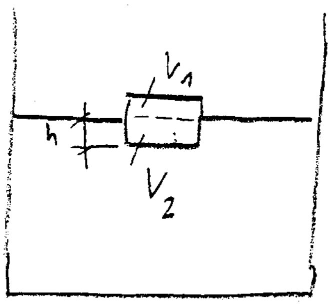
Punkteverteilung in den Prüfungsfächern

Die nachfolgende Tabelle zeigt die Punktverteilung in den Aufgaben der einzelnen Prüfungen.
20.03.2003

Aufgabe	Klausur I+II		TSL		Schein I		Schein II		Schein I+II	
	Nr.	Punkte	Nr.	Punkte	Nr.	Punkte	Nr.	Punkte	Nr.	Punkte
1 a)	1 a)	4	1 a)	4	1 a)	4			1 a)	4
b)	b)	6	b)	6	b)	6			b)	6
c)	c)	4	--	-	--	-			--	-
2 a)	2 a)	4	2 a)	4	2 a)	4			2 a)	4
b)	b)	3	b)	3	b)	3			b)	3
c)	c)	6	--	-	--	-			--	-
3 a)	3 a)	8	3 a)	8	3 a)	8			3 a)	8
b)	b)	2	b)	2	--	-			--	-
c)	c)	3	--	-	--	-			--	-
4 a)	4 a)	9	4 a)	9	4 a)	9			4 a)	9
b)	b)	2	b)	2	--	-			--	-
c)	c)	3	--	-	--	-			--	-
5 a)	5 a)	4	5 a)	4	--		1 a)	4	5 a)	4
b)	b)	3	b)	3	--		b)	3	b)	3
c)	c)	3	--	-	--		--	-	--	-
d)	d)	1	--	-	--		--	-	--	-
6 a)	6 a)	5	--	-	--		2 --	-	6 --	-
b)	b)	2	--	-	--		a)	2	b)	2
c)	c)	2	--	-	--		b)	2	c)	2
d)	d)	2	--	-	--		c)	2	d)	2
e)	e)	2	--	-	--		d)	2	e)	2
7 a)	7 a)	3	6 a)	3	--		3 a)	3	7 a)	3
b)	b)	7	b)	7	--		b)	7	b)	7
c)	c)	2	--	-	--		--	-	--	-
d)	d)	2	c)	2	--		--	-	--	-
8 a)	8 a)	3	7 a)	3	--		4 a)	3	8 a)	3
b)	b)	3	b)	3	--		b)	3	b)	3
c)	c)	4	--	-	--		--	-	--	-
d)	d)	3	--	-	--		--	-	--	-
Summe:		105		63		34		31		65

1. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht am Eiswürfel:



$$F_{A_1} + F_{A_2} = F_G$$

$$F_G = \rho_E\, g\, a^3$$

$$F_{A_1} = \rho_L\, g\, (a-h)\, a^2$$

$$F_{A_2} = \rho_W\, g\, h\, a^2 .$$

1 1

$$\Rightarrow \rho_L g (a-h) a^2 + \rho_W g h a^2 = \rho_E g a^3$$

$$\rho_L (a-h) + \rho_W h = \rho_E \cdot a$$

$$\rho_L a - \rho_L h + \rho_W h = \rho_E a$$

$$h = a \frac{(\rho_E - \rho_L)}{(\rho_W - \rho_L)}$$

$$\rho_L = \frac{p_a}{R_L T_a} \quad 1$$

$$\Rightarrow h = a \frac{\left(\rho_E - \frac{p_a}{R T_a}\right)}{\left(\rho_W - \frac{p_a}{R T_a}\right)} \quad 1$$

b) Ablauf in zwei Schritten

1) Temperaturerhöhung $\to$ Druckänderung bei const. Volumen $p_a \to p_{b_1}$

2) Volumenänderung durch schmelzenden Eiswürfel bei const. T
$\to$ Druckänderung $p_{b_1} \to p_b$.

1) id. Gas $\frac{p_a}{T_a} = \frac{p_{b_1}}{T_b} \Rightarrow p_{b_1} = p_a \cdot \frac{T_b}{T_a} \to p_{b_1} = \frac{T_a + \Delta T}{T} \cdot p_a$

2) Eiswürfel schmilzt; seine Masse bleibt konst. $\Rightarrow m_{ew} = \rho_E a^3$!
$= \rho_W \cdot V_{geschm.}$

$$\to V_{geschm.} = \frac{\rho_E}{\rho_W} \cdot a^3$$

Volumenänderung:

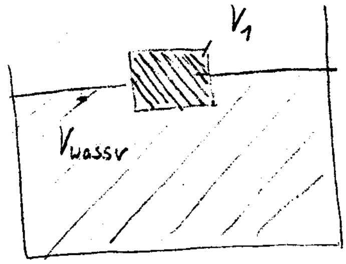
$$p_b \cdot V_b = p_{b_1} \cdot V_{3_1}$$

