

Musterlösung zur Klausur Strömungslehre

1. Aufgabe (8 Punkte)

- a) Durch den erhöhten Druck im rechten Luftballon ist auch die Dichte der Luft dort höher als in der Umgebung. Deshalb wirkt auch nach Abzug der Auftriebskraft immer noch eine Kraft $\Delta \rho g V$ in Richtung der Erdschwere auf den rechten Arm der Waage.
- b) Eine Rauchlinie ist die konsekutive Verbindungslinie aller Partikel, die einen festgelegten Punkt im Raum passiert haben.

- c) KGG für den unbeladenen Fall:

$$G_1 = \rho A_G h_1 g$$

KGG für den beladenen Fall:

$$G_1 + m_{max} g = \rho A_G h_2 g$$

aus beiden Gleichungen erhält man:

$$\Rightarrow m_{max} = \rho A_G h_2 - \rho A_G h_1 \quad (1)$$

Wobei A_G die Gefäßgrundfläche, h_1 die Eintauchtiefe des Gefäßes für den unbeladenen Fall und h_2 für den beladenen Fall ist.

Das vom Wasser eingenommene Volumen bleibt konstant:

$$AH - A_G h_1 = A(H + \Delta H) - A_G h_2$$

$$\Rightarrow A_G h_2 - A_G h_1 = A \Delta H \quad (2)$$

Aus (1) und (2) erhält man:

$$\Rightarrow m_{max} = \rho A \Delta H$$

2. Aufgabe (13 Punkte)

- a) Hubweg gegeben: $\xi = \xi_0 \sin \omega t$; daraus folgt für a): $v = d\xi/dt$
 Instationärer Bernoulli von der linken Wasseroberfläche 1 bis zum Kolbenboden K:

$$p_a + \rho g H_1 = p_K + \frac{\rho}{2} (d\xi/dt)^2 + \rho \int_1^K \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$p_K = p_a + \rho g H_1 - \frac{\rho}{2} (\xi_0 \omega \cos \omega t)^2 - \rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} \int_{Einlauf}^K ds$$

$$p_K = p_a + \rho g H_1 - \frac{\rho}{2} \xi_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t + \rho \xi_0 \omega^2 \sin \omega t \cdot L$$

Für den minimalen Druck gilt $\sin \omega t = -1$ und $\cos \omega t = 0$, da $\omega t = 3\pi/2$; außerdem gilt $p_K = p_D$ für $\omega = \omega_{max}$:

$$p_K - p_a - \rho g H_1 = -\rho L \xi_0 \omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{p_a + \rho g H_1 - p_D}{\rho L \xi_0}$$

$$\Rightarrow \omega = 15,33 \frac{1}{s}$$

- b) Hubweg gegeben: $\xi = \xi_0 \sin \omega t$; aber für b): $v = -d\xi/dt$
 Instationärer Bernoulli vom Kolbenboden K bis zum Rohrleitungsausstritt 2 in der Tiefe H_2 unter der rechten Wasseroberfläche:

$$p_K + \frac{\rho}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \rho \int_K^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$p_K = p_a + \rho g H_2 - \rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} \int_K^2 ds \quad \text{mit} \quad p_2 = p_a + \rho g H_2$$

$$p_K = p_a + \rho g H_2 + \rho L \xi_0 \omega^2 \sin \omega t$$

$p_K = p_{max}$ wird offensichtlich bei $\sin \omega t = 1$ erlangt:

$$p_{max} = p_a + \rho g H_2 + \rho L \xi_0 \omega^2$$

$$p_{max} = 2,7 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$$

- c) Der minimale Druck wird bei einem Phasenwinkel von $\omega t = \frac{3}{2}\pi$ erreicht. Für $\omega t = \frac{3}{2}\pi$ ist die Geschwindigkeit jedoch genau gleich null (s. a)). Da die Reibung proportional zur Geschwindigkeit ist, haben die Reibungsverluste zwar einen Einfluß auf die Druckverteilung, jedoch ohne den minimalen Druck zu ändern.

