

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik II

05. 09. 2024

M U S T E R L Ö S U N G E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

Klausur Aerodynamik II

Fragenteil, Skelett-Theorie, Überschallströmung

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n=p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n=p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall \quad |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (16 Punkte)

1. Betrachtet wird die reibungsbehaftete Strömung über eine ebene Platte ohne Druckgradienten.
 - (a) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf des Reibungsbeiwertes C_f für den Reynoldszahlbereich $2 \cdot 10^4 < Re_x < 2 \cdot 10^7$ unter der Annahme einer ungestörten Anströmung.
 - (b) Erläutern Sie kurz den Zusammenhang zwischen dem Druckgradienten und der Gefahr einer Grenzschichtablösung.

Die Strömung über die ebene Platte soll nun mit numerischen Methoden untersucht werden.

- (c) Sie möchten detaillierte Untersuchungen des turbulenten Spektrums anstellen. Ihnen stehen folgende Methoden zur Verfügung:
 - RANS
 - LES
 - DNS

Welche Verfahren sind geeignet oder ungeeignet. Begründen Sie Ihre Antwort.

- (d) Zeichnen Sie ein körperangepasstes, strukturiertes Gitter, das für Ihre geplanten Untersuchungen geeignet ist.
 - (e) Erläutern Sie, warum bei hohen Reynoldszahlen eine hohe Anzahl an Gitterpunkten in Wandnähe notwendig ist, um hochwertige Simulationsergebnisse zu produzieren.
2. Ein endlicher Flügel soll mithilfe der Traglinientheorie untersucht werden.
 - (a) Zeichnen Sie alle relevanten Geschwindigkeiten und Kräfte einschließlich der Winkelbeziehungen an einem Profilschnitt ein.
 - (b) Leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck für den induzierten Widerstandsbeiwert C_{W_i} in Abhängigkeit der Streckung Λ und der Fourier-Koeffizienten A_n her.

Hinweise:

$$\Gamma(\varphi) = 2V_\infty b \sum_{n=1}^N A_n \sin n\varphi$$
$$\alpha_i(\varphi) = \sum_{n=1}^N n A_n \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi}$$

2. Aufgabe: Skelett-Theorie (16 Punkte)

In Abbildung 2.1 ist ein S-Schlag-Profil dargestellt. Dieses soll mit der Skelett-Theorie untersucht werden.

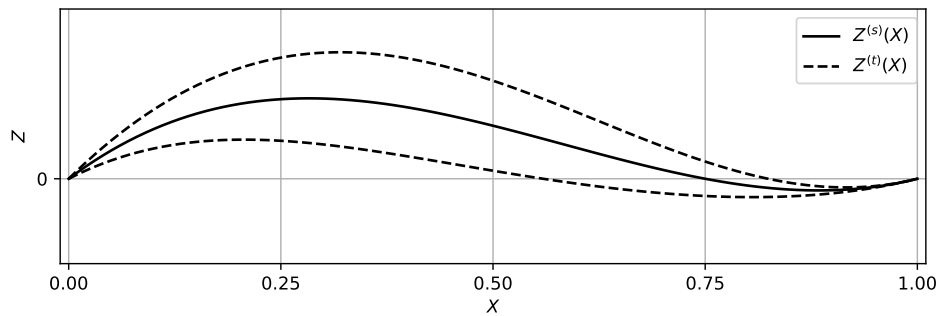


Abbildung 2.1: Skelettlinie eines S-Schlag-Profils.

- Bestimmen Sie einen Ausdruck für die Skelettlinie des in Abbildung 2.1 dargestellten Profils in Form eines Polynoms 3. Grades. Parametrisieren Sie dazu die Wölbung mit dem Parameter ϵ .

Wenn Sie Aufgabenteil 1 nicht lösen konnten, nutzen Sie für die Bearbeitung der folgenden Aufgabenteile den Ausdruck $Z^{(s)}(X) = \epsilon \left(X^3 - \frac{5}{3}X^2 + \frac{2}{3}X \right)$.

- Bestimmen Sie rechnerisch die Wölbungsrücklage des Profils.
- Bestimmen Sie alle Koeffizienten der Birnbaum-Ackermann'schen Zirkulationsverteilung.
- Leiten Sie den allgemeinen Ausdruck zur Berechnung des Auftriebsbeiwertes $C_l = 2\pi(A_0 + \frac{1}{2}A_1)$ her und bestimmen Sie diesen für das gegebene Profil in Abhängigkeit des Anstellwinkels α und des Wölbungsparameters ϵ .

Gegeben: ϵ, α

Hinweise:

- Kinematische Randbedingung an Skelettlinie:

$$\alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi)$$

- Birnbaum-Ackermann'scher Ansatz für Zirkulationsverteilung:

$$\gamma = 2u_\infty \left(A_0 \tan \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \sin n\varphi \right)$$

3. Aufgabe: Überschallströmung (18 Punkte)

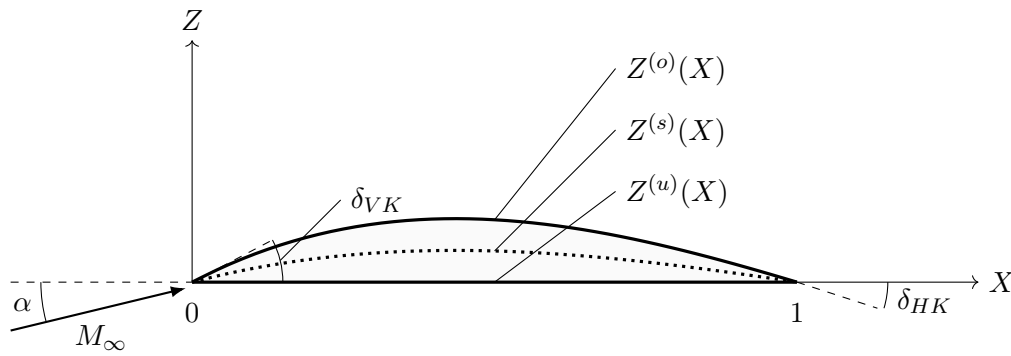


Abbildung 3.1: Profil mit spitzer Nase, gekrümmter Oberseite und flacher Unterseite.

Das in Abbildung 3.1 dargestellte Profil soll in einem Auslegungspunkt im Überschallflug untersucht werden, wobei die Flugmachzahl $M_\infty = 3.0$ und der Anstellwinkel $\alpha = 2.5^\circ$ betragen. Der Verlauf der Oberseite des Profils ist gegeben durch die Funktion

$$Z^{(o)}(X) = C (X^3 - 4X^2 + 3X).$$

1. Zunächst sollen die Beiwerte des Profils mithilfe der linearisierten Potentialtheorie bestimmt werden:

(a) Leiten Sie die Formeln

$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$C_d = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\alpha^2 + \int_0^1 \left(\frac{dZ^{(d)}}{dX} \right)^2 dX + \int_0^1 \left(\frac{dZ^{(s)}}{dX} \right)^2 dX \right]$$

für den Auftriebs- und Widerstandsbeiwert von Profilen im Rahmen der linearisierten Potentialtheorie als Funktion des Anstellwinkels α , der Dickenverteilung $Z^{(d)}(X)$ und des Verlaufs der Skelettlinie $Z^{(s)}(X)$ her.