V_b: Der Luft zur Verfügung stehendes Volumen nach dem Schmelzen

V_{b_1}: Der Luft zur Verfügung stehendes Volumen vor dem Schmelzen

$$\Rightarrow \quad p_b = p_{b_1} \cdot \frac{V_{b_1}}{V_b}$$

$$= p_a \cdot \frac{T_a + \Delta T}{T_a} \cdot \frac{V_{b_1}}{V_b} \quad (3)$$



$$V_{b_1} = V_{ges} - V_{wasser_1} - V_1$$

$$V_{b_1} = \frac{2}{3}\pi R^3 + 3\pi R^3 - 2\pi R^3 - a^3$$

$$= \frac{5}{3}\pi R^3 - a^3 \quad (1)$$

$$(1) \quad V_b = V_{ges} - V_{wassr} - V_{geschm.\,Würfel}$$

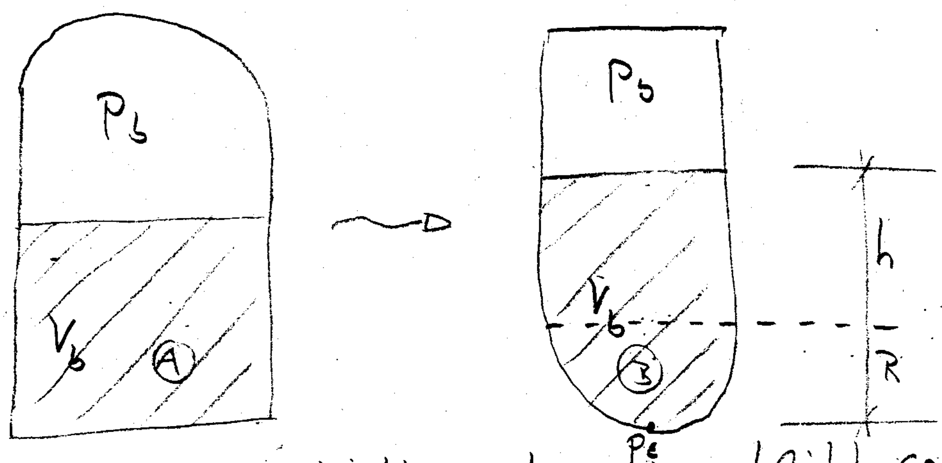
$$= \frac{2}{3}\pi R^3 + 3\pi R^3 - 2\pi R^3 - \frac{\rho_\epsilon}{\rho_w} a^3$$

$$= \frac{5}{3}\pi R^3 - \frac{\rho_\epsilon}{\rho_w} a^3 \quad (1)$$

$$p_b = p_a \cdot \frac{T_a + \Delta T}{T_a} \cdot \frac{\frac{5}{3}\pi R^3 - a^3}{\frac{5}{3}\pi R^3 - \frac{\rho_\epsilon}{\rho_w} a^3}$$

mit h aus a)

c)



Volumen des Wassr bleibt konst. $\rightarrow$ p_b bleibt const. (1)

$$p_c = p_b + \rho g (h + R) \quad (1)$$

konst. Wasservolumen:

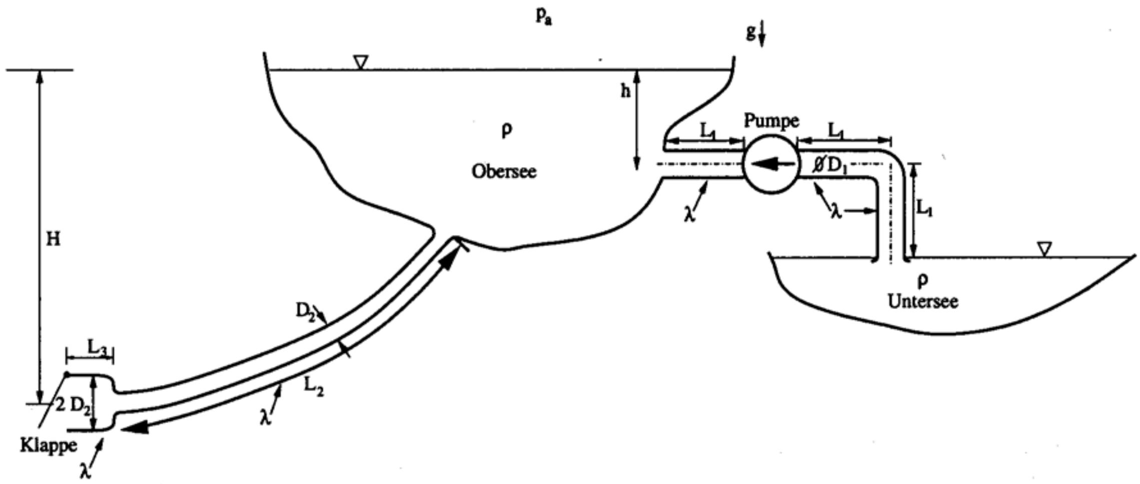
$$2\pi R^3 + \frac{\rho_\epsilon}{\rho_w} a^3 = \frac{2}{3}\pi R^3 + R^2 \pi \cdot h$$

$$h = \frac{4}{3} R + \frac{\rho_\epsilon a^3}{\rho_w \pi R^2}$$

$$p_c = p_b + \rho g \left(\frac{7}{3} R + \frac{\rho_\epsilon}{\rho_w} \frac{a^3}{\pi R^2} \right) \quad (1)\ (1)$$

2. Aufgabe

Der Wasserspiegel eines Obersees soll mit Hilfe einer Pumpe reguliert werden. Bei andauernder Trockenheit kann dem Untersee Wasser (Volumenstrom $\dot{Q}$) entnommen werden. Dieses strömt dabei durch 3 Rohrelemente der Länge L_1 und dem Durchmesser D_1. Der Rohrreibungsbeiwert sei jeweils λ.



