....

(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor) & „Technische Strömungslehre“ (Diplom)

05. 08. 2011

1. Aufgabe

a) $\int dp = \int (K\frac{dM}{dz} - \rho_F g)\, dz \quad \Rightarrow \quad p(z) = (K\frac{dM}{dz} - \rho_F g)z + C$

einsetzen der RB $p(z=h) = p_a$ liefert:

$p(z) = p_a + g(\rho_F - \frac{K}{g}\frac{dM}{dz})(h-z)$

b) $p(z) = p_a + g(\rho_F - \frac{K}{g}\frac{dM}{dz})(h-z)$

Def.: $\rho_F^* = \rho_F - \frac{K}{g}\frac{dM}{dz}$ als *scheinbare Dichte* oder über KGG

Schweben: $\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow$ Berechnung mit Archimedes (ρ_F^*)

$\rho_K V_K g = \rho_F^* V_K g \Leftrightarrow \rho_K = \rho_F - \frac{K}{g}\frac{dM}{dz}$ (V_K = Volumen der Platte)

$\Rightarrow \frac{dM}{dz} = \frac{g}{K}(\rho_F - \rho_K)$

c) $p(z) = p_a + K\int_{M(h)}^{M(z)} dM - \int_h^z \rho_F g\, dz$

$= p_a + \rho_F g(h-z) + K\alpha z(z-h)$ mit $\frac{dM}{dz} = \alpha(2z-h)$

KGG (z-Richtung) an Platte: $Ap(z_0) = Ap(z_0+d) + \rho_K g A d$ (A $\hat{=}$ Grundfläche)

$-\rho_F g z_0 + K\alpha[(\frac{h}{2})^2 - hz_0 + z_0^2] = -\rho_F g(z_0+d) + K\alpha[(\frac{h}{2})^2 - h(z_0+d) + (z_0+d)^2] + \rho_K g d$

$\Rightarrow K\alpha[z_0^2 + hd - (z_0^2 + 2z_0 d + d^2)] = gd(\rho_K - \rho_F)$

$\Rightarrow z_0 = \frac{1}{2}(h-d) - \frac{1}{2}\frac{g}{K\alpha}(\rho_K - \rho_F)$

2. Aufgabe

a) Bernoulli '0'-'K':

$$p_a + \rho g h_0 = p_K + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_K^2$$

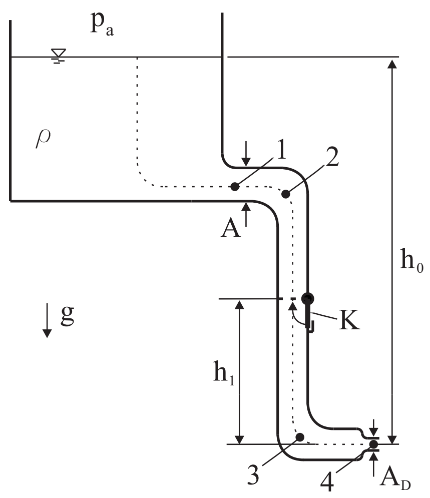
Konti:

$$v_K A = v_D A_D = \sqrt{2 g h_0} A_D$$

Bedingung:

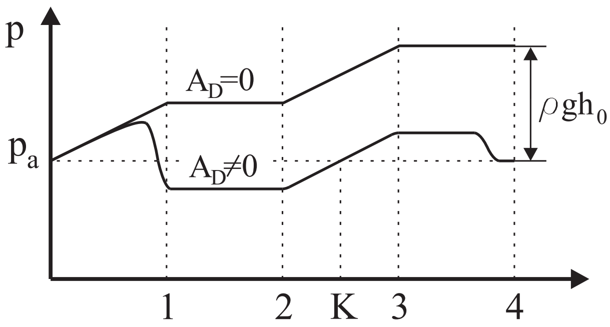
$$p_K = p_A$$

$$\Rightarrow A_D = A\sqrt{1 - \frac{h_1}{h_0}} = \frac{A}{2}$$



b) $\dot{V} = A_D \sqrt{2 g h_0}$

c)



