....

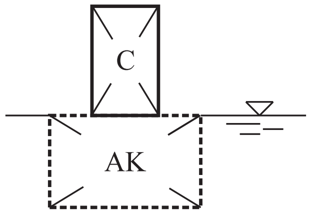
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor) & „Technische Strömungslehre“ (Diplom)

07. 03. 2012

1. Aufgabe

a) Schwebezustand für Container und virtuellen Auftriebskörper:



$$F_{A,AK} = G_C$$

$$\rho_W g A \Delta H_{AK} = \rho_C g V_C$$

$$\Rightarrow \Delta H_{AK} = \frac{\rho_C}{\rho_W}\frac{V_C}{A}$$

Schiff schwimmt durch fehlenden Container mehr auf, d.h. die Spiegelhöhe ΔH_{AK} sinkt. Bei Zustand „2“ wird Wasser durch das Container-Volumen V_C verdrängt, dass zur Verringerung der Absenkung ΔH_C führt.

$$\Delta H = \Delta H_C - \Delta H_{AK} = \frac{V_C}{A} - \frac{V_C}{A}\frac{\rho_C}{\rho_W}$$

$$\Rightarrow \Delta H = \frac{V_C}{A}\left(1 - \frac{\rho_C}{\rho_W}\right) < 0 \qquad \left[\frac{m^3}{m^2}\right]\left(\left[\frac{kg}{m^3}\frac{m^3}{kg}\right]\right) = [m]$$

Da $\rho_C > \rho_W$ sinkt beim Schiff ohne Container der Wasserspiegel.

b) max. Steighöhe: $\sum F = 0$

$$F_A - F_G - F_Z - F_C = 0$$

$$\rho_L g V_Z = (m_G + m_Z + m_C)g \quad \text{mit}\, m_C = \rho_C V_C$$

$$\Rightarrow \rho_L = \frac{m_G + m_Z + m_C}{V_Z}$$

Barometrische Höhenformel (allg.): $\rho_L(z) = \rho_0 e^{-\frac{gz}{R_L T_0}}$

$$\rho_0 e^{-\frac{g z_{max}}{R_L T_0}} = \frac{m_G + m_Z + m_C}{V_Z}$$

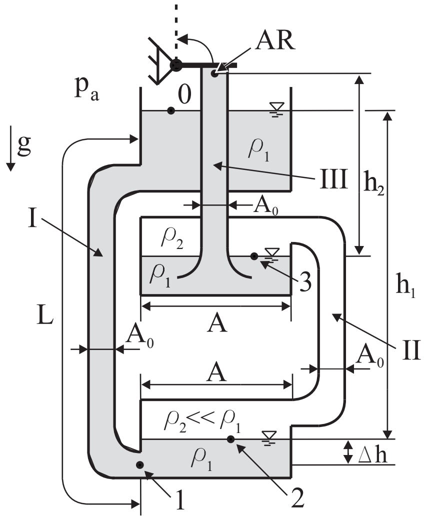
$$\Rightarrow -\frac{g z_{max}}{R_L T_0} = \ln\left(\frac{m_G + m_Z + m_C}{V_Z \rho_0}\right)$$

ideale Gasgleichung: $p_a = \rho_0 R_L T_0$

$$z_{max} = \frac{R_L T_0}{g}\ln\left(\frac{V_Z p_a}{R_L T_0 (m_G + m_Z + m_C)}\right) \qquad \left[\frac{J}{kgK}K\frac{s^2}{m}\right] ln\left[m^3\frac{kg}{m^3}\frac{1}{kg}\right] = [m]$$

c) $p_i < p(z_{max}) \rightarrow V_{Z,eff}$ sinkt $\rightarrow z_{max}$ sinkt

2. Aufgabe



Konti: $v_I A_0 = v_{II} A_0 = v_{III} A_0 \Rightarrow v_I = v_{II} = v_{III} = v$