Gegeben: $\dot{Q}$, λ, D_1, D_2, L_1, L_2, L_3, h, H, g, p_a, p_D, ρ

a) Bestimmen Sie die erforderliche Pumpenleistung.

b) Berechnen Sie den maximalen Volumenstrom, der sich fördern lässt, so, dass der Dampfdruck p_D an keiner Stelle unterschritten wird.

c) Um ein Überlaufen des Sees bei längeren Regenperioden zu verhindern, kann überschüssiges Wasser über eine Rohrleitung (links) abgeführt werden. Nach welcher Zeit ΔT erreicht das ausströmende Wasser die Hälfte der stationären Endgeschwindigkeit, wenn die Klappe am Ende der Leitung plötzlich geöffnet wird?

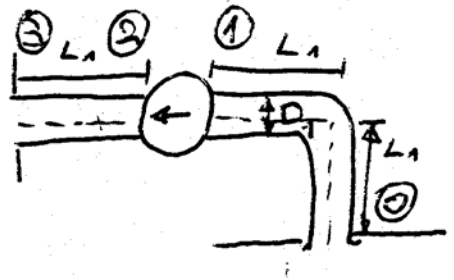
Hinweis:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

2. Aufgabe

Leistung der Pumpe: $P = \dot{Q}\,\Delta p_0$; $\Delta p_0 = p_2 - p_1$

a)



Bernoulli ⓪ → ①:

$$p_a = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(1 + 2\lambda \frac{L_1}{D_1}\right) + \rho g L_1 \qquad (1)_1$$

Bernoulli ② → ③:

$$p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 = p_3 + \frac{\rho}{2} v_3^2 \left(1 + \lambda \frac{L_1}{D_1}\right) \qquad (1)_2$$

HGG: $p_3 = p_a + \rho g h$; Konti: $v = v_1 = v_2 = v_3$

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = \rho g (h + L_1) + \frac{\rho}{2} v^2 \left(1 + 3\lambda \frac{L_1}{D_1}\right) \qquad (1)_3$$

mit $\dot{Q} = \frac{\pi}{4} D_1^2 v$ folgt:

$$P = \dot{Q} \left[\rho g (h + L_1) + 8\rho \left(\frac{\dot{Q}}{\pi D_1^2}\right)^2 \left(1 + 3\lambda \frac{L_1}{D_1}\right)\right] \qquad (1)_4$$

b) $p_{min} = p_1$ (Druck am Pumpeneintritt) $(1)_5$

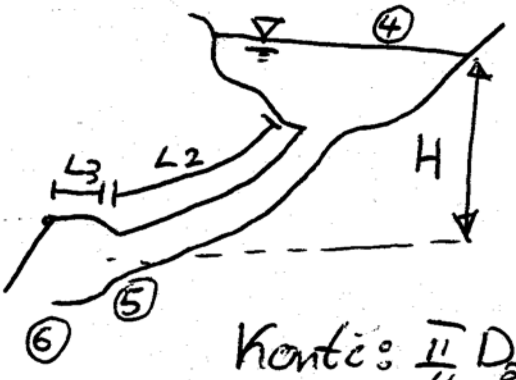
mit Bernoulli aus a) folgt:

$$p_1 = p_a - \frac{\rho}{2} v^2 \left(1 + 2\lambda \frac{L_1}{D_1}\right) - \rho g L_1 \overset{!}{>} p_D \qquad (1)_6$$

$$\Leftrightarrow v < \left(\frac{2(p_a - p_D - \rho g L_1)}{\rho\left(1 + 2\lambda \frac{L_1}{D_1}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \dot{Q}_{max} < \frac{\pi}{4} D_1^2 v = \frac{\pi}{4} D_1^2 \left(\frac{2(p_a - p_D - \rho g L_1)}{\rho\left(1 + 2\lambda \frac{L_1}{D_1}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (1)_7$$

c) instationäres Ausströmen:



Bernoulli ④ → ⑥

$$p_a + \rho g H = p_6 + \frac{\rho}{2} v_6^2 + \rho \int_4^6 \frac{\partial v}{\partial t}\, ds + \Delta p_v \qquad (1)_8$$

mit $p_6(t \geq 0) = p_a$ und

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} v_5^2 \lambda \frac{L_2}{D_2} + \frac{\rho}{2} v_6^2 \lambda \frac{L_3}{D_3}$$

