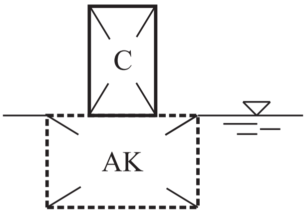
....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungslehre" (Diplom)

07. 03. 2012

1. Aufgabe

a) Schwebezustand für Container und virtuellen Auftriebskörper:



$F_{A,AK} = G_C$

$\rho_W g A \Delta H_{AK} = \rho_C g V_C$

$\Rightarrow \Delta H_{AK} = \frac{\rho_C}{\rho_W}\frac{V_C}{A}$

Schiff schwimmt durch fehlenden Container mehr auf, d.h. die Spiegelhöhe ΔH_{AK} sinkt. Bei Zustand „2" wird Wasser durch das Container-Volumen V_C verdrängt, dass zur Verringerung der Absenkung ΔH_C führt.

$$\Delta H = \Delta H_C - \Delta H_{AK} = \frac{V_C}{A} - \frac{V_C}{A}\frac{\rho_C}{\rho_W}$$

$$\Rightarrow \Delta H = \frac{V_C}{A}\left(1 - \frac{\rho_C}{\rho_W}\right) < 0 \quad \left[\frac{m^3}{m^2}\right]\left(\left[\frac{kg}{m^3}\frac{m^3}{kg}\right]\right) = [m]$$

Da $\rho_C > \rho_W$ sinkt beim Schiff ohne Container der Wasserspiegel.

b) max. Steighöhe: $\sum F = 0$

$F_A - F_G - F_Z - F_C = 0$

$\rho_L g V_Z = (m_G + m_Z + m_C)g \quad$ mit $m_C = \rho_C V_C$

$\Rightarrow \rho_L = \frac{m_G + m_Z + m_C}{V_Z}$

Barometrische Höhenformel (allg.): $\rho_L(z) = \rho_0 e^{-\frac{gz}{R_L T_0}}$

$$\rho_0 e^{-\frac{g z_{max}}{R_L T_0}} = \frac{m_G + m_Z + m_C}{V_Z}$$

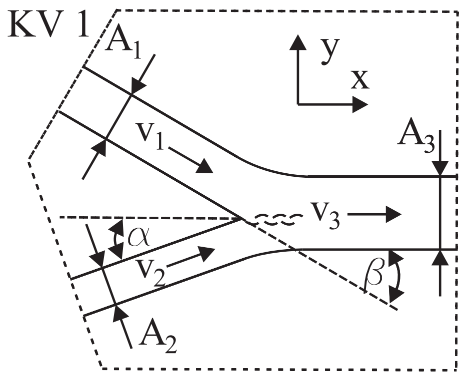
$$\Rightarrow -\frac{g z_{max}}{R_L T_0} = \ln\left(\frac{m_G + m_Z + m_C}{V_Z \rho_0}\right)$$

ideale Gasgleichung: $p_a = \rho_0 R_L T_0$

$$z_{max} = \frac{R_L T_0}{g}\ln\left(\frac{V_Z p_a}{R_L T_0 (m_G + m_Z + m_C)}\right) \quad \left[\frac{J}{kgK}K\frac{s^2}{m}\right] ln\left[m^3\frac{kg}{m^3}\frac{1}{kg}\right] = [m]$$

c) $p_i < p(z_{max}) \rightarrow V_{Z,eff}$ sinkt $\rightarrow z_{max}$ sinkt

2. Aufgabe



a) Impulssatz in y-Richtung:

$$\rho v_1^2 \sin\beta A_1 - \rho v_2^2 \sin\alpha A_2 = 0$$

$$\sin\beta = \frac{A_2 v_2^2}{A_1 v_1^2} \sin\alpha$$

$$\beta = \arcsin\left[\frac{A_2}{A_1}(\frac{v_2}{v_1})^2 \sin\alpha\right] \quad [.]$$

b) Impulssatz in x-Richtung:

$$-\rho v_1^2 A_1 \cos\beta - \rho v_2^2 A_2 \cos\alpha + \rho v_3^2 A_3 = 0$$

$$\Rightarrow A_3 v_3^2 = A_1 v_1^2 \cos\beta + A_2 v_2^2 \cos\alpha \quad (1)$$

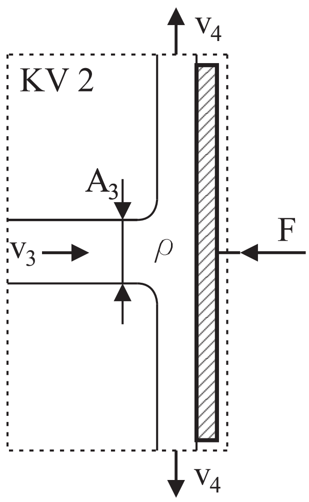
Konti:

$$v_1 A_1 + v_2 A_2 = v_3 A_3 \quad (2)$$

(2) in (1):

$$\Rightarrow v_3 = \frac{A_1 v_1^2 \cos\beta + A_2 v_2^2 \cos\alpha}{v_1 A_1 + v_2 A_2} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\Rightarrow A_3 = \frac{(v_1 A_1 + v_2 A_2)^2}{A_1 v_1^2 \cos\beta + A_2 v_2^2 \cos\alpha} \quad [m^2]$$



c) Massenstrom: $\dot{m} = \rho A_4 v_4$

Konti: $A_4 = \frac{1}{2} A_3$ aus Symmetrie

Bernoulli: $v_4 = v_3$

$$\Rightarrow \dot{m} = \frac{1}{2}\rho A_3 v_3 \quad \left[\frac{kg}{s}\right]$$

d) Impulssatz in x-Richtung: $\frac{dI_x}{dt} = \rho v_3^2 A_3 = \sum F_x$

$$\Rightarrow F = \rho v_3^2 A_3 \quad [N]$$

e) Impulssatz in x-Richtung für eine bewegte Kontrollfläche:

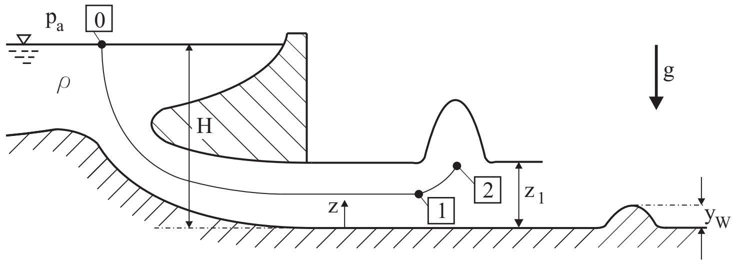
$$\frac{dI_x}{dt} = \int \rho v_{r,x} (\vec{v_r} \cdot \vec{n}) dA = F$$

$$F = \rho (v_3 - v_F)^2 A_3 \quad \left[\frac{kg}{m^3} \frac{m^2}{s^2} m^2\right] = [N]$$

3. Aufgabe

a) Bernoulli von $\boxed{0} \rightarrow \boxed{1}$: $p_a + \rho g H = p_1 + \rho g z_1^* + \frac{\rho}{2} v_1^2$

Hydrostatische Grundgleichung: $p_1 = p_a + \rho g (z_1 - z_1^*)$



$$\Rightarrow p_a + \rho g H = p_a + \rho g (z_1 - z_1^*) + \rho g z_1^* + \frac{\rho}{2} v_1^2 \;\Leftrightarrow\; \rho g (H - z_1) = \frac{\rho}{2} v_1^2$$

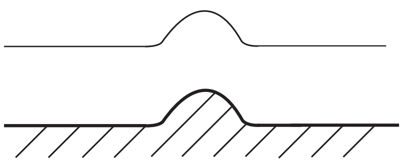
$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(H - z_1)} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Konti: } v_1 z_1 B_1 = 2 v_2 z_1 \dfrac{B_1}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; v_2 = v_1 \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Bernoulli von } \boxed{1} \rightarrow \boxed{2}: \; \rho g z_1 + \dfrac{\rho}{2} v_1^2 = 2 \rho g z_1 + \dfrac{\rho}{2} v_2^2 \end{array}\right\} g z_1 = \frac{v_1^2}{4} \qquad (2)$$