3. Aufgabe

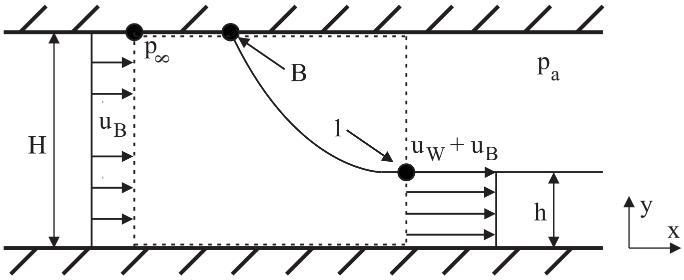
a) Absolutsystem: Strömung instationär

Bezugssytem mit u_B bewegt: Strömung stationär

Bernoulli $B \rightarrow \infty$: $p_B = p_\infty + \frac{1}{2}\rho u_B^2$; $p_B = p_a$

$\Rightarrow p_\infty = p_a - \frac{1}{2}\rho u_B^2 \quad (1)$

b) Impulssatz: mit u_B mitbewegtes Kontrollvolmen



$$\int_A \rho\vec{v}(\vec{v}\cdot\vec{n})dA = \sum \vec{F}$$

$$-\rho u_B^2 H + \rho(u_W + u_B)^2 h = \int_0^H [p_\infty + \rho g(H-y)]dy - p_a(H-h) - \int_0^h [p_a + \rho g(h-y)]dy$$

$$-\rho u_B^2 H + \rho(u_W + u_B)^2 h = (p_\infty + \frac{1}{2}\rho g H)H - p_a(H-h) - (p_a + \frac{1}{2}\rho g h)h$$

$$-\rho u_B^2 H + \rho(u_W + u_B)^2 h = \frac{1}{2}\rho g(H^2 - h^2) + (p_\infty - p_a)H \quad (2)$$

Bernoulli $B \rightarrow 1$: $p_a + \rho g H = p_a + \rho g h + \frac{1}{2}\rho(u_W + u_B)^2$

$\Rightarrow (u_W + u_B)^2 = 2g(H-h) \quad (3)$

Konti: $u_B H = (u_W + u_B)h$

Quadrieren, mit (3) $\Rightarrow u_B^2 H = 2gh^2\left(1 - \frac{h}{H}\right) \quad (4)$

(1), (3), (4) in (2):

$$-2\rho g h^2\left(1 - \frac{h}{H}\right) + 2\rho g h\,(H-h) = \frac{1}{2}\rho g(H^2 - h^2) - \rho g\frac{h^2}{H}(H-h)$$

$$\Rightarrow -2h^2(H-h) + 2hH(H-h) = \frac{1}{2}H(H^2 - h^2) - h^2(H-h)$$

$$\Rightarrow -2h^2 + 2hH = \frac{1}{2}H(H+h) - h^2$$

$\Rightarrow h^2 - \frac{3}{2}Hh + \frac{1}{2}H^2 = 0$ quadr. Gl. für h

$$\Rightarrow h_{1/2} = \frac{3}{4}H \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{8}{16}}H$$

$\Rightarrow h = \frac{1}{2}H$ (2. Lsg. h = H nicht sinnvoll)

4. Aufgabe

a) $\dot{V} = z_1\, v_1\, B$

Energiegleichung ($\widehat{=}$ Bernoulli) Beckenoberfläche $\rightarrow$ Abwasserkanaloberfläche:

$h = \frac{v_1^2}{2g} + z_1$

$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(h - z_1)}$

$\Rightarrow \dot{V} = \sqrt{2g(h - z_1)} \cdot z_1\, B$

b) Aufstau des Wassers vor der Versperrung $\Rightarrow$ auf dem Wehr stellt sich der Grenzzustand ein. $\Rightarrow y_W > y_{gr}$

