

.....  
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

**Klausur „Strömungsmechanik I“**

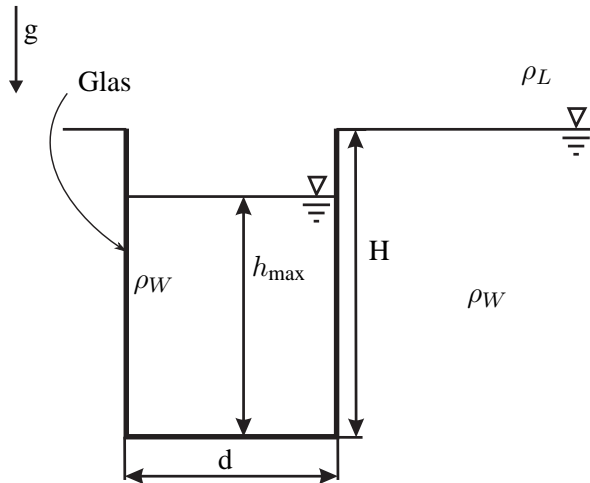
16. 08. 2018

Leer

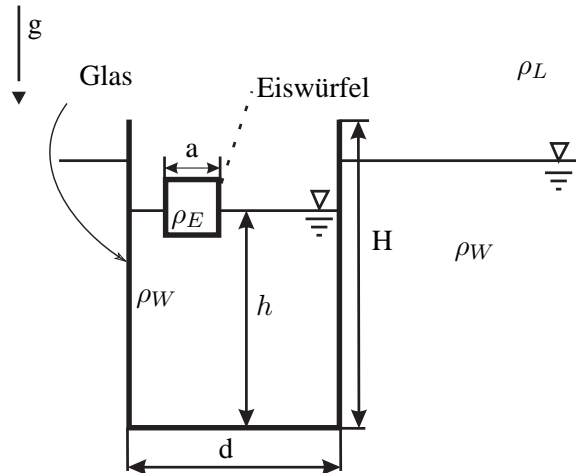
# 1. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Glas mit zylindrischem Querschnitt und Leergewicht  $m_G$  schwimmt in Wasser mit der Dichte  $\rho_W$ . Das Glas wird mit Wasser der Dichte  $\rho_W$  gefüllt. Die Dichte der Umgebungsluft  $\rho_L$  ist nicht zu vernachlässigen!

Skizze 1 für Aufgabenteil a):



Skizze 2 für Aufgabenteile b)-d):



- a) Bestimmen Sie die maximale Füllhöhe  $h_{max}$  des Wassers im Glas, bei der das Glas nicht untertaucht, d.h. die Eintauchtiefe des Glases beträgt gerade  $H$  (Skizze 1).

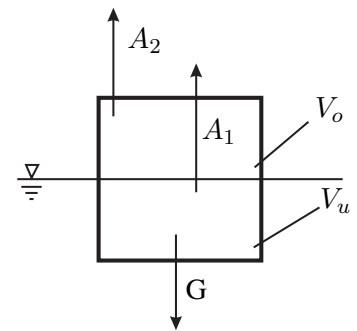
Nun wird ein Eiswürfel der Dichte  $\rho_E$  ( $\rho_E < \rho_W$ ) und der Kantenlänge  $a$  in ein weiteres, mit der Füllhöhe  $h$  mit Wasser gefülltes Glas gelegt (Skizze 2). Die Füllhöhe  $h$  ist kleiner als  $h_{max}$ .

- b) Bestimmen Sie die Teilvolumina des im Wasser schwimmenden Eiswürfels, die sich oberhalb und unterhalb der Wasseroberfläche befinden.
- c) Bestimmen Sie die maximale Füllhöhe  $h_{max}$ , bei der das Glas gerade nicht untertauchen würde, wenn der Eiswürfel sich im Glas befindet.
- d) Nach einer gewissen Zeit schmilzt der Eiswürfel vollständig, sodass sich die Füllhöhe  $h$  im Glas ändert. Bestimmen Sie diese Änderung  $\Delta h$ .