Konti: $\frac{\pi}{4} D_2^2 v_5 = \frac{\pi}{4} D_3^2 v_6$

$$\Rightarrow \Delta p_v = \frac{\rho}{2} v_6^2 \lambda \left(\frac{L_3}{2 D_2} + \frac{L_2}{D_2} \cdot 16\right) \qquad (1)_9$$

für stat. Ausströmen gilt: $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow v_{6,stat} = \left(\frac{2gH}{1 + \frac{\lambda}{D_2}\left(\frac{L_3}{2} + L_2 \cdot 16\right)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

instationär:

$$p_a + \rho g H = p_a + \frac{\rho}{2} v_6^2 \underbrace{\left(1 + \frac{\lambda}{D_2}\left(\frac{L_3}{2} + 16 L_2\right)\right)}_{:=K} + \rho \left[\int_{L_2} \frac{\partial v_5}{\partial t} ds_5 + \int_{L_3} \frac{\partial v_6}{\partial t} ds_6 \right]$$

$$\Rightarrow \rho g H = \frac{\rho}{2} v_6^2 K + \rho \frac{dv_6}{dt} \left[\left(\frac{D_3}{D_2}\right)^2 L_2 + L_3 \right]$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{2gH}{K}}_{\hat{=}\, v_{6,stat}^2} = v_6^2 + \frac{2}{K} \frac{dv_6}{dt} \left[4L_2 + L_3 \right]$$

$$\Rightarrow \int_{\Delta T} dt = \frac{2}{K} (4L_2 + L_3) \int_0^{0{,}5 v_{6,stat}} \frac{dv}{v_{6,stat}^2 - v^2}$$

mit Hinweis $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \ldots$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{4L_2 + L_3}{K\, v_{6,stat}} \ln \left| \frac{v_{6,stat} + v}{v_{6,stat} - v} \right|_0^{0{,}5 v_{6,stat}}$$

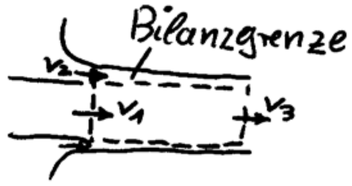
$$\Rightarrow \Delta T = \frac{(4L_2 + L_3) \ln 3}{\sqrt{2gH\left(1 + \frac{\lambda}{D_2}\left(\frac{L_3}{2} + 16 L_2\right)\right)}}$$

3. Aufgabe

a) p_2: Ansaugen aus der Umgebung

Bernoulli ⓐ → ②: $p_a = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$ ① ; $v_2 = \frac{\dot{Q}_2}{A_3 - A_1}$

$$\Rightarrow p_2 = p_a - \frac{\rho}{2}\left(\frac{\dot{Q}_2}{A_3 - A_1}\right)^2$$



IES: $-\rho v_1^2 A_1 - \rho v_2^2 (A_3 - A_1) + \rho v_3^2 A_3 = (p_2 - p_a) A_3$ Ⅱ

Konti: $\rho v_1 A_1 + \rho v_2 (A_3 - A_1) = \rho v_3 A_3$ Ⅲ

Ⅲ in Ⅱ einsetzen:

$$-\rho v_1^2 A_1 - \rho v_2^2 (A_3 - A_1) + \frac{\rho}{A_3}\left[(v_1 A_1)^2 + 2 v_1 v_2 A_1 (A_3 - A_1) + v_2^2 (A_3 - A_1)^2\right]$$

$$= (p_2 - p_a) A_3 \overset{\text{aus ①}}{=} -\frac{\rho}{2} v_2^2 A_3$$

$$\Leftrightarrow v_1^2 \frac{A_1}{A_3}\left(\frac{A_1}{A_3} - 1\right) - 2 v_1 v_2 \frac{A_1}{A_3}\left(\frac{A_1}{A_3} - 1\right) + v_2^2 \left(\frac{A_1}{A_3} - 1 + \left(1 - \frac{A_1}{A_3}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = 0$$

mit $\frac{A_3}{A_1} = \frac{3}{2}$ folgt:

$$v_1^2 - 2 v_1 v_2 - \frac{5}{4} v_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{4}}\right) \Rightarrow v_1 = \frac{5}{2} v_2 \quad \begin{pmatrix}\text{negative Lösung} \\ \text{nicht sinnvoll}\end{pmatrix}$$

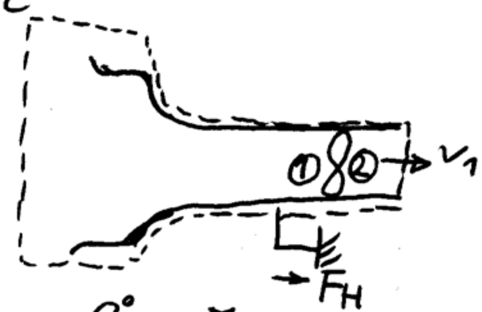
aus Konti Ⅲ folgt: $v_3 = 2 v_2$

b) Haltekraft: IES für Gebläsemantel

$$\Rightarrow \rho v_1^2 A_1 = (p_a - p_2) A_1 + F_H \quad (\text{aus ①})$$

$$\Rightarrow \rho v_1^2 A_1 - \frac{\rho}{2} v_2^2 A_1 = F_H$$

$$\Rightarrow F_H = \frac{23}{4} \rho v_2^2 A_1$$



c) Gebläseleistung: $P = \dot{Q} \Delta p_0$; $\Delta p_0 = p_2 - p_1$; $\dot{Q} = v_1 A_1$

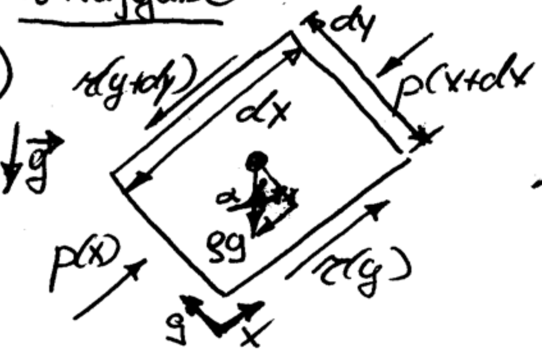
Bernoulli ⓐ → ①: $p_a = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \Leftrightarrow p_a - p_1 = \frac{\rho}{2} v_1^2$

