....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

03. 08. 2007

1. Aufgabe

a) $V(z) = V_0 = const$

$$F_A = \varrho_L(H) g V_0 = \frac{p(H)}{R_L(T_0 - aH)} g V_0$$

Bestimmung von $p(H)$:

$$\frac{dp}{dz} = -\varrho g = -p \frac{g}{R_L(T_0 - az)}$$

$$\int_{p_0}^{p(H)} \frac{dp}{p} = -\frac{g}{R_L} \int_0^H \frac{dz}{T_0 - az}$$

$$ln\left(\frac{p(H)}{p_0}\right) = \frac{g}{aR_L} ln \frac{T_0 - aH}{T_0} = ln\left[\left(1 - \frac{aH}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR_L}}\right]$$

$$p(H) = p_0 \left(1 - \frac{aH}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR_L}}$$

$$F_A = \frac{p_0}{R_L T_0} g V_0 \left(1 - \frac{aH}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR_L}-1} = \varrho_{L0} g V_0 \left(1 - \frac{aH}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR_L}-1} = 837.4N$$

b) $F_A = \varrho_L(H) g V(H)$

Bestimmung von V(H):

mit $m_{He} = const$ und $p = \varrho R T$ folgt:

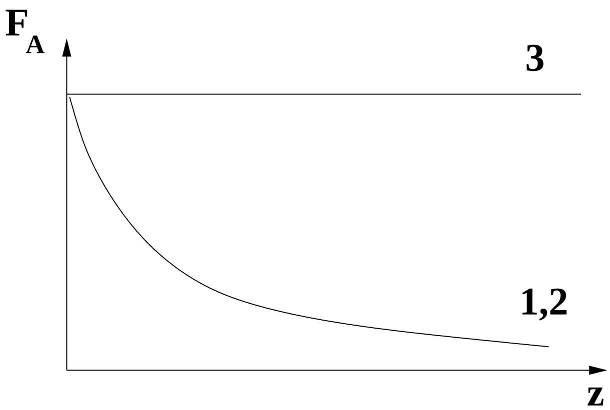
$$\left.\begin{array}{rcl} p(H)V(H) & = & m_{He} R_{He} T(H) \\ p_0 V_0 & = & m_{He} R_{He} T_0 \end{array}\right\} V(H) = V_0 \frac{p_0}{p(H)} \frac{T(H)}{T_0}$$

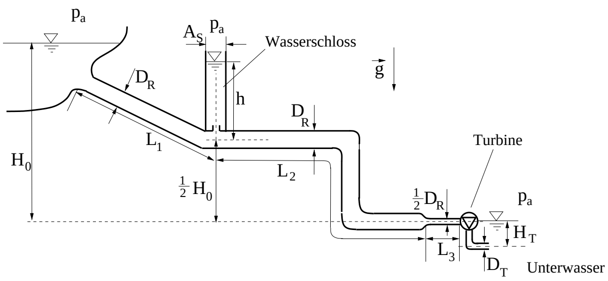
$$V(H) = V_0 \frac{\varrho_{L0}}{\varrho_L(H)}$$

$$F_A = \varrho_{L0} g V_0 = const$$

$$F_A = 2500N$$

c) Der Verlauf des Auftriebs:





2. Aufgabe

a) stationärer Bernoulli: 'o'-'a'

$$p_a + \varrho g H_0 = p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2 \left(1 + \lambda \frac{L_1}{D_R}\right) + \varrho g \frac{H_0}{2}$$

mit $p_1 = p_a + \varrho g h$

$$\rightarrow \varrho g h = \frac{1}{2} \varrho g H_0 - \frac{\varrho}{2} v_1^2 \left(1 + \lambda \frac{L_1}{D_R}\right)$$

mit Konti: $\dot{V} = \frac{\pi D_R^2}{4} v_1 \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{4\dot{V}}{\pi D_R^2}$

$$h = \frac{1}{2} H_0 - \frac{8\dot{V}^2}{g \pi^2 D_R^4} \left(1 + \lambda \frac{L_1}{D_R}\right)$$

b) Bernoulli von 'a'-'T':

$$p_a + \varrho g (H_0 + H_T) = p_T + \frac{\varrho}{2} v_T^2 \left(1 + \lambda \frac{L_1 + L_2}{D_R} \frac{v_1^2}{v_T^2} + \lambda \frac{2L_3}{D_R}\right) + \Delta p_T$$

mit $p_T = p_a + \varrho g H_T$ und Konti $\dot{V} = \frac{\pi D_R^2}{16} v_T \quad \rightarrow \quad v_T = \frac{16\dot{V}}{\pi D_R^2}$

$$\Delta p_T = \varrho g H_0 - 128 \varrho \frac{\dot{V}^2}{\pi^2 D_R^4} \left(1 + \frac{1}{16} \lambda \frac{L_1 + L_2}{D_R} + 2\lambda \frac{L_3}{D_R}\right)$$