3. Aufgabe (14 Punkte)

a) $Fr < 1$

b) Bernoulli:

$$\rho g z + \rho g y + \frac{\rho}{2} v^2 = \text{const}$$

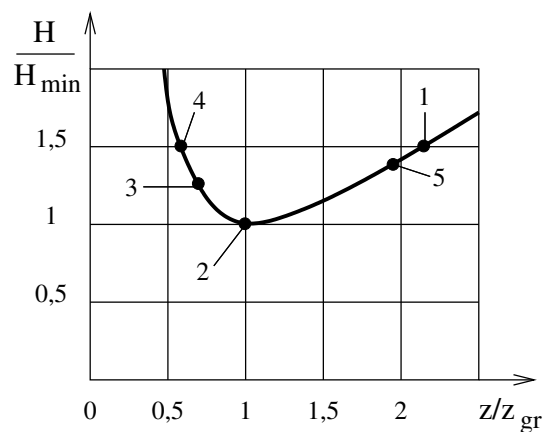
$$\Rightarrow z + \frac{v^2}{2g} + y = \text{const} \quad \text{mit} \quad H = z + \frac{v^2}{2g} \quad \text{und} \quad v = \frac{q}{z}$$

$$\Rightarrow H = z + \frac{q^2}{2gz^2}$$

$$H_{\min} : \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \Rightarrow z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

$$\Rightarrow H_{\min} = z_{gr} + \frac{q^2}{2gz_{gr}^2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$$

c) Skizze:



d) Konti:

$$v_4 z_4 b = v_V z_V b_V \Rightarrow v_V = v_4 \frac{1}{2 \cdot 0,644}$$

Bernoulli von 4 bis zur Verengung V:

$$\rho g z_4 + \frac{\rho}{2} v_4^2 = \rho g z_V + \frac{\rho}{2} v_V^2$$

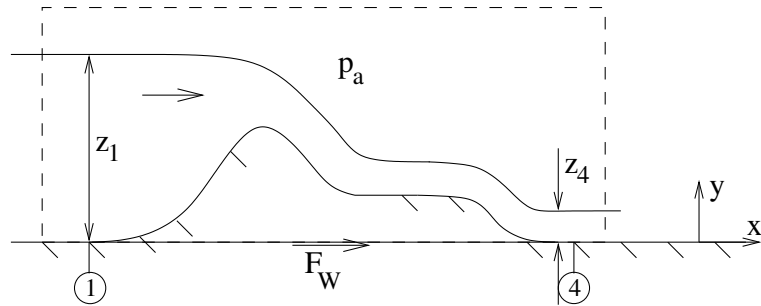
$$\Rightarrow (v_4^2 - v_V^2) = 2gz_4 \Rightarrow v_4^2 = \frac{2gz_4}{1 - \frac{1}{4 \cdot 0,644^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_4^2}{gz_4} = 5,04 \Rightarrow Fr_4 = \frac{v_4}{\sqrt{gz_4}} = 2,24$$

e) Mit $y_2 = y_{gr}$, d.h. $H_2/H_{\min} = 1$, erhält man auf der Linie $H/H_{\min} = 1,5$ aus dem Diagramm für den strömenden Zustand $z_1/z_{gr} = 2,16$ und für den schießenden Zustand $z_4/z_{gr} = 0,583$

$$\Rightarrow z_1/z_4 = 3,7$$

f) Impulserhaltungssatz (Bilanzhülle):



$$-\rho v_1^2 z_1 b - b \int_0^{z_1} p_1(z) dz + \rho v_4^2 z_4 b + b \int_0^{z_4} p_4(z) dz + p_a b(z_1 - z_4) + F_W = 0$$

mit $p_1(z) = p_a + \rho g(z_1 - z)$ und $p_4(z) = p_a + \rho g(z_4 - z)$

$$\Rightarrow F_W = \rho v_1^2 z_1 b - \rho v_4^2 z_4 b + b \rho g \frac{z_1^2}{2} - b \rho g \frac{z_4^2}{2}$$