Gegeben:  $m_G, H, d, a, \rho_E, \rho_L, \rho_W$

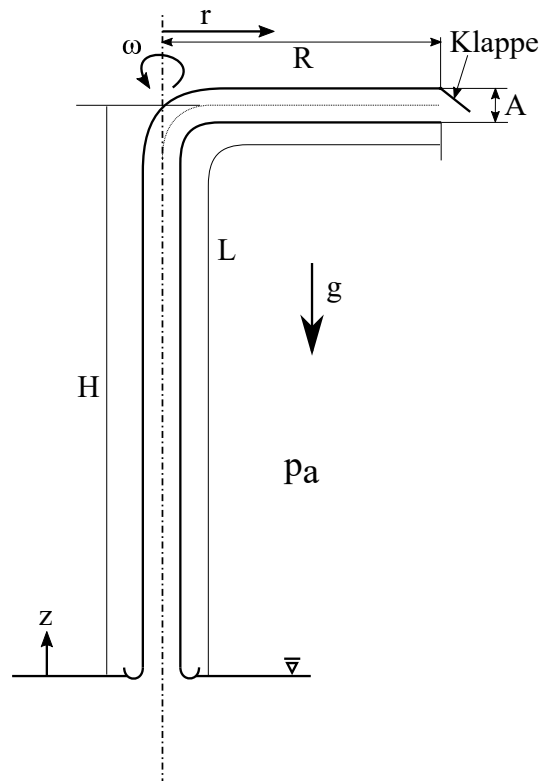
Hinweise:

- Die Wandstärke des Glases kann vernachlässigt werden.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!



## 2. Aufgabe (9 Punkte)

Ein abgewinkeltes Rohr mit der Querschnittsfläche  $A$  und der Länge  $L$ , dessen unteres Ende in eine Flüssigkeit mit der Dichte  $\rho$  eingetaucht ist, rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um seine vertikale Achse. Zum Zeitpunkt  $t = 0$  ist das Rohr vollständig mit der Flüssigkeit gefüllt und die Klappe am Ende des Rohres wird plötzlich geöffnet.



- Berechnen Sie für den stationären Fall die maximale Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{\max}$ , bei der an keiner Stelle im Rohr der Dampfdruck  $p_D$  unterschritten wird.
- Welche Winkelgeschwindigkeit  $\omega_{\min}$  wird mindestens benötigt, damit das Rohr nach dem Öffnen der Klappe Flüssigkeit fördert?
- Berechnen Sie die Zeit  $t_{50}$ , zu der 50% der stationären Austrittsgeschwindigkeit erreicht werden, als Funktion der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

Gegeben:  $H, R, L, \rho, p_a, p_D, g$

Hinweis:

- $L \gg \sqrt{A}$
- $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r$
- $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}$  für  $|x| < a$
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

## 2. Aufgabe

- a) Der geringste Druck wird im Rohrbogen auftreten, da dort sowohl der im Rohr gleichbleibende kinetische Anteil als auch der vollständige geodätische Anteil vorliegen, ohne dass bereits Energie durch die Rotation zugeführt wurde.

$$\Delta p_{\text{rot}} = \int_0^R \frac{\partial p}{\partial r} dr = \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2$$

$$\text{Rohrbogen} \rightarrow \text{Klappe: } p_D + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g H + \frac{1}{2} \rho \omega_{\text{max}}^2 R^2 = p_a + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g H$$

$$\Rightarrow p_D + \frac{1}{2} \rho \omega_{\text{max}}^2 R^2 = p_a \Rightarrow \omega_{\text{max}} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_a - p_D)}$$

- b) Spiegel (S)  $\rightarrow$  Klappe (K) (instationär):  $p_a + \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 = p_a + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g H + \rho \int_S^K \frac{\partial v}{\partial t} ds$

Es gilt:

$$t = 0 \Rightarrow v = 0 \text{ und } L \gg \sqrt{A} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial t} \text{ außerhalb des Rohres vernachlässigbar}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 = \rho g H + \rho \frac{dv}{dt} L$$

$$\text{Fördern } \frac{dv}{dt} > 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 R^2 - 2gH > 0$$

$$\Rightarrow \omega_{\text{min}} = \frac{1}{R} \sqrt{2gH}$$

- c)  $\frac{1}{2} \rho \omega^2 R^2 = \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g H + \rho \frac{dv}{dt} L$