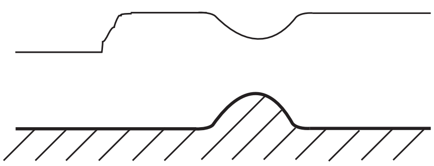
aus (1) + (2): $H = 3 z_1 \quad [m]$

b) $Fr = \dfrac{v}{\sqrt{gz}} = \sqrt{\dfrac{2g(H - z_1)}{g z_1}} = 2 > 1 \Rightarrow$ schießender (überkritischer) Zustand

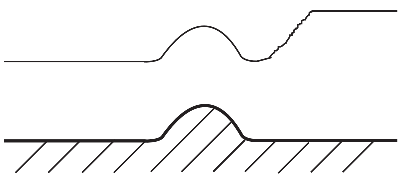
nur schießend



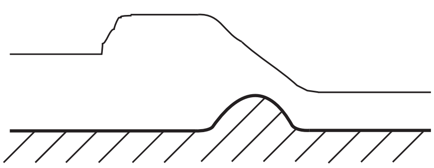
Wassersprung zwischen
Verengung und Bodenwelle



Wassersprung nach
der Bodenwelle



wie oben + Übergang zum
schießenden Zustand



c) Die Energiehöhe H_{nach} nach dem Wassersprung ist:

$H_{nach} = H_{min} + y_{gr}$ mit $H_{min} = \frac{3}{2} z_{gr} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}}$

$$\dot{V} = v_1 z_1 B_1 = \sqrt{4gz_1} z_1 B_1$$

$$H_{nach} = z_{nach} + \frac{v_{nach}^2}{2g} = z_{nach} + \frac{\dot{V}^2}{2g z_{nach}^2 B_1^2}$$

$$= z_{nach} + \frac{4g z_1^3 B_1^2}{2g z_{nach}^2 B_1^2} = z_{nach} + 2z_1 \left(\frac{z_1}{z_{nach}} \right)^2$$

Da $z_{vor} = z_1$ gilt:

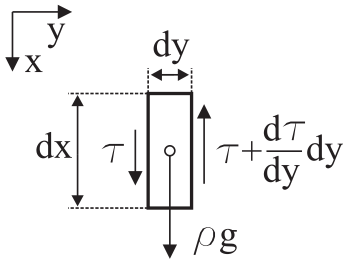
$$z_{nach} = z_1 \left(\sqrt{\frac{1}{4} + 2Fr_1^2} - \frac{1}{2} \right) = \left(\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} \right) z_1$$

$$H_{min} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{4g z_1^3 B_1^2}{g B_1^2}} = \frac{3}{2} z_1 \sqrt[3]{4}$$

$$\Rightarrow y_{gr} = H_{nach} - H_{min} = z_1 \left[\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} + \frac{2}{\left(\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} \right] \quad [m]$$

4. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht:



$$\left(\tau - \left(\tau + \frac{d\tau}{dy}dy\right)\right) dx + \rho g\, dx dy = 0$$

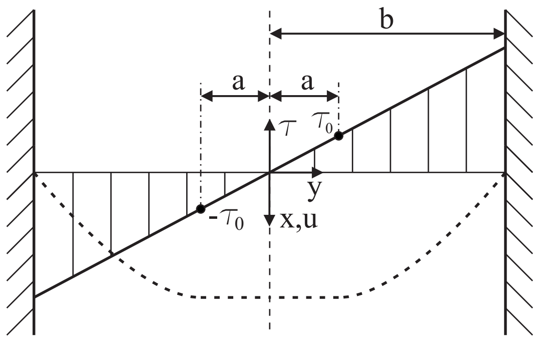
$$\frac{d\tau}{dy} = \rho g \quad ; \quad \tau = -\eta\frac{du}{dy} + \tau_0$$

$$\frac{d^2u}{dy^2} = -\frac{\rho g}{\eta} \qquad \left[\frac{m}{s}\,\frac{1}{m^2}\right] = \left[\frac{kg}{m^3}\,\frac{m}{s^2}\,\frac{ms}{kg}\right] = \left[\frac{1}{ms}\right]$$

