1. Aufgabe

a) A = Auftriebskraft; G = Schwerkraft; S = Seilkraft

Kräftegleichgewicht: $A = G + S$

$$\rho_W V_0 g = mg + S \Leftrightarrow S = \frac{1}{3}\pi R_0^2 h_0 g \rho_W - mg$$

b) Masse und Temperatur der Luft bleiben konstant: $m_L R T_L = const$

$$\Rightarrow p_a V_0 = p_W V_H = (p_a + \rho_W g H) V_H \quad \text{(mit } h_0 << H\text{)}$$

$$\Rightarrow V_H = \frac{p_a}{p_a + \rho_W g H} V_0 \quad \text{mit } A = \rho_W g V_H$$

$$S = A - G = \left[\frac{p_a}{p_a + \rho_W g H}\rho_W V_0 - m\right] g = \left[\frac{p_a}{p_a + \rho_W g H}\frac{1}{3}\pi R_0^2 h_0 \rho_W - m\right] g$$

c) V_L ist der Kegel in der Luft mit h_1 und R_1

V_0 ist der Gesamtkegel mit h_0 und R_0

$$A = G \Rightarrow \rho_W V_W g = mg$$

Es ist

$$V_W = V_0 - V_L = \frac{1}{3}\pi\left[R_0^2 h_0 - R_1^2 h_1\right] \quad (*)$$

Strahlensatz:

$$\frac{h_1}{R_1} = \frac{h_0}{R_0}$$

Damit folgt:

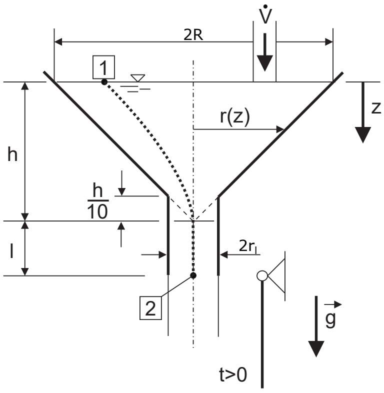
$$V_W = \frac{1}{3}\pi R_0^2 h_0 \left[1 - \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^3\right]$$

$(*)$ einsetzen:

$$\frac{1}{3}\pi R_0^2 h_0 \left[1 - \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^3\right] = \frac{m}{\rho_W} \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{h_1}{h_0}\right)^3 = \frac{3}{\pi R_0^2 h_0}\frac{m}{\rho_W}$$

$$\Leftrightarrow h_1 = \sqrt[3]{h_0^3 - \frac{3h_0^2}{\pi R_0^2}\frac{m}{\rho_W}}$$

2. Aufgabe



a) Bernoulli von $\boxed{1}$ nach $\boxed{2}$:

$$p_a + \frac{\varrho}{2}v_1^2 = p_a - \varrho g(h+l) + \frac{\varrho}{2}v_2^2 + \varrho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{R}{r_l}\right)^2 = 100 \quad \text{und} \quad v_1 = 0$$

$$\text{Konti:} \quad vA = v_2 A_2 \quad \Longrightarrow \quad v = v_2 \frac{A_2}{A(z)}$$

$$\text{wobei:} \quad \frac{A_2}{A(z)} = \frac{\pi r_l^2}{\pi r(z)^2}$$

mit $\frac{R}{h} = \frac{r(z)}{h-z} \Rightarrow r(z) = R\left(1 - \frac{z}{h}\right) \Rightarrow \frac{A_2}{A(z)} = \left(\frac{r_l}{R}\right)^2 \frac{1}{\left(1-\frac{z}{h}\right)^2} = \left(\frac{r_l}{R}\right)^2 \frac{h^2}{(h-z)^2}$

$$\Longrightarrow \quad \varrho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \varrho \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(v_2 \frac{A_2}{A(z)}\right) ds = \varrho \frac{dv_2}{dt} \int_1^2 \frac{A_2}{A(z)} ds$$

$$\text{mit:} \quad \int_1^2 = \int_0^{\frac{9}{10}h} + \int_{\frac{9}{10}h}^{h+l} = \varrho \frac{dv_2}{dt} \int_0^{\frac{9}{10}h} \frac{A_2}{A(z)} dz + \varrho \frac{dv_2}{dt}\left(l + \frac{h}{10}\right)$$