Mit  $\frac{dv}{dt} = 0$  ergibt sich die stationäre Austrittsgeschwindigkeit:  $v_{\text{stat}} = \sqrt{\omega^2 R^2 - 2gH}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2L} (\omega^2 R^2 - v^2 - 2gH) \Rightarrow \frac{1}{2L} (v_{\text{stat}}^2 - v^2) = \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2L} \int_0^{t_{50}} dt = \int_0^{\frac{1}{2} v_{\text{stat}}} \frac{d\tilde{v}}{v_{\text{stat}}^2 - \tilde{v}^2}$$

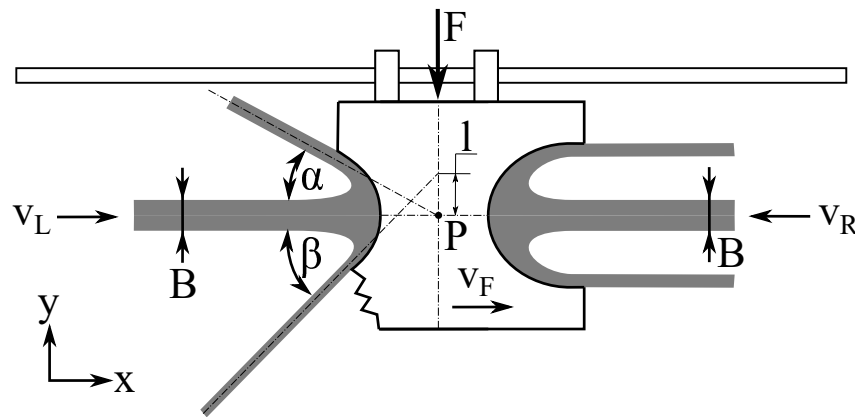
$$\Rightarrow \frac{t_{50}}{2L} = \frac{1}{2v_{\text{stat}}} \ln \left( \frac{1.5 v_{\text{stat}}}{0.5 v_{\text{stat}}} \right)$$

$$\Rightarrow t_{50} = \frac{L}{v_{\text{stat}}} \ln(3) = \frac{L}{\sqrt{\omega^2 R^2 - 2gH}} \ln(3)$$

### 3. Aufgabe (15 Punkte)

Durch eine Schiene geführt bewegt sich reibungsfrei der skizzierte Block, der durch zwei Wasserstrahlen ( $B$ ,  $\rho$ ,  $v_L$  bzw.  $v_R$ ) in gleichförmiger Bewegung mit  $v_F$  gehalten wird. Rechts erfolgt eine Umlenkung des Strahls um  $180^\circ$ . Links werden zunächst beide Teilstrahlen unter dem Winkel  $\alpha$  abgeführt.

Ein Schaden führt dazu, dass einer der links abgehenden Strahlen nur bis zum Winkel  $\beta$  umgelenkt wird. Die Schiene muss nun die Kraft  $F$  aufbringen, um den Block zu halten.



- Berechnen Sie den Winkel  $\alpha$  anhand des intakten Zustands.
- Welchen Wert muss  $v_L$  im Schadensfall annehmen, um die Geschwindigkeit des Blocks  $v_F$  beizubehalten? Der Winkel  $\alpha$  ist nun als gegebene Größe zu behandeln.
- Berechnen Sie das im Schadensfall um Punkt  $P$  (siehe Skizze) wirkende Moment auf den Körper. Alle Strahlbreiten sind nun zusätzlich gegeben.

Gegeben:

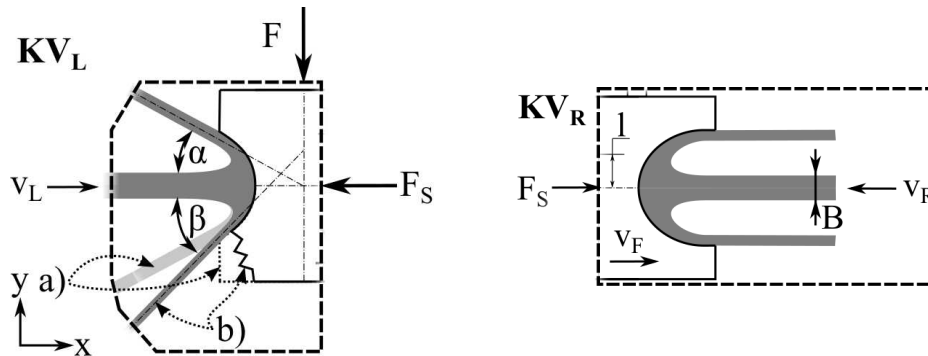
$$\rho, \quad B, \quad v_F, \quad v_L, \quad v_R, \quad \beta, \quad l, \quad F$$