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = \overbrace{p_2 - p_a}^{\text{aus ①}} + p_a - p_1 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2) = \frac{21}{8} \rho v_2^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{105}{16} \rho v_2^3 A_1$$

4. Aufgabe

a)



ausgebildete Strömung:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = -\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dx}$$

1. Integration:

$$\tau(y) = -\left(\rho g \sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right) y + c_1$$

Newtonsches Fluid: $\tau(y) = -\eta \frac{du}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{\eta}\left(\rho g \sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right) y - \frac{c_1}{\eta}$$

2. Integration:

$$u(y) = \frac{1}{2\eta}\left(\rho g \sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right) y^2 - \frac{c_1}{\eta} y + c_2$$

1. RB: $u(y=0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

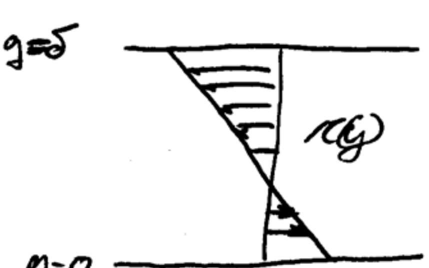
2. RB: $u(y=\delta) = u_B \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}\left(\rho g \sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right)\delta - \frac{u_B \eta}{\delta}$

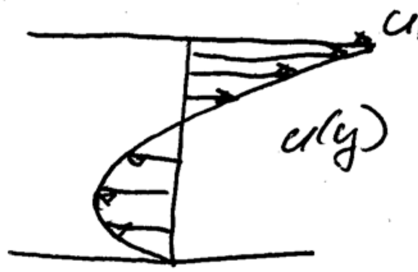
$$\Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\eta}\left(\rho g \sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right)\left(y^2 - y\delta\right) + u_B \frac{y}{\delta}$$

$$\tau(y) = -\eta \frac{u_B}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\rho g \sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right)(\delta - 2y)$$

$\frac{dp}{dx}$: $\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L} = \frac{p_2 - p_1}{L}$; mit $p_2 = p_a + \rho g h_2$, $p_1 = p_a + \rho g h_1$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \rho g \frac{(h_2 - h_1)}{L}$$





b) $$\frac{\dot{Q}}{B} = \int_0^\delta u(y)\,dy = -\frac{\rho g}{12\eta}\left(\sin\alpha + \frac{h_2 - h_1}{L}\right)\delta^3 + \frac{u_B \delta}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_B \geq \frac{\rho g}{6\eta}\left(\sin\alpha + \frac{h_2 - h_1}{L}\right)\delta^2$$

c) $\frac{P}{B} = u_B F_B$; $F_B = \int_0^L \tau_B \, dx$; $\tau_B = \eta \frac{du}{dy}\Big|_{y=\delta}$

$$\tau_B = \frac{\rho g}{2}\left(\sin\alpha + \frac{h_2 - h_1}{L}\right)\delta + u_B \frac{\eta}{\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{B} = u_B L \left[\frac{\rho g}{2}\left(\sin\alpha + \frac{h_2 - h_1}{L}\right)\delta + \frac{u_B \eta}{\delta} \right]$$

5. Aufgabe:

a) ausgebildete Strömung: $\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$ (mit RB: $v_r(r=R)=0$)

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung: $\frac{1}{r}\frac{\partial (r v_r)}{\partial r} + \cancel{\frac{\partial v_z}{\partial z}} = 0 \Rightarrow v_r = 0$

$\Rightarrow$ Impulsgleichungen:

$$\varrho\left(\underbrace{v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}}_{=0} + \underbrace{v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}}_{=0}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\underbrace{\frac{\partial (r v_r)}{\partial r}}_{=0}\right) + \underbrace{\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}}_{=0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$\varrho\left(\underbrace{v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}}_{=0} + \underbrace{v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}}_{=0}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \underbrace{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}_{=0}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = 0$$

b) 1) Variablen des Problems: geometrische Größen r, z; mechanische Größen v_z, p; Stoffgrößen η bzw. ϱ, ν !!

2) Dimensionslose Größen:

$$\bar{r} = \frac{r}{R} \quad \bar{z} = \frac{z}{L} \quad \bar{v}_z = \frac{v_z}{v_m} \quad \bar{p} = \frac{p}{\Delta p_{ref}} \quad \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_{ref}} \; (= 1 \text{ bei } \eta = \text{const.})$$