$$\Longrightarrow \int_0^{\frac{9}{10}h} \frac{A_2}{A(z)} dz = \left(\frac{r_l \cdot h}{R}\right)^2 \cdot \left.\frac{1}{h-z}\right|_0^{\frac{9}{10}h} = 0,09h$$

$$\Longrightarrow \varrho g(h+l) = \frac{\varrho}{2} v_2^2(t) + \varrho \frac{dv_2}{dt}(l + 0,19h)$$

$$\text{für t = 0:} \quad v_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left.\frac{dv_2}{dt}\right|_{t=0} = \frac{g(h+l)}{l + 0,19h}$$

b) aus a) folgt:

$$g(h+l) - \frac{v_2^2}{2} = \frac{dv_2}{dt}(l + 0,19h) \quad \Longrightarrow \quad dt = (l+0,19h)\frac{2 \cdot dv_2}{2g(h+l) - v_2^2}$$

stationäre Endgeschwindigkeit: $v_2(t \to \infty) = \sqrt{2g(h+l)}$

da $v_2(t) < v_2(t \to \infty) \quad \Longrightarrow \quad$ Integral für $|x| < a$

$$\Longrightarrow \Delta T = \frac{l + 0,19h}{\sqrt{2g(h+l)}} \ln \left.\frac{\sqrt{2g(h+l)} + v_2}{\sqrt{2g(h+l)} - v_2}\right|_0^{0,9\sqrt{2g(h+l)}}$$

$$\Longrightarrow \Delta T = \frac{l + 0,19h}{\sqrt{2g(h+l)}} \ln(19)$$

3. Aufgabe

a) Massenstrom:

$$\varrho u_\infty \pi R^2 = \Delta \dot{m} + \varrho \int_0^{2\pi} \int_0^R u_e(r,\phi) r dr d\phi$$

$$\rightarrow \Delta \dot{m} = \varrho u_\infty \pi R^2 - 2\pi \varrho u_\infty \int_0^R \left[(1-c)r - cr\ \cos(\pi r/R)\right] dr$$

$$\rightarrow \Delta \dot{m} = \varrho u_\infty \pi R^2 - 2\pi \varrho u_\infty \left[(1-c)\frac{r^2}{2} - c\frac{\cos(\pi r/R)}{\left(\frac{\pi}{R}\right)^2} - c\frac{r\sin(\pi r/R)}{\left(\frac{\pi}{R}\right)}\right]_0^R$$

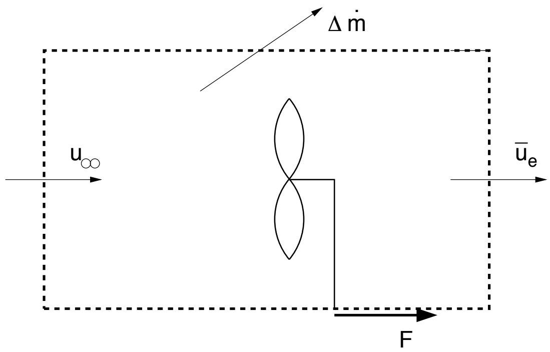
$$\rightarrow \Delta \dot{m} = \varrho u_\infty \pi R^2 c\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$$

b) $\overline{u}_e$:

$$\Delta \dot{m} = \varrho u_\infty \pi R^2 - \varrho \overline{u}_e \pi R^2$$

$$\rightarrow \overline{u}_e = u_\infty \left(1 - c\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\right)$$

c) Bestimmung der Kraft:



$$\Delta \dot{m} = \varrho(u_\infty - \overline{u}_e)\pi R^2$$

Impulssatz: $-\varrho u_\infty^2 \pi R^2 + \Delta \dot{m} u_\infty + \varrho \overline{u}_e^2 \pi R^2 = F$

$$F = (\overline{u}_e - u_\infty)\overline{u}_e \varrho \pi R^2$$

4. Aufgabe

a) Wassersprünge können nur in überkritischen Strömungen entstehen, in denen $Fr > 1$ ist. Die Definition der Froude-Zahl ist $Fr = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{gz}}$.