Hinweis:

- $\frac{\cos(\beta) - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha) + \sin(\beta)}$  darf durch  $\Phi$  abgekürzt werden.
- Alle Kräfte und Momente sind pro Tiefeneinheit angegeben.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

### 3. Aufgabe

a) Zwei Teil-Kontrollvolumina definieren:



Mitbewegtes  $KV_L$ :  $v_L^* = v_L - v_F \Rightarrow \dot{m}_L = \rho B (v_L - v_F) = \rho B v_L^*$

Mitbewegtes  $KV_R$ :  $v_R^* = v_R + v_F \Rightarrow \dot{m}_R = \rho B (v_R + v_F) = \rho B v_R^*$

Bernoulli zwischen dem eingehenden und dem austretenden Fluss:

$$p_a + \frac{1}{2} \rho v_L^{*2} = p_a + \frac{1}{2} \rho v_{L,aus}^{*2} \Rightarrow v_{L,aus}^* = v_L^*$$

$$p_a + \frac{1}{2} \rho v_R^{*2} = p_a + \frac{1}{2} \rho v_{R,aus}^{*2} \Rightarrow v_{R,aus}^* = v_R^*$$

Konti:

$$B v_L^* = 2 B_{L,aus} v_L^* \Rightarrow B_{L,aus} = \frac{1}{2} B$$

$$B v_R^* = 2 B_{R,aus} v_R^* \Rightarrow B_{R,aus} = \frac{1}{2} B$$

Impuls in X für  $KV_L$  im intakten Zustand und  $KV_R$  (relativ):

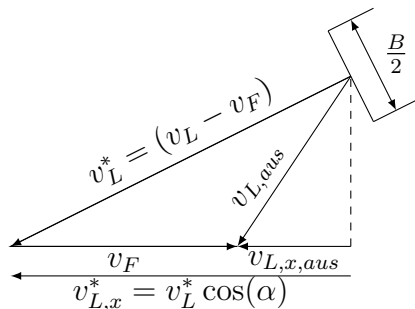
$$\dot{m}_L \underbrace{(-v_L^*)}_{\text{ein}} \underbrace{- \cos(\alpha) v_L^*}_{\text{aus}} = -\rho v_L^{*2} B (1 + \cos \alpha) = -F_S$$

$$\dot{m}_R \underbrace{(v_R^*)}_{\text{ein}} \underbrace{+ v_R^*}_{\text{aus}} = 2 \rho v_R^{*2} B = F_S$$

Alternativ: Impuls in X für  $KV_L$  im intakten Zustand und  $KV_R$  (absolut):

$$\dot{m}_L \underbrace{(-v_L)}_{\text{ein}} \underbrace{- \cos \alpha (v_L - v_F) + v_F}_{\text{aus}} = -F_S$$

$$\dot{m}_R \underbrace{(v_R)}_{\text{ein}} \underbrace{+ v_R + 2v_F}_{\text{aus}} = F_S$$



Beide Impulsbilanzen gleichsetzen:

$$2 \rho v_R^{*2} B = \rho v_L^{*2} B (1 + \cos \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = 2 \left( \frac{v_R^*}{v_L^*} \right)^2 - 1$$



$$\Rightarrow \alpha = \arccos \left[ 2 \left( \frac{v_R + v_F}{v_L - v_F} \right)^2 - 1 \right]$$

b) Für  $KV_L$  gilt analog zu a):

$$v_{L,neu}^* = v_{L,neu} - v_F$$

$$p_a + \frac{1}{2} \rho v_{L,neu}^{*2} = p_a + \frac{1}{2} \rho v_{L,neu,\alpha}^{*2} = p_a + \frac{1}{2} \rho v_{L,neu,\beta}^{*2}$$

$$\Rightarrow v_{L,neu,\alpha}^* = v_{L,neu,\beta}^* = v_{L,neu}^*$$

$$\Rightarrow v_{L,neu}^* B = v_{L,neu,\alpha}^* B_\alpha + v_{L,neu,\beta}^* B_\beta \Rightarrow B = B_\alpha + B_\beta$$

