....

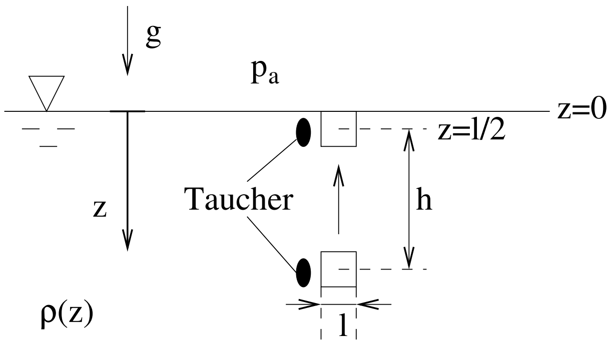
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

21. 7. 2000

1. Aufgabe (11 Punkte)

Im Meer sei die aufgrund unterschiedlichen Salzgehaltes vorliegende Dichteverteilung $\rho(z)$ bekannt. Ein Taucher soll eine würfelförmige Kiste der Kantenlänge l aus der Tiefe $z = h + l/2$ bis zur Tiefe $z = l/2$ heben (s. Skizze). Auf die Kiste wirkt die Gewichtskraft F_G, die an jeder Stelle größer ist, als die auf die Kiste wirkende Auftriebskraft.



a) Bestimmen Sie die Druckverteilung $p(z)$.

b) Welche Arbeit verrichtet der Taucher bei dieser Bergung? Berücksichtigen Sie dazu nur die Gewichts- und die Auftriebskraft der Kiste.

c) Der Taucher besitzt zusammen mit seiner Ausrüstung (ohne Schwimmweste) die Dichte ρ_T und das Volumen V_T. In der Tiefe z_T hat er seine im Volumen veränderliche Schwimmweste mit Luft unter Umgebungsdruck $p(z_T)$ derart befüllt, daß er gerade schwebt. Die Weste mitsamt der befüllten Luft hat eine Dichte $\rho_{Weste} \ll \rho_0$ und in der Tiefe z_T ein Volumen V_W.
Bestimmen Sie z_T.

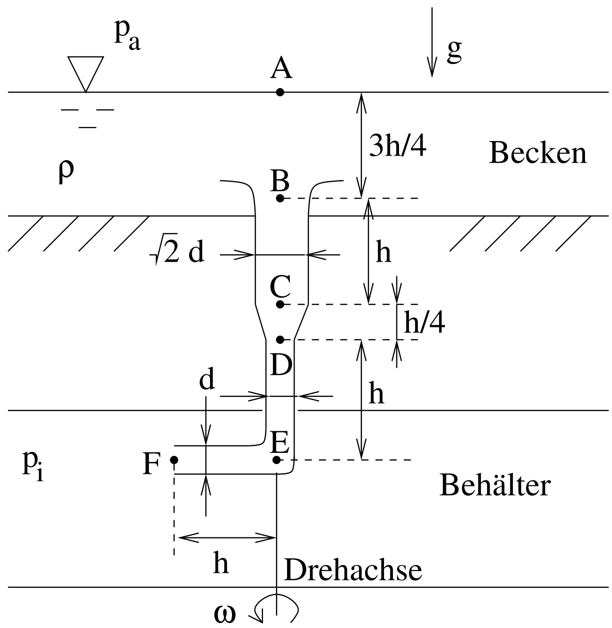
d) Die Schwimmweste aus c) darf sich maximal bis zu einem Volumen $V_{max} = 2V_W$ ausdehnen bevor sie platzt. Bis zu welcher Tiefe z_{min} darf der Taucher aus c) höchstens aufsteigen?
Nehmen Sie isotherme Zustandsänderung an.