b) $$H_0 = z_0 + \frac{1}{2g}v_0^2 = z_1 + \frac{1}{2g}v_1^2 = H_1$$

und $v_0 z_0 B_0 = v_1 z_1 B_1$

$$\Rightarrow z_0 + \frac{1}{2}Fr_0^2 z_0 = z_1 + \frac{1}{2g}\left(\frac{v_0 B_0 z_0}{B_1 z_1}\right)^2 = z_1 + \frac{1}{2}Fr_0^2 z_0 \frac{1}{\Phi^2\Psi^2}$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2}Fr_0^2 = \Psi + \frac{1}{2}Fr_0^2 \frac{1}{\Phi^2\Psi^2}$$

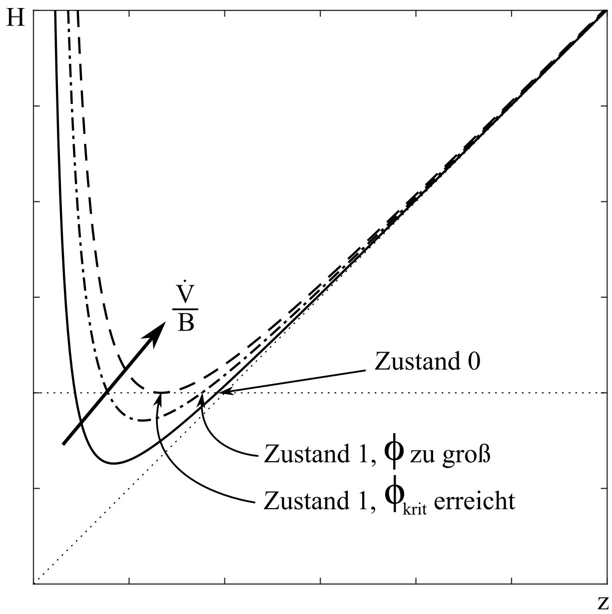
$$\Rightarrow \frac{1}{2}Fr_0^2\left(1 - \frac{1}{\Phi^2\Psi^2}\right) = \Psi - 1$$

$$\Rightarrow Fr_0 = \sqrt{\frac{2(\Psi-1)}{1-\frac{1}{\Phi^2\Psi^2}}}$$

$$\frac{Fr_0}{Fr_1} = \frac{v_0}{\sqrt{gz_0}}\frac{\sqrt{gz_1}}{v_1} = \frac{\dot{V}}{B_0 z_0}\frac{B_1 z_1}{\dot{V}}\sqrt{\frac{z_1}{z_0}} = \Phi\Psi^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow Fr_1 = \frac{1}{\Phi\Psi^{\frac{3}{2}}}Fr_0 = \sqrt{\frac{2(\Psi-1)}{(\Phi^2\Psi^2-1)}\frac{1}{\Psi}}$$

c) Der Übergang in den überkritischen Fließzustand geschieht kontinuierlich. Ohne eine Änderung der Sohlenhöhe muss die Energiehöhe konstant bleiben, sodass eine Zustandsänderung nur durch eine Änderung von $\dot{V}/B$ herbeigeführt werden kann. Daher muss die Kanalbreite hinreichend stark verringert werden, sodass der Grenzzustand erreicht und durchlaufen werden kann.



5. Aufgabe

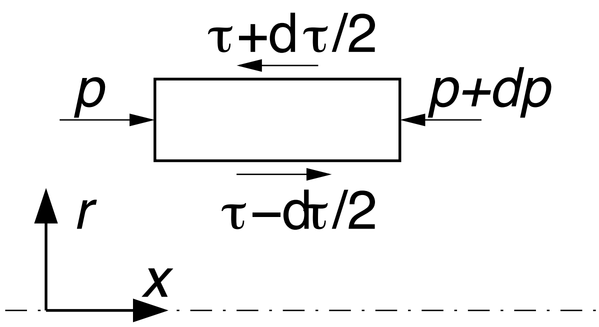
a) Geschwindigkeitsverteilung:
IES am diff. Volumenelement:

$$\tau(r-\frac{dr}{2})\cdot 2\pi\cdot\left[r-\frac{dr}{2}\right]dx-\tau(r+\frac{dr}{2})\cdot 2\pi\cdot\left[r+\frac{dr}{2}\right]dx$$

$$+p(x)\cdot 2\pi\cdot rdr-p(x+dx)\cdot 2\pi\cdot rdr=0$$

$$\Rightarrow 0=-\left(\tau+r\frac{d\tau}{dr}\right)-r\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d(r\tau)}{dr}=-r\frac{dp}{dx}$$