3) Einsetzen

$$\Rightarrow \; -\frac{\Delta p_{ref}}{L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \frac{\bar{\eta}\cdot\eta_{ref}\cdot v_m}{R^2}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}}\right) = 0$$

$$-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \underbrace{\frac{\eta_{ref}\cdot v_m\cdot L}{\Delta p_{ref}\cdot R^2}}_{K_I \left(= \frac{1}{Eu}\cdot\frac{1}{Re_R}\cdot\frac{L}{R}\right)} \cdot \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\bar{r}\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}}\right) = 0$$

c)

$$K_I = C = \frac{\eta \cdot v_m \cdot L}{\Delta p \cdot R^2} \qquad R = \frac{D}{2}$$

$$= \frac{4 \eta \, v_m \cdot L}{\Delta p \cdot D \cdot D}$$

erweitern mit v_m, ρ, halbieren

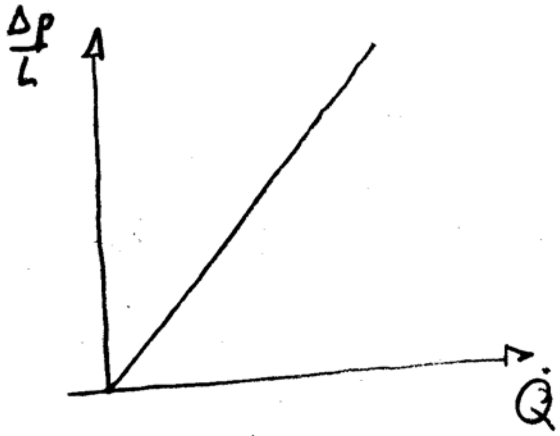
$$\frac{C}{2} = \frac{4\eta \, v_m \cdot L \; v_m \, \rho}{\Delta p \cdot D \cdot D \; v_m \, \rho \; 2}$$

$$= \underbrace{\frac{\rho/2 \, v_m^2}{\Delta p} \cdot \frac{\eta}{D \cdot v_m \cdot \rho} \cdot \frac{L}{D}}_{= \frac{1}{\lambda}}$$

$$\text{const} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{Re}$$

$$\lambda = \text{const} \cdot \frac{1}{Re} \qquad \left[\lambda \sim \frac{1}{Re}\right]$$

d)



6. Aufgabe

a) $F(z) = \Phi + i\,\psi$

für Potential erhält man:

$$V_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{3}{2} C r^{3/2} \cos(\tfrac{3}{2}\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{3}{2} C r^{1/2} \cos(\tfrac{3}{2}\theta)$$

$$\rightarrow \Phi = C r^{3/2} \cos(\tfrac{3}{2}\theta) + f_1(\theta)$$

bzw.

$$V_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \qquad -\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{3}{2} C r^{1/2} \sin(\tfrac{3}{2}\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{3}{2} C r^{3/2} \sin(\tfrac{3}{2}\theta)$$

$$\Rightarrow \Phi = C r^{3/2} \cos(\tfrac{3}{2}\theta) + f_2(r)$$

$$\Rightarrow \Phi = C r^{3/2} \cos(\tfrac{3}{2}\theta)$$

$$F(z) = C r^{3/2} \cos(\tfrac{3}{2}\theta) + i C r^{3/2} \sin(\tfrac{3}{2}\theta)$$

mit $z = r e^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

$$\Rightarrow F(z) = C z^{3/2}$$

Überprüfung: $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial r V_\theta}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right) = 0$

$$= \frac{1}{r}\left(-\frac{9}{4} C r^{1/2} \sin(\tfrac{3}{2}\theta) - \left(-\frac{9}{4} C r^{1/2} \sin \tfrac{3}{2}\theta\right)\right) = 0 \;//$$

b)

$$\left|\vec{V}_{ref}\right| = \sqrt{V_\theta^2 + V_r^2} = \left|\vec{V}\left(r=L,\ \theta=\tfrac{2}{3}\pi\right)\right|$$

$$= \sqrt{\tfrac{9}{4} C^2 L \sin^2(\pi) + \tfrac{9}{4} C^2 L \cos^2(\pi)}$$

$$= \sqrt{\tfrac{9}{4} C^2 L \cos^2(\pi)}$$

$$V_{ref} = \pm\frac{3}{2} C\sqrt{L} \quad \Rightarrow \quad C = \mp\frac{2}{3}\frac{V_{ref}}{\sqrt{L}}$$

c) Isotachen = Linien konst. Geschwindigkeit

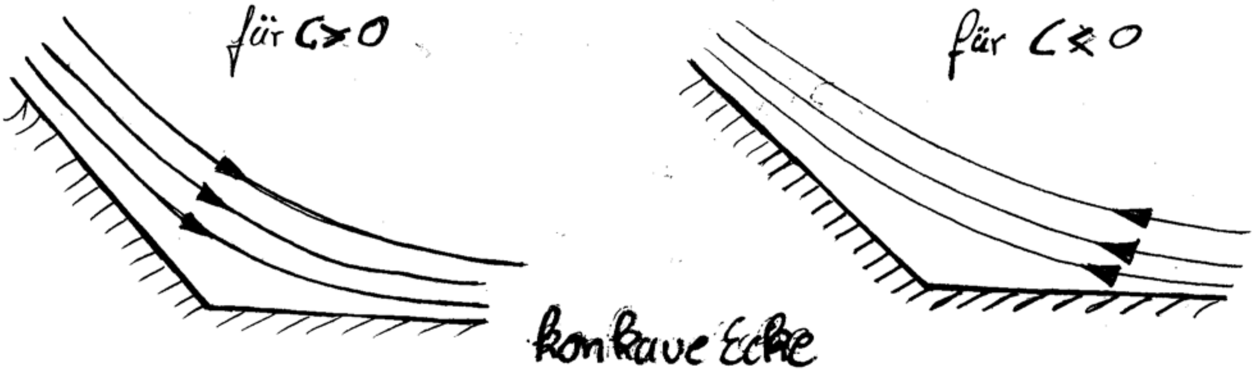
$$C_p = 1 - \frac{|\vec{V}|^2}{|\vec{V}_{ref}|^2} = \text{const.}$$ (= Linien konst. Druckes d.h. Isotachen = Isobaren)