Die Leistung der Turbine berechnet sich zu

$$P_T = \Delta p_T \dot{V} = \dot{V} \left[\varrho g H_0 - 128 \varrho \frac{\dot{V}^2}{\pi^2 D_R^4} \left(1 + \frac{1}{16} \lambda \frac{L_1 + L_2}{D_R} + 2\lambda \frac{L_3}{D_R}\right)\right]$$

c) Die Leistung steigt, da bei größerem Austrittsquerschnitt und gleichem Volumenstrom eine geringere Geschwindigkeit und damit ein kleinerer Totaldruck hinter der Turbine herrscht. Somit steigt die Totaldruckdifferenz Δp_T an der Turbine und die Leistung nimmt zu.

d) instationärer Bernoulli von 'o'-'a':

$$p_a + \varrho g H_0 = p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1(t)^2 + \varrho L_1 \frac{dv_1(t)}{dt} + \varrho g \frac{H_0}{2}$$

mit $p_1 = p_a + \varrho g h(t)$

$$\varrho g \frac{H_0}{2} = \varrho g h(t) + \frac{\varrho}{2} v_1(t)^2 + \varrho L_1 \frac{dv_1(t)}{dt}$$

Kontinuität:

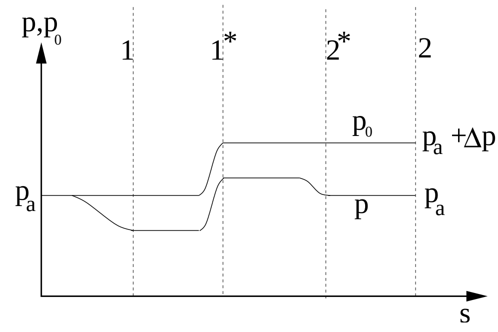
$$\frac{dh}{dt} A_s = v_1 \frac{\pi D_R^2}{4} \quad \rightarrow \quad v_1 = \frac{dh}{dt} \frac{4A_s}{\pi D_R^2}$$

$$\frac{H_0}{2} = h(t) + \frac{1}{2g} \left(\frac{4A_s}{\pi D_R^2}\right)^2 \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{L_1}{g} \frac{4A_s}{\pi D_R^2} \frac{d^2 h}{dt^2}$$

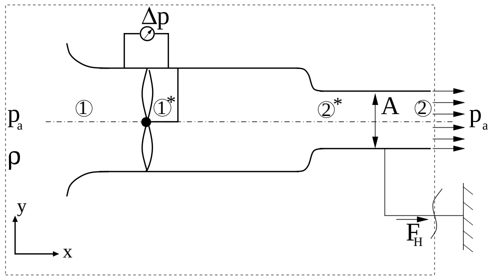
$$\frac{d^2 h}{dt^2} + \frac{1}{2L_1} \frac{4A_s}{\pi D_R^2} \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{g}{L_1} \frac{\pi D_R^2}{4A_s} \left(h - \frac{H_0}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + a_1 \left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + a_2 h - \frac{a_2}{2} H_0 = 0$$

3. Aufgabe



a)



b)