Impuls in X für  $KV_L$  im beschädigten Zustand:

$$-\rho v_{L,neu}^{*2} (B + B_\alpha \cos \alpha + B_\beta \cos \beta) = -F_S$$

$$\Rightarrow B(1 + \cos \alpha) + B_\beta(\cos \beta - \cos \alpha) = \frac{F_S}{\rho v_{L,neu}^{*2}}$$

$$\Rightarrow B_\beta(\cos \beta - \cos \alpha) = \frac{F_S}{\rho v_{L,neu}^{*2}} - B(1 + \cos \alpha) \quad (\text{I})$$

Impuls in Y für  $KV_L$  im beschädigten Zustand:

$$\rho v_{L,neu}^{*2} (B_\alpha \sin \alpha - B_\beta \sin \beta) = -F$$

$$\Rightarrow B \sin \alpha + B_\beta(-\sin \beta - \sin \alpha) = -\frac{F}{\rho v_{L,neu}^{*2}}$$

$$\Rightarrow B_\beta(\sin \beta + \sin \alpha) = \frac{F}{\rho v_{L,neu}^{*2}} + B \sin \alpha \quad (\text{II})$$

(I) durch (II):

$$\underbrace{\frac{\cos \beta - \cos \alpha}{\sin \beta + \sin \alpha}}_{\Phi} = \frac{F_S - B(1 + \cos \alpha) \rho v_{L,neu}^{*2}}{F + B \sin \alpha \rho v_{L,neu}^{*2}}$$

$$\Rightarrow \Phi (F + B \sin \alpha \rho v_{L,neu}^{*2}) = F_S - B(1 + \cos \alpha) \rho v_{L,neu}^{*2}$$

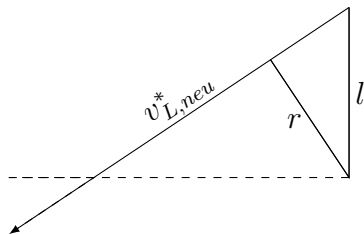
$$\Rightarrow v_{L,neu}^* = \sqrt{\frac{2\rho(v_R + v_F)^2 B - \Phi F}{\rho B(1 + \cos \alpha + \Phi \sin \alpha)}} \quad \text{mit } F_s \text{ aus a)}$$

$$\Rightarrow v_{L,neu} = \sqrt{\frac{2\rho(v_R + v_F)^2 B - \Phi F}{\rho B(1 + \cos \alpha + \Phi \sin \alpha)}} + v_F$$

c) Für die eingehenden Ströme (L und R) der Breite  $B$  und den abgehenden Strahl unter dem Winkel  $\alpha$  ist  $\vec{r} \times \vec{v} = 0$ , so dass sie keinen Einfluss auf das Moment haben. Die abgehenden Strahlen auf der rechten Seite sind symmetrisch angeordnet, so dass deren Einflüsse sich aufheben. Auch die Kraft  $F$  hat in Bezug auf den Mittelpunkt keinen Hebel. Somit ist der einzige Strahl, der ein Moment erzeugt, der unter dem Winkel  $\beta$  abgehende Strahl.

Impulsmomentensatz um den Mittelpunkt für  $KV_L + KV_R$ :

Hebelarm:  $r = l \cos \beta$

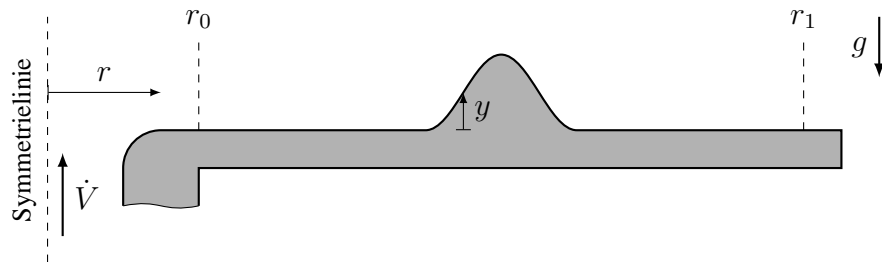


Impulsmomentensatz um P:  $B_\beta \rho v_{L,neu}^{*2} l \cos \beta = M_{FL} = -M_K$

mit b) :  $M_K = -2 \frac{B_\beta}{B} \frac{\rho(v_R + v_F)^2 B - \Phi F}{1 + \cos \alpha + \Phi \sin \alpha} l \cos \beta$