(b) Leiten Sie die Verläufe der Dickenverteilung und der Skelettlinie des gegebenen Profils als Funktion von X her und verwenden Sie diese, um den Auftriebs- und Widerstandsbeiwert des Profils zu berechnen.

2. Im Folgenden soll die Strömung um das Profil mithilfe der Methoden der Gasdynamik beschrieben werden. Es soll davon ausgegangen werden, dass stromab der Hinterkante die Strömung parallel zu der Sehne verläuft. Die Oberseite des Profils bildet den Winkel $\delta_{VK} = 15^\circ$ gegenüber der X -Achse an der Vorderkante und den Winkel $\delta_{HK} = -10^\circ$ an der Hinterkante. Für die zweite Ableitung der Oberseite des Profils nach X gilt $d^2Z^{(o)}/dX^2 < 0$ ($\forall X \in [0; 1]$).

- (a) Skizzieren Sie sorgfältig das Strömungsfeld um das Profil unter Berücksichtigung möglicher Verdichtungsstöße, Expansionsfächer und Mach'schen Linien.
- (b) Stellen Sie die Zustandsänderungen an der Oberseite des Profils qualitativ in der Hodographenebene dar.
- (c) Berechnen Sie die Druckverhältnisse $p_{hk,o}/p_\infty$ und $p_{hk,u}/p_\infty$ der Drücke unmittelbar stromauf der Hinterkante auf der Ober- und Unterseite mithilfe der allgemeinen gasdynamischen Zusammenhänge. Verwenden Sie hierfür die gegebenen Abbildungen 3.2-3.6.

Gegeben: $M_\infty = 3.0$, $\alpha = 2.5^\circ$, $C = 0.09$

Hinweise:

- Druckbeiwert in linearisierter Potentialtheorie $c_p = \pm \frac{2\beta}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$.
- Gehen Sie davon, dass hinter etwaigen schrägen Verdichtungsstößen stets die schwache Lösung vorliegt.
- Wertetabelle für Sinusfunktion auf zwei Nachkommastellen genau:

$\phi[^\circ]$	10.0	12.5	15.0	17.5	20.0	22.5	25.0	27.5	30.0
$\sin \phi[-]$	0.17	0.22	0.26	0.30	0.34	0.38	0.42	0.46	0.50

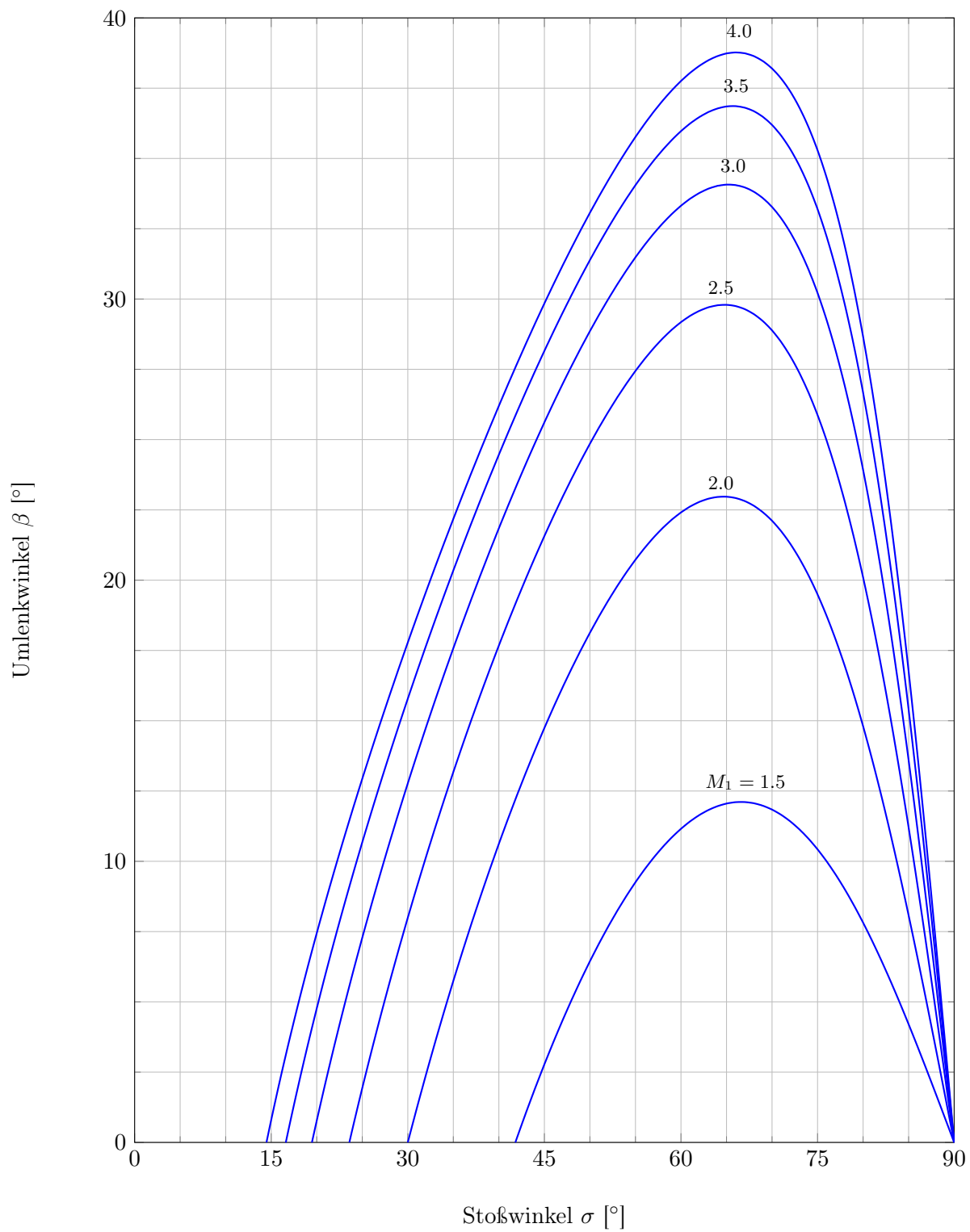


Abbildung 3.2: Umlenkwinkel über schrägen Verdichtungsstoß als Funktion der Machzahl vor dem Stoß und des Stoßwinkels.