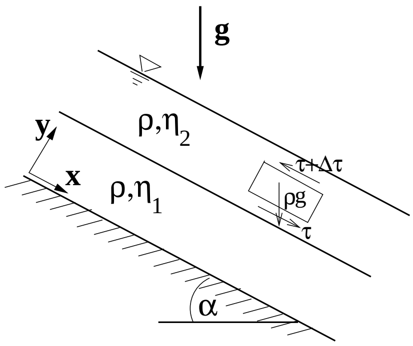
Bernoulli von $-\infty$ bis 1:
$p_a = p_1 + \frac{\varrho}{2}v_1^2$
Bernoulli von 1^* bis 2:
$p_{1^*} + \frac{\varrho}{2}v_{1^*}^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2}v_2^2$
Konti: $v_{1^*} = v_1$
$p_2 = p_a$
$\Delta p = p_{1^*} - p_1 = p_a + \frac{\varrho}{2}v_2^2 - \frac{\varrho}{2}v_1^2 - p_a + \frac{\varrho}{2}v_1^2 = \frac{\varrho}{2}v_2^2$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}}, \quad \dot{V} = v_2 A = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}}A$$

c) $P = \dot{V}\Delta p_{0,1^*,1} = \dot{V}\Delta p_{1^*,1} = \Delta p\dot{V} = \Delta p\sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}}A$

d) Impulssatz in x-Richtung (KV siehe oben):
$\varrho v_2^2 A = (p_a - p_a)A_\infty + F_H$
$F_H = \varrho v_2^2 A = 2\Delta p A$

4. Aufgabe



a) Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:

$$\left(p - \left(p + \frac{\delta p}{\delta x}\right)\right) dy + \left(\tau - \left(\tau + \frac{\delta \tau}{\delta y} dy\right)\right) dx + \varrho g \sin \alpha dx dy = 0$$

$$\frac{d\tau}{dy} = \varrho g \sin\alpha \text{ mit } \tau = -\eta \frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{\varrho g}{\eta}\sin\alpha$$

Fluid 1: $u_1 = -\frac{\varrho g}{\eta_1}\sin\alpha \frac{y^2}{2} + A_1 y + B_1$

Randbedingung: $y = 0 \quad \rightarrow \quad u = 0 \quad \rightarrow \quad B_1 = 0$

Fluid 2: $\frac{du_2}{dy} = -\frac{\varrho g}{\eta_2}\sin\alpha y + A_2$

Randbedingung: $y = H \quad \rightarrow \quad \frac{du}{dy} = 0 \quad \rightarrow \quad A_2 = \frac{\varrho g \sin\alpha}{\eta_2} H$

$$u_2 = \frac{\varrho g \sin\alpha}{\eta_2}\left(Hy - \frac{y^2}{2}\right) + B_2$$

A_1, B_2?

Randbedingungen an der Grenzfläche:

- Haftbedingung: $u_1 = u_2$
- Kräftegleichgewicht: $\tau_1 = \tau_2 \Rightarrow \eta_1 \frac{du_1}{dy} = \eta_2 \frac{du_2}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{\frac{du_2}{dy}\big|_{y=H/2}}{\frac{du_1}{dy}\big|_{y=H/2}} = \frac{\frac{\varrho g \sin\alpha}{\eta_2}\frac{H}{2}}{-\frac{\varrho g \sin\alpha}{\eta_1}\frac{H}{2} + A_1} = \frac{\eta_1}{\eta_2}, \text{ ist erfüllt}$$

wenn $A_1 = \frac{\varrho g \sin\alpha}{\eta_1} H$

und

$$\Rightarrow u_1 = u_2|_{y=H/2} : \frac{\varrho g \sin\alpha}{\eta_1}\left(\frac{H^2}{2} - \frac{H^2}{8}\right) = \frac{\varrho g \sin\alpha}{\eta_2}\left(\frac{H^2}{2} - \frac{H^2}{8}\right) + B_2$$

$$B_2 = \frac{3H^2}{8}\varrho g \sin\alpha \left(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2}\right)$$

5. Aufgabe

a) 6 Einflußgrößen $f, u, D, L_0, \eta, \varrho$
3 Grundimensionen (M/L/T) $\Rightarrow$ 3 Kennzahlen
$\Pi_1 = f\varrho^\alpha u^\beta D^\gamma \Rightarrow M^0L^0T^0 = T^{-1}(ML^{-3})^\alpha(LT^{-1})^\beta L^\gamma$
$M: 0 = \alpha$
$L: 0 = -3\alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 1 : \Pi_1 = \dfrac{fD}{u}$
$T: 0 = -1 - \beta$ $\Pi_2 = \eta\varrho^\alpha u^\beta D^\gamma \Rightarrow M^0L^0T^0 = ML^{-1}T^{-1}(ML^{-3})^\alpha(LT^{-1})^\beta L^\gamma$
$M: 0 = 1 + \alpha$
$L: 0 = -1 - 3\alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = -1, \beta = -1, \gamma = -1 : \Pi_2 = \dfrac{\eta}{\varrho u D}$
$T: 0 = -1 - \beta$ $\Pi_3 = L_0\varrho^\alpha u^\beta D^\gamma \Rightarrow M^0L^0T^0 = L(ML^{-3})^\alpha(LT^{-1})^\beta L^\gamma$
$M: 0 = 1 + \alpha$
$L: 0 = 1 - 3\alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \alpha = \beta = 0, \gamma = -1 : \Pi_3 = \dfrac{L_0}{D}$
$T: 0 = -\beta$