$$C_p = 1 - \frac{\left(\frac{9}{4} C^2 r \sin^2(\frac{2}{3}\theta) + \frac{9}{4} C^2 r \cos^2(\frac{2}{3}\theta)\right)}{\left(\frac{9}{4} C^2 L \sin^2(\pi) + \frac{9}{4} C^2 L \cos^2(\pi)\right)}$$

$$C_p = 1 - \frac{r}{L}$$ $C_p = \text{const.}$ für $r = \text{const}$

$\Rightarrow$ Kreise um den Ursprung

d)



e) Bernoulli ref → 2

$$p_{ref} + \frac{\rho}{2} V_{ref}^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2 \Rightarrow p_2 = p_{ref} + \frac{\rho}{2}\left(V_{ref}^2 - V_2^2\right)$$

 $\frac{\rho}{2} V_{ref}^2$ da $V_2^2 = +2 V_{ref}^2$.

7. Aufgabe

a) Euler-Gleichung für reibungsfreie Außenströmung:

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx} \qquad U = a x^m$$

$$\frac{dU}{dx} = m \cdot a \cdot x^{m-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\rho \cdot a \cdot x^m \cdot m a x^{m-1}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\rho a^2 m \, x^{2m-1} = \frac{dp}{dx}\Big|_{GS}$$

Grenzschicht ist ablösegefährdet, wenn $\frac{dp}{dx} > 0$

$$\frac{dp}{dx} = \underbrace{\underbrace{- \underbrace{\rho}_{>0} \underbrace{a^2}_{>0} \underbrace{m}_{<0}}_{>0} \; \underbrace{\underbrace{x}_{>0}^{\overbrace{2m-1}^{<0}}}_{>0}}_{>0} = +\frac{1}{7}\rho a^2 \cdot x^{-9/7}$$

$$\text{mit } \left|\beta \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = -\frac{1}{7}$$

>0 für alle erlaubten Werte von a, m, x

b) (A) $u(x,y) = U(x)\left[a_0(x) + a_1(x)\frac{y}{\delta} + a_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]$

(B) $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = U(x)\left[a_1(x)\frac{1}{\delta} + 2a_2(x)\frac{y}{\delta^2} + 3a_3(x)\frac{y^2}{\delta^3}\right]$

(C) $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = U(x)\left[2a_2(x)\frac{1}{\delta^2} + 6a_3(x)\frac{y}{\delta^3}\right]$

Bestimmung der Koeffizienten über Randbedingungen:

1) Haftbedingung: $y = 0 : u(x,0) = 0 \rightarrow$ in (A) $\Rightarrow a_0 = 0$

2) GS-Rand $y = \delta : u(x,\delta) = U(x) \rightarrow$ in (A) $\Rightarrow U(x) = U(x)\left[a_1(x) + a_2(x) + a_3(x)\right]$

(D) $\Rightarrow a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) = 1$

3) Wandbindungsgleichung:

$y = 0 : \frac{dp}{dx} = \eta \frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial y^2}$ $\qquad \frac{dp}{dx}$ aus a), $\rightarrow$ in (C)

$$-\rho a^2 m \, x^{2m-1} = \eta U(x) \frac{2a_2(x)}{\delta^2}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{-\rho a^2 m x^{2m-1} \cdot \delta^2}{2\eta U(x)} = -\frac{\delta^2 \rho a^2 m x^{2m-1}}{2\eta a x^m} \Rightarrow a_2(x) = -\frac{\delta^2 \rho a m}{2\eta} x^{m-1}$$

4) Glatter Übergang am GS-Rand: $y=\delta: \dfrac{\partial u(x,\delta)}{\partial y} = 0 \rightarrow$ in (B)

$$0 = \frac{U(x)}{\delta}\left[a_1(x) + 2a_2(x) + 3a_3(x)\right]$$

$$a_1(x) + 2a_2(x) + 3a_3(x) = 0$$

$$\text{(E)} \quad a_1(x) = -2a_2(x) - 3a_3(x) \rightarrow \text{in (D)}$$

$$-2a_2(x) - 3a_3(x) + a_2(x) + a_3(x) = 1$$

$$-a_2(x) - 2a_3(x) = 1$$

$$\underbrace{a_3(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_2(x)}_{\text{in (E)}} \qquad a_3(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\delta^2 \rho a m}{4\eta} x^{m-1}$$

$$a_1(x) = -2a_2(x) - 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_2(x)\right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}a_2(x) \qquad a_1(x) = \frac{3}{2} + \frac{\delta^2 \rho a m}{4\eta} x^{m-1}$$

c)