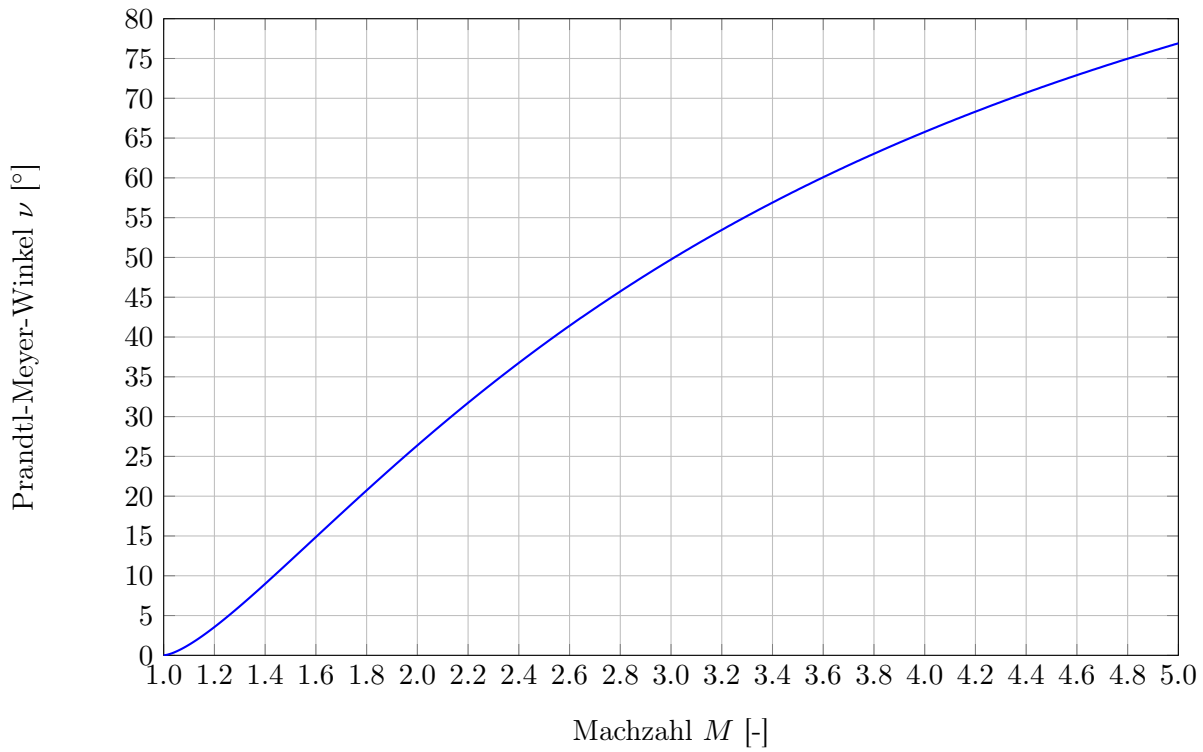


Abbildung 3.3: Prandtl-Meyer-Winkel als Funktion der Machzahl.

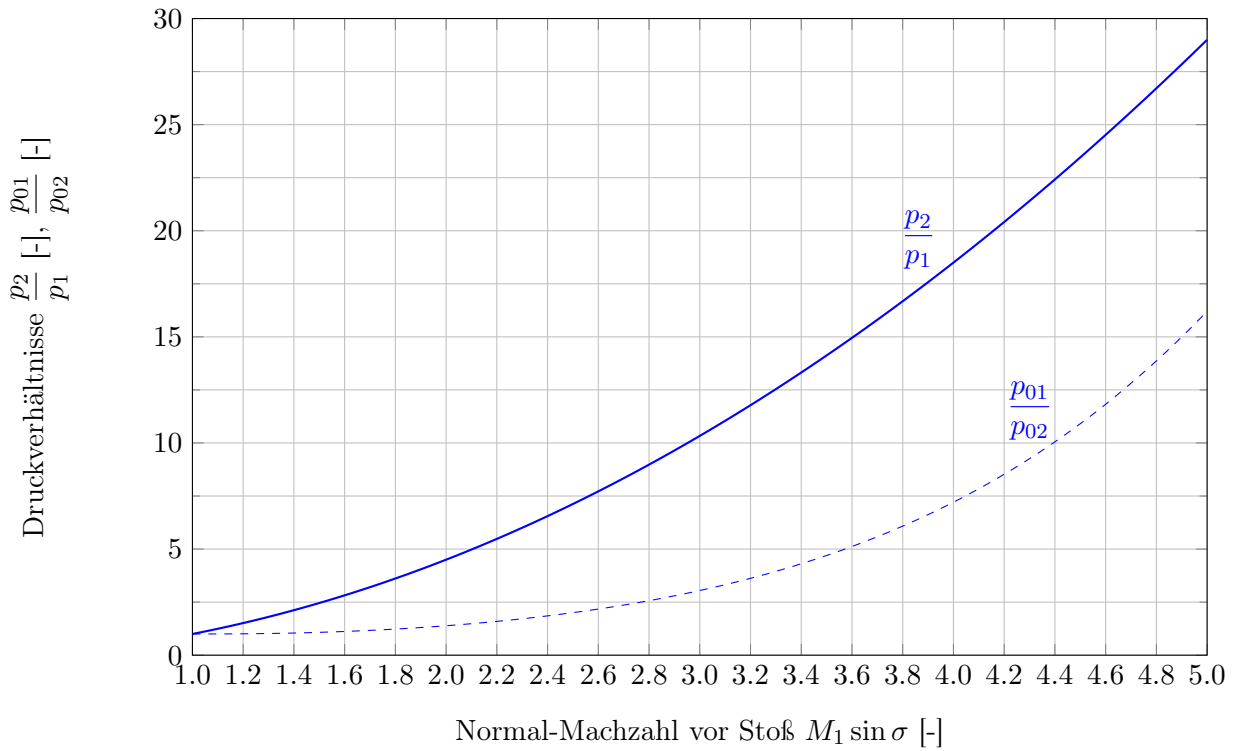


Abbildung 3.4: Rankine-Hugoniot-Beziehungen für statisches und Ruhedruckverhältnis über schräge Verdichtungsstöße.

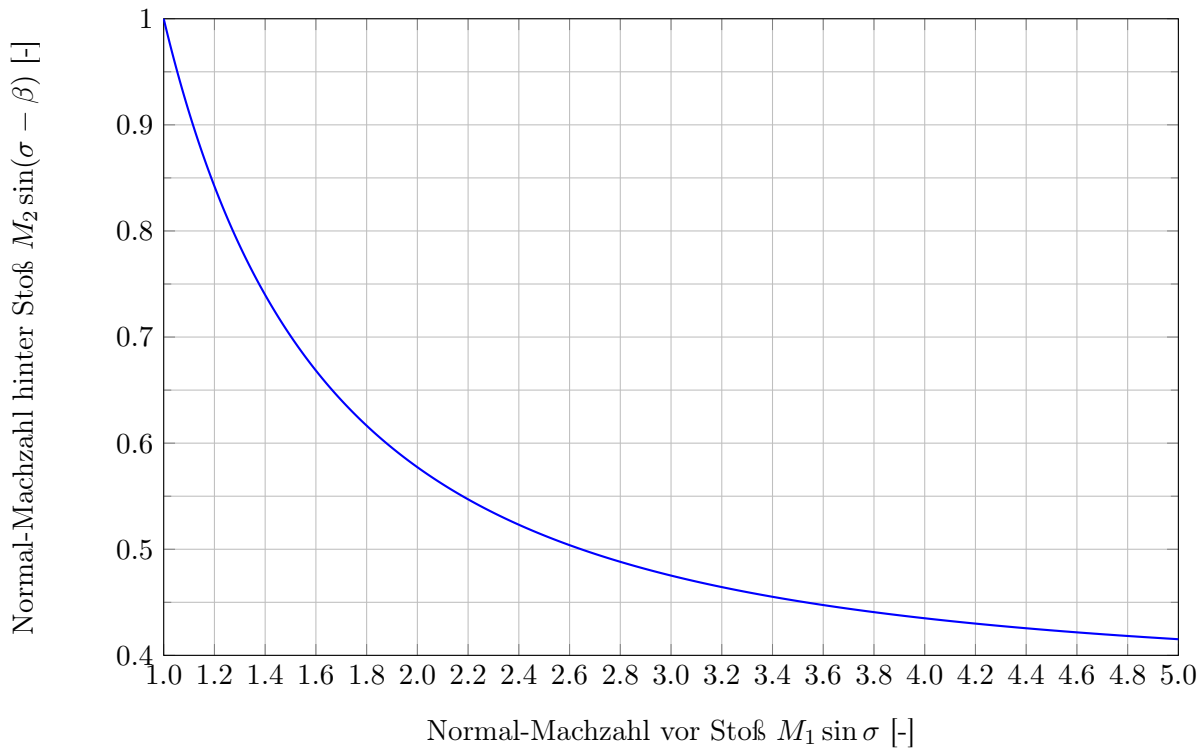


Abbildung 3.5: Verhältnis der Normal-Machzahlen über schrägen Verdichtungsstoß.