$$\Rightarrow F_W = \rho b v_4^2 \left(\frac{z_4^2}{z_1^2} z_1 - z_4 \right) + \rho g b \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_4^2}{2} \right) \quad \text{mit} \quad v_1 = v_4 \frac{z_4}{z_1} \quad \text{Konti}$$

$$\Rightarrow \frac{F_W}{\rho g b} = \frac{v_4^2}{g z_4} z_4^2 \left(\frac{z_4}{z_1} - 1 \right) + z_4^2 \left(\frac{z_1^2}{2 z_4^2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{F_W}{\rho g b} = z_4^2 (Fr)^2 \left(\frac{z_4}{z_1} - 1 \right) + \frac{z_4^2}{2} \left(\frac{z_1^2}{z_4^2} - 1 \right)$$

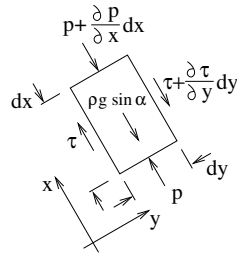
$$\Rightarrow z_4^2 = \frac{F_W}{\rho g b} \left((Fr)^2 \left(\frac{z_4}{z_1} - 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{z_1^2}{z_4^2} - 1 \right) \right)^{-1}$$

$$\Rightarrow z_4 = 0,58 \text{m}$$

4. Aufgabe (12 Punkte)

a) Nein.

b) Kräftegleichgewicht in x -Richtung (am Volumenelement):



$$p dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy + \tau dx - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy \right) dx - \rho_F g \sin \alpha dx dy = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} - \rho_F g \sin \alpha = 0$$

mit $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ und $\tau = -\eta_F \frac{du}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\rho_F g \sin \alpha \Rightarrow \tau = -\rho_F g y \sin \alpha + c_1$$

mit RB1 $\tau(d) = \tau_d$: $\tau_d = -\rho_F g d \sin \alpha + c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \rho_F g d \sin \alpha$

$$\Rightarrow \tau = -\rho_F g \left(y - \frac{1}{2} d \right) \sin \alpha$$

$$\Rightarrow du = \frac{\rho_F g \sin \alpha}{\eta_F} \left(y - \frac{1}{2} d \right) dy$$

$$\Rightarrow u = \frac{\rho_F g \sin \alpha}{\eta_F} \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y d}{2} \right) + c_2$$

mit RB2 $u(0) = u_W$: $c_2 = u_W$

$$\Rightarrow u = \frac{\rho_F g d^2 \sin \alpha}{2 \eta_F} \left(\left(\frac{y}{d} \right)^2 - \frac{y}{d} \right) + u_W$$

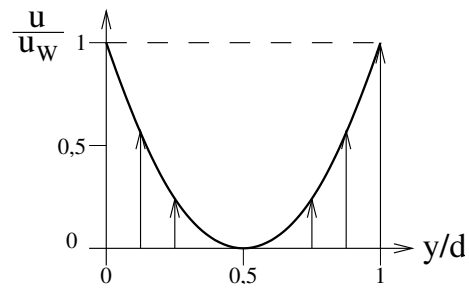
c) Die minimale Geschwindigkeit u liegt bei

$$\frac{du}{dy} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} d$$

$$u\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{\rho_F g d^2 \sin \alpha}{2 \eta_F} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) + u_W \geq 0$$

$$u_{W,min} = \frac{\rho_F g d^2 \sin \alpha}{8 \eta_F}$$

d) Skizze:



e) Es existieren z.B. Kugelblasen mit innerer Zirkulation (oder elliptische Blasen oder Schirmblasen). Diese Blasenarten werden unterschieden, da sie veränderten Gesetzen für den jeweiligen Widerstandsbeiwert folgen.