Gegeben: $p_a, \rho_0, C, g, h, l, F_G, \rho_T, V_T, V_W, \quad \rho(z) = \rho_0 + Cz, \quad C > 0, \quad z \geq 0$

Hinweis: $l \ll h$

2. Aufgabe (15 Punkte)

Ein großes Becken ist über einen gut gerundeten Abfluß mit einem Behälter verbunden, in dem der Druck p_i herrscht. In dem großen Behälter ist ein abgewinkeltes Rohr angeschlossen, das um die Drehachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω angetrieben wird. Zwischen den Punkten C und D tritt durch Einbauten der Druckverlustbeiwert ζ auf. Das Rohr hat zwischen den Punkten B und C den Rohrreibungsbeiwert λ_1 und zwischen den Punkten D und F den Rohrreibungsbeiwert λ_2.



a) Es wird die Druckdifferenz $\Delta p = p_C - p_D = \rho g h 7/4$ gemessen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_C im Punkt C. (Δp ist nur für Teilaufgabe a) gegeben!)

b) Berechnen Sie bei einem Behälterinnendruck $p_i = p_a$ die Winkelgeschwindigkeit ω derart, daß die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit des Fluids im Punkt F gleich der Radialkomponente ist.

c) Betrachten Sie eine Stromlinie von A nach F für die Anordnung aus b). Zeichnen Sie sorgfältig die gesamte mechanische Energie und deren Anteile entlang der Stromlinie als Funktion der Lauflänge.

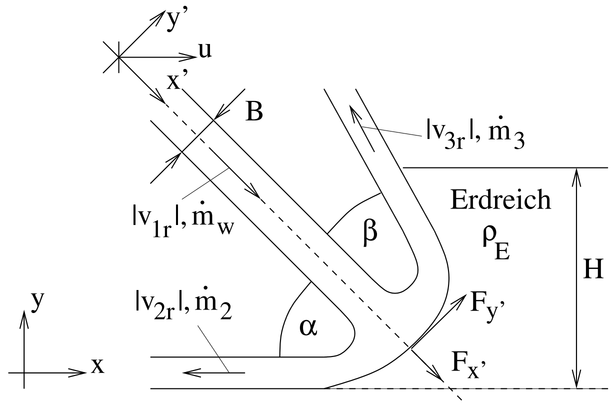
d) Nun sei $\lambda_1, \lambda_2, \zeta, \omega = 0$ und die Geschwindigkeit im Punkt F $v_F = v_0$. Plötzlich wird der Druck im Behälter erhöht auf $p_i = p_a + 3\rho g h$ (d.h. $v_F = 0$ für den stationären Zustand). Berechnen Sie das Volumen, das von jetzt bis zu dem Zeitpunkt austritt, an dem die Geschwindigkeit $v_F = 0,01 v_0$ ist. Vernachlässigen Sie dabei den instationären Anteil von Punkt C nach Punkt D.

Gegeben: $g, h, d, \zeta, \lambda_1, \lambda_2 \quad d \ll h$

Hinweis: $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r$

3. Aufgabe (13 Punkte)

Mit einem Wasserstrahl (Dichte ρ_w, Breite B) wird das Erdreich (Dichte ρ_E) auf einer Höhe H und einer Tiefe T abgetragen. Dabei bewegt sich der Wasserstrahl mit einer Geschwindigkeit u in x-Richtung relativ zum Erdreich. Der Wasserstrahl trifft unter einem Winkel α auf das Erdreich auf und teilt sich gemäß der Zeichnung in zwei Teilstrahlen auf. Diese Teilstrahlen führen jeweils einen Teil des abgespülten Erdreiches ($\dot{m}_E$) mit sich. Die eingezeichneten Geschwindigkeiten $|v_{1r}|$, $|v_{2r}|$ und $|v_{3r}|$ beziehen sich auf das mit u mitbewegte Relativsystem (x', y').



