

.....  
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

**Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor) & „Technische Strömungslehre“ (Diplom)**

01. 03. 2019

## 1. Aufgabe

a) Hydrostatische Grundgleichung:  $\frac{dp}{dz} = -\rho g$  und ideales Gasgesetz  $\rho = \frac{p}{RT}$  ergeben:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT}$$

Für eine isotherme Atmosphäre ergibt sich dann die barometrische Höhenformel zu:

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_1}{p_0} = -\frac{g}{RT} \int_{z_0}^{z_1} dz = -\frac{g}{RT} (z_1 - z_0)$$

bzw. mit  $(z_1 - z_0) = H$ :

$$p(z = H) = p(z = 0) e^{-\frac{gH}{RT_L}}$$

Für einen offenen Ballon gilt:  $p_L = p_G$ , sodass:

$$\frac{p_G(z = H)}{p_G(z = 0)} = \frac{\rho_G(z = H) R_G T_G}{\rho_G(z = 0) R_G T_G} \rightarrow \frac{\rho_G(z = H)}{\rho_G(z = 0)} = \frac{p_G(z = H)}{p_G(z = 0)} = \frac{p_L(z = H)}{p_L(z = 0)} = e^{-\frac{gH}{R_L T_L}}$$

b) Auftriebskräfte am Boden und in der Luft bestimmen:

$$\left. \begin{aligned} F_A(z = H) &= \rho_L(z = H) g V_B = G + G_{Gas}(z = H) \\ F_A(z = 0) &= \rho_L(z = 0) g V_B = G + G_{Gas}(z = 0) + F_s \end{aligned} \right\} \text{ mit } G_{Gas} = \frac{p_G(z)}{R_G T_G} g V_B$$

Mit dem Ergebnis aus a) ergibt sich:

$$\rho_G(z = H) = \rho_G(z = 0) e^{-\frac{gH}{R_L T_L}} \quad \rho_L(z = H) = \rho_L(z = 0) e^{-\frac{gH}{R_L T_L}}$$

$$\Rightarrow \rho_G(z = 0) g V_B = \rho_L(z = 0) V_B g - G - F_s \quad \Leftrightarrow \quad \rho_G(z = 0) = \frac{\rho_L(z = 0) V_B g - G - F_s}{V_B g}$$

Einsetzen in das Kräftegleichgewicht liefert:

$$\rho_L(z = 0) V_B g e^{-\frac{gH}{R_L T_L}} = G + \frac{\rho_L(z = 0) V_B g - G - F_s}{V_B g} V_B g e^{-\frac{gH}{R_L T_L}}$$

Umstellen nach H liefert:

$$0 = G - (G + F_s) e^{-\frac{gH}{R_L T_L}} \quad ; \quad H = \frac{R_L T_L}{g} \ln \left( 1 + \frac{F_s}{G} \right)$$

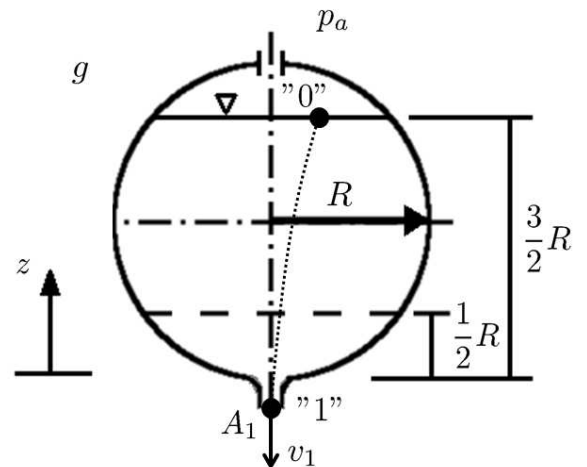
## 2. Aufgabe

a) Quasistationäre Bernoulligleichung:  $0 \rightarrow 1$

$$p_a + \frac{\rho}{2}v_0^2 + \rho g z = p_a + \frac{\rho}{2}v_1^2$$

mit  $v_0 \ll v_1$ , da  $A_1 \ll R^2$

$$v_1 = \sqrt{2gz}$$



Konti:

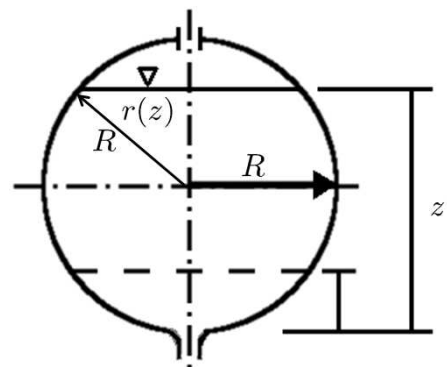
$$v_1 A_1 = v(z) A(z) = -\frac{dz}{dt} A(z)$$

$$dt = -\frac{A(z)}{v_1 A_1} dz$$

$A(z)$  berechnen:

$$A(z) = \Pi r^2(z) \quad \text{und} \quad r^2(z) + (z - R)^2 = R^2$$

$$\Rightarrow A(z) = \Pi(2Rz - z^2)$$



Einsetzen in Konti:

$$dt = -\frac{\pi(2Rz - z^2)}{A_1 \sqrt{2gz}}$$

$$dt = -\frac{\pi}{A_1 \sqrt{2g}} (2Rz^{1/2} - z^{3/2}) dz$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = -\frac{\pi}{A_1 \sqrt{2g}} \int_{3/2 R}^{1/2 R} (2Rz^{1/2} - z^{3/2}) dz$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{\pi}{A_1 \sqrt{2g}} \left[ 2R \frac{2}{3} z^{3/2} - \frac{2}{5} z^{5/2} \right]_{3/2 R}^{1/2 R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta t = \frac{\pi R^{5/2}}{A_1 \sqrt{2g}} \left[ \frac{4}{3} \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{3/2} - \left( \frac{1}{2} \right)^{3/2} \right) - \frac{2}{5} \left( \left( \frac{3}{2} \right)^{5/2} - \left( \frac{1}{2} \right)^{5/2} \right) \right]$$

b)

$$\Delta h \Big|_{Zylinder} < \Delta h \Big|_{Kugel}$$

für das gleiche  $\Delta t$ , da

Kont:

$$v_1 A_1 = \frac{dz}{dt} A(z) \quad \Rightarrow \quad dz = -\frac{v_1 A_1}{A(z)} dt$$

Da der zylindrische Behälter eine größere Querschnittsfläche  $A(z)$  als der kugelförmige Behälter hat, ist die Spiegelhöhenänderung im zylindrischen Behälter geringer.

### 3. Aufgabe

a)  $p_2$  : Ansaugen aus der Umgebung

Bernoulli  $\infty \rightarrow 2$  :

$$p_a = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 (1); v_2 = \frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1}$$

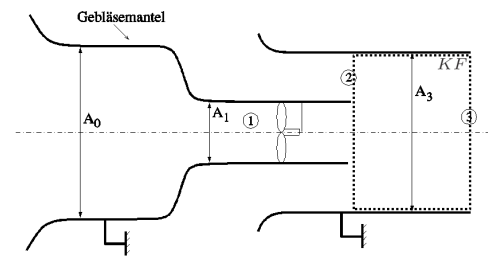
$$\Rightarrow p_2 = p_a - \frac{\rho}{2} \left( \frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1} \right)^2 = p_a - 2\rho \frac{\dot{V}_2^2}{A_1^2} \quad (1)$$