4. Aufgabe (8 Punkte)

Die Strömung in einem runden Becken eines Springbrunnens ist im Bereich von  $r_0$  bis  $r_1$  mit der Theorie offener Gerinneströmungen beschreibbar. Ein konstanter Volumenstrom  $\dot{V}$  wird dem Becken in der Mitte zugeführt. Das Wasser strömt radial über ein Wehr nach außen und anschließend über den Rand ab. Dabei wird es am Wehr aufgestaut. Die Strömung ist überall verlustfrei.



- Leiten Sie für diese Strömung die Energiehöhe  $H$  als Funktion des Wasserspiegels  $z$  und der radialen Koordinate  $r$  aus der Bernoulligleichung her.
- Leiten Sie die minimale Energiehöhe  $H_{min}$  als Funktion von  $r$  her.
- Zeigen Sie, welches Vorzeichen die Ableitung  $dz/dr$  bei konstanter Sohlenhöhe  $y$  im unter- bzw. überkritischen Strömungszustand hat.
- Skizzieren Sie sorgfältig die Spiegelhöhe von  $r_0$  bis  $r_1$  und kennzeichnen Sie den Strömungszustand.

Gegeben:  $g$ ,  $\dot{V}$

Hinweis: Für  $H(z, r) = \text{konst}$  gilt:  $\frac{\partial H}{\partial z} dz + \frac{\partial H}{\partial r} dr = 0$

#### 4. Aufgabe

a) Bernoulli an der Oberfläche für die Spiegelhöhe  $z$ :  $(y + z)\rho g + \rho v^2/2 = \text{const}$

Volumenstrom bei radialer Strömung:  $\dot{V} = 2\pi r z v$

$$\Rightarrow y + z + \frac{\dot{V}^2}{8g(\pi r z)^2} = y + H = \text{const} \quad \text{und somit} \quad H = z + \frac{\dot{V}^2}{8g(\pi r z)^2}$$

b) Bei  $H_{\min}$  gilt  $\frac{dH}{dz} = 0 = 1 - \frac{\dot{V}^2}{4g(\pi r)^2 z^3}$

$$\text{Es folgt für die Grenztiefe } z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{4g(\pi r)^2}}$$

$$\text{Einsetzen } H(z_{gr}) \text{ ergibt } H_{\min} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{4g(\pi r)^2}}$$

c) Bei konstanter Sohlenhöhe  $y$  ist die Energiehöhe  $H$  konstant.

$$\text{Hinweis: } \left( \frac{\dot{V}^2}{4g(\pi z)^2 r^3} \right) dr + \left( \frac{\dot{V}^2}{4g(\pi r)^2 z^3} - 1 \right) dz = 0$$

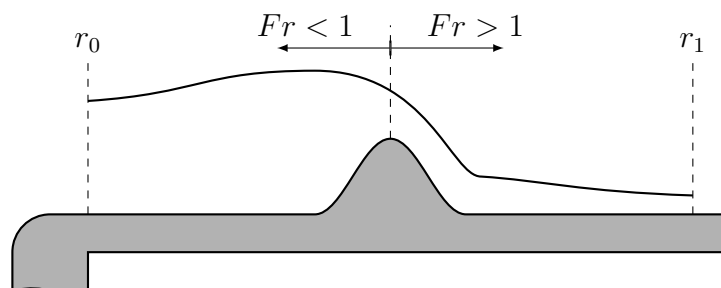
Volumenstrom:  $\dot{V} = 2\pi r z v$

Froudezahl:  $Fr = \frac{v}{\sqrt{gz}}$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dr} \frac{r}{z} = \frac{Fr^2}{1 - Fr^2} \quad \text{bei } r > 0 \text{ und } z > 0 \text{ folgt}$$