Ablösung: $\tau_w = \eta \dfrac{\partial u(x_B, y=0)}{\partial y} = 0$

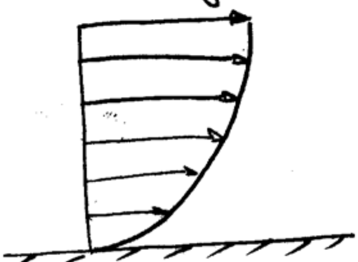
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\ x=x_A}} = U(x_A)\left[a_1(x_A)\cdot\frac{1}{\delta(x_A)}\right] = 0$$

$$\rightarrow a_1(x_A) = 0 \qquad \frac{3}{2} + \frac{\delta^2 \rho a m}{4\eta} x^{m-1} = 0$$

$$\delta(x_A) = \sqrt{-\frac{3}{2}\,\frac{4\eta}{\rho a m}\, x_A^{1-m}}$$

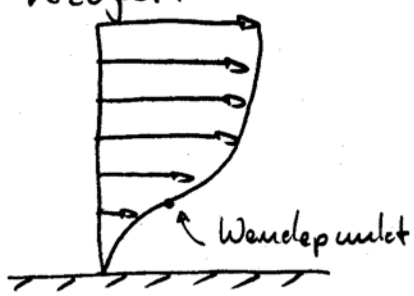
d)

beschleunigt:



$$\frac{dp}{dx} < 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial y^2}\right|_{y=0} < 0$$

verzögert:



$$\frac{dp}{dx} > 0 \qquad \left.\frac{\partial^2 u(x,0)}{\partial y^2}\right|_{y=0} > 0$$

8. Aufgabe:

a) $\frac{u_m}{a_m} = Ma_m$

$\Rightarrow Ma_m = u_m \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma R T_m}}$

Energiesatz $0 \rightarrow m$

$c_p T_0 = c_p T_m + \frac{u_m^2}{2}$

$\Rightarrow T_m = T_0 - \frac{u_m^2}{2c_p} = T_0 - \frac{u_m^2(\gamma-1)}{2\gamma R}$

$T_m = 293\,K - \frac{544{,}2^2 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 287} \cdot \frac{m^2\, kg\, K\, s^2}{s^2\, m\, kg\, m}$

$T_m = 145{,}6\,K$

$\Rightarrow Ma_m = \frac{544{,}2}{\sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 145{,}6}} \Rightarrow Ma_m = 2{,}25$

b) $\dot{m} = \rho^* u^* A^* = \rho_m u_m A_m = \text{const.}$ mit $u^* = a^*$

$$\Rightarrow \dot{m} = \underbrace{\frac{\rho^*}{\rho_0}}_{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \cdot \underbrace{\rho_0}_{=\frac{p_0}{RT_0}} \cdot \underbrace{\frac{a^*}{a_0} \cdot a_0}_{} \cdot A^*$$

$$= \frac{\sqrt{\gamma R T^*}}{\sqrt{\gamma R T_0}} \cdot \sqrt{\gamma R T_0}$$

$$= \sqrt{\gamma R \underbrace{\frac{T^*}{T_0}}_{=\frac{2}{\gamma+1}} T_0}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2} \cdot \frac{p_0}{RT_0} \cdot \sqrt{\gamma R T_0} \cdot A^*$$

$$\dot{m} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1 \cdot 10^5}{287 \cdot 293} \cdot \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 293}\ \frac{N}{m^2}\,\frac{kg\,K}{N\,m}\,\frac{m}{K\,s} \cdot 0{,}1\,m^2$$

$$\dot{m} = 23{,}613\ \frac{kg}{s}$$

c) Meßzeit endet, wenn im Kessel (K) der Druck derart angestiegen ist, dass am Ende der Messstrecke (M) ein senkrechter Verdichtungsstoß steht

$$p_K(t) = \underbrace{\frac{p_K}{p_M}}_{} \cdot \frac{p_M}{p_0} \cdot p_0$$

$$= \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_M^2 - 1)\right] \cdot \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_M^2\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot p_0$$

$$= 5{,}739 \cdot 0{,}08648 \cdot p_0$$

$$p_K(t) = 49632 \ \frac{N}{m^2}$$

$$\Delta m_K = \dot m \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta m_K}{\dot m} = \frac{V_K \Delta \rho_K}{\dot m} = \frac{V_K}{\dot m R T_K} \cdot \Delta p_K$$

$$\Delta p_K = p_K(t) - p_K(t=0) = (49632 - 7500)\frac{N}{m^2} = 42132 \ \frac{N}{m^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{300 \cdot 41132}{23{,}613 \cdot 287 \cdot 293} \cdot \frac{\cancel{m^3}\ s\ \cancel{kg}K\ \cancel{N}}{\cancel{kg}\ \cancel{Nm}\ K\ \cancel{m^2}}$$

$$\Delta t = 6{,}37 \ s$$

d) $\dot m = \rho_M u_M A_M \Rightarrow A_M = \frac{\dot m}{\rho_M u_M} = \frac{\dot m}{u_M} \frac{\rho_0}{\rho_M} \cdot \frac{1}{\rho_0}$

$$A_M = \frac{\dot m}{u_M} \cdot \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_M^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \frac{R T_0}{p_0}$$

$$A_M = \frac{23{,}613 \cdot 287 \cdot 293}{544{,}2 \cdot 10^5} \cdot 5{,}746 \cdot \frac{kg}{s} \frac{s}{m} \frac{Nm}{kg\,K} \frac{m^2}{N} K$$

$$A_M = 0{,}21 \ m^2$$