Das abströmende Erdreich soll als Kontinuum betrachtet werden. In allen Bereichen herrscht der Druck p_a. Alle Strahlen haben die Tiefe T.

a) Bestimmen Sie den Massenstrom $\dot{m}_W$ und $\dot{m}_E$.

b) Vom Erdreich wirken auf den Strahl die Kräfte $F_{x'}$ und $F_{y'}$. Stellen Sie die Impulsbilanz im Koordinatensystem (x', y') für die x'- und die y'-Richtung in Abhängigkeit von $\dot{m}_2, \dot{m}_3$ und β auf (Formulieren Sie nur den Ansatz).

c) Stellen Sie zusätzlich zu den beiden Gleichungen aus b) eine dritte Gleichung zur Bestimmung von $\dot{m}_2, \dot{m}_3$ und β auf.

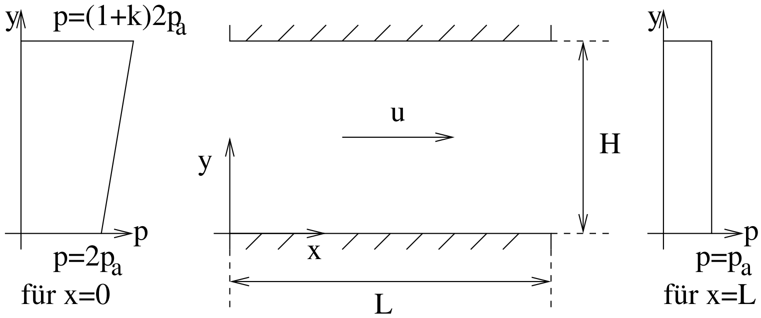
d) Nun sei $\beta < \pi/2$ und $\alpha = 0$, wobei der untere Teilstrahl ($\dot{m}_2$) weiterhin in negativer x-Richtung strömt. Die Kräfte F_x und F_y, die vom Erdreich auf den Strahl wirken, sind nun gegeben.
Stellen Sie für das mit dem Erdreich verbundene Koordinatensystem (x, y) die Impulsbilanz in x- und in y-Richtung in Abhängigkeit von $\dot{m}_2, \dot{m}_3$ und β auf (Formulieren Sie nur den Ansatz).

Gegeben: $\rho_W, \rho_E, B, T, H, u, |v_{1r}|, |v_{2r}|, |v_{3r}|, \alpha, F_{x'}, F_{y'}$

4. Aufgabe (9 Punkte für a) und b))

Zwischen zwei ebenen Platten mit dem Abstand H strömt ein inkompressibles Newtonsches Fluid mit konstanter Zähigkeit η. In dem Bereich $0 \leq x \leq L$ sei die Strömung stationär und laminar. Bei $x = 0$ und $x = L$ sind die skizzierten Druckprofile aufgeprägt. Man erhält die folgende angenäherte Druckverteilung:

$$p(x, y) = p_a \frac{x}{L} + 2p_a(1 + k\frac{y}{H})(1 - \frac{x}{L}) \quad , \quad k > 0$$



a) Leiten Sie das Geschwindigkeitsprofil der Kanalströmung für $0 \leq x \leq L$ her. Vernachlässigen Sie Querströmungen (u hängt nur von y ab; $v = 0$)!

b) An welcher Stelle (y/H) ist die Schubspannung für $k = 0.2$ gleich null?

c) **Teilaufgabe c) kam nur in der Kombi-Klausur Wärmeübertragung/Strömungslehre vor (3 Punkte)**
Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit u_{max}, die für $k = 0.2$ zwischen den Platten auftritt?

Gegeben: p_a, k, L, H, η

5. Aufgabe (11 Punkte)

a) Das Verhältnis welcher Kräfte beschreibt die Reynoldszahl? Geben Sie die Definition der Reynoldszahl an.

b) Ein unendlich langer Zylinder mit dem Durchmesser D wird von einem Fluid, das die Zähigkeit η und die Dichte ρ besitzt, mit der Geschwindigkeit u_∞ quer angeströmt. Die Widerstandskraft W des Zylinders soll gemessen werden. Bestimmen Sie mit Hilfe des Buckinghamschen Π-Theorems die relevanten Kennzahlen.

c) Gegeben sind die instationären, kompressiblen, zweidimensionalen Erhaltungsgleichungen der Masse, des Impulses in y-Richtung und der Energie. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung das Gleichungssystem für eine inkompressible und reibungsfreie Strömung.