Bernoulli $\boxed{0} \to \boxed{1} \to \boxed{2} \to \boxed{3} \to \boxed{\text{AR}}$:

$$p_a + \rho_1 g(h_1 + \Delta h) = p_1 + \frac{\rho_1}{2} v^2 + \int_L \rho_1 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$p_1 = p_2 + \rho_1 g \Delta h$$

$p_2 = p_3$,da $\rho_2 \ll \rho_1$

$$p_3 = p_{AR} + \frac{\rho_1}{2} v^2 + \rho_1 g h_2 + \int_{h_2} \rho_1 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$\Rightarrow p_a + \rho_1 g h_1 = p_{AR} + \rho_1 g h_2 + \rho_1 v^2 + \int_{L+h_2} \rho_1 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

a) Klappe geschlossen: $v = 0$; $\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \Delta p = p_{AR} - p_a = \rho_1 g (h_1 - h_2) \qquad \left[\frac{kg}{m^3}\frac{m}{s^2} m\right] = [Pa]$$

b) Betrag der stationäre Ausströmgeschwindigkeit: $\dfrac{\partial v}{\partial t} = 0$; Klappe geöffnet: $p_{AR} = p_a$

$$v_\infty = \sqrt{g(h_1 - h_2)} \qquad \Rightarrow v = \frac{v_\infty}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{g(h_1 - h_2)}{2}}$$

$$\rho_1 g (h_1 - h_2) - \rho_1 v_{AR}^2 = (L + h_2)\rho_1 \frac{dv_{AR}}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_{AR}}{dt} = \frac{\frac{1}{2} g (h_1 - h_2)}{L + h_2} \qquad \left[\frac{m \cdot m}{s^2 \cdot m}\right] = \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

c) max. Fontänenhöhe: $\dfrac{\rho_1}{2} v_\infty^2 = \rho_1 g h_F \Leftrightarrow h_F = \dfrac{v_\infty^2}{2g} = \dfrac{h_1 - h_2}{2} \qquad [m]$

d) Quasistationär für die Rohre: $\rho_1 \displaystyle\int_{L+h_2} \frac{\partial v}{\partial t} ds = 0$; Klappe geöffnet: $p_{AR} = p_a$

aus a): $\rho_1 g (h_1 - h_2) - \rho_1 v^2 = 0$

$$\frac{d}{dt}(\rho_1 g (h_1 - h_2)) = \rho_1 \frac{dv^2}{dt} = \rho_1 v \frac{dv}{dt} \cdot 2$$

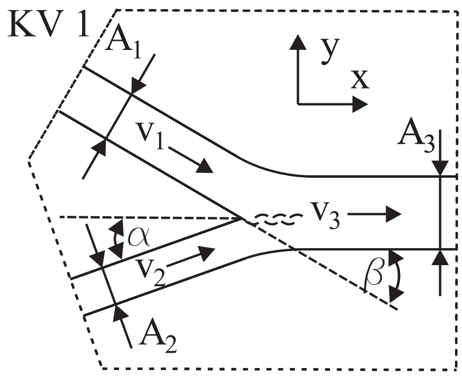
$$\rho_1 g \frac{dh_1}{dt} - \rho_1 g \frac{dh_2}{dt} = 2 v \rho_1 \frac{dv}{dt}$$

Konti: $v \cdot A_0 = -\dot{h}_1(t) \cdot A = \dot{h}_2(t) \cdot A$

$$\rho_1 g \left(-v \frac{A_0}{A} - v \frac{A_0}{A}\right) = 2 \rho_1 v \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dv_{AR}}{dt} = -g \frac{A_0}{A} \qquad \left[\frac{m}{s^2}\frac{m}{m}\right] = \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

