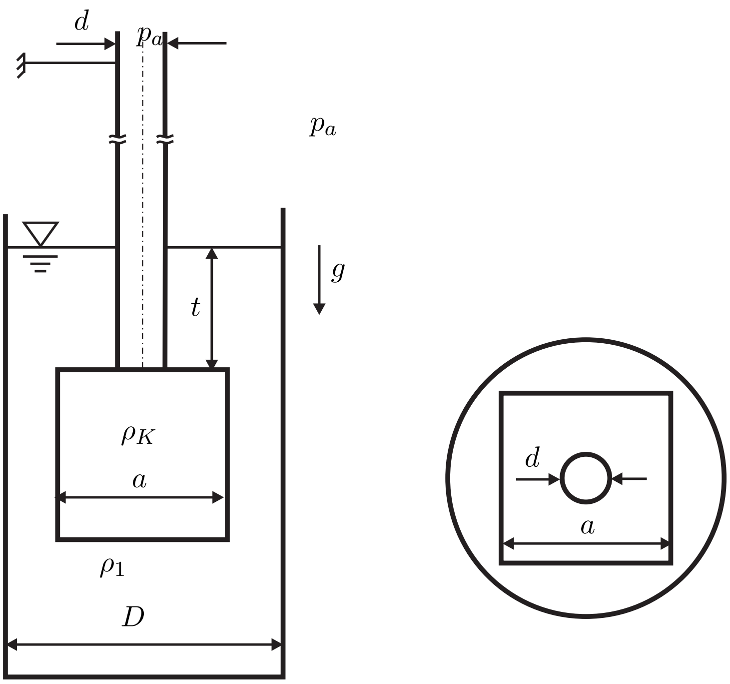
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor) & „Technische Strömungslehre“ (Diplom)

09. 08. 2013

1. Aufgabe (10 Punkte)

In einem mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ_1 gefüllten zylindrischen Glas mit dem Durchmesser D befindet sich ein würfelförmiger Körper der Seitenlänge a und der Dichte ρ_K. Oberhalb des Würfels befindet sich ein oben offenes zylindrisches Rohr mit dem Durchmesser d. Das Rohr, dessen Wandstärke vernachlässigbar klein ist, ist fest an einer Halterung verankert, sodass es unbeweglich ist. Der Würfel, der das Rohr berührt, ist vertikal frei beweglich.



a) Berechnen Sie die Kraft, die der Würfel auf das Rohr ausübt unter der Annahme, dass das Rohr mit Luft gefüllt ist.

Nun wird das Rohr mit einer zweiten Flüssigkeit der Dichte ρ_2 gefüllt.

b) Bestimmen Sie das Volumen V der Flüssigkeit im Rohr, bei dem der Würfel gerade unter dem Rohr schwebt, sodass keine Flüssigkeit in das Glas fließt.

Das Volumen V, das im Aufgabenteil b) berechnet werden sollte, sei nun gegeben. An Stelle der zweiten Flüssigkeit wird nun das doppelte Volumen von Flüssigkeit 1 (Dichte ρ_1) in das leere Rohr gegossen.

c) Bestimmen Sie die Volumenänderung ΔV der Flüssigkeit im Glas.

Gegeben:

$g, \quad t, \quad D, \quad d, \quad a, \quad \rho_1, \quad \rho_2, \quad \rho_K, \quad \rho_K < \rho_1, \quad 2\rho_1 > \rho_2$

Hinweis:

- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

1. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht am Würfel:

$$F = F_A - F_G$$

$$F = p_a a^2 + \rho_1 g\,(t+a)\,a^2 - \rho_1 g t \left(a^2 - \pi \frac{d^2}{4}\right) - \rho_K g a^3 - p_a a^2$$

$$F = \rho_1 g a^3 + \rho_1 g t \pi \frac{d^2}{4} - \rho_K g a^3 \qquad \left[\frac{kg \cdot m}{s^2}\right] = [N]$$

b) Kräftegleichgewicht: $\sum F = 0 \Rightarrow F_G = F_A$

$$\rho_K g a^3 = \rho_1 g\,(t+a)\,a^2 - \rho_1 g t \left(a^2 - \pi \frac{d^2}{4}\right) - \rho_2 g h \pi \frac{d^2}{4}$$

$$\Rightarrow \rho_K a^3 = \rho_1 a^3 + \rho_1 t \pi \frac{d^2}{4} - \rho_2 h \pi \frac{d^2}{4}$$

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h$$

$$\Rightarrow V = \frac{a^3(\rho_1 - \rho_K) + \rho_1 t \pi \frac{d^2}{4}}{\rho_2} \qquad [m^3]$$

c) Aus b) mit $\rho_1 = \rho_2$: Volumen von Flüssigkeit 1 für schwebenden Körper:

$V^* = a^3 \frac{\rho_1 - \rho_K}{\rho_1} + t^* \pi \frac{d^2}{4}$

Volumenbilanz: $\Delta V = 2V - V^*$

Wasserpegel im Glas: $t^* = t + \frac{\Delta V}{\pi(\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4})}$

Massenbilanz in Wasserpegelgleichung: $t^* = t + \frac{8V - 4V^*}{\pi(D^2 - d^2)}$

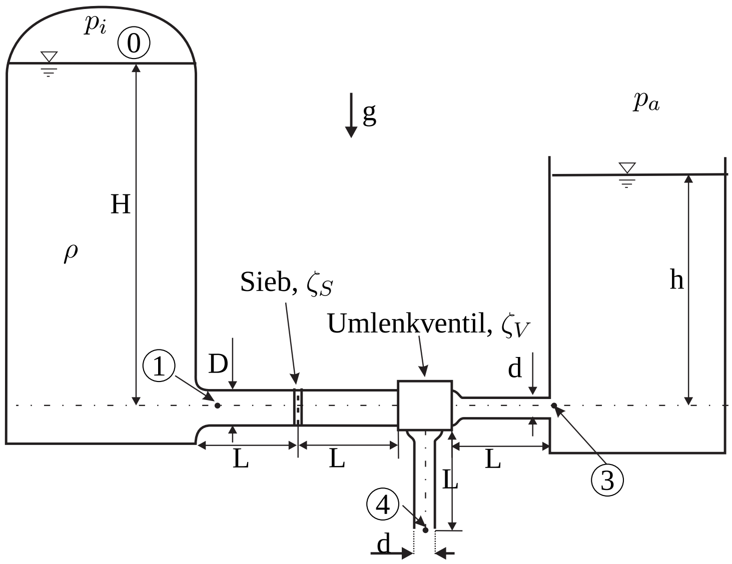
t^* in Lösung aus b) einsetzen und nach V^* auflösen:

$$\Rightarrow V^* = \frac{a^3 + t\pi \frac{d^2}{4} + \frac{2V d^2}{D^2 - d^2} - \frac{\rho_k a^3}{\rho_1}}{1 + \frac{d^2}{D^2 - d^2}}$$

$$\Delta V = 2V - \frac{a^3 + t\pi \frac{d^2}{4} + \frac{2V d^2}{D^2 - d^2} - \frac{\rho_k a^3}{\rho_1}}{1 + \frac{d^2}{D^2 - d^2}} \qquad [m^3]$$

2. Aufgabe (12 Punkte)

Aus einem großen geschlossenen Behälter strömt Wasser der Dichte ρ über eine lange Rohrleitung in einen anderen großen Behälter. Der erste Teil der Rohrleitung hat den Durchmesser D, der zweite Teil den Durchmesser d. In beiden ist die Rohrreibung über den Rohrreibungskoeffizienten λ zu berücksichtigen. Im ersten Teil des Rohres befindet sich ein Sieb, durch das ein weiterer Verlust mit dem Verlustbeiwert ζ_s generiert wird. Zwischen dem ersten und dem zweiten Teil der Rohrleitung befindet sich ein Ventil mit dem Verlustbeiwert ζ_V. Der Druck im ersten Behälter ist p_i. Der zweite Behälter ist offen, sodass an der Wasseroberfläche der Umgebungsdruck p_a herrscht.



Gegeben:

$p_a, \quad \rho, \quad g, \quad D, \quad d, \quad H, \quad h, \quad L, \quad \lambda, \quad \zeta_s, \quad \zeta_v, \quad L \gg D,$

a) Das Ventil ist geöffnet, sodass sich eine stationäre Strömung ausschließlich in den horizontalen Rohren mit dem Volumenstrom $\dot{V}$ einstellt. Bestimmen Sie für diesen den Druck p_i im Inneren des ersten Behälters.

Im Folgenden können die Verluste aus Aufgabenteil a) vernachlässigt werden. Das Ventil wird jetzt geschlossen, sodass kein Wasser mehr fließt. Danach wird das Ventil plötzlich so verstellt, dass das Wasser instationär ausschließlich in den Auslauf (Punkt 4) strömt.

b) Bestimmen Sie die Zeit ΔT, in der die Strömung am Auslauf 90% ihrer stationären Endgeschwindigkeit erreicht hat.