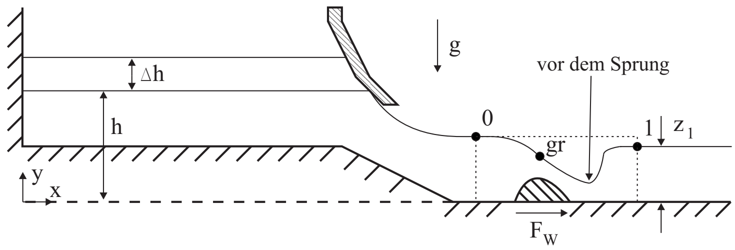
$h + \Delta h = \frac{v_{gr}^2}{2g} + z_{gr} + y_W$

$\Rightarrow h + \Delta h = \frac{3}{2} z_{gr} + y_W$

mit $v_{gr} = \sqrt{z_{gr} g}$ und $\dot{V} = z_{gr} v_{gr} B = z_{gr}\sqrt{z_{gr} g} B \Rightarrow z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}}$

$\Rightarrow \Delta h = y_W - h + \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}}$

c) Impulssatz in x-Richtung:

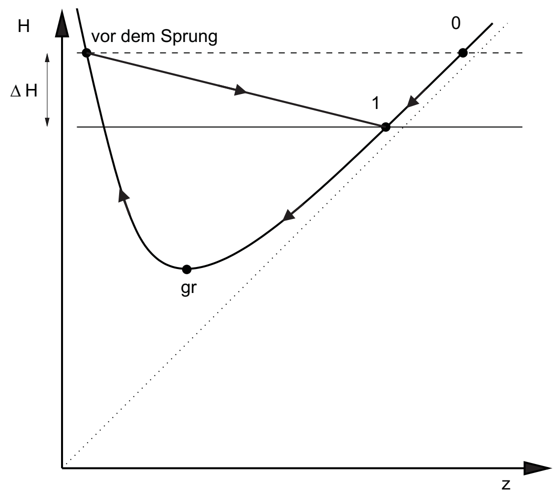


$$-\rho v_0^2 B z_0 + \rho v_1^2 B z_1 = B \int_0^{z_0} \rho g z dz - B \int_0^{z_1} \rho g z dz + F_W = \rho g B \left(\frac{z_0^2}{2} - \frac{z_1^2}{2} \right) + F_W$$

mit Konti: $v_0 = \dfrac{z_1}{z_0} v_1$ und $\dot{V} = v_1 B z_1$

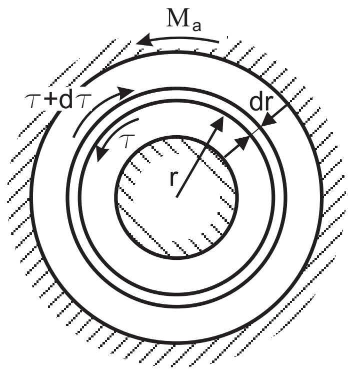
$$\Rightarrow F_W = \frac{\rho g B}{2}(z_1 - z_0)\left(z_0 + z_1 - \frac{2\dot{V}^2}{g B^2 z_0 z_1} \right)$$

d)



5. Aufgabe

a) Momentengleichgewicht:



$$\tau \cdot 2\pi r L \cdot r - (\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr) \cdot 2\pi L (r + dr) \cdot (r + dr) = 0$$

$$\tau r^2 - (\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} dr)(r^2 + 2r dr + dr^2) = 0$$

$$-2\tau r dr - \tau dr^2 - r^2 \frac{\partial \tau}{\partial r} dr - 2r dr \frac{\partial \tau}{\partial r} dr - \frac{\partial \tau}{\partial r} dr dr^2 = 0$$

$$2\tau r dr + r^2 \frac{\partial \tau}{\partial r} dr = dr(2\tau r + \frac{\partial \tau}{\partial r} r^2) = 0 \quad \text{da Terme } O(2) \approx 0$$

$$\frac{\partial (r^2 \tau)}{\partial r} = 0$$

b) mit geg. Geschwindigkeitsverteilung: $\Rightarrow \eta \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d(rv)}{dr} \right) = 0$