b) $Re = \dfrac{\varrho v D}{\eta}, Sr = \dfrac{Df}{u_\infty}$
$\Rightarrow D = \dfrac{Sru_\infty}{f_r}$
$Re = \dfrac{Sru_\infty^2}{\nu f_r}, \quad u_\infty = \sqrt{\dfrac{Re\nu f_r}{Sr}} = 0.339m/s$

c) Es ist $f_r = \dfrac{Sru_\infty}{D} \quad \Rightarrow D = \dfrac{Sru_\infty}{f_r}$.
Damit steigt die Frequenz mit höherer Geschwindigkeit und sinkt bei größerem Durchmesser. Die Ablösefrequenz darf die Resonanzfrequenz nicht erreichen, d.h. $f < 40\frac{1}{s}$. Damit folgt unmittelbar $D > 0.05m$, womit die Bedingung $D > 1cm$ erfüllt ist.

6. Aufgabe

a) Die Geschwindigkeitskomponenten v_r und v_φ als Ableitungen der Stromfunktion:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} = U_\infty \cos\varphi \left(1 - \left(\frac{R}{r}\right)^2\right)$$

$$v_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = -U_\infty \sin\varphi \left(1 + \left(\frac{R}{r}\right)^2\right) - \Omega r$$

b) U_∞ als Funktion der gegebenen Größen: Ruhendes Fluid in der Behältermitte ($r = a, \varphi = \frac{3}{2}\pi$), d.h. $v_\varphi(r = a, \varphi = \frac{3}{2}\pi) = -U_\infty \sin\frac{3}{2}\pi \left(1 + \frac{R^2}{a^2}\right) - \Omega a = 0$, also $U_\infty = \frac{\Omega a}{1+\left(\frac{R}{a}\right)^2}$ und mit $\frac{R}{a} << 1$ folgt $U_\infty = \Omega a$.

c) Staupunkte auf dem Rührstab bei $v_\varphi = 0$, $v_r = 0$ ist auf der Kontur überall erfüllt:

$$-2U_\infty \sin\varphi - \Omega R = 0 \Rightarrow \sin\varphi_{SP} = -\frac{R}{2a}$$

mit $\frac{R}{2a} << 1$ folgt $\varphi_{SP1} = -\frac{R}{2a}$ und $\varphi_{SP2} = \pi + \frac{R}{2a}$.

d) $\Gamma = \oint \vec{v}d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} v_\varphi R d\varphi = -2\pi R^2\Omega$.

e) Die Druckdifferenz zwischen Ober- und Unterseite ist mit Bernoulli:

$$p_o + \frac{\varrho}{2}|\vec{v_o}|^2 = p_u + \frac{\varrho}{2}|\vec{v_u}|^2 \Rightarrow \Delta p = p_o - p_u = \frac{\varrho}{2}\left(v_\varphi^2(-\varphi) - v_\varphi^2(+\varphi)\right) = -4\varrho\Omega^2 Ra\sin\varphi.$$

D.h. es wirkt eine resultierende Druckkraft in radialer Richtung nach außen.