Hinweis:

- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{a+x}{a-x} & \text{für} \quad |x| < a \\ \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x+a}{x-a} & \text{für} \quad |x| > a \end{cases}$$

2. Aufgabe

a) Kontinuitätsgleichung:

$$\dot{V} = v_3 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = v_1 \cdot \frac{\pi D^2}{4}$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{4\dot{V}}{\pi d^2}, \qquad v_1 = \frac{4\dot{V}}{\pi D^2}$$

Bernoulli $\boxed{0} \rightarrow \boxed{3}$:

$$p_i + \rho g H = p_a + \rho g h + \frac{\rho}{2} v_3^2 \left(1 + \lambda \frac{L}{d}\right) + \frac{\rho}{2} v_1^2 \left(\zeta_S + \zeta_V + \lambda \frac{2L}{D}\right)$$

$$\Rightarrow p_i + \rho g H = p_a + \rho g h + \frac{\rho}{2} v_3^2 \left(1 + \lambda \frac{L}{d} + \left[\frac{d}{D}\right]^4 \cdot \left[\zeta_S + \zeta_V + \lambda \frac{2L}{D}\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow p_i = p_a - \rho g (H - h) + \frac{\rho}{2} v_3^2 \left(1 + \lambda \frac{L}{d} + \left[\frac{d}{D}\right]^4 \cdot \left[\zeta_S + \zeta_V + \lambda \frac{2L}{D}\right]\right)$$

$$\Leftrightarrow p_i = p_a - \rho g (H - h) + \frac{\rho}{2} \left(\frac{16\dot{V}^2}{\pi^2 d^4}\right) \cdot \left(1 + \lambda \frac{L}{d} + \left[\frac{d}{D}\right]^4 \cdot \left[\zeta_S + \zeta_V + \lambda \frac{2L}{D}\right]\right) \qquad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

b) Torricelli:

$$v_{4,end} = \sqrt{2\frac{p_i - p_a}{\rho} + 2g(H + L)}$$

instationärer Bernoulli $\boxed{0} \rightarrow \boxed{4}$:

$$p_i + \rho g (H + L) = p_a + \frac{\rho}{2} v_4^2 + \rho \int_0^{2L} \frac{\partial v_1}{\partial t} ds + \rho \int_0^{L} \frac{\partial v_4}{\partial t} ds$$

Mit Hinweis $L \gg D$: $\displaystyle\int_0^{2L} \frac{\partial v_1}{\partial t} ds = \int_0^{2L} \frac{dv_1}{dt} ds \qquad \& \qquad \int_0^{L} \frac{\partial v_4}{\partial t} ds = \int_0^{4L)} \frac{dv_4}{dt} ds$

Kontinuitätsgleichung:

$$v_1 \frac{\pi D^2}{4} = v_4 \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow v_1 = v_4 \frac{d^2}{D^2} \qquad ; \qquad \frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_4}{dt} \frac{d^2}{D^2}$$

$$\Rightarrow p_i + \rho g (H + L) = p_a + \frac{\rho}{2} v_4^2 + \rho \int_0^{2L} \frac{dv_4}{dt} \frac{d^2}{D^2} ds + \rho \int_0^{L} \frac{dv_4}{dt} ds$$

$$\Rightarrow p_i + \rho g (H + L) = p_a + \frac{\rho}{2} v_4^2 + \rho \frac{dv_4}{dt} L \left(2\frac{d^2}{D^2} + 1\right)$$

$$\frac{2\frac{p_i - p_a}{\rho} + 2g(H + L) - v_4^2}{2L\left(2\frac{d^2}{D^2} + 1\right)} = \frac{dv_4}{dt}$$

$$dt = \frac{2L\left(2\frac{d^2}{D^2} + 1\right) dv_4}{2\frac{p_i - p_a}{\rho} + 2g(H + L) - v_4^2}$$

Mit Hinweis: $a^2 = 2\dfrac{p_i - p_a}{\rho} + 2g(H + L)$

$a > |v_4|$, da $v_{4,end} = a$

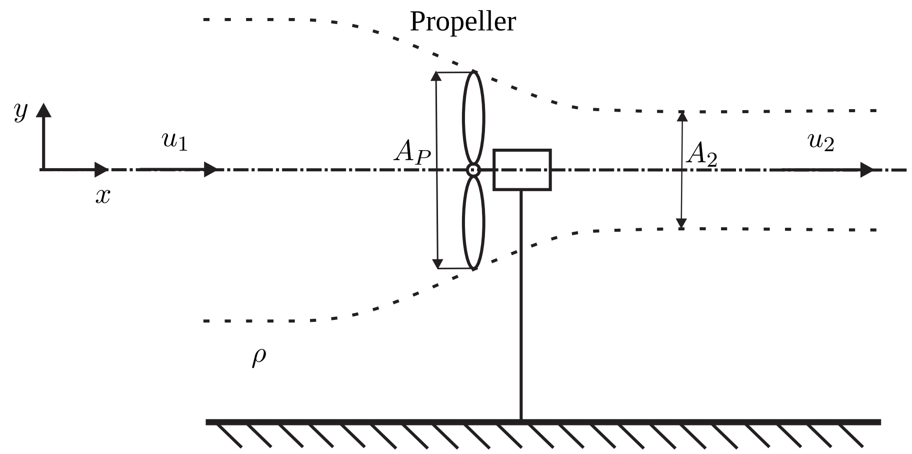
$$\Rightarrow \Delta T = \frac{2L\left(2\frac{d^2}{D^2}+1\right)}{2\sqrt{2\frac{p_i-p_a}{\rho}+2g(H+L)}} Ln\left(\frac{v_{4,end}+v_4}{v_{4,end}-v_4}\right)$$