IES:

$$-\rho v_1^2 A_1 - \rho v_2^2 (A_3 - A_1) + \rho v_3^2 A_3 = (p_2 - p_a) A_3$$

Konti:

$$\rho v_1 A_1 + \rho v_2 (A_3 - A_1) = \rho v_3 A_3$$



IES in Konti einsetzen:

$$-\rho v_1^2 A_1 - \rho v_2^2 (A_3 - A_1) + \frac{\rho}{A_3} [(v_1 A_1)^2 + 2v_1 v_2 A_1 (A_3 - A_1) + v_2^2 (A_3 - A_1)^2] = (p_2 - p_a) A_3$$

mit (1)  $p_2 - p_a = -\frac{\rho}{2} v_2^2$  ergibt sich:

$$\Leftrightarrow v_1^2 \frac{A_1}{A_3} \left( \frac{A_1}{A_3} - 1 \right) - 2v_1 v_2 \frac{A_1}{A_3} \left( \frac{A_1}{A_3} - 1 \right) + v_2^2 \left( \frac{A_1}{A_3} - 1 + \left( 1 - \frac{A_1}{A_3} \right)^2 + \frac{1}{2} \right) = 0$$

mit  $\frac{A_3}{A_1} = \frac{3}{2}$  folgt:

$$v_1^2 - 2v_1 v_2 - \frac{5}{4} v_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2 \underbrace{\left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{5}{4}} \right)}_{>1}$$

Negative Lösung daher nicht sinnvoll:

$$\Rightarrow v_1 = \frac{5}{2} v_2 = \frac{5}{2} \frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1} = 5 \frac{\dot{V}_2}{A_1}$$

aus Konti (3) folgt:

$$v_3 = 2v_2 = 2 \frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1} = 4 \frac{\dot{V}_2}{A_1}$$

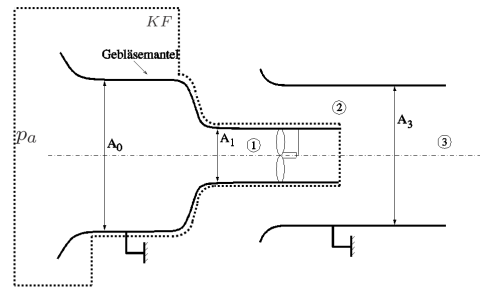
b) Haltekraft: IES für Gebläsemantel

$$\Rightarrow \varrho v_1^2 A_1 = (p_a - p_2) A_1 + F_H$$

mit (1):

$$\Rightarrow \varrho v_1^2 A_1 - \frac{\varrho}{2} v_2^2 A_1 = F_H$$

$$\Rightarrow F_H = \frac{21}{4} \varrho v_2^2 A_1 = \frac{21}{4} \varrho \left( \frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1} \right)^2 A_1 = 21 \rho \frac{\dot{V}_2^2}{A_1}$$



c) Gebläseleistung:

$$P = \dot{V} \Delta p_0$$

$$\Delta p_0 = p_2 - p_1$$

$$\dot{V} = v_1 A_1$$

Bernoulli  $\infty \rightarrow 1$  :

$$p_a = p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2$$

$$\Leftrightarrow p_a - p_1 = \frac{\varrho}{2} v_1^2$$

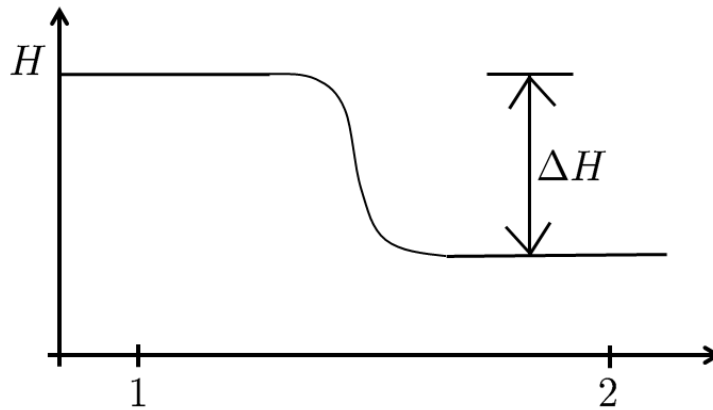
mit  $(p_2 - p_a)$  aus (1):

$$\Rightarrow p_2 - p_1 = p_2 - p_a + p_a - p_1 = \frac{\varrho}{2} (v_1^2 - v_2^2) = \frac{21}{8} \varrho v_2^2$$

$$\Rightarrow P = \frac{105}{16} \varrho v_2^3 A_1 = \frac{105}{16} \varrho \left( \frac{\dot{V}_2}{A_3 - A_1} \right)^3 A_1 = \frac{105}{2} \rho \frac{\dot{V}_2^3}{A_1^2}$$