3. Aufgabe



a) Impulssatz in y-Richtung:

$$\rho v_1^2 \sin\beta A_1 - \rho v_2^2 \sin\alpha A_2 = 0$$

$$\sin\beta = \frac{A_2 v_2^2}{A_1 v_1^2} \sin\alpha$$

$$\beta = \arcsin\left[\frac{A_2}{A_1}(\frac{v_2}{v_1})^2 \sin\alpha\right] \quad [.]$$

b) Impulssatz in x-Richtung:

$$-\rho v_1^2 A_1 \cos\beta - \rho v_2^2 A_2 \cos\alpha + \rho v_3^2 A_3 = 0$$

$$\Rightarrow A_3 v_3^2 = A_1 v_1^2 \cos\beta + A_2 v_2^2 \cos\alpha \quad (1)$$

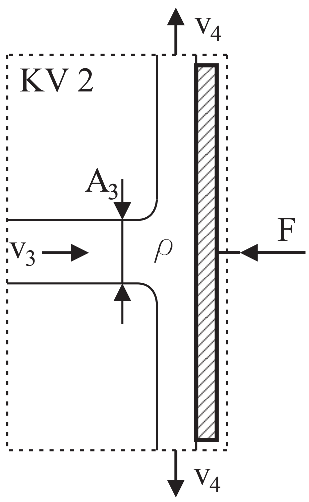
Konti:

$$v_1 A_1 + v_2 A_2 = v_3 A_3 \quad (2)$$

(2) in (1):

$$\Rightarrow v_3 = \frac{A_1 v_1^2 \cos\beta + A_2 v_2^2 \cos\alpha}{v_1 A_1 + v_2 A_2} \quad \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\Rightarrow A_3 = \frac{(v_1 A_1 + v_2 A_2)^2}{A_1 v_1^2 \cos\beta + A_2 v_2^2 \cos\alpha} \quad [m^2]$$



c) Massenstrom: $\dot{m} = \rho A_4 v_4$

Konti: $A_4 = \frac{1}{2} A_3$ aus Symmetrie

Bernoulli: $v_4 = v_3$

$$\Rightarrow \dot{m} = \frac{1}{2}\rho A_3 v_3 \quad \left[\frac{kg}{s}\right]$$

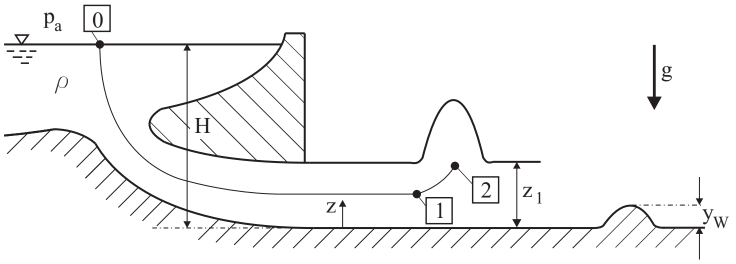
d) Impulssatz in x-Richtung: $\frac{dI_x}{dt} = \rho v_3^2 A_3 = \sum F_x$

$$\Rightarrow F = \rho v_3^2 A_3 \quad [N]$$

<u>4. Aufgabe</u>

a) Bernoulli von $\boxed{0} \rightarrow \boxed{1}$: $p_a + \rho g H = p_1 + \rho g z_1^* + \frac{\rho}{2} v_1^2$

Hydrostatische Grundgleichung: $p_1 = p_a + \rho g (z_1 - z_1^*)$



$$\Rightarrow p_a + \rho g H = p_a + \rho g (z_1 - z_1^*) + \rho g z_1^* + \frac{\rho}{2} v_1^2 \;\Leftrightarrow\; \rho g (H - z_1) = \frac{\rho}{2} v_1^2$$

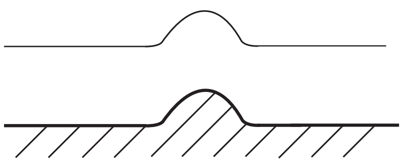
$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(H - z_1)} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Konti: } v_1 z_1 B_1 = 2 v_2 z_1 \dfrac{B_1}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; v_2 = v_1 \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{Bernoulli von } \boxed{1} \rightarrow \boxed{2}: \; \rho g z_1 + \dfrac{\rho}{2} v_1^2 = 2 \rho g z_1 + \dfrac{\rho}{2} v_2^2 \end{array}\right\} g z_1 = \frac{v_1^2}{4} \qquad (2)$$