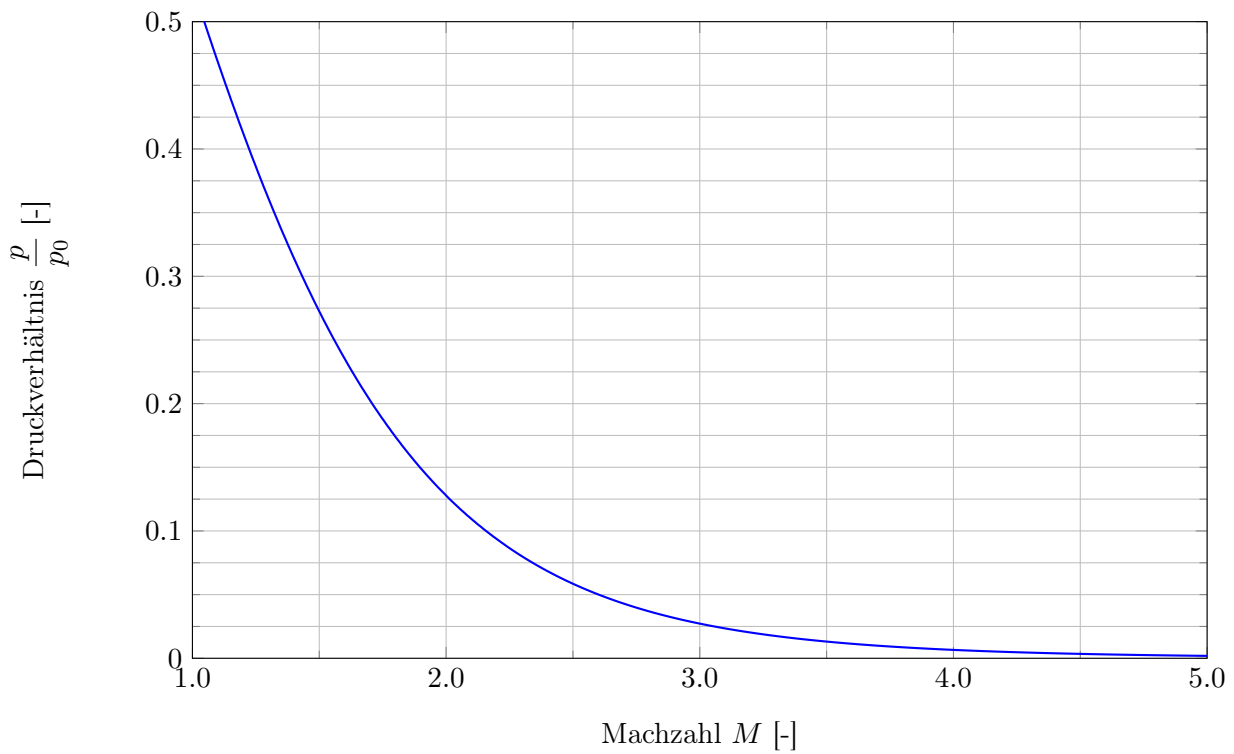


Abbildung 3.6: Isentropenbeziehung für Druck.

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (16 Punkte)

1. (a) Natürliche Transition zu turbulenter Strömung bei $Re_x = 5 \cdot 10^5$ führt zu einem Anstieg des Reibungsbeiwertes.

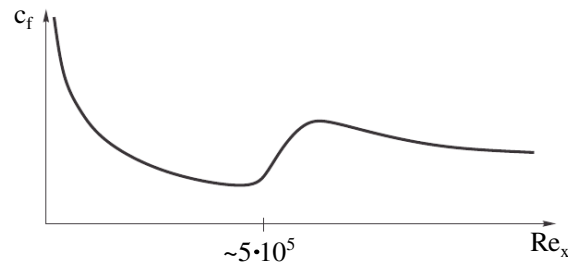


Abbildung 1.1: Verlauf des Reibungsbeiwertes der ebenen Platte mit natürlicher Transition bei $Re_x = 5 \cdot 10^5$.

- (b) Eine Grenzschichtablösung wird durch positive Druckgradienten begünstigt. Der Impuls der Strömung wird kontinuierlich reduziert, um den positiven Druckgradienten zu überwinden. Wenn der Impuls lokal in unmittelbarer Wandnähe vollständig verschwindet, kommt es zur Strömungsablösung und stromab liegen Rezirkulationsgebiete vor.
- (c)
- RANS-Simulationen sind zur Untersuchung des turbulenten Spektrums ungeeignet, da die Effekte der Turbulenz lediglich durch ein Turbulenzmodell abgebildet werden. Die turbulenten Fluktuationen werden von der Simulation nicht aufgelöst und können somit auch nicht untersucht werden.
 - LES erlauben lediglich die Untersuchung der größeren turbulenten Strukturen. Die Einflüsse kleinerer Strukturen werden von einem Feinstrukturmodell abgebildet. Wenn die Auflösung der LES für die geplanten Untersuchungen hoch genug ist, kann ein begrenztes Turbulenzspektrum untersucht werden.
 - DNS bildet alle turbulenten Längenskalen vollständig ab. Die DNS ist also für detaillierte Untersuchungen des gesamten turbulenten Spektrums geeignet. Dies ist jedoch in der Regel mit einem sehr hohen Rechenaufwand verbunden.
- (d) Strukturiertes Gitter mit Verfeinerung in Wandnähe.

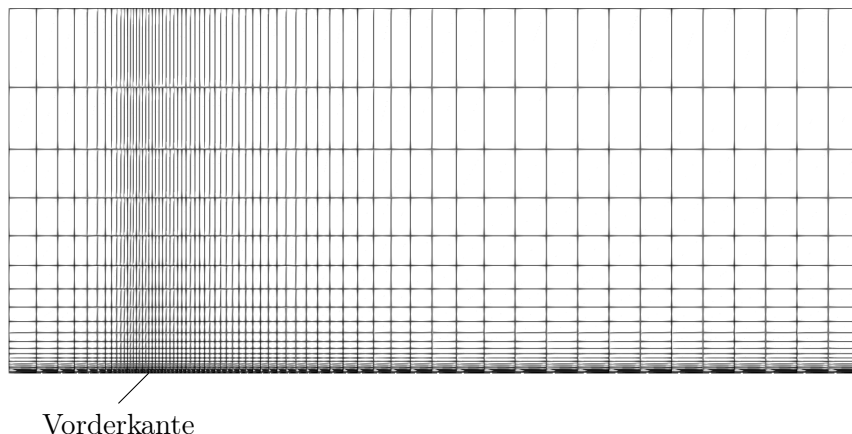


Abbildung 1.2: Strukturiertes Gitter zur Simulation einer Grenzschichtströmung an einer ebenen Platte mit höherer Auflösung in Wandnähe und nahe der Vorderkante.