#### 4. Aufgabe

a) Verlust an Energiehöhe  $\Delta H$  über den Wassersprung:

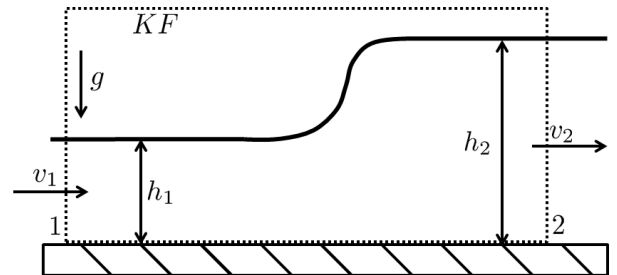


b) X-Impulssatz:  $\frac{dI_x}{dt} = \sum F_x$

$$-\rho v_1^2 h_1 b + \rho v_2^2 h_2 b = \rho g b \left( \frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g} (v_2^2 h_2 - v_1^2 h_1) = \left( \frac{h_1^2}{2} - \frac{h_2^2}{2} \right)$$

Mit Konti:  $v_1 h_1 = v_2 h_2$  ergibt sich:



$$\begin{aligned} \frac{1}{g} (v_2 v_1 h_1 - v_1 v_1 h_1) &= \frac{v_1 h_1}{g} (v_2 - v_1) \\ &= \frac{v_1 h_1}{g} \left( v_1 \frac{h_1}{h_2} - v_1 \right) = \frac{v_1^2 h_1}{g h_2} (h_1 - h_2) \\ &\Leftrightarrow \frac{2v_1^2 h_1}{g h_2} = (h_1 + h_2) \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{h_2}{h_1} \right)^2 + \frac{h_2}{h_1} - 2Fr_1^2 = 0 \\ &\Rightarrow \frac{h_2}{h_1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \end{aligned}$$

Mit  $h_2/h_1 > 0$  gibt es nur eine physikalisch sinnvolle Lösung:

$$h_2 = \frac{h_1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2} \right)$$

c) Verlustleistung:  $P = q \Delta p_0 = \rho g \Delta H q$

Energiegleichung:  $h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_1^2}{2g} \frac{h_1^2}{h_2^2} + \Delta H$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow h_2 - h_1 + \Delta H &= \frac{v_1^2}{2g} \left( 1 - \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{h_2}{h_1} - 1 + \frac{\Delta H}{h_1} &= \frac{Fr_1^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 \right) \\ \Leftrightarrow \Delta H &= h_1 \cdot \left( 1 - \frac{h_2}{h_1} + \frac{Fr_1^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 \right) \right)\end{aligned}$$

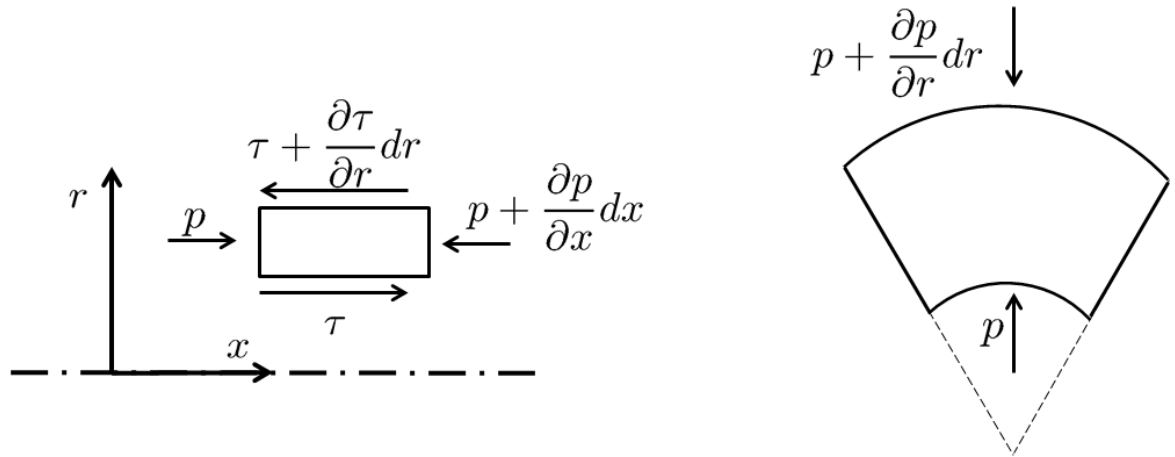
Daraus folgt für die Verlustleistung  $P$ :