5. Aufgabe (10 Punkte)

- a) Die Prandtl Zahl ist dann von Bedeutung, wenn die Wärmeübertragung in einer Strömung eine Rolle spielt.
- b) 5 Einflußgrößen ($\Delta p, D, \omega, \rho, \dot{Q}$), 3 Grunddimensionen (kg, m, s) \Rightarrow 2 Kennzahlen
Wähle D, ρ und ω als sich wiederholendes Variablen-set.

$$\begin{aligned} K_1 &= \Delta p D^\alpha \omega^\beta \rho^\gamma \\ 1 &= \left(\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2} \right) (\text{m})^\alpha (\text{s}^{-1})^\beta \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)^\gamma \\ \text{kg} &: \quad 0 = 1 + \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = -1 \\ \text{s} &: \quad 0 = -2 - \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -2 \\ \text{m} &: \quad 0 = -1 + \alpha - 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2 \\ \Rightarrow K_1 &= \frac{\Delta p}{D^2 \rho \omega^2} \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu \quad \text{mit} \quad v = D\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \dot{Q} D^\alpha \omega^\beta \rho^\gamma \\ 1 &= \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \right) (\text{m})^\alpha (\text{s}^{-1})^\beta \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right)^\gamma \\ \text{kg} &: \quad 0 = \gamma \\ \text{s} &: \quad 0 = -1 - \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -1 \\ \text{m} &: \quad 0 = 3 + \alpha - 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = -3 \\ \Rightarrow K_2 &= \frac{\dot{Q}}{D^3 \omega} \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{\bar{u}}{D\omega} = \frac{1}{Sr} \quad \text{mit} \quad \bar{u} = \frac{\dot{Q}}{D^2}, \quad f = \omega \end{aligned}$$

- c) Die Kennzahlen (Re, M) des Modells müssen gleich den Kennzahlen des Flugzeugs sein.

Die Geschwindigkeit im Windkanal beträgt bei $M = 0,7$:
 $u = M \cdot c = 0,7 \cdot \sqrt{\gamma R T} = 228 \text{ m/s}$

Die dynamische Viskosität im Windkanal beträgt bei $M = 0,7$:
 $\eta = (T/T_0)^{0,72} \cdot 18,22 \cdot 10^{-6} \text{ kg/sm} = 17,03 \cdot 10^{-6} \text{ kg/sm}$

Bei einer vorgegebenen Reynolds Zahl ergibt sich die charakteristische Länge l zu:
 $Re = \frac{\rho u l}{\eta} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\eta Re}{\rho u} = 1,58 \text{ m}$

- d) Eine mögliche Maßnahme ist die Verringerung der Temperatur, wodurch die Reynolds Zahl bei konstanter Länge l ansteigt bzw. bei konstanter Reynolds Zahl die Länge l kleiner wird.

5. Aufgabe

$$a) \quad \bar{f}(z) = \frac{a}{2} \cdot z^2 + \frac{a}{2} \left(\frac{R_0^4}{z} \right)$$

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \bar{f}(z) = \frac{a}{2} \cdot r^2 \cdot e^{i2\varphi} + \frac{a}{2} \cdot \frac{R_0^4}{r^2} \cdot e^{-i2\varphi}$$

(aus Hinweis): $e^{i2\varphi} = \cos(2\varphi) + i \sin(2\varphi)$; $e^{-i2\varphi} = \cos(-2\varphi) + i \sin(-2\varphi)$
 $= \cos(2\varphi) - i \sin(2\varphi)$

$$\Rightarrow \phi(r, \varphi) = R_0^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(2\varphi) \cdot \left[\left(\frac{r}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \right]$$

$$\psi(r, \varphi) = R_0^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin(2\varphi) \cdot \left[\left(\frac{r}{R_0} \right)^2 - \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \right]$$

$$b) \quad V_r(r, \varphi) = \frac{\partial \phi}{\partial r} = R_0^2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos(2\varphi) \cdot \left[\frac{2r}{R_0^2} - \frac{2 \cdot R_0^2}{r^3} \right]$$

$$= a \cdot \cos(2\varphi) \cdot \left[r - \frac{R_0^4}{r^3} \right]$$

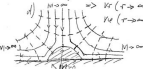
$$V_\varphi(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = - \frac{2 \cdot R_0^2}{r} \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin(2\varphi) \cdot \left[\left(\frac{r}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{R_0}{r} \right)^2 \right]$$

$$= - a \cdot \sin(2\varphi) \cdot \left[r + \frac{R_0^4}{r^3} \right]$$

c) 1) Zylinderoberfläche: $0 \leq \varphi \leq \pi$; $r = R_0$
 $\Rightarrow V_r(R_0, \varphi) = 0$
 $V_\varphi(R_0, \varphi) = - 2 \cdot a \cdot R_0 \sin(2\varphi)$