- (e) Je höher die Reynoldszahl, desto dünner die Grenzschicht bezogen auf die Größe der betrachteten Geometrie. Um die Gradienten an der Wand auflösen zu können, sind zunehmend feinere Gitter

notwendig, sodass die Anzahl an Gitterpunkten drastisch mit der Reynoldszahl steigt. Nahe der Vorderkante liegen zudem hohe Gradienten in axialer Richtung vor, weshalb die Längen der Zellen in axialer Richtung in diesem Bereich ebenfalls kleiner gewählt werden (nicht gefordert in Skizze).

2. (a) Abbildung 1.3 zeigt alle relevanten Kräfte, Geschwindigkeiten und Winkel.

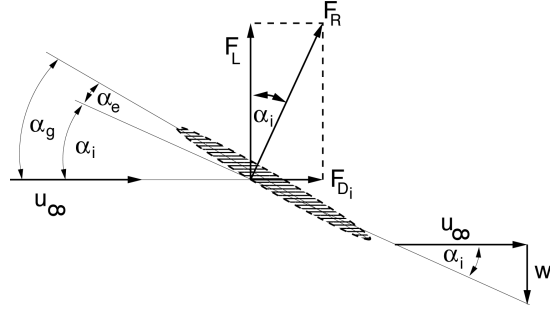


Abbildung 1.3: Kräfte, Geschwindigkeiten und Winkel am Profilschnitt des endlichen Flügels.

- (b) Herleitung des induzierten Widerstandsbeiwertes:

$$\begin{aligned}\tilde{W}_i(y) &= \tilde{L}_i(y)\alpha_i \\ \rightarrow W_i &= \int_{-b/2}^{b/2} L_i(y)\alpha_i(y)dy\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Definition des Widerstandsbeiwertes folgt:

$$c_{W_i} = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} L_i(y)\alpha_i(y)dy}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S}$$

Mit dem Satz von Kutta-Zhukovski folgt:

$$c_{W_i} = \frac{\int_{-b/2}^{b/2} \rho V_\infty \Gamma(y)\alpha_i(y)dy}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 S} = \frac{2}{V_\infty S} \int_{-b/2}^{b/2} \Gamma(y)\alpha_i(y)dy$$

Transformation des Integrals:

$$\begin{aligned}y &= -\frac{b}{2} \cos \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{d\varphi} = \frac{b}{2} \sin \varphi \\ \Rightarrow c_{W_i} &= \frac{b}{V_\infty S} \int_0^\pi L_i(\varphi)\alpha_i(\varphi) \sin \varphi d\varphi\end{aligned}$$

Einsetzen der Hinweise für $\Gamma(\varphi)$ und $\alpha_i(\varphi)$:

$$\begin{aligned}c_{W_i} &= \frac{b}{V_\infty S} \int_0^\pi 2bV_\infty \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin n\varphi \right) \left(\sum_{n=1}^N nA_n \frac{\sin n\varphi}{\sin \varphi} \right) \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{2b^2}{S} \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^N A_n \sin n\varphi \right) \left(\sum_{n=1}^N nA_n \sin n\varphi \right) d\varphi = \frac{2b^2}{S} \left(\sum_{n=1}^N n(A_n)^2 \frac{\pi}{2} \right)\end{aligned}$$

Mit der Definition der Streckung folgt:

$$c_{W_i} = \pi \Lambda \sum_{n=1}^N n(A_n)^2$$

Lösung 2. Aufgabe: Skelett-Theorie (16 Punkte)

1. Die Nullstellen der Skelettlinie befinden sich entsprechend der Abbildung bei $X_0 = 0$, $X_1 = \frac{3}{4}$ und $X_2 = 1$. Ein Polynom 3. Grades, das diese Anforderungen erfüllt, lautet

$$\begin{aligned} Z^{(s)}(X) &= \epsilon(X - X_0)(X - X_1)(X - X_2) \\ &= \epsilon X \left(X - \frac{3}{4}\right)(X - 1) \\ &= \epsilon \left(X^3 - \frac{7}{4}X^2 + \frac{3}{4}X\right) \end{aligned}$$

2. Zur Bestimmung der Wölbungsrücklage wird zunächst die Stelle der maximalen Wölbung bestimmt.

$$\begin{aligned} \frac{dZ^{(s)}}{dX} &= \epsilon \left(3X^2 - \frac{7}{2}X + \frac{3}{4}\right) = 0 \\ \Rightarrow X^2 - \frac{7}{6}X + \frac{3}{12} &= 0 \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Nullstellen erfolgt mithilfe der p-q-Formel und liefert:

$$X_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{12}$$

Beide Lösungen befinden sich im Intervall $[0; 1]$ und sind somit physikalisch. Bei $X_1 = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$ erreicht die Funktion ihr Maximum und bei $X_2 = \frac{7+\sqrt{13}}{12}$ ihr Minimum. Die Wölbungsrücklage liegt hier bei der kleineren der beiden Wurzeln, also bei $X_1 = \frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

3. Der Ansatz zur Bestimmung der Birnbaum-Ackermann'schen Zirkulationsverteilung erfolgt über die kinematische Randbedingung der Skeletttheorie:

$$\begin{aligned} \alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi) \\ \alpha - \epsilon \left[3X^2 - \frac{7}{2}X + \frac{3}{4}\right] &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi) \end{aligned}$$

Einsetzen der Transformation $X = \frac{1}{2} (1 + \cos(\varphi))$ liefert:

$$\begin{aligned}\alpha - \epsilon \left[\frac{3}{4} (1 + \cos(\varphi))^2 - \frac{7}{4} (1 + \cos(\varphi)) + \frac{3}{4} \right] &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi) \\ \alpha - \epsilon \left[\frac{3}{4} (1 + 2 \cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)) - \frac{7}{4} (1 + \cos(\varphi)) + \frac{3}{4} \right] &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi) \\ \alpha - \epsilon \left[\frac{3}{4} - \frac{7}{4} + \frac{3}{4} + \frac{6}{4} \cos(\varphi) - \frac{7}{4} \cos(\varphi) + \frac{3}{4} \cos^2(\varphi) \right] &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi) \\ \alpha - \epsilon \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(\varphi) + \frac{3}{4} \cos^2 \varphi \right] &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi) \\ \alpha - \epsilon \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos(\varphi) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} (1 + \cos(2\varphi)) \right] &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi) \\ \alpha - \epsilon \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cos(\varphi) + \frac{3}{8} \cos(2\varphi) \right] &= A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi)\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$A_0 = \alpha - \frac{1}{8}\epsilon, \quad A_1 = \frac{1}{4}\epsilon, \quad A_2 = -\frac{3}{8}\epsilon, \quad A_n = 0 \quad (\forall n > 2)$$

4. Ansatz 1 zur Bestimmung des Auftriebsbeiwertes:

$$c_l = \int_0^1 \Delta c_p(X) dX = \int_0^1 (c_{p,u}(X) - c_{p,o}(X)) dX$$

Mit der Definition des Druckbeiwertes:

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2}$$

Bernoulli aus der freien Anströmung zur Skelettstromlinie:

$$\begin{aligned}p_\infty + \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 &= p + \frac{1}{2}\rho(u_\infty + u)^2 \\ \Rightarrow p - p_\infty &= \frac{1}{2}\rho(u_\infty^2 - (u_\infty + u)^2) \\ &= \frac{1}{2}\rho(u_\infty^2 - (u_\infty^2 + 2uu_\infty + u^2)) \\ &= \frac{1}{2}\rho(-2uu_\infty - u^2)\end{aligned}$$