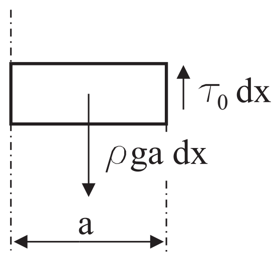
b) 1. $u(y = b) = 0$

2. $\tau(y = a) = \tau_0$ bzw. $\frac{du}{dy}|_{y=a} = 0$

c) Schubspannungsverlauf



d) im starren inneren Teil ($y \leq a$) erfordert die gleichförmige Bewegung ein Kräftegleichgewicht zwischen Gewicht (pro Länge dx und Einheitstiefe) und Schubspannung an seiner Berandung:



$$\tau_0 = \rho g a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\tau_0}{\rho g} \qquad \left[\frac{kgm}{s^2m^2}\,\frac{m^3}{kg}\,\frac{s^2}{m}\right] = [m]$$

e) $y \geq a: \ \frac{du}{dy} = -\frac{\rho g}{\eta}y + C_1$

$$u = -\frac{\rho g}{2\eta}y^2 + C_1 y + C_2$$

RB einsetzen $\Rightarrow C_1 = \frac{\rho g a}{\eta} \quad , \quad C_2 = \frac{\rho g}{2\eta}b^2 - C_1 b$

$$a \leq y \leq b: \quad u(y) = \frac{\rho g}{2\eta}(b^2 - y^2) - \frac{\rho g a}{\eta}(b - y) = \frac{\rho g}{2\eta}[(b-a)^2 - (y-a)^2]$$

$$0 \leq y \leq a: \quad u = \frac{\rho g}{2\eta}(b^2 - a^2) - \frac{\rho g a}{\eta}(b - a) = \frac{\rho g}{2\eta}(b-a)^2$$

Einheit von $u(y)$ bzw. u ist: $\left[\frac{kg}{m^3}\,\frac{m}{s^2}\,\frac{ms}{kg}m^2\right] = \left[\frac{m}{s}\right]$

5. Aufgabe

a) Vereinfachungen:

stationär: $\Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial t} = 0,$ inkompressibel: $\Rightarrow \varrho = konst$

2-dimensionales Problem: $\Rightarrow w = 0, \quad \dfrac{\partial}{\partial z} = 0,$ ausgebildet: $\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$

Druck in x-Richtung konstant: $\Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$

Konti: $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + v\dfrac{\partial \rho}{\partial y} + \rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$

inkompressibel, stationär: $\Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$

Aus Konti folgt mit $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad v =$ konst. $= 0$, da $v(y = 0) = 0$

x-Impuls: $\rho\dfrac{\partial u}{\partial t} + \rho\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$

y-Impuls: $\rho\dfrac{\partial v}{\partial t} + \rho\left(u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$

Mit oben genannten Vereinfachungen, Konti und $v = 0$:

x-Impuls: $\Rightarrow \quad 0 = \dfrac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$

y-Impuls: $\Rightarrow \quad 0 = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$

b) Geschwindigkeitsverteilung:

Einsetzen von $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$ ergibt $\Rightarrow \tau_{xx} = 0, \quad \tau_{yy} = 0, \quad \tau_{xy} = \eta\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$\Rightarrow$ mit $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$: x-Impuls: $0 = \eta\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, y-Impuls: $0 = \dfrac{\partial p}{\partial y}$

$\Rightarrow u(y) = \dfrac{c_1}{\eta}y + c_2$

Randbedingung:

$u(y = 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$

$u(y = h) = u_W \quad \Rightarrow \quad c_1 = \dfrac{u_W \eta}{h}$

$\Rightarrow u(y) = \dfrac{u_W}{h}y$ “Couette Strömung”

c) zweidimensional $\quad \Rightarrow \quad \omega_x = \omega_y = 0$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{u_W}{2h}$$

d) $\Gamma = \oint_s \vec{v}\, d\vec{s} = \int_{x=L,y=h}^{x=0,y=h} \vec{v}\, d\vec{s} = -u_W L$

$$\Omega = \int_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA = \int_A \omega_z dA = -\frac{h\, L\, u_W}{2\, h} = -\frac{1}{2} u_W L = \frac{1}{2} \Gamma$$