Hinweis:
Die instationären, zweidimensionalen, kompressiblen Erhaltungsgleichung lauten:

- Masse:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

- y-Impuls:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv + \sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p + \sigma_{yy}) = 0$$

- Energie:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uE + up + u\sigma_{xx} + v\sigma_{xy} + q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vE + vp + v\sigma_{yy} + u\sigma_{xy} + q_y) = 0$$

mit

$$\sigma_{xx} = -\eta[2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})] \quad , \quad \sigma_{yy} = -\eta[2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})] \quad , \quad \sigma_{xy} = -\eta(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$$

und

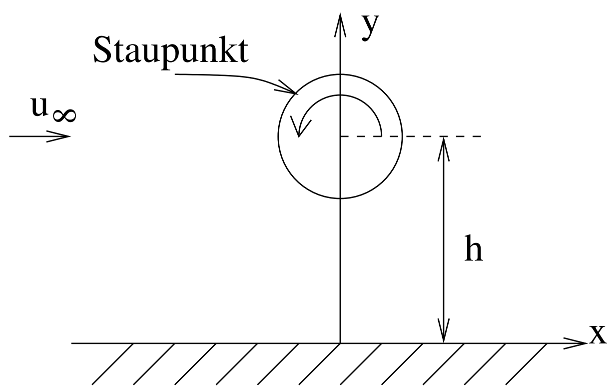
$$q_x = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad q_y = -\lambda\frac{\partial T}{\partial y}$$

6. Aufgabe (14 Punkte)

a) Wie ist eine Stromlinie definiert?

b) In welcher geometrischen Beziehung stehen Strom- und Äquipotentiallinien?

Ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierender Kreiszylinder wird von einem inkompressiblen Fluid mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt. Der Zylinder befindet sich in einem Abstand h über einen festen Wand. Die Strömung sei reibungsfrei und zweidimensional.



c) Unter der Annahme einer potentialtheoretischen Beschreibung des Strömungsfeldes formulieren Sie eine geeignete komplexe Potentialfunktion $F(z)$, die dieses Strömungsproblem beschreibt.

d) Bestimmen Sie die Potentialfunktion Φ und die Stromfunktion Ψ.

e) Vereinfachen Sie die in c) erhaltene komplexe Potentialfunktion $F(z)$ für $h = 0$. Ermitteln Sie den/die Staupunkt/e.

f) Skizzieren Sie für die Strömung aus e) die Linien $\Phi = const.$

Gegeben: $h, u_\infty,$ alle benötigten Konstanten

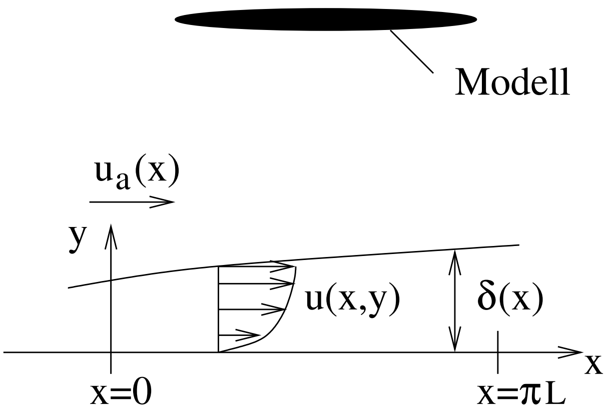
Hinweis: Gegeben sind die folgenden komplexen Potentialfunktionen:

- $F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$ Parallelströmung
- $F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$ Quelle/Senke
- $F(z) = \frac{M}{2\pi z}$ Dipol
- $F(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \ln z$ Potentialwirbel
- $F(z) = az^2$ Staupunktströmung