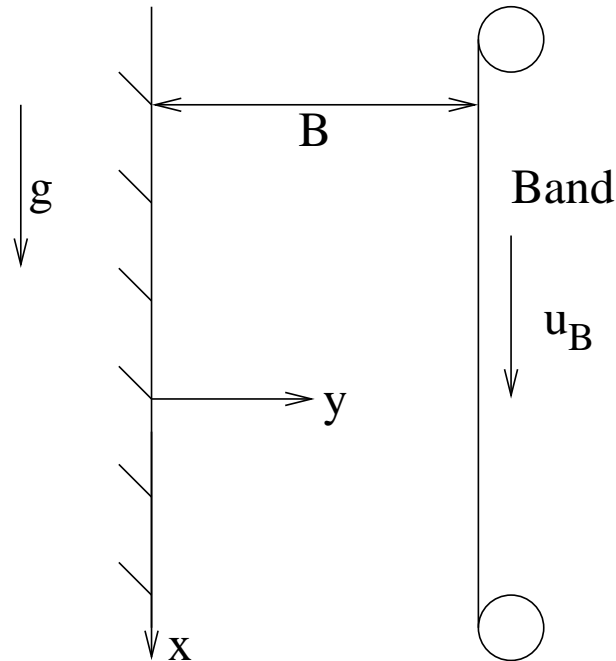
$$\frac{dz}{dr} = \begin{cases} > 0 & : Fr < 1 \\ < 0 & : Fr > 1 \end{cases}$$

d) Skizze:



5. Aufgabe (10 Punkte)

Durch einen ebenen vertikalen Spalt soll ein Bingham Fluid abwärts fließen. Der Spalt wird auf der einen Seite durch eine feste Wand und auf der anderen Seite durch ein infolge der Fluidbewegung mitlaufendes Band begrenzt, das reibungsfrei gelagert ist. Zusätzlich wird im Spalt ein Druckgradient  $\partial p / \partial x$  aufgeprägt. Die Strömung ist ausgebildet.



- Leiten Sie die Schubspannungsverteilung im Spalt in Abhängigkeit von  $y$  her und skizzieren Sie diese.
- Leiten Sie die Geschwindigkeitsverteilung her und skizzieren sie diese. Mit welcher Geschwindigkeit  $u_B$  bewegt sich das Band?
- Berechnen Sie den auf die Tiefe bezogenen Volumenstrom  $\dot{V}/T$ , der durch den Spalt fließt, unter der Annahme, dass nun  $\tau_0 = B\rho g$  sei.

Gegeben:  $\rho, \eta, g, B, \tau_0, \frac{\partial p}{\partial x} = -\rho g$

Hinweis:

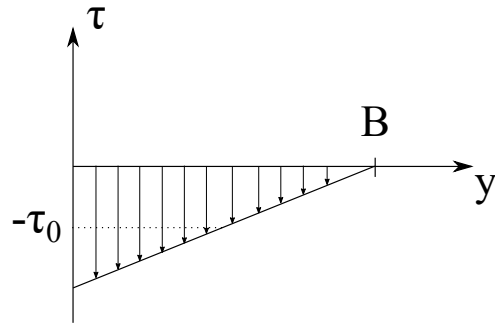
$$\bullet \tau = \begin{cases} -\tau_0 - \eta \frac{du}{dy} & \text{für } \frac{du}{dy} > 0 \\ \tau_0 - \eta \frac{du}{dy} & \text{für } \frac{du}{dy} < 0 \end{cases}$$

- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

## 5. Aufgabe

- a) Kräftebilanz um ein Fluidelement:  $0 = -\frac{d\tau}{dy} - \frac{dp}{dx} + \rho g = -\frac{d\tau}{dy} + 2\rho g$

Integration:  $\int_{\tau(y)}^0 d\tau = 2\rho g \int_y^B dy \Rightarrow \tau(y) = 2\rho g (y - B)$



- b) Fluid fließt abwärts.  $u(0) = 0 \rightarrow \frac{du}{dy} \geq 0$  und  $\tau_0 > 0 \Rightarrow$  Fließgrenze  $y_0$  bei  $\tau(y_0) = -\tau_0$