Mit $u \ll u_\infty$ folgt:

$$p - p_\infty = -\frac{1}{2}\rho u u_\infty$$

Eingesetzt ergibt sich für den Druckbeiwert:

$$c_p = -\mp \frac{u}{u_\infty} = \mp \frac{\gamma}{u_\infty}$$

Eingesetzt in den Ansatz folgt:

$$c_l = \int_0^1 2 \frac{\gamma(X)}{u_\infty} dX$$

Ansatz 2 zur Bestimmung des Auftriebsbeiwertes:

$$c_l = \frac{\hat{L}}{\frac{1}{2} \rho u_\infty}$$

Mit dem Satz von Kutta-Zhukovski:

$$\begin{aligned} \hat{L} &= \rho u_\infty \Gamma \\ &= \rho u_\infty \int_0^1 \gamma(X) dX \end{aligned}$$

Eingesetzt in den Ansatz folgt:

$$c_l = \int_0^1 2 \frac{\gamma(X)}{u_\infty} dX$$

Mit der Transformation:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi) \\ \frac{dX}{d\varphi} &= -\frac{1}{2} \sin \varphi \\ \Rightarrow c_l &= \int_\pi^0 2 \frac{\gamma(\varphi)}{u_\infty} \left(-\frac{1}{2} \sin \varphi \right) d\varphi \end{aligned}$$

Einsetzen der Birnbaum-Ackermann'schen Zirkulationsverteilung:

$$\begin{aligned} c_l &= \int_0^\pi 4 \left(A_0 \tan \frac{\varphi}{2} + \sum_{n=1}^N A_n \sin n\varphi \right) \left(\frac{1}{2} \sin \varphi \right) d\varphi \\ &= \int_0^\pi 2 \left(A_0 \tan \frac{\varphi}{2} \sin \varphi + \sum_{n=1}^N A_n \sin \varphi \sin n\varphi \right) d\varphi \\ &= \int_0^\pi 2 \left(A_0 (1 - \cos \varphi) + \sum_{n=1}^N A_n \sin \varphi \sin n\varphi \right) d\varphi \end{aligned}$$

Das Integral über die Reihe $\sum_{n=1}^N \sin \varphi \sin n\varphi$ ist gleich null für alle $n \neq 1$:

$$\begin{aligned} c_l &= 2 \cdot \left[(\varphi - \sin \varphi) A_0 + \frac{\varphi}{2} A_1 \right]_0^\pi \\ &= 2 \cdot \left(\pi A_0 + \frac{\pi}{2} A_1 \right) = 2\pi \left(A_0 + \frac{1}{2} A_1 \right) \end{aligned}$$

Mit den eingesetzten Koeffizienten folgt:

$$\begin{aligned} c_l &= 2\pi \left(\alpha - \frac{1}{8} \epsilon + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \epsilon \right) \\ &= 2\pi \alpha \end{aligned}$$

Lösung 3. Aufgabe: Überschallströmung (18 Punkte)

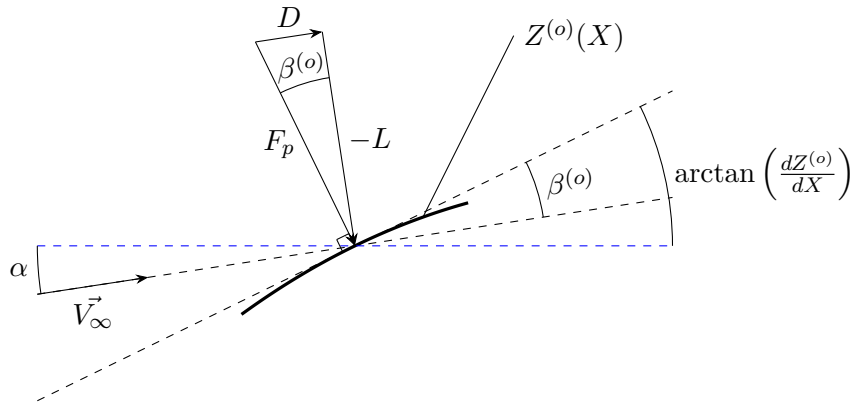


Abbildung 3.1: Aufteilung der Druckkraft auf die Profiloberseite in Auftriebs- und Widerstandskomponente.

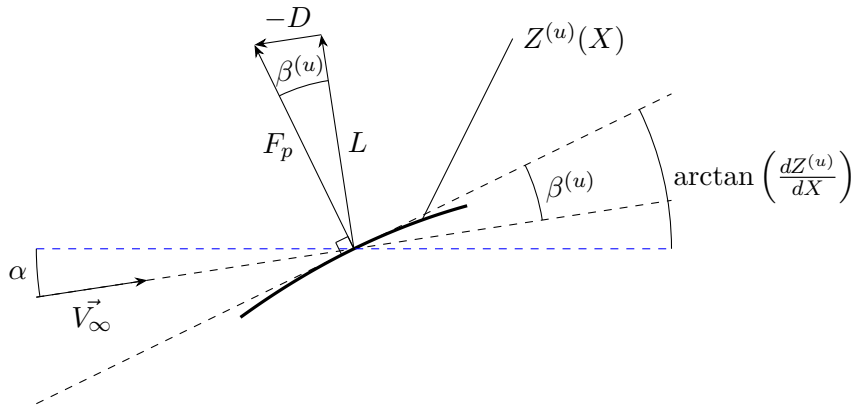


Abbildung 3.2: Aufteilung der Druckkraft auf die Profilunterseite in Auftriebs- und Widerstandskomponente.

1. (a) Strömungsumlenkung β auf Profiloberfläche gegenüber der freien Anströmung als Funktion von X für Oberseite folgt aus Abbildung 3.1 (Situation an Unterseite analog aus Abbildung 3.2):

$$\beta_o = \arctan\left(\frac{dZ^{(o)}}{dX}\right) - \alpha$$

$$\beta_u = \arctan\left(\frac{dZ^{(u)}}{dX}\right) - \alpha$$

wobei $\beta < 0$ einer Umlenkung im Uhrzeigersinn und $\beta > 0$ einer Umlenkung in mathematisch positive Drehrichtung entspricht. Im Rahmen der Potentialtheorie wird von schmalen Profilen und kleinen Anstellwinkeln ausgegangen. Deshalb kann in dieser Gleichung die Kleinwinkelnäherung $\arctan(x) \approx x$ angesetzt werden, so dass gilt:

$$\beta_o = \frac{dZ^{(o)}}{dX} - \alpha$$

$$\beta_u = \frac{dZ^{(u)}}{dX} - \alpha$$

Für den Auftriebsbeiwert gilt

$$C_l = \int_0^1 \left[c_{p,u} \cos\left(\alpha - \arctan\left(\frac{dZ^{(u)}}{dX}\right)\right) - c_{p,o} \cos\left(\alpha - \arctan\left(\frac{dZ^{(o)}}{dX}\right)\right) \right] dX.$$

In dieser Gleichung sind die Argumente der Cosinus klein und es kann die Kleinwinkelnäherung $\cos(x) \approx 1$ angesetzt werden, so dass

$$C_l = \int_0^1 (c_{p,u} - c_{p,o}) dX.$$

Mit der Formel

$$c_{p,u} = \frac{-2\beta_u}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

$$c_{p,o} = \frac{2\beta_o}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

aus dem Hinweis folgt daraus

$$C_l = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^1 \left(2\alpha - \frac{dZ^{(u)}}{dX} - \frac{dZ^{(o)}}{dX} \right) dX.$$

Wegen

$$\int_0^1 \frac{dZ^{(u)}}{dX} dX = \left[Z^{(u)} \right]_0^1 = 0 - 0 = 0$$

$$\int_0^1 \frac{dZ^{(o)}}{dX} dX = \left[Z^{(o)} \right]_0^1 = 0 - 0 = 0$$

folgt daraus die Formel

$$C_l = \frac{4\alpha}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}$$

aus der Aufgabenstellung.