$$P = \rho g q h_1 \left( 1 - \frac{h_2}{h_1} + \frac{Fr_1^2}{2} \left( 1 - \left( \frac{h_1}{h_2} \right)^2 \right) \right)$$



## 5. Aufgabe

a) Impulssatz in x-Richtung:



$$0 = \tau 2\pi r dx - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr\right) 2\pi(r + dr) dx + p 2\pi r dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) 2\pi r dr$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau}{r} - \frac{\partial \tau}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r\tau)$$

Impulssatz in r-Richtung:

$$0 = p r d\Theta - \left(p + \frac{\partial p}{\partial r} dr\right)(r + dr) d\Theta \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

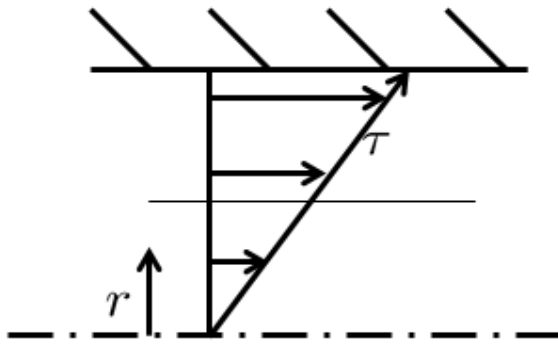
Für eine ausgebildete Strömung folgt daher:  $v = 0$ ,  $u = u(r)$ ,  $\tau = \tau(r)$  Somit ergibt sich für den Druck:

**Fall 1:**  $\Delta p > 0$ :

$$p = p(x) \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \text{const} = -\frac{\Delta p}{L}$$

Schubspannungsverlauf:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau) \quad \text{mit} \quad \tau(r=0) = 0 \quad \text{folgt} \quad \tau = \frac{r}{2} \frac{\Delta p}{L}$$

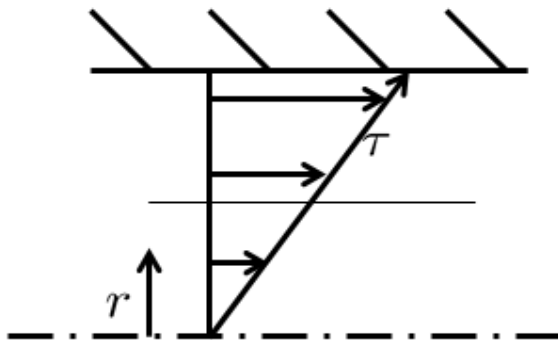


**Fall 2:**  $\Delta p < 0$ :

$$p = p(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \text{const} = \frac{\Delta p}{L}$$

Schubspannungsverlauf:

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau) \quad \text{mit} \quad \tau(r=0) = 0 \quad \text{folgt} \quad \tau = -\frac{r}{2} \frac{\Delta p}{L}$$



b) Geschwindigkeitsverteilung:

**Fall 1:**  $\Delta p > 0$ :

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{\Delta p}{L} = -\eta_i \frac{du_i}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{du_i}{dr} = -\frac{r}{2\eta_i} \frac{\Delta p}{L}$$