2) $x=0$; $y \rightarrow +\infty \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$ und $r \rightarrow \infty$
 $\Rightarrow V_r(r \rightarrow \infty, \frac{\pi}{2}) \rightarrow -\infty$
 $V_\varphi(r \rightarrow \infty, \frac{\pi}{2}) = 0$ (Symmetrie)

3) $y=0$ und $x \rightarrow \pm\infty \Leftrightarrow \varphi = 0, \pi$ und $r \rightarrow \infty$
 $\Rightarrow V_r(r \rightarrow \infty, (0; \pi)) \rightarrow +\infty$
 $V_\varphi(r \rightarrow \infty, (0; \pi)) = 0$ (Symmetrie)



→ Stromlinien

- - - Äquipotentiallinien

7. Aufgabe (13 Punkte)

a)

$$\begin{aligned}\tau_W &= \eta \frac{d\bar{u}}{dy} \Rightarrow d\bar{u} = \frac{\tau_W}{\eta} dy \\ \Rightarrow \bar{u} &= \frac{\tau_W}{\nu \rho} y + c \quad \text{mit RB } \bar{u}(0) = 0 : \quad c = 0 \\ \Rightarrow \bar{u} &= \frac{1}{\nu} \frac{\tau_W}{\rho} y \quad \text{mit } u^{*2} = \frac{\tau_W}{\rho} \\ \Rightarrow \frac{\bar{u}}{u^*} &= \frac{yu^*}{\nu}\end{aligned}$$

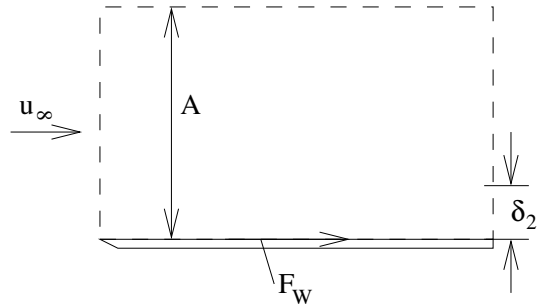
b)

$$\begin{aligned}\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{U} \frac{dU}{dx} (2\delta_2 + \delta_1) - \frac{\tau_W}{\rho U^2} &= 0 \\ \text{mit } \frac{dU}{dx} &= 0 \quad (\text{ebene Platte}) \quad \text{und} \quad \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{7d\delta}{72dx} \quad (\text{Hinweis}) \\ \Rightarrow \frac{d\delta}{dx} &= \frac{72}{7} \frac{\tau_W}{\rho U^2} \\ \text{mit } c_f &= \frac{\tau_W}{\rho U^2/2} = 0,045 \left(\frac{\nu}{u_\infty \delta(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad \text{und} \quad U = u_\infty \quad (\text{ebene Platte}) \\ \Rightarrow \delta^{\frac{1}{4}} \frac{d\delta}{dx} &= 0,2314 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} \\ \int_0^{\delta(x)} \tilde{\delta}^{\frac{1}{4}} d\tilde{\delta} &= 0,2314 \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{\frac{1}{4}} \int_0^x dx \\ \Rightarrow \delta(x) &= 0,3707 \left(\frac{\nu}{u_\infty} x^4 \right)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow \delta(x) = \frac{0,3707x}{\sqrt[5]{Re_x}} \\ \Rightarrow \delta(L) &= 0,1476\text{m}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}c_W &= \frac{F_W}{LB\rho u_\infty^2/2} = \frac{1}{L} \int_0^L c_f dx \\ \Rightarrow F_W &= \frac{B\rho u_\infty^2}{2} \int_0^L c_f dx \\ \Rightarrow F_W &= B\rho u_\infty^2 \cdot 0,0225 \int_0^L \left(\frac{\nu}{u_\infty} \frac{\sqrt[5]{Re_x}}{0,3707x} \right)^{\frac{1}{4}} dx \\ \Rightarrow F_W &= B\rho u_\infty^2 \cdot 0,0288 \int_0^L \left(\frac{\nu}{u_\infty} \right)^{\frac{1}{5}} \frac{dx}{x^{\frac{1}{5}}} \\ \Rightarrow F_W &= 0,036 B\rho u_\infty^2 \frac{L}{\sqrt[5]{Re_L}} \\ \Rightarrow F_W &= 28,7\text{N}\end{aligned}$$