7. Aufgabe (13 Punkte)

Ein Windkanal wird mit einem inkompressiblen Fluid der Dichte ρ und der Viskosität η durchströmt. In dem Bereich $0 \leq x \leq \pi L$ wird unmittelbar oberhalb der Grenzschicht die durch ein Windkanalmodell verursachte Geschwindigkeitsverteilung $u_a(x)$ gemessen. Das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Grenzschicht im Bereich $0 \leq x \leq \pi L$ wird durch den folgenden Polynomansatz angenähert:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_1\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^2 + a_3\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^3 + a_4\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^4$$



a) Leiten Sie aus der unten angegebenen, dimensionslosen Impulsgleichung die dimensionslose Wandbindungsgleichung einer Grenzschicht her.
zweidimensionale, stationäre, inkompressible Impulsgleichung in x-Richtung:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1 bis a_4 als Funktion von x.

c) Geben Sie die Definition der Impulsverlustdicke $\delta_2(x)$ an.

d) Bestimmen Sie die Verdrängungsdicke $\delta_1(x)$ an der Stelle $x = L\pi/2$.

Gegeben: $u_\infty, \rho, \eta, \delta(x), L, \quad u_a(x) = u_\infty(1 + \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{L}))$

8. Aufgabe (13 Punkte)

a) Ein Rennfahrer fährt mit $252\mathrm{km/h}$ mit seinem Sportwagen über die Autobahn, wobei die Temperatur der Luft $T_L = 293\mathrm{K}$ beträgt. Kann man diese Umströmung noch näherungsweise inkompressibel berechnen (kurze(!) Begründung)?

b) Ein Objekt wird mit einer Machzahl von $Ma_\infty = 2,0$ angeströmt. Welchen maximalen und welchen minimalen Wert kann der Stoßwinkel σ eines auftretenden Verdichtungsstoßes annehmen?

c) Im Zustand 1 vor einem schrägen Verdichtungsstoß herrscht das Druckverhältnis $p_{01}/p_1 = 50$ und die Geschwindigkeit $\vec{v_1} = 800\mathrm{m/s}$. Bestimmen Sie die Machzahl Ma_1 vor dem Stoß und die Ruhetemperatur T_{01}.

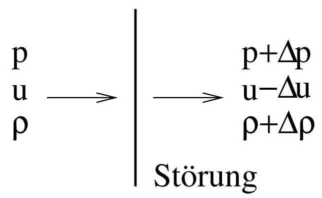
Gegeben: $\frac{p_{01}}{p_1} = 50, \quad \vec{v_1} = 800\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}, \quad R = 287\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}, \quad \gamma = 1,4$

Rechnen Sie mit $Ma_1 = 3,0$ und $T_{01} = 500\mathrm{K}$ weiter.

d) Bestimmen Sie die Temperatur T_1. Berechnen Sie die Machzahl Ma_2 nach dem Stoß und den Stoßwinkel σ, wenn $T_2 = 250\mathrm{K}$ ist.

e) Bestimmen Sie den Umlenkwinkel β.

f) Eine kleine Störung bewegt sich mit der Geschwindigkeit u durch ein ruhendes Gas. Für einen mitbewegten Beobachter ist diese Strömung stationär und eindimensional (s. Skizze unten).
Stellen Sie mit den in der Skizze gegebenen Größen die Massen- und Impulsbilanz auf. Leiten Sie einen Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit her.



Hinweis:

- Die Luft wird als ideales Gas mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten betrachtet
- $\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2$
- Isentropenbeziehungen: $\frac{T_a}{T_b} = (\frac{\rho_a}{\rho_b})^{\gamma-1} = (\frac{p_a}{p_b})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$
- zu f): Isentropenbeziehung in differentieller Form: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} = \gamma\frac{p}{\rho}$