6. Aufgabe

a) Variablen des Systems: $\eta, \rho, H, D, F_W, f, u_\infty$ mit

$$\eta \doteq \left[\frac{kg}{m\,s}\right],\ \rho \doteq \left[\frac{kg}{m^3}\right],\ H \doteq [m],\ D \doteq [m],$$

$$F_W \doteq \left[\frac{kg\,m}{s^2}\right],\ f \doteq \left[\frac{1}{s}\right],\ u_\infty \doteq \left[\frac{m}{s}\right],$$

$\Rightarrow$ sieben Einflußgrössen, drei Grunddimensionen $\rightarrow$ vier Kennzahlen
wähle drei wiederkehrende Variablen, z.B.: ρ, u_∞, D

$$K_1 = \eta \cdot u_\infty^{\alpha_1} \cdot \rho^{\beta_1} \cdot D^{\gamma_1}$$

$$kg: 1 + 0 + \beta_1 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_1 = -1$$

$$m: -1 + \alpha_1 - 3\beta_1 + \gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = -1$$

$$s: -1 - \alpha_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -1$$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{\eta}{\rho u_\infty D} = \frac{1}{Re}$$

$$K_2 = F_W \cdot u_\infty^{\alpha_2} \cdot \rho^{\beta_2} \cdot D^{\gamma_2}$$

$$kg: 1 + 0 + \beta_2 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_2 = -1$$

$$m: 1 + \alpha_2 - 3\beta_2 + \gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = -2$$

$$s: -2 - \alpha_2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -2$$

$$\Rightarrow K_2 = \frac{F_W}{\rho u_\infty^2 D^2} = \bar{c}_w$$

$$K_3 = H \cdot u_\infty^{\alpha_3} \cdot \rho^{\beta_3} \cdot D^{\gamma_3}$$

$$kg: 0 + 0 + \beta_3 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_3 = 0$$

$$m: 1 + \alpha_3 + 0 + \gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_3 = -1$$

$$s: 0 - \alpha_3 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$K_3 = \frac{H}{D} = \text{geometr.}$$

$$K_4 = f \cdot u_\infty^{\alpha_4} \cdot \rho^{\beta_4} \cdot D^{\gamma_4}$$

$$kg: 0 + 0 + \beta_4 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_4 = 0$$

$$m: 0 + \alpha_4 - 3\beta_4 + \gamma_4 = 0 \Rightarrow \gamma_4 = 1$$

$$s: -1 - \alpha_4 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_4 = -1$$

$$\Rightarrow K_4 = \frac{fD}{u_\infty} = Sr$$

Alternativ: Variablen des Systems: $\eta, \rho, H, D, F_W, f, u_\infty, T, R$ mit zusätzlich (zu oben)

$$T \doteq [K],\ R \doteq \left[\frac{m^2}{s^2 K}\right]$$

$\Rightarrow$ neun Einflußgrössen, vier Grunddimensionen $\rightarrow$ fünf Kennzahlen
wähle vier wiederkehrende Variablen, z.B.: ρ, u_∞, D, T

Die ersten vier Kennzahlen sind unverändert zu oben ($[K]$ kommt nur in T und R vor), also nur noch zusätzliche Kennzahl K_5 bestimmen:

$K_5 = R \cdot u_\infty^{\alpha_5} \cdot \rho^{\beta_5} \cdot D^{\gamma_5} \cdot T^{\delta_5}$

$kg: 0 + 0 + \beta_5 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_5 = 0$

$m: 2 + \alpha_5 - 3\beta_5 + \gamma_5 + 0 = 0 \Rightarrow \gamma_5 = 0$

$s: -2 - \alpha_5 + 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_5 = -2$