Einsetzen der Bedingung $v_4 = 0,9 \cdot v_{4,end}$:

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{2L\left(2\frac{d^2}{D^2}+1\right)}{2\sqrt{2\frac{p_i-p_a}{\rho}+2g(H+L)}} Ln(19) \qquad \left[\frac{m}{\sqrt{\frac{kgm^4}{m^2s^2kg}+\frac{m^2}{s^2}}}\right] = [s]$$

3. Aufgabe (8 Punkte)

Ein Propeller wird mit der konstanten Geschwindigkeit u_1 angeströmt. Im Nachlauf des Propellers wird die Geschwindigkeit u_2 gemessen. Es gelten die Voraussetzungen der vereinfachten Propellertheorie.



a) Berechnen Sie die Querschnittsfläche A_2.

b) Berechnen Sie die Kraft, die vom Propeller auf die Strömung wirkt.

c) Skizzieren Sie sorgfältig den statischen Druck in x-Richtung.

Gegeben: u_1, u_2, A_P, ρ

Hinweise:

- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

3. Aufgabe

a) Kontinuitätsgleichung:

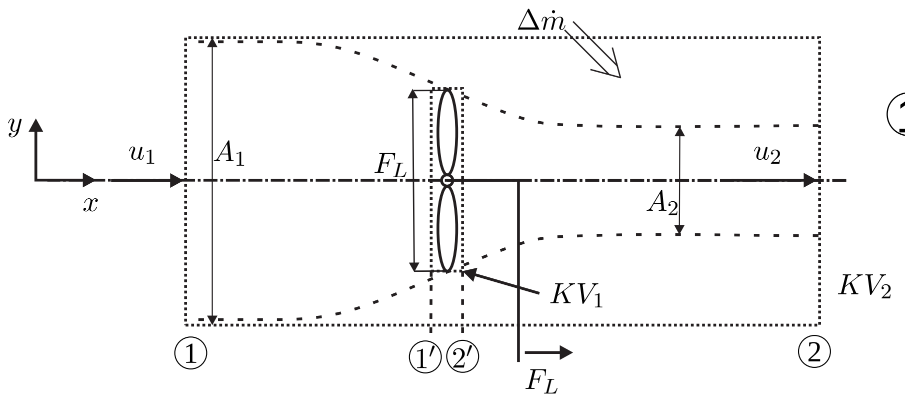
$\rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 = \rho u_p A_p$ ①1

$\frac{A_p}{A_2} = \frac{u_2}{u_p}$

Bedingung für Geschwindigkeit in Propellerebene:

$v_p = \frac{u_1 + u_2}{2}$

$A_2 = A_p \frac{u_1 + u_2}{2u_2} \qquad [m]$ ①2 $\qquad (1)$



①3

b) Impulserhaltungssatz in X-Richtung über Kotrollvolumen 1 (KV_1):

$-\rho u_{1'}^2 A_p + \rho u_{2'}^2 A_p = (p_1' - p_2')A_P + F_L$ ①4

$\Rightarrow (p_2' - p_1')A_P = F_L \qquad (2)$

Bernoulli von ① - ①’: ①5

$p_a + \frac{\rho}{2}u_1^2 = p_1' + \frac{\rho}{2}u_1'^2 \qquad (3)$

Bernoulli von ②’ - ②: ①6

$p_2' + \frac{\rho}{2}u_{2'}^2 = p_a + \frac{\rho}{2}u_2^2 \qquad (4)$

Gleichung (3) und (4) gleich setzen:

$p_1' - p_2' = \frac{\rho}{2}(u_1^2 - u_2^2) \qquad (5)$

(5) einsetzen in (2):

$F_L = \frac{\rho}{2}(u_2^2 - u_1^2)A_p \qquad \left[\frac{kg}{m^3}\left(\frac{m^2}{s^2}\right)m^2 = N\right]$ ①7

Alternativer Lösungsweg:

Impulserhaltungssatz in X-Richtung über Kontrollvolumen 2 (KV_2):

$-\Delta\dot{m}u_1 - \rho u_1^2 A_1 + \rho u_2^2 A_2 + \rho u_1^2(A_1 - A_2) = F_L$ ①4

$-\Delta\dot{m}u_1 + \rho A_2(u_2^2 - u_1^2) = F_L \qquad (7)$

al

Kontinuitätsgleichung:

$$\Delta\dot{m} + \rho u_1 A_1 = \rho u_2 A_2 + \rho u_1 (A_1 - A_2)$$

$$\Delta\dot{m} = \rho u_2 A_2 - \rho u_1 A_2 = \rho A_2 (u_2 - u_1) \qquad (8)$$