Für den Widerstandsbeiwert gilt

$$C_d = \int_0^1 \left[-c_{p,u} \sin \left(\arctan \left(\frac{dZ^{(u)}}{dX} - \alpha \right) \right) + c_{p,o} \sin \left(\arctan \left(\frac{dZ^{(o)}}{dX} - \alpha \right) \right) \right] dX.$$

Wie weiter oben können auch hier Kleinwinkelnäherungen angesetzt werden, und zwar $\arctan(x) \approx x$ und $\sin(x) \approx x$, so dass

$$C_d = \int_0^1 \left(-c_{p,u} \left(\frac{dZ^{(u)}}{dX} - \alpha \right) + c_{p,o} \left(\frac{dZ^{(o)}}{dX} - \alpha \right) \right) dX.$$

Die Druckbeiwerte in diesem Ausdruck werden durch die Formeln aus dem Hinweis ersetzt, so dass zusammen mit den oben gegebenen Umlenk winkeln für Ober- und Unterseite der Ausdruck

$$C_d = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^1 \left[\left(\frac{dZ^{(u)}}{dX} - \alpha \right)^2 + \left(\frac{dZ^{(o)}}{dX} - \alpha \right)^2 \right] dX$$

$$C_d = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^1 \left[\left(\alpha - \frac{dZ^{(u)}}{dX} \right)^2 + \left(\alpha - \frac{dZ^{(o)}}{dX} \right)^2 \right] dX$$

erhalten wird. Die Ausdrücke für die Ober- und Unterseite werden ersetzt durch

$$Z^{(o)} = Z^{(s)} + Z^{(d)}$$

$$Z^{(u)} = Z^{(s)} - Z^{(d)}.$$

Daraus folgt:

$$C_d = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^1 \left[\left(\alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} + \frac{dZ^{(d)}}{dX} \right)^2 + \left(\alpha - \frac{dZ^{(s)}}{dX} - \frac{dZ^{(d)}}{dX} \right)^2 \right] dX$$

Ausmultiplizieren der Quadrate führt zu folgendem Ausdruck:

$$C_d = \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[2 \int_0^1 \alpha^2 dX + 2 \int_0^1 \left(\frac{dZ^{(s)}}{dX} \right)^2 dX + 2 \int_0^1 \left(\frac{dZ^{(d)}}{dX} \right)^2 dX - 4 \int_0^1 \alpha \frac{dZ^{(s)}}{dX} dX \right].$$

Da der Anstellwinkel konstant ist, kann er vor das Integral gezogen werden. Der letzte Term verschwindet dann wegen

$$\int_0^1 \frac{dZ^{(s)}}{dX} dX = [Z^{(s)}]_0^1 = 0 - 0 = 0$$

und es folgt die Gleichung

$$C_d = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\alpha^2 + \int_0^1 \left(\frac{dZ^{(d)}}{dX} \right)^2 dX + \int_0^1 \left(\frac{dZ^{(s)}}{dX} \right)^2 dX \right]$$

aus der Aufgabenstellung.

- (b) Die Skelettlinie liegt in der Mitte zwischen der Ober- und Unterseite. Der Ausdruck für die Oberseite ist gegeben, jener für die flache Unterseite ist $Z^{(u)} = 0$. Somit gilt

$$Z^{(s)} = \frac{1}{2} (Z^{(o)} + Z^{(u)}) = \frac{C}{2} (X^3 - 4X^2 + 3X).$$

Die Dickenverteilung kann z.B. aus der Differenz der Verläufe von $Z^{(s)}$ und $Z^{(u)}$ bestimmt werden:

$$Z^{(d)} = Z^{(s)} - Z^{(u)} = Z^{(s)} = \frac{1}{2} (Z^{(o)} + Z^{(u)}) = \frac{C}{2} (X^3 - 4X^2 + 3X).$$

Mit $\alpha = 2.5 \frac{\pi}{180}$ und $M_\infty = 3.0$ folgt für den Auftriebsbeiwert

$$C_l = \frac{\sqrt{2}\pi}{72}.$$

Die Gleichung für den Widerstandsbeiwert kann wegen des vorliegenden Sonderfalls $Z^{(s)} = Z^{(d)}$ vereinfacht werden:

$$C_d = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \left[\alpha^2 + 2 \int_0^1 \left(\frac{dZ^{(s)}}{dX} \right)^2 dX \right].$$

Die Ableitung des Verlaufes der Skelettlinie ist gegeben durch:

$$\frac{dZ^{(s)}}{dX} = \frac{C}{2} (3X^2 - 8X + 3).$$

Somit folgt für den Widerstandsbeiwert:

$$\begin{aligned} C_d &= \sqrt{2} \left[\left(\frac{\pi}{72} \right)^2 + \frac{C^2}{2} \int_0^1 (9X^4 - 48X^3 + 82X^2 - 48X + 9) dX \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\left(\frac{\pi}{72} \right)^2 + \frac{C^2}{2} \left[\frac{9}{5}X^5 - 12X^4 + \frac{82}{3}X^3 - 24X^2 + 9X \right]_0^1 \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\left(\frac{\pi}{72} \right)^2 + \frac{C^2}{2} \left(\frac{9}{5} - 12 + \frac{82}{3} - 24 + 9 \right) \right] \\ &= \sqrt{2} \left[\left(\frac{\pi}{72} \right)^2 + \frac{16}{15}C^2 \right] \end{aligned}$$

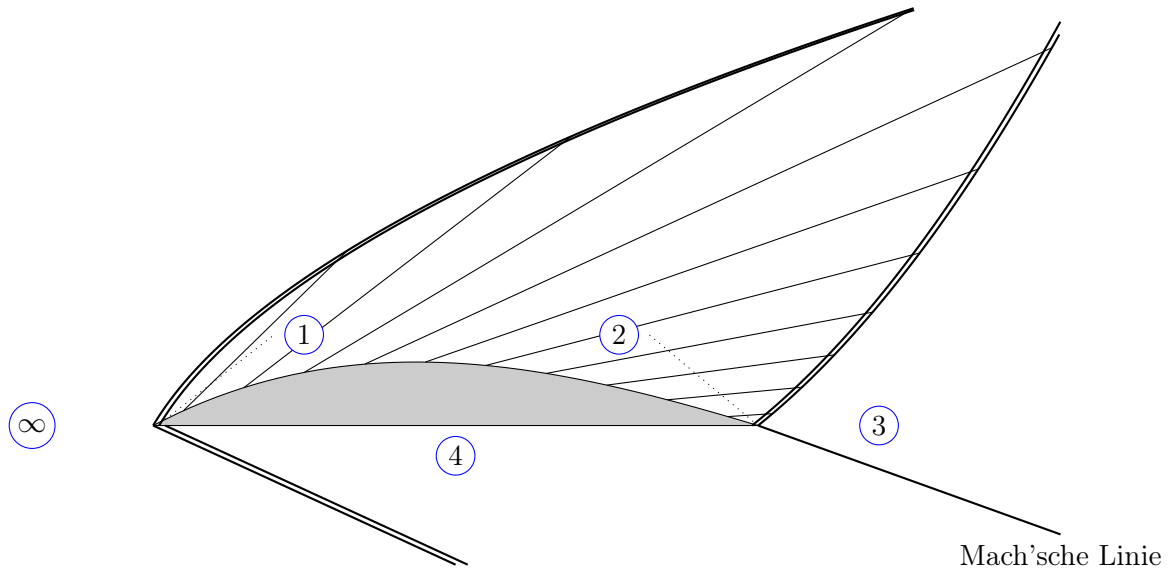


Abbildung 3.3: Strömungsfeld um Profil

2. (a) Abbildung 3.3 zeigt die Strömung um das Profil.