Nach Integration folgt für Öl und Wasser:

$$u_{\text{öl}} = -\frac{r^2}{4\eta_{\text{öl}}} \frac{\Delta p}{L} + C_{\text{öl}}$$

$$u_W = -\frac{r^2}{4\eta_W} \frac{\Delta p}{L} + C_W$$

Randbedingungen einsetzen:  $r = R_2 : u_W = 0$  und  $r = R_1 : u_{\text{Öl}} = u_W$

$$u_W = \frac{R_2^2}{4\eta_W} \frac{\Delta p}{L} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_2} \right)^2 \right)$$

$$u_{\text{Öl}} = \frac{R_1^2}{4\eta_{\text{Öl}}} \frac{\Delta p}{L} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_1} \right)^2 \right) + \frac{R_2^2}{4\eta_W} \frac{\Delta p}{L} \left( 1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right)$$

**Fall 2:**  $\Delta p < 0$ :

$$\tau = -\frac{r}{2} \frac{\Delta p}{L} = \eta_i \frac{du_i}{dr} \Rightarrow \frac{du_i}{dr} = \frac{r}{2\eta_i} \frac{\Delta p}{L}$$

Nach Integration folgt für Öl und Wasser:

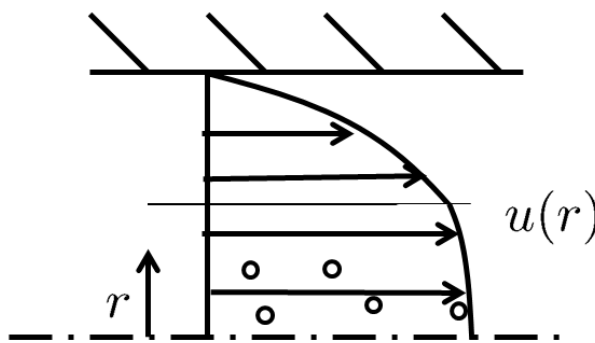
$$u_{\text{öl}} = \frac{r^2}{4\eta_{\text{öl}}} \frac{\Delta p}{L} + C_{\text{öl}}$$

$$u_W = \frac{r^2}{4\eta_W} \frac{\Delta p}{L} + C_W$$

Randbedingungen einsetzen:  $r = R_2 : u_W = 0$  und  $r = R_1 : u_{\text{Öl}} = u_W$

$$u_W = -\frac{R_2^2}{4\eta_W} \frac{\Delta p}{L} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_2} \right)^2 \right)$$

$$u_{\text{öl}} = -\frac{R_1^2}{4\eta_{\text{öl}}} \frac{\Delta p}{L} \left( 1 - \left( \frac{r}{R_1} \right)^2 \right) - \frac{R_2^2}{4\eta_W} \frac{\Delta p}{L} \left( 1 - \left( \frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right)$$



## 6. Aufgabe

- a) Unter einer Couette-Strömung versteht man eine stationäre Scherströmung zwischen zwei unendlichen Platten, die relativ zueinander verschoben werden.

b) 
$$\sum \vec{M} = \int_{KF} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

- c) Lagrange: Es wird die Bewegung der einzelnen Fluidpartikel verfolgt und hieraus die Änderung der Fluideigenschaften bestimmt, die mit diesen Teilchen verbunden sind.

Euler: Die Eulersche Beschreibung verwendet das Feldkonzept. Es werden zu einem gewissen Zeitpunkt die Variablen des Strömungsfeldes wie Dichte, Druck, Geschwindigkeit oder Beschleunigung als Funktion der räumlichen Koordinaten x,y und z dargestellt.

- d) Prandtl'sche Mischungsweghypothese:

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \eta_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}$$

turbulente Zähigkeit:

$$\eta_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right|$$

- e) Das universelle logarithmische Wandgesetz beschreibt das Geschwindigkeitsprofil einer turbulenten Rohrströmung außerhalb der viskosen Unterschicht.
- f) Abklingende Geschwindigkeitsschwankungen,  $\tau_l > \tau_t$  in direkter Wandnähe, linearer Geschwindigkeitsverlauf normal zur Wand, großer Geschwindigkeitsgradient normal zur Wand