①5 al

Gleichung (8) in (7) einsetzen:

$$-\rho A_2 (u_2 u_1 - u_1^2) + \rho A - 2(u_2^2 - u_1^2) = F_L$$

①6 al

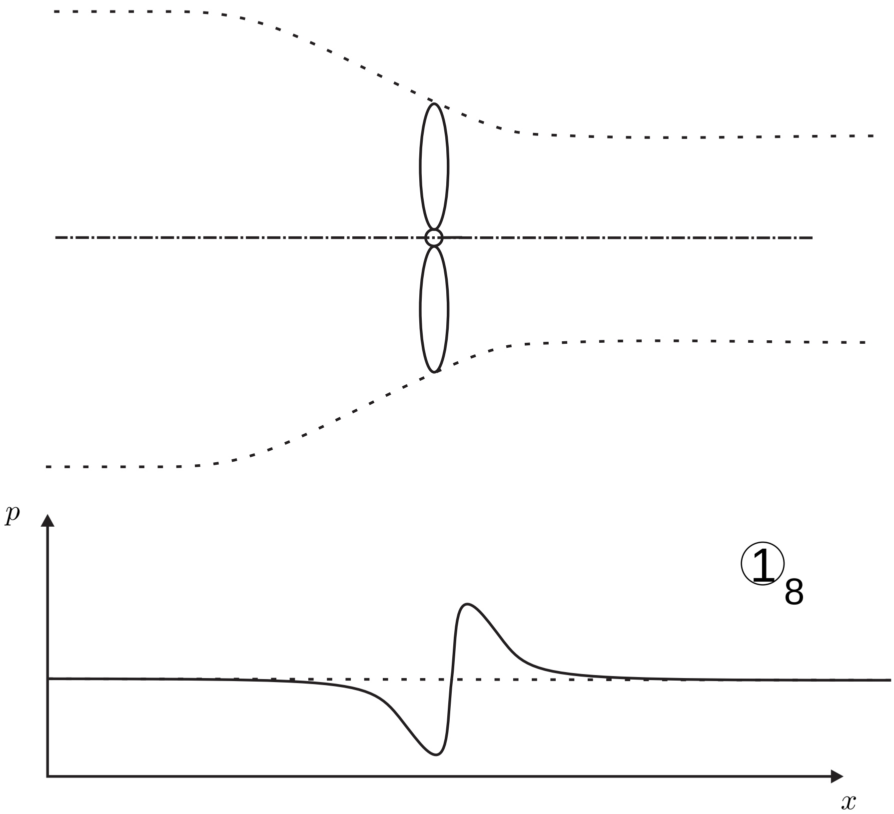
$$\Rightarrow F_L = \rho A_2 (u_2^2 - u_2 u_1) \qquad (9)$$

Mit Gleichung (1): $F_L = \rho A_P \dfrac{u_1 + u_2}{2u_2}(u_2^2 - u_2 u_1)$

$$\Rightarrow F_L = \frac{\rho}{2} A_p (u_2^2 - u_1^2) \qquad \left[\frac{kg}{m^3}\left(\frac{m^2}{s^2}\right) m^2 = N\right]$$

①7 al

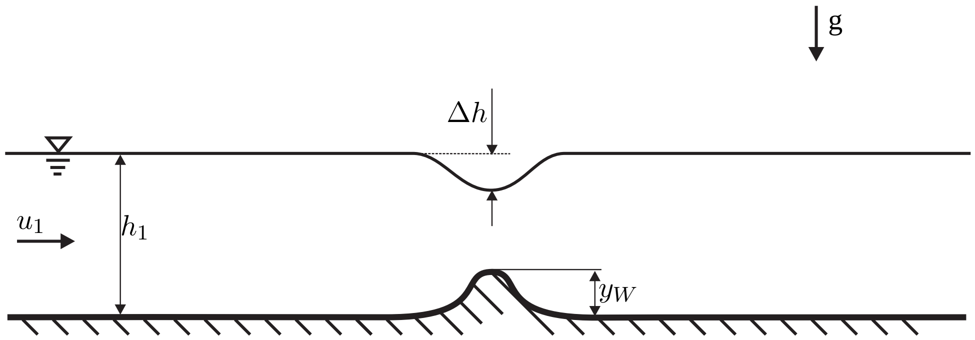
c) Druckverlauf:



①8

4. Aufgabe (8 Punkte)

In einer Gerinneströmung der Breite B und der Höhe h wird über einem Wehr der Höhe y_W eine Spiegelabsenkung Δh beobachtet.



Gegeben:

$h_1, \quad \Delta h, \quad y_W, \quad B, \quad g$

a) Bestimmen Sie den Volumenstrom des Gerinnes.

b) Für welchen Volumenstrom entspricht die Höhe des Wehres y_W der Grenzhöhe y_{gr}?