- Oberseite: Stöße an Vorder- und Hinterkante. Wegen der Krümmung der Oberseite Expansionswellen entlang der gesamten Oberseite.
- Unterseite: Stoß an Vorderkante. Mach'sche Linie an Hinterkante, da Strömung stromab der Hinterkante parallel zur Sehne angenommen wird.

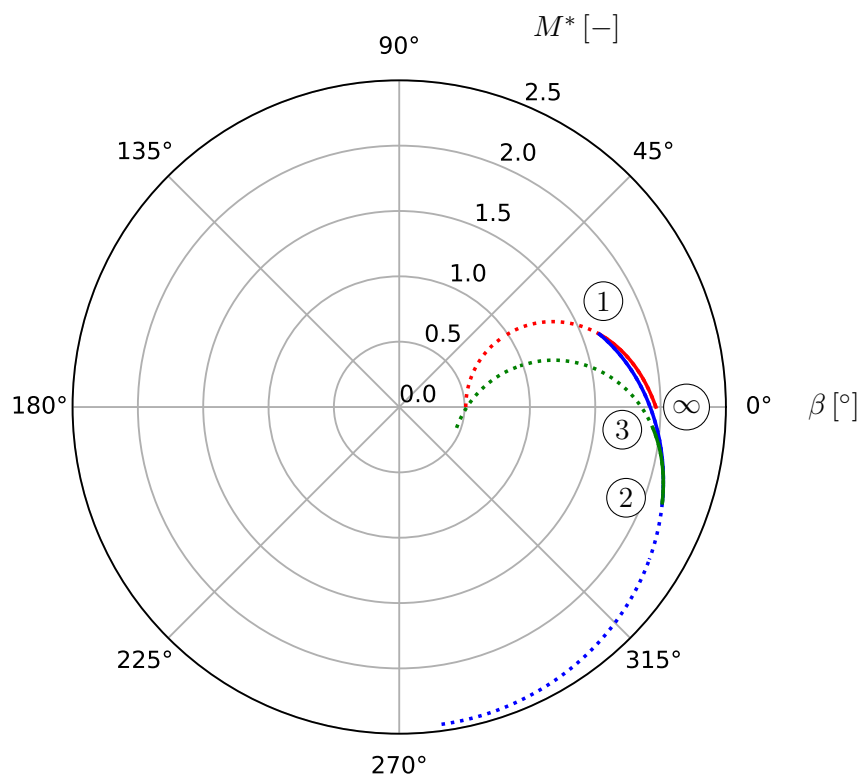


Abbildung 3.4: Zustandsänderungen der Oberseite in Hodographenebene

(b) Abbildung 3.4 zeigt die Zustandsänderungen der Oberseite in der Hodographenebene.

- (c) Die Zustände werden wie in Abbildung 3.3 dargestellt nummeriert. Zunächst wird das Druckverhältnis auf der Profilerseite bestimmt.

- Zustand der freien Anströmung

Druckverhältnis von statischem und Ruhedruck bei $M_\infty = 3.0$ aus Isentropenbeziehung (Abbildung 3.6): $\frac{p_\infty}{p_{0\infty}} \approx 0.025$

- Zustandsänderung $\infty \rightarrow 1$: Verdichtungsstoß

Umlenkwinkel: $\beta_{\infty \rightarrow 1} = \delta_{v,o} - \alpha = 12.50^\circ$

Machzahl vor Stoß: $M_\infty = 3.0$ (Aufgabenstellung)

Stoßwinkel aus Diagramm 3.2: $\sigma_{\infty \rightarrow 1} \approx 30^\circ$

Druckverhältnis aus Diagramm 3.4 mit $M_\infty \sin \sigma_{\infty \rightarrow 1} = 1.5$: $\frac{p_1}{p_\infty} \approx 2.5$

Machzahl hinter Stoß aus Diagramm 3.5 mit $M_\infty \sin \sigma_{\infty \rightarrow 1} = 1.5$ und $\sin(\sigma_{\infty \rightarrow 1} - \beta_{\infty \rightarrow 1}) \approx 0.30$ aus Tabelle in Hinweisen: $M_1 \sin(\sigma_{\infty \rightarrow 1} - \beta_{\infty \rightarrow 1}) \approx 0.70 \implies M_1 \approx 2.33$

Totaldruckverlust über Verdichtungsstoß aus Abbildung 3.4 mit $M_1 \sin \sigma_{\infty \rightarrow 1} = 1.5$: $\frac{p_{0\infty}}{p_{01}} \approx 1.0$

- Zustandsänderung $1 \rightarrow 2$: Isentrope Expansion

Prandtl-Meyer-Winkel an Vorderkante aus Diagramm 3.3 mit $M_1 = 2.33$: $\nu_1 \approx 35.0^\circ$

Umlenkwinkel: $\beta_{1 \rightarrow 2} = \delta_{HK} - \delta_{VK} \approx -25.0^\circ$

Prandtl-Meyer-Winkel an Hinterkante: $\nu_2 = \nu_1 - \beta_{1 \rightarrow 2} \approx 60.0^\circ$

Machzahl an Hinterkante aus Diagramm 3.5 mit $\nu_2 \approx 60.0^\circ$: $M_2 \approx 3.6$

Druckverhältnis von statischem und Ruhedruck aus Isentropenbeziehung (Abbildung 3.6) mit $M_2 = 3.6$: $\frac{p_2}{p_{02}} = 0.010$

Isentrope Zustandsänderung: $p_{02} = p_{01}$.

Druckverhältnis gegenüber freier Anströmung: $\frac{p_2}{p_\infty} = \frac{p_2}{p_{02}} \frac{p_{01}}{p_{0\infty}} \frac{p_{0\infty}}{p_\infty} \approx 0.010 * 1.0 / 0.025 = 0.4$

Im folgenden wird das Druckverhältnis auf der Unterseite des Profils bestimmt:

- Zustandsänderung $\infty \rightarrow 4$: Verdichtungsstoß

Umlenkwinkel: $\beta_{\infty \rightarrow 4} = \alpha = 2.5^\circ$

Machzahl vor Stoß: $M_\infty = 3.0$ (Aufgabenstellung)

Stoßwinkel aus Diagramm 3.2: $\sigma_{\infty \rightarrow 4} \approx 20^\circ$

Druckverhältnis aus Diagramm 3.4 mit $M_\infty \sin \sigma_{\infty \rightarrow 4} \approx 1.1$: $\frac{p_4}{p_\infty} \approx 1.25$