d) Impulserhaltungssatz um die Platte (Bilanzhülle):



$$-\rho u_\infty^2 A + \rho u_\infty^2 (A - \delta_2 B) + F_W = 0$$

$$\Rightarrow \rho u_\infty^2 \delta_2 = \frac{F_W}{B}$$

$$\Rightarrow \delta_2 = \frac{F_W}{B \rho u_\infty^2}$$

8. Aufgabe (12 Punkte)

a)

$$\begin{aligned}h_0 &= h + \frac{u^2}{2} \quad \text{mit} \quad h = c_p T \\ \Rightarrow \quad c_p T_0 &= c_p T + \frac{u^2}{2} \quad \text{mit} \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \quad (\text{Hinweis}) \\ \Rightarrow \quad \frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{(\gamma - 1)u^2}{2\gamma RT} \quad \text{mit} \quad c^2 = \gamma RT \\ \Rightarrow \quad \frac{T_0}{T} &= 1 + \frac{(\gamma - 1)u^2}{2c^2} \\ \Rightarrow \quad \frac{T}{T_0} &= \left(1 + \frac{(\gamma - 1)}{2}M^2\right)^{-1}\end{aligned}$$

b) Aus der Mach Zahl des schnelleren Flugzeugs $M_1 = \frac{u_1}{\sqrt{\gamma RT}} = 2,5$

bestimmt man den Machschen Winkel $\alpha_1 = \arcsin \frac{1}{M_1} = 23,6^\circ$

Aus der Strecke, die der Schall des schnelleren Flugzeugs rechtwinklig zur Flugrichtung zurücklegen muß, ergibt sich:

$$(u_1 - u_B)\Delta t \tan \alpha_1 = b \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{b}{u_1 - u_B} \cot \alpha_1 = 0,916 \text{ s}$$

c)

$$\begin{aligned}c_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} &= c_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} = c_p T_0 \quad (\text{Energiegleichung}) \\ \Rightarrow \quad T_0 &= T_1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma R} u_1^2 = 647 \text{ K} \\ \Rightarrow \quad T_2 &= T_1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma R} (u_1^2 - u_2^2) \quad (\text{mit Hinweis}) \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad u_2 = 255 \text{ m/s} \\ \Rightarrow \quad T_2 &= 614 \text{ K} \\ \frac{p_2}{p_{02}} &= \left(\frac{T_2}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad (\text{Isentropenbeziehung}) \\ \Rightarrow \quad p_2 &= 7 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2\end{aligned}$$

d) Die Geschwindigkeiten müssen aufgespalten werden in eine Komponente normal und eine tangential zur Stoßfront.

$$\begin{aligned}u_{t1} &= u_1 \cos \sigma_d = 546 \text{ m/s}, \quad u_{n1} = u_1 \sin \sigma_d = 651 \text{ m/s} \\ u_{t2} &= u_{t1} = 546 \text{ m/s}, \quad \frac{u_{n1}}{u_{n2}} = 2,539 \quad (\text{mit Hinweis}) \quad \Rightarrow \quad u_{n2} = 256 \text{ m/s} \\ T_{2d)} &= T_1 + \frac{\vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2}{2c_p} \quad \Rightarrow \quad T_{2d)} - T_1 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma R} (u_1^2 - (u_{n2}^2 + u_{t2}^2)) \\ \Rightarrow \quad \Delta T &= 179 \text{ K}\end{aligned}$$