Hinweis:

- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

4. Aufgabe

a) Definition des Volumenstroms:

$\dot{V} = u_1 B h_1$

Bernoulli von ① nach ② : $p_a + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = p_a + \rho g (h_2 + y_W) + \frac{\rho}{2} u_2^2$

Konti: $u_1 h_1 B = u_2 h_2 B \quad u_2 = u_1 \frac{h_1}{h_2}$

$h_1 = h_2 + y_W + \Delta h \quad \Leftrightarrow \quad h_2 = h_1 - y_W - \Delta h$

Einsetzen in Bernoulli Gleichung: $\rho g h_1 + \frac{\rho}{2} u_1^2 = \rho g (h_1 - \Delta h) + \frac{\rho}{2} u_1^2 \frac{h_1^2}{(h_1 - \Delta h - y_W)^2}$

$$u_1 = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{h_1^2}{(h_1 - \Delta h - y_W)^2} - 1}}$$

$$\Rightarrow \dot{V} = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{\frac{h_1^2}{(h_1 - \Delta h - y_W)^2} - 1}} B h_1 \qquad \left[\sqrt{\frac{m^2}{s^2}} m^2\right] = \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

b) Grenzzustand bei $Fr_2 = 1$:

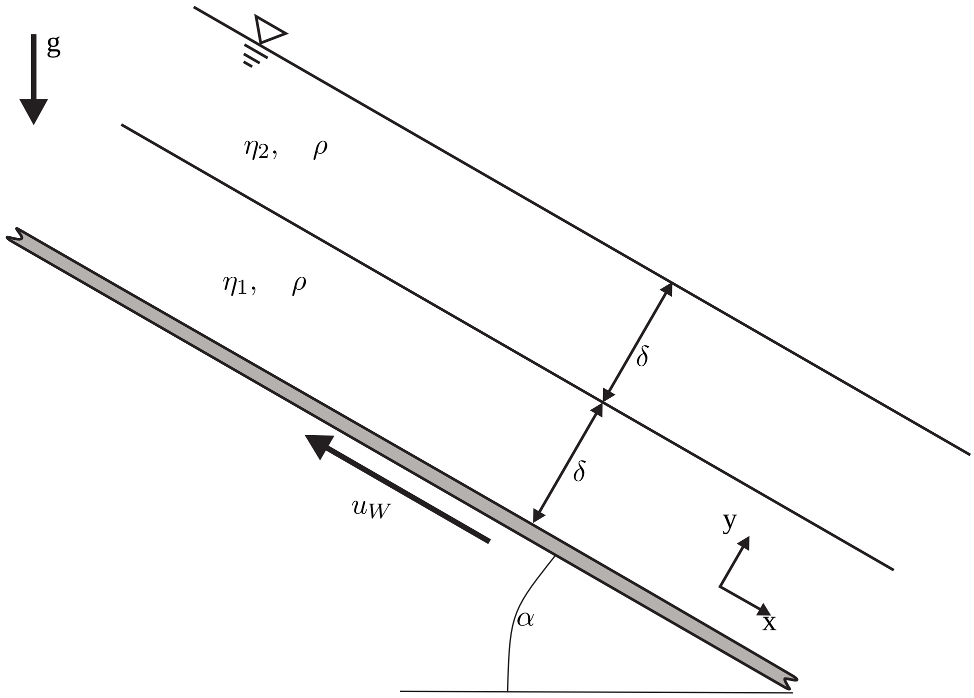
$Fr = \frac{u}{\sqrt{gh}}$

$\Rightarrow u_2 = \sqrt{g h_2}$

$$\dot{V} = \sqrt{g (h_1 - y_W - \Delta h)^3} B \qquad \left[\sqrt{\frac{m^4}{s^2}} m\right] = \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

5. Aufgabe (14 Punkte)

Zwei Newtonsche Fluide der gleichen Dicke δ und der Dichte ρ mit unterschiedlichen Viskositäten η_1 und η_2 fließen in Schichten unter dem Einfluss der Erdschwere an einer um den Winkel α geneigten Platte hinab. Die Platte bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_W entgegen der x-Richtung des Koordinatensystems.



Gegeben:

$\delta, \quad \rho, \quad u_W, \quad \eta_1, \quad \eta_2, \quad \eta_1 > \eta_2, \quad g, \quad \alpha$

a) Leiten Sie für die vollständig ausgebildete laminare Strömung anhand eines Volumenelementes die Differentialgleichung zur Bestimmung der Schubspannungsverteilung her.

b) Definieren Sie für den oben beschriebenen Fall 4 Randbedingungen mit denen die Schubspannungs- und Geschwindigkeitsverteilung berechnet werden kann.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilungen der beiden Flüssigkeiten.

d) Skizzieren Sie qualitativ die Geschwindigkeitsverteilung.

Hinweis:

• Die beiden Flüssigkeiten vermischen sich nicht.