1.Integration:

$$\tau r=-\frac{dp}{dx}\frac{r^2}{2}+c_1$$

$$\Leftrightarrow \tau=-\frac{dp}{dx}\frac{r}{2}+\frac{c_1}{r}$$

damit

$$\tau(r=0)=0$$

erfüllt, muss gelten

$$c_1=0$$

$$\Rightarrow \tau(r)=-\frac{dp}{dx}\frac{r}{2}=-\eta\frac{du}{dr}$$

(Newtonsche Fließgesetz)

$$\Leftrightarrow \frac{du_2}{dr} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dx}$$

2.Integration:

$$u_2(r) = \frac{1}{4\eta}\frac{dp}{dx}r^2 + c_2$$

mit RB

$$u(r = R) = 0$$

folgt

$$c_2 = -\frac{R^2}{4\eta}\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow u_2(r) = -\frac{R^2}{4\eta}\frac{dp}{dx}\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

$$\frac{dp}{dx} = ?$$

$$\dot{V} = konst. = u_1 \pi R^2 = 2\pi R^2 \int\limits_0^1 u_2\left(\frac{r}{R}\right)\frac{r}{R} \cdot d\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$= -\frac{\pi R^4}{8\eta}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{8u_1\eta}{R^2}$$

$$\Rightarrow u_2(r) = 2u_1\left(1 - \left(\frac{r^2}{R^2}\right)\right)$$

b) IES:

$$-\dot{I}_{ein} + \dot{I}_{aus} = \Delta p \pi R^2 - F_r$$

mit

$$\Delta p = p_1 - p_2$$

$$F_r = \frac{1}{2}\left(\tau_{Wand}(x = 0) + \tau_{Wand}(x = L)\right) 2\pi R L$$

$$\tau_{Wand}(x = L) = -\eta \left.\frac{du_2}{dr}\right|_{r=R} = 4\eta\frac{u_1}{R}$$

$$\tau_{Wand}(x=0) = C \cdot \tau_w(x=L)$$

$$\Rightarrow F_r = \tau_{Wand}(x=L) \cdot (C+1)\pi R L$$

$$\dot{I}_{ein} = -\varrho u_1^2 \pi R_1^2$$

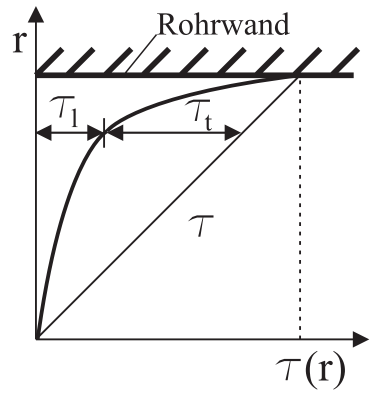
$$\dot{I}_{aus} = 2\pi\varrho R^2 \int\limits_0^1 u_2 \left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{r}{R} \cdot d\left(\frac{r}{R}\right) = \frac{4}{3}\pi R^2 \varrho u_1^2$$

$$\Rightarrow \varrho \frac{u_1^2 \pi R^2}{3} = \Delta p \pi R^2 - \pi R L (C+1) 4\eta \frac{u_1}{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta p = 4\eta \frac{u_1 L (C+1)}{R^2} + \varrho \frac{u_1^2}{3}$$

<u>6. Aufgabe</u>

a) Skizze



b) $k < y_*$
Die Rauheitsstärke k ist kleiner als die Dicke der viskosen Unterschicht y_*.

c) Der Mischungsweg ist die Strecke in Richtung der Normalen, die ein sich mit seiner ursprünglichen Geschwindigkeit bewegender Turbulenzballen zurücklegen muss, damit die Differenz zwischen seiner Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit der neuen Schicht der gemittelten absoluten Schwankungsgröße entspricht.

d)
- Stromlinie: Die Linien, die tangential zum Geschwindigkeitsfeld verlaufen, werden Stromlinien genannt.
- Bahnlinie: Die Bahnlinie ist die Trajektorie eines speziellen Fluidpartikels in einem gewissen Zeitintervall.
- Rauchlinie: Die Rauchlinie definiert den momentanen Ort der Fluidpartikel, die zu einer vorherigen Zeit denselben festen räumlichen Punkt passiert haben.