$T: -1 + 0 + 0 + 0 + \delta_5 = 0 \Rightarrow \delta_5 = 1$

$$\Rightarrow K_5 = \frac{RT}{u_\infty^2} = \frac{\gamma RT}{\gamma u_\infty^2} = \frac{1}{\gamma\, M^2}$$

b) $Re_{Real} = Re_{Modell} \Rightarrow \dfrac{u_{\infty Modell}}{u_{\infty Real}} = \dfrac{\eta_{Modell}}{\eta_{Real}}\dfrac{\rho_{Real}}{\rho_{Modell}}\dfrac{D_{Real}}{D_{Modell}} = \left(\dfrac{T_{Modell}}{T_{Real}}\right)^{1{,}72}\dfrac{D_{Real}}{D_{Modell}}$

mit $\dfrac{\eta_{Modell}}{\eta_{Real}} = \left(\dfrac{T_{Modell}}{T_{Real}}\right)^{0{,}72}$

und ideales Gas $\dfrac{p}{\rho} = RT \rightarrow \dfrac{\rho_{Real}}{\rho_{Modell}} = \dfrac{T_{Modell}}{T_{Real}}$, da $R_{Real} = R_{Modell}$ und $p_{Modell} = p_0 = p_{Real}$.

$Sr_{Real} = Sr_{Modell} \Rightarrow \dfrac{f_{Modell}}{f_{Real}} = \dfrac{D_{Real}}{D_{Modell}}\dfrac{u_{\infty Modell}}{u_{\infty Real}} = \left(\dfrac{D_{Real}}{D_{Modell}}\right)^2\left(\dfrac{T_{Modell}}{T_{Real}}\right)^{1{,}72} = 100\left(\dfrac{T_{Modell}}{T_0}\right)^{1{,}72}$

c) Voraussetzung: $M_{Modell} \leq 0.3$

$$\Rightarrow \quad M_{Modell} = \frac{u_{\infty Modell}}{\sqrt{\gamma R_{Modell} T_{Modell}}} = \frac{u_{\infty Modell}}{u_{\infty Real}}\frac{u_{\infty Real}}{\sqrt{\gamma R_{Modell} T_{Modell}}}$$

$$= 10\left(\frac{T_{Modell}}{T_0}\right)^{1{,}72}\frac{u_{\infty Real}}{\sqrt{\gamma R_{Real} T_{Modell}}} \leq 0,3$$

$$\Rightarrow \quad u_{\infty Real,max} = 0,03\left(\frac{T_0}{T_{Modell}}\right)^{1{,}72}\sqrt{\gamma R_{Real} T_{Modell}}$$

7. Aufgabe

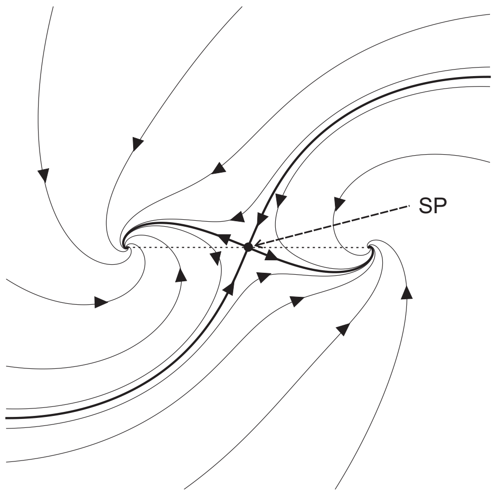
a) $F(z)$ setzt sich aus zwei Potentialwirbeln und zwei Senken zusammen:

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z - \frac{E}{2\pi}\ln z - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z-k) - \frac{E}{2\pi}\ln(z-k)$$

$$\Gamma > 0, \quad E > 0$$

b) Wirbel gleicher Stärke und gleichen Drehsinns: Es existiert ein Staupunkt auf der Verbindungslinie zwischen beiden Wirbeln, d.h. bei $x = \frac{k}{2}$ (Symmetrie).

c) Skizze: Staupunktstromlinien sind dick gezeichnet



d) Beitrag von Wirbelsturm ① zum Strömungsfeld:

$$F_1(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z - \frac{E}{2\pi}\ln z$$

$$\overline{w_1} = u_1 - iv_1 = \frac{dF_1}{dz} = -\frac{i\Gamma + E}{2\pi}\frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \qquad u_{ind,1\to 2} = u_1(x=k, y=0) = \frac{-E}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_{x=k,y=0} - \frac{\Gamma y}{2\pi(x^2+y^2)}\bigg|_{x=k,y=0}$$

$$= \frac{-E}{2\pi k} < 0$$

Wirbelsturm ① induziert im Zentrum von Wirbelsturm ② eine Geschwindigkeit in negative x-Richtung. Umgekehrt induziert Wirbelsturm ② im Zentrum von Sturm ① eine Geschwindigkeit in positive x-Richtung. Der Abstand der Wirbelstürme wird also aufgrund der Senken kleiner.