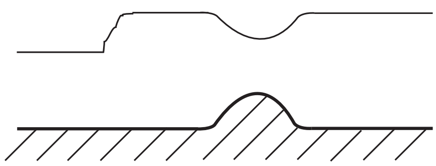
aus (1) + (2): $H = 3 z_1 \quad [m]$

b) $Fr = \dfrac{v}{\sqrt{gz}} = \sqrt{\dfrac{2g(H - z_1)}{g z_1}} = 2 > 1 \Rightarrow$ schießender (überkritischer) Zustand

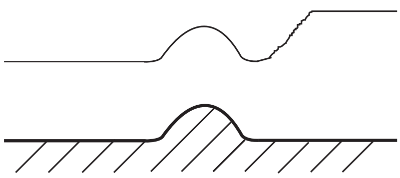
nur schießend



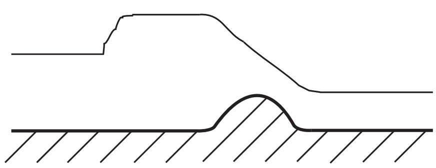
Wassersprung zwischen
Verengung und Bodenwelle



Wassersprung nach
der Bodenwelle



wie oben + Übergang zum
schießenden Zustand



c) Die Energiehöhe H_{nach} nach dem Wassersprung ist:

$H_{nach} = H_{min} + y_{gr}$ mit $H_{min} = \frac{3}{2} z_{gr} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}}$

$\dot{V} = v_1 z_1 B_1 = \sqrt{4gz_1} z_1 B_1$

$H_{nach} = z_{nach} + \frac{v_{nach}^2}{2g} = z_{nach} + \frac{\dot{V}^2}{2g z_{nach}^2 B_1^2}$

$= z_{nach} + \frac{4g z_1^3 B_1^2}{2g z_{nach}^2 B_1^2} = z_{nach} + 2z_1 \left(\frac{z_1}{z_{nach}} \right)^2$

Da $z_{vor} = z_1$ gilt:

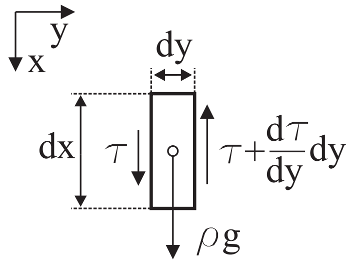
$z_{nach} = z_1 \left(\sqrt{\frac{1}{4} + 2Fr_1^2} - \frac{1}{2} \right) = \left(\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} \right) z_1$

$H_{min} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{4g z_1^3 B_1^2}{g B_1^2}} = \frac{3}{2} z_1 \sqrt[3]{4}$

$\Rightarrow y_{gr} = H_{nach} - H_{min} = z_1 \left[\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} + \frac{2}{\left(\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} \right)^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} \right] \quad [m]$

5. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht:



$$\left(\tau-\left(\tau+\frac{d\tau}{dy}dy\right)\right)dx+\rho g\,dxdy=0$$

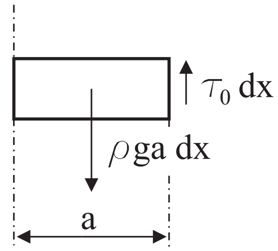
$$\frac{d\tau}{dy}=\rho g \quad ; \quad \tau=-\eta\frac{du}{dy}+\tau_0$$

$$\frac{d^2u}{dy^2}=-\frac{\rho g}{\eta} \qquad \left[\frac{m}{s}\frac{1}{m^2}\right]=\left[\frac{kg}{m^3}\frac{m}{s^2}\frac{ms}{kg}\right]=\left[\frac{1}{ms}\right]$$

b) 1. $u(y=b)=0$

2. $\tau(y=a)=\tau_0$ bzw. $\frac{du}{dy}|_{y=a}=0$

c) im starren inneren Teil ($y\leq a$) erfordert die gleichförmige Bewegung ein Kräftegleichgewicht zwischen Gewicht (pro Länge dx und Einheitstiefe) und Schubspannung an seiner Berandung:



$$\tau_0=\rho g a \quad \Rightarrow \quad a=\frac{\tau_0}{\rho g} \qquad \left[\frac{kgm}{s^2m^2}\frac{m^3}{kg}\frac{s^2}{m}\right]=[m]$$

d) $y\geq a:\ \dfrac{du}{dy}=-\dfrac{\rho g}{\eta}y+C_1$

$$u=-\frac{\rho g}{2\eta}y^2+C_1y+C_2$$

RB einsetzen $\Rightarrow C_1=\dfrac{\rho g a}{\eta}$, $C_2=\dfrac{\rho g}{2\eta}b^2-C_1b$

