nu}{v_0}C_1 e^{-\frac{v_0}{\nu}y} + C_2$$

Randbedingungen:

$$y = 0 : u = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = -\frac{\nu}{v_0}C_1 + C_2 \qquad \Rightarrow \qquad C_2 = \frac{\nu}{v_0}C_1$$
$$y \to \infty : u = u_\infty \qquad \Rightarrow \qquad u_\infty = C_2 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = \frac{u_\infty v_0}{\nu}$$

$$\Rightarrow u(y) = -\frac{\nu}{v_0}\frac{u_\infty v_0}{\nu}e^{-\frac{v_0}{\nu}y} + u_\infty$$
$$\Leftrightarrow \frac{u(y)}{u_\infty} = 1 - e^{-\frac{v_0}{\nu}y}$$

II.) prüfen, ob Impulsgleichung erfüllt ist

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_\infty\frac{v_0}{\nu}e^{-\frac{v_0}{\nu}y}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -u_\infty\frac{v_0^2}{\nu^2}e^{-\frac{v_0}{\nu}y}$$

in vereinfachte Impulsgleichung einsetzen:

$$-v_0 u_\infty u_\infty\frac{v_0}{\nu}e^{-\frac{v_0}{\nu}y} = -\nu u_\infty\frac{v_0^2}{\nu^2}e^{-\frac{v_0}{\nu}y}$$
$$0 = 0 \qquad \text{q.e.d}$$

5. Aufgabe

a)

$$\text{Energiegleichung: } h_0 = h + \frac{u^2}{2}$$

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$$

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2c_p}$$

$$\text{mit } c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \text{ folgt}$$

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2\gamma R}(\gamma - 1)$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 = 1 + 0,2M^2$$

kritischer Zustand: $M = 1$, d.h. $\dfrac{T_0}{T^\star} = 1 + 0,2 \cdot 1^2 = 1,2$

b) aus der Energiegleichung ergibt sich:

$$u^2 = 2c_p (T_0 - T) = \frac{2\gamma RT}{\gamma - 1}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

eingesetzt in $M^2 = \dfrac{u^2}{\gamma RT}$ folgt

$$M^2 = \frac{2\gamma RT}{(\gamma - 1)\,\gamma RT}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right) = \frac{2}{\gamma - 1}\left(\frac{T_0}{T} - 1\right)$$

mit der Isentropenbeziehung $\dfrac{T_0}{T} = \left(\dfrac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ folgt

$$M = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)} = \sqrt{5\left(\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{2}{7}} - 1\right)}$$

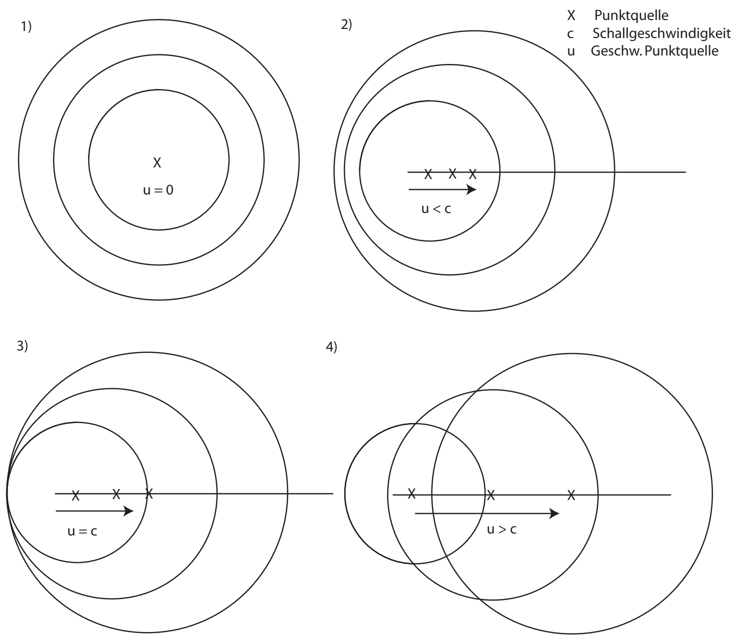
c) Im Vakuum geht $p \to 0$, d.h. $M \to \infty$.

6. Aufgabe

a)

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$
$$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$
$$\delta_1 = \delta \left[\frac{y}{\delta} - \frac{7}{8}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{8/7}\right]_0^1$$
$$\delta_1 = \frac{\delta}{8}$$

b) Druckwellen, die von der Punktquelle ausgehen:



c) Potentialwirbel (die Einführung einer Zirkulation erzeugt eine Seitenkraft)