7. Aufgabe

a) Fourieransatz für die Außenströmung: $\frac{u(x,y)}{U_a} = a_0 + a_1 \sin a_2 \frac{y}{\delta}$.
Randbedingungen:
1.) $\frac{u}{U_a} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0$
2.) $\frac{u}{U_a} = 1$ für $\frac{y}{\delta} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 \sin a_2 = 1$
3.) $\frac{\partial^2 \left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 0$ ist identisch erfüllt und liefert keine Informationen.
4.) $\frac{\partial \left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 1 \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a_1 = 1$
$\frac{u(x,y)}{U_a} = \sin \frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta}$

b) $$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \delta \left[\frac{y}{\delta} + \frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\right]_0^1 = \delta[1 - \frac{2}{\pi}]$$

c) $$\frac{\tau_w}{\varrho U_a^2} = \frac{\eta}{\varrho U_a^2}\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \frac{\eta}{\varrho U_a^2}\frac{U_a}{\delta}\frac{\partial(u/U_a)}{\partial(y/\delta)}|_0 = \frac{\pi}{2}\eta\frac{U_a}{\delta}\frac{1}{\varrho U_a^2} = \frac{\pi\eta}{2\varrho U_a \delta} \qquad (*)$$
$$\delta_2 = \delta \int_0^1 \frac{u}{U_a}\left(1 - \frac{u}{U_a}\right) d\frac{y}{\delta} = \delta \int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\left(1 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$
$$\delta_2 = \delta\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right) - \frac{1}{2}\frac{y}{\delta} + \frac{1}{2\pi}\sin\left(\pi\frac{y}{\delta}\right)\right]_0^1 = \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\delta$$
Eingesetzt in die Integralbeziehung:
$$\frac{dU_a}{dx} = 0 \Rightarrow \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\frac{d\delta}{dx} = \frac{\pi\eta}{2\varrho U_a \delta} \Rightarrow \delta d\delta = \frac{\pi}{2}\frac{2\pi}{4-\pi}\frac{\eta}{\varrho U_a}dx$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{\pi^2}{4-\pi}\frac{\eta}{\varrho U_a}x \Rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2\pi^2}{4-\pi}}\frac{x}{\sqrt{Re_x}}$$

d) $F_w = B \int_0^L \tau_w(x) dx$ mit $\frac{\tau_w}{\varrho U_a^2} = \frac{\pi\eta}{2\varrho U_a \delta}$ aus $(*)$
$$F_w = B \int_0^L \frac{\pi}{2}\eta\frac{U_a}{\delta}dx = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{4-\pi}{2\pi^2}}B\eta U_a \sqrt{\frac{\varrho U_a}{\eta}}\int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-\pi}{2}}B\eta U_a \sqrt{\frac{\varrho U_a}{\eta}}2\sqrt{L} = \sqrt{\frac{4-\pi}{2}}\eta B U_a \sqrt{Re_L}$$

8. Aufgabe

a) 1. Energiegleichung:

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T^* + \frac{u^{*2}}{2}$$

$$c^2 + \frac{\gamma-1}{2} u^2 = c^{*2} + \frac{\gamma-1}{2} c^{*2} = \frac{\gamma+1}{2} c^{*2}, \text{d.h.}$$

$$\frac{1}{M^2} + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{\gamma+1}{2} \frac{1}{M^{*2}}$$

$$M^{*2} = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}; \quad M^2 = \frac{2M^{*2}}{(\gamma+1)-(\gamma-1)M^{*2}}$$

b) $\lim\limits_{M\to\infty} \left(M^{*2}\right) = \lim\limits_{M\to\infty} \left(\frac{\gamma+1}{2/M^2 + (\gamma-1)}\right) \Rightarrow M^*_{M\to\infty} \to \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}$

c) $M_1^* M_2^* = 1$, d.h. $M_2^* = \frac{1}{M_1^*}$

Aus a) ist bekannt, dass $M^*(M)$ eine streng monotone Funktion der Machzahl M mit $M_{2,min} = M_2(M^*_{2,min}) = M_2(M^*_{1,max}) = M_2(M_{1,max})$ ist.

$M_{2,min} = M_2(M_1 \to \infty)$, d.h. die minimale Machzahl hinter dem Stoss, stellt sich ein, wenn die Machzahl vor dem Stoss gegen ∞ geht. Es gilt dabei mit dem Ergenis aus a):

$M^{*2}_{2,min} = \frac{1}{M^{*2}_{1,max}} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$ aus b)

Einsetzen in Gleichung für $M(M^*)$:

$$M^2_{2,min} = \frac{2\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}{(\gamma+1)-(\gamma-1)\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2-(\gamma-1)^2} = \frac{\gamma-1}{2\gamma}, \text{ d.h.}$$

$$M_{2,min} = \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} = 0.378$$