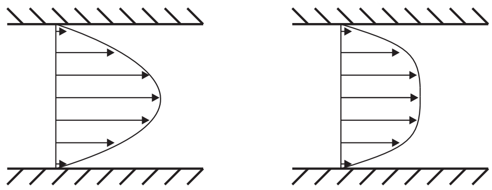
$$a\leq y\leq b: \quad u(y)=\frac{\rho g}{2\eta}(b^2-y^2)-\frac{\rho g a}{\eta}(b-y)=\frac{\rho g}{2\eta}[(b-a)^2-(y-a)^2]$$

$$0\leq y\leq a: \quad u=\frac{\rho g}{2\eta}(b^2-a^2)-\frac{\rho g a}{\eta}(b-a)=\frac{\rho g}{2\eta}(b-a)^2$$

Einheit von $u(y)$ bzw. u ist: $\left[\dfrac{kg}{m^3}\dfrac{m}{s^2}\dfrac{ms}{kg}m^2\right]=\left[\dfrac{m}{s}\right]$

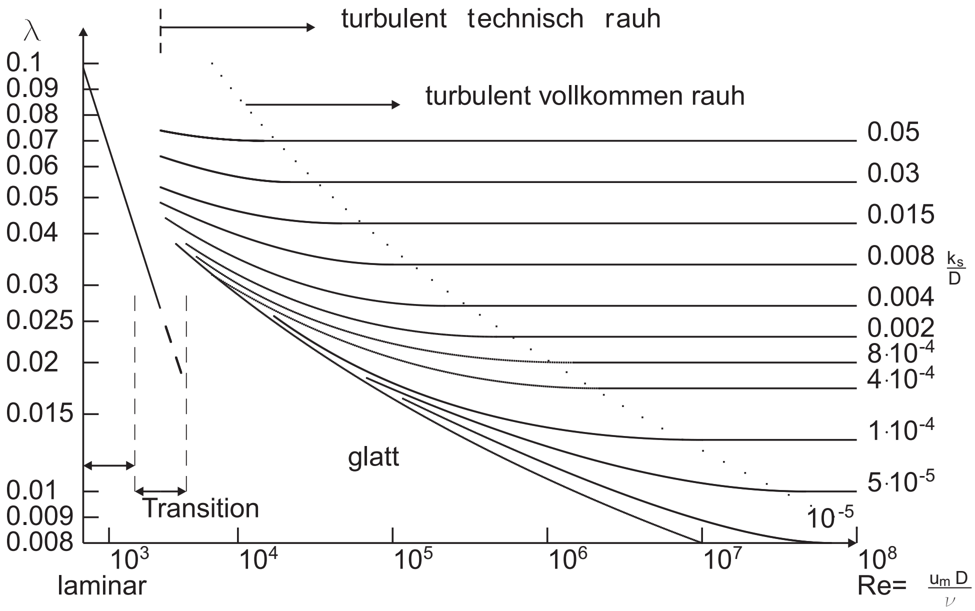
6. Aufgabe

a) Laminares (links) und zeitlich gemitteltes, turbulentes (rechts) Geschwindigkeitsprofil



Das turbulente Geschwindigkeitsprofil ist völliger als das Laminare, da der Impulsaustausch in radialer Richtung größer ist.

b) Moody-Diagramm



c) Prandtl'sche Mischungsweghypothese:

$$\tau_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$$

turbulente Zähigkeit:

$$\eta_t = \rho l^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right|$$