1. Integration: $\frac{1}{r} \frac{d(rv)}{dr} = C_1$; 2. Integration: $rv = \frac{1}{2} C_1 r^2 + C_2$

Randbedingungen: $v(r = R_i) = \omega_i R_i$; $v(r = R_a) = \omega_a R_a$;

$$R_i^2 \omega_i = \frac{1}{2} C_1 R_i^2 + C_2; \quad R_a^2 \omega_a = \frac{1}{2} C_1 R_a^2 + C_2$$

$$\Rightarrow C_1 = \frac{2(R_i^2 \omega_i - R_a^2 \omega_a)}{R_i^2 - R_a^2}; \quad C_2 = \frac{R_i^2 R_a^2 (\omega_a - \omega_i)}{R_i^2 - R_a^2}$$

$$v(r, \omega_a) = \frac{R_i^2 \omega_i - R_a^2 \omega_a}{R_i^2 - R_a^2} r + \frac{R_i^2 R_a^2 (\omega_a - \omega_i)}{R_i^2 - R_a^2} \frac{1}{r}$$

c) Maximales Moment bei $\omega_a = 0 \Rightarrow M_a = 2\pi R_a^2 L \tau (r = R_a)$

$$\tau = -\eta r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{2} C_1 + C_2 \frac{1}{r^2} \right] = -\eta r \left(-\frac{2C_2}{r^3} \right) = 2\eta \frac{C_2}{r^2} \Rightarrow \tau(r = R_a) = 2\eta \frac{C_2}{R_a^2}$$

$$M_{a,max} = -4\pi L \eta \frac{R_i^2 R_a^2 \omega_i}{R_i^2 - R_a^2}$$

d) maximale Leistung: $P = M_a \omega_a = 2\pi R_a^2 L \tau (r = R_a) \omega_a \propto \omega_a C_2$

$$\frac{\partial P}{\partial \omega_a} \doteq 0 = \frac{\partial (\omega_a^2 - \omega_i \omega_a)}{\partial \omega_a} = 2\omega_a - \omega_i \Rightarrow \omega_a = \omega_i / 2$$

6. Aufgabe

a) $f = \overline{f} + f'$ mit $\overline{f}$: zeitl. gem. Größe; f' : Schwankungsgröße

b) Konti.-Gl.:

$$\overline{\frac{\partial(\overline{u}+u')}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial(\overline{v}+v')}{\partial y}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0$$

Impulsgleichung:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial x}[(\overline{u}+u')(\overline{u}+u')] + \frac{\partial}{\partial y}[(\overline{u}+u')(\overline{v}+v')] \right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}(\overline{p}+p') + \eta \left[\frac{\partial^2(\overline{u}+u')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\overline{u}+u')}{\partial y^2} \right]$$

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial x}[(\overline{u}\,\overline{u} + \overline{u'u'})] + \frac{\partial}{\partial y}[(\overline{u}\,\overline{v} + \overline{u'v'})] \right] = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \eta \left[\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} \right]$$

$$\rho \left[\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x} + \overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \eta \left[\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial y^2} \right]$$

mit Konti: $\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{u}\frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = \overline{u}\left[\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} \right] = 0$

$$\rho \left[\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\eta \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} - \rho(\overline{u'u'}) \right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\eta \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} - \rho(\overline{u'v'}) \right]$$

c) $\tau_{ges} = \tau_t + \tau_l = -\rho\overline{u'v'} + \eta\frac{d\overline{u}}{dy}$

τ_t : turbulente bzw. scheinbare Schubspannung

τ_l : laminare bzw. molekulare Schubspannung

d) Ja, mit dem Ansatz von Boussinesq.

Die ‘neue’, scheinbare Viskosität ist keine reine Stoffgröße, sondern neben den Fluideigenschaften auch von den Strömungsbedingungen abhängig.