• Die von der Luft auf die Oberfläche der äußeren Fluidschicht übertragene Schubspannung wird vernachlässigt.

• Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

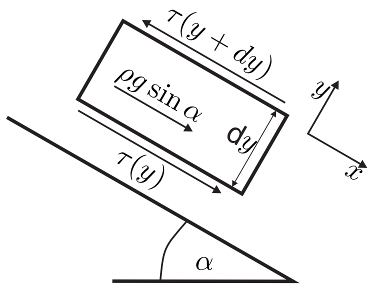
5. Aufgabe

a) Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:

$$\tau(y)dx - \tau(y+dy)dx + \rho g \sin\alpha dxdy = 0$$

$$\tau dx - \left(\tau + \frac{d\tau}{dy}dy\right)dx + \rho g \sin\alpha dxdy = 0$$

$$\frac{d\tau}{dy} = \rho g \sin\alpha \qquad \left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$$



b)
1. Die Schubspannung ist am Übergang zur Luft null: $\tau(y = 2\delta) = 0$
2. Die Schubspannung am Übergang der Fluide ist gleich: $\tau_1(y = \delta) = \tau_2(y = \delta)$
3. Die Geschwindigkeit des Fluids an der Wand entspricht der Wandgeschwindigkeit (Haftbedingung): $u_1(y = 0) = -u_W$
4. Die Geschwindigkeit am Übergang der Fluide ist gleich: $u_1(y = \delta) = u_2(y = \delta)$

c) Schubspannungsverteilung in den beiden Fluiden:

$$\tau_1 = \rho g \sin\alpha y + c_1$$

$$\tau_2 = \rho g \sin\alpha y + c_2$$

Mit Randbedingung 1:

$$\tau_2(2\delta) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -2\rho g \sin\alpha\delta$$

$$\tau_2 = \rho g \sin\alpha y - 2\rho g \sin\alpha\delta$$

$$\tau_2 = \rho g \sin\alpha(y - 2\delta)$$

Einsetzen von Randbedingung 2:

$$\tau_1(y = \delta) = \tau_2(y = \delta) \;\Rightarrow\; \rho g \sin\alpha\delta + c_1 = \rho g \sin\alpha\delta - 2\rho g \sin\alpha\delta$$

$$c_1 = c_2 = -2\rho g \sin\alpha\delta$$

$$\tau_1 = \rho g \sin\alpha(y - 2\delta)$$

Newtonsches Fluid: $\tau_n = -\eta_n \frac{du}{dy}$

$$\frac{du_1}{dy} = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}(-y + 2\delta)$$

$$\frac{du_2}{dy} = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_2}(-y + 2\delta)$$

Unbestimmte Integration:

$$u_1 = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}(-\frac{y^2}{2} + 2\delta y) + c_3$$

$$u_2 = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_2}(-\frac{y^2}{2} + 2\delta y) + c_4$$

Einsetzen von Randbedingung 3: $\quad u_1(y = 0) = -u_W \;\Rightarrow c_3 = -u_W$

$$\Rightarrow \quad u_1 = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}(-\frac{y^2}{2} + 2\delta y) - u_W$$

Anwenden von Randbedingung 4: $u_1(y=\delta) = u_2(y=\delta)$

$$\Rightarrow \ \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}(-\frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2) - u_W = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_2}(-\frac{\delta^2}{2} + 2\delta^2) + c_4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}\frac{3\delta^2}{2} - u_W = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_2}3\frac{\delta^2}{2} + c_4$$

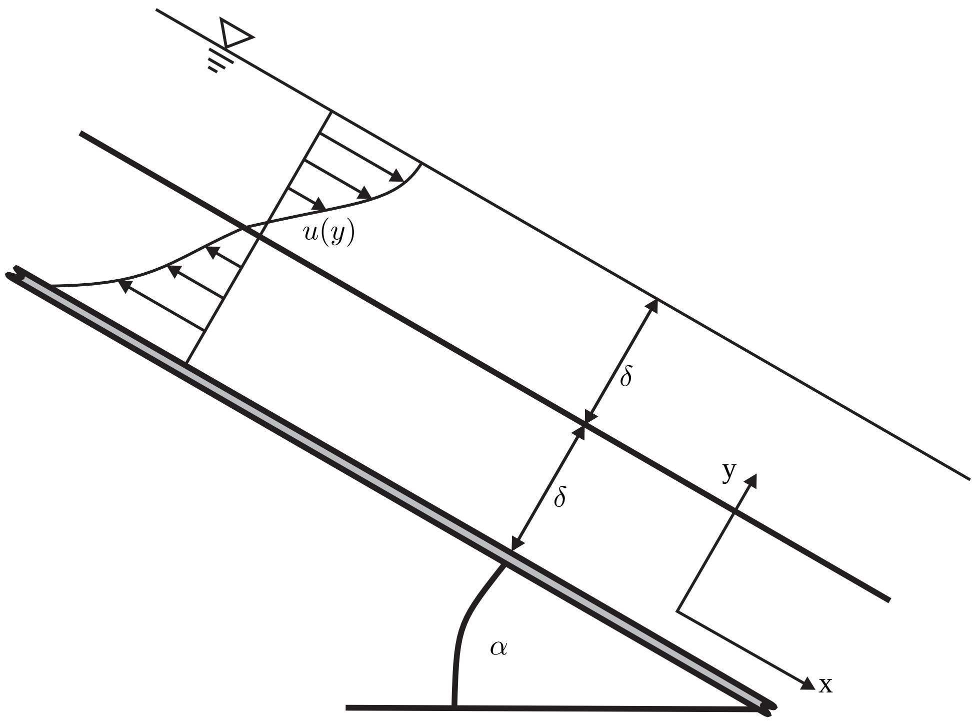
$$\Rightarrow c_4 = \frac{3\rho g \sin\alpha}{2}\delta^2(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2}) - u_W$$