e) $\Gamma_A = \Gamma, \quad \Gamma_B = -2\Gamma, \quad \Gamma_C = 0$

f) Zirkulation von Wirbelsturm ① wird erhöht.
Betrachte zunächst Geschwindigkeitsbeiträge der beiden Wirbel:

- Umfangsgeschwindigkeit von Wirbel ① wird erhöht
- Höhere Umfangsgeschwindigkeit von Wirbel ② wird benötigt, um Beitrag von Wirbel ① auszugleichen

- Staupunkt verschiebt sich in Richtung von Wirbel ②, da näher an dessen Zentrum höhere Umfangsgeschwindigkeiten herrschen.

Betrachte nun Geschwindigkeitsbeiträge der beiden Quellen:

- Näher am Zentrum von Sturm ② werden durch Senke ② höhere radiale Geschwindigkeiten in Richtung ② als durch Senke ① in Richtung ① induziert (Konti).
- Also kann der Staupunkt nicht auf der x-Achse liegen, sondern muss sich zusätzlich in y-Richtung verschieben.
- (Der Staupunkt muss nach oben (pos. y-Richtung) wandern, da hier die Geschwindigkeitsbeiträge der beiden Wirbel eine Komponente in Richtung Sturm ① haben.)

8. Aufgabe

a) Randbedingungen:

(i) $y = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0$ (Haftbedingung)

(ii) $y = \delta \quad \Rightarrow \quad u = u_a$ (Grenzschichtrand)

(iii) $y = 0$: Wandbindung aus x-Impulsgleichung für $y = 0$:

$$v(y=0)\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0}$$

mit $v(y=0) = -\frac{\dot{V}}{L\,B}$ und $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ (ebene Platte ohne Druckgradient) folgt:

$$-\frac{\dot{V}}{L\,B}\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\eta}{\rho}\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0}$$

b) Koeffizienten:

Aus (i) folgt: $a_0 = 0$

Aus (ii) folgt: $a_1 + a_2 = 1$

Aus (iii) folgt mit $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = u_a\frac{a_1}{\delta}$ und $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = \frac{2a_2u_a}{\delta^2}$:

$$-\frac{\dot{V}}{L\,B}\frac{a_1u_a}{\delta} = \frac{2\eta}{\rho}\frac{a_2u_a}{\delta^2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{\dot{V}\,\rho\,\delta}{2\,L\,B\,\eta}a_1$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - a_1 = -\frac{\dot{V}\,\rho\,\delta}{2\,L\,B\,\eta}a_1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{1-\frac{\dot{V}\,\rho\,\delta}{2\,L\,B\,\eta}}, \quad a_2 = 1 - a_1 = 1 - \frac{1}{1-\frac{\dot{V}\,\rho\,\delta}{2\,L\,B\,\eta}}$$

$$\left[\Rightarrow \frac{u}{u_a} = \frac{1}{1-\frac{\dot{V}\,\rho\,\delta}{2\,L\,B\,\eta}}\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(1 - \frac{1}{1-\frac{\dot{V}\,\rho\,\delta}{2\,L\,B\,\eta}}\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]$$

c) Ablöseprofil an Ablösestelle x_{ab} für gegebenes Profil:

Randbedingungen (i) und (ii) immer noch gültig $\quad \Rightarrow \quad a_0 = 0, \quad a_1 + a_2 = 1$

Randbedingung (iii) jetzt Ablösebedingung: $\tau(y=0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$

$\Rightarrow \quad a_1 = 0$ und damit: $a_2 = 1 - a_1 = 1$

Geschwindigkeitsprofil: $\quad u = u_a(x_{ab})\left(\frac{y}{\delta(x_{ab})}\right)^2$

d) $\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_L}} \quad \rightarrow \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$