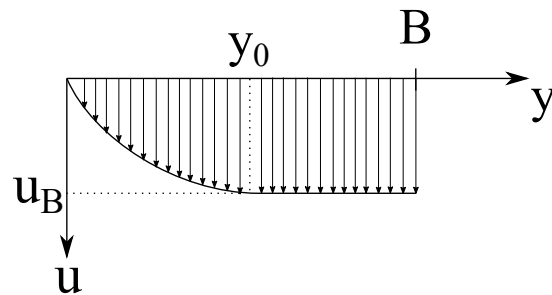
$$\tau_0 = 2\rho g(B - y_0) \Rightarrow y_0 = B - \frac{\tau_0}{2\rho g}$$

$$-\tau_0 - \eta \frac{du}{dy} = 2\rho g(y - B) \Rightarrow \int_0^{u(y)} du = \frac{2\rho g}{\eta} \int_0^y B - y dy - \frac{\tau_0}{\eta} \int_0^y dy$$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{2\rho g}{\eta} \left( By - \frac{1}{2}y^2 \right) - \frac{\tau_0}{\eta} y$$

$$\Rightarrow u_B = u(y_0) = \frac{2\rho g}{\eta} \left( B \left( B - \frac{\tau_0}{2\rho g} \right) - \frac{1}{2} \left( B - \frac{\tau_0}{2\rho g} \right)^2 \right) - \frac{\tau_0}{\eta} \left( B - \frac{\tau_0}{2\rho g} \right)$$

$$\Rightarrow u_B = \frac{1}{\eta} \left( \rho g B^2 + \frac{1}{4} \frac{\tau_0^2}{\rho g} - \tau_0 B \right)$$



- c)  $\frac{\dot{V}}{T} = \int_0^{y_0} u(y) dy + (B - y_0)u_B = \frac{2\rho g}{\eta} \left( \frac{1}{2}By^2 - \frac{1}{6}y^3 \right) \Big|_0^{y_0} - \frac{\tau_0}{2\eta} y^2 \Big|_0^{y_0} + (B - y_0)u_B$

$$y_0 = B - \frac{\tau_0}{2\rho g} \text{ mit } \tau_0 = \rho g B \Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}B$$

$$\Rightarrow \frac{\dot{V}}{T} = \frac{2\rho g}{\eta} \left( \frac{1}{8}B^3 - \frac{1}{48}B^3 \right) - \frac{\rho g B}{\eta} \frac{1}{8}B^2 + \frac{1}{8} \frac{\rho g}{\eta} B^3 = \frac{5}{24} \frac{\rho g}{\eta} B^3$$

6. Aufgabe      (6 Punkte)

- a) Mit Hilfe welcher dimensionslosen Kennzahl werden die Strömungszustände einer inkompressiblen, stationären Rohrströmung charakterisiert und wie wird diese Kennzahl gebildet? Benennen sie die Bezugsgrößen explizit.
- b) Was ist der Turbulenzgrad und wie wird er für eine dreidimensionale Strömung berechnet? Benennen Sie die den Turbulenzgrad definierenden Größen.
- c) Nennen Sie die Voraussetzungen, unter denen die allgemeine Bernoulli-Gleichung gültig ist.

## 6. Aufgabe

- a) Reynoldszahl, mit dem Rohrdurchmesser bzw. den hydraulischen Durchmesser, der Dichte des Fluids, der mittleren Geschwindigkeit sowie der dynamischen Viskosität.

$$Re = \frac{\rho \bar{u} D}{\eta}$$

$\bar{u} \rightarrow$  Mittlere Geschwindigkeit

$\rho \rightarrow$  Dichte

$D \rightarrow$  Rohrdurchmesser

$\eta \rightarrow$  Dynamische Viskosität

- b) Der Turbulenzgrad ist ein Maß für die Intensität der Turbulenz und wird daher beispielsweise zur Bestimmung der Güte der Anströmung in einem Windkanal verwendet. Je kleiner der Turbulenzgrad ist, desto turbulenzärmer ist die Strömung.

$$Tu = \frac{1}{u_{\infty}} \sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}$$

$u_{\infty} \rightarrow$  Anströmgeschwindigkeit

$u' \rightarrow$  Geschwindigkeitsschwankung in x

$v' \rightarrow$  Geschwindigkeitsschwankung in y

$w' \rightarrow$  Geschwindigkeitsschwankung in z

- c) Entlang einer Stromlinie, reibungsfrei, stationär, inkompressibel