Geschwindigkeitsverteilung in beiden Fluiden:

$$0 \leq y \leq \delta: \quad u_1(y) = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_1}(-\frac{y^2}{2} + 2\delta y) - u_W \qquad \left[\frac{m}{s}\right]$$

$$\delta \leq y \leq 2\delta: \quad u_2(y) = \frac{\rho g \sin\alpha}{\eta_2}(-\frac{y^2}{2} + 2\delta y) + \frac{3\rho g \sin\alpha}{2}\delta^2(\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_2}) - u_W \qquad \left[\frac{m}{s}\right]$$

d) Qualitative Geschwindigkeitsverteilung im Fluid:



6. Aufgabe (8 Punkte)

a) Welche Annahmen werden zur Herleitung der Bernoullischen Gleichung getroffen?

b) Wodurch zeichnet sich ein Bingham-Fluid aus? Skizzieren Sie für ein Bingham-Fluid die Schubspannung in Abhängigkeit der Scherung.

c) Aus welchen Anteilen setzt sich die Gesamtschubspannung τ_{ges} bei der turbulenten Rohrströmung zusammen? Geben Sie eine Gleichung für τ_{ges} in Abhängigkeit der gemittelten Strömungsgeschwindigkeit in Hauptströmmungsrichtung an.

d) Was ist der Prandtlsche Mischungsweg?

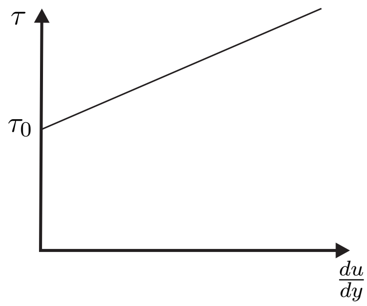
e) Welcher Zusammenhang wird im Moody-Diagramm dargestellt?

f) Zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt: $\overline{fg} = \overline{f}\overline{g} + \overline{f'g'}$

6. Aufgabe

a) inkompressible, reibungsfreie, stationäre Strömung entlang einer Stromlinie.

b) Das Bingham-Fluid ist weder Fluid noch Festkörper. Sie verträgt ohne in Bewegung zu geraten eine endliche Schubspannung τ_0, so dass sie nicht als Fluid angesehen werden kann. Wird τ_0 überschritten strömt sie wie ein Fluid.



c) Die turbulente Schubspannung setzt sich aus dem molekularen oder laminaren τ_l und dem turbulenten Anteil τ_t zusammen:

$$\tau = \tau_t + \tau_l = -\rho\overline{u'v'} + \eta\frac{d\overline{u}}{dy} = \eta_t\frac{d\overline{u}}{dy} + \eta\frac{d\overline{u}}{dy} = \rho l^2\left|\frac{d\overline{u}}{dy}\right|\frac{d\overline{u}}{dy} + \eta\frac{d\overline{u}}{dy}$$

d) Der Mischungsweg ist die Strecke in Richtung der Normalen, die ein Turbulenzballen mit seiner Geschwindigkeit zurücklegen muss, damit die Differenz zwischen seiner Geschwindigkeit und der Geschwindigkeit der neuen Schicht der gemittelten absoluten Schwankungsgrösse entspricht.

e) Das Moody-Diagramm stellt den Zusammenhang zwischen dem Rohrreibungskoeffizienten, der Reynoldszahl und der relativen Wandrauhigkeit dar.

f) $$\overline{fg} = \frac{1}{T}\int_T fg dt = \frac{1}{T}\int_T (\overline{f} + f')(\overline{g} + g')dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_T (\overline{f}\overline{g} + f'\overline{g} + \overline{f}g' + f'g')dt$$
$$= \overline{f}\overline{g} + \overline{g}\frac{1}{T}\int_T f'dt + \overline{f}\int_T g'dt + \overline{f'g'}$$
$$= \overline{f}\overline{g} + \overline{f'g'}$$