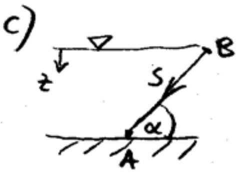
1. Aufg.)

a) Die Auftriebskraft, die ein eingetauchter Körper erfährt, ist gleich der Gewichtskraft des verdrängten Fluides.

b) z.B. – nicht vollständig benetzte Körper

oder – Druckgradient ist linear (oder einfach nicht const.)

c) 

$F_p \hat{=}$ Druckkraft auf Platte pro Einheitstiefe

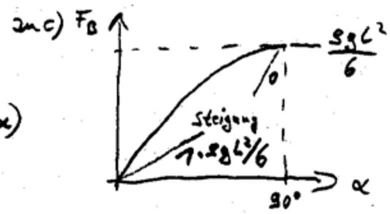
$$F_p = \int_{B'}^{A'} \Delta p \, ds = \int_0^L \rho g s \sin\alpha \, ds = \frac{\rho g L^2}{2}\sin\alpha$$

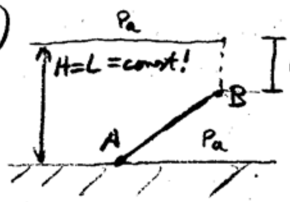
$z = s \cdot \sin\alpha$

Kraftangriffspkt (KAP) von F_p entweder rechnerisch oder geometrisch bestimmen:

Schwerpkt. d. Dreiecks liegt bei $s = \frac{2}{3}L$

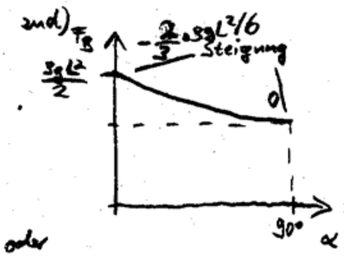
$$\sum M_A: \quad F_p \cdot \frac{1}{3}L = F_B \cdot L \quad \Rightarrow F_B = \frac{\rho g L^2}{6}\sin\alpha \quad (= f(\alpha))$$



d) 

$h = H - L\sin\alpha = L(1-\sin\alpha)$

$$\Delta p_B = \rho g L(1-\sin\alpha)$$



$$F_p = \int_0^L \Delta p \, ds = \int_0^L (\Delta p_B + \rho g s \sin\alpha) ds$$

$$F_p = \underbrace{\Delta p_B \cdot L} + \underbrace{\frac{\rho g L^2}{2}\sin\alpha}$$

$$F_p = F_{p\square} + F_{p\triangleright}$$

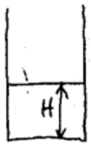
KAP berechnen oder F_p aufspalten

$$\sum M_A: \quad F_{p\square} \cdot \frac{L}{2} + F_{p\triangleright} \cdot \frac{L}{3} = F_B \cdot L$$

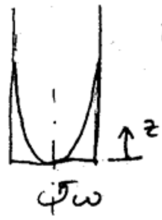
$$\Rightarrow F_B = \frac{\rho g L^2}{2} - \frac{\rho g L^2}{2}\sin\alpha + \frac{\rho g L^2}{6}\sin\alpha = \frac{\rho g L^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\sin\alpha\right)$$

2. Aufg.)

a)



$V_{wasser} = H\pi R^2$



Bernoulli entlang der Oberfläche:

$$p_a + \rho g z(r) - \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2 = p_a$$

$$\Rightarrow z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2$$

$$V_{wasser} = \int_0^R 2\pi r\, z(r)\, dr = \int_0^R \frac{\pi\omega^2}{g} r^3\, dr = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g}$$

gleichsetzen: $H\pi R^2 = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4gH}{R^2}} = 100\,\frac{1}{s}$

b)

verl.-frei Bern. ⓪ → ④: $p_a + \rho g(L+h) = p_4 + \frac{\rho}{2}v_4^2 \overset{p_4 = p_a}{\Longrightarrow} v_4 = \sqrt{2g(L+h)}$

verl.-frei Bern. ⓪ → ③: $p_a + \rho g(L+h) = p_3 + \frac{\rho}{2}v_3^2 \quad (*)$

aus Konti $v_3 = v_4 \frac{A_4}{A_3}$, für Ansaugen $p_3 \overset{!}{=} p_a - \rho g h$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} \cancel{\rho} g(L+h) = -\cancel{\rho} g h + \frac{\cancel{\rho}}{2}v_4^2\left(\frac{A_4}{A_3}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{A_4}{A_3}\right)^2 = \frac{2g(L+2h)}{v_4^2}$$

$$\Rightarrow \frac{A_4}{A_3} = \sqrt{\frac{L+2h}{L+h}} = f(L,h) \quad \text{für } h = L \Rightarrow \frac{A_4}{A_3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

c)

verl.-behafteter Bern. ⓪ → ④: $p_a + \rho g(L+h) = p_4 + \frac{\rho}{2}v_4^2 + \Delta p_V \quad | \; \Delta p_V = \frac{\rho}{2}v_4^2 \cdot \lambda \frac{3L}{D}$

$$\overset{p_4 = p_a}{\Longrightarrow} \rho g(L+h) = \frac{\rho}{2}v_4^2\left(1 + \lambda\frac{3L}{D}\right) \Rightarrow v_4^2 = \frac{2g(L+h)}{1+\lambda\frac{3L}{D}} \Rightarrow v_4 = 8{,}66\,\frac{m}{s}$$

verl.-behafteter Bern. ⓪ → ③:

$$p_a + \rho g(L+h) = p_3 + \frac{\rho}{2}v_4^2\left(\frac{A_4}{A_3}\right)^2 + \frac{\rho}{2}v_4^2 \cdot \lambda\frac{2L}{D}$$

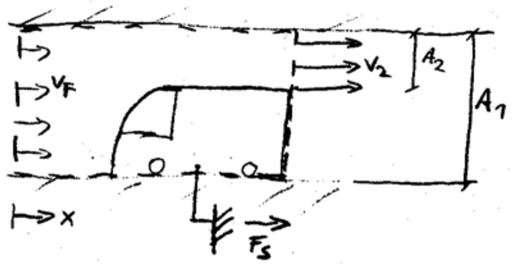
mit $p_3 = p_a - \rho g h$ (s.o.)

$$\Rightarrow 2g(L+2h) = v_4^2\left(\left(\frac{A_4}{A_3}\right)^2 + \lambda\frac{2L}{D}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{A_4}{A_3} = \sqrt{\frac{2g(L+2h)}{v_4^2} - \lambda\frac{2L}{D}} \Rightarrow \frac{A_4}{A_3} = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1{,}826$$

3. Aufg.) (

a) Die Gerinneströmung muß im schießenden Zustand sein bzw. die Froudezahl Fr muß größer als 1 sein.



$A_1 = 14\,m^2$

$A_2 = 9\,m^2$

$v_F = 22{,}2\bar{2}\,\frac{m}{s}$

b)

Konti: $v_2 A_2 = v_F A_1 \Rightarrow v_2 = 34{,}57\,\frac{m}{s}$

$v' = v_2 - v_F = 12{,}35\,\frac{m}{s}$

c) $p_a + \frac{\rho}{2} v_F^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$ (Bern.)

$p_2 = p_a + \frac{\rho}{2}(v_F^2 - v_2^2) = 0{,}9956 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}$

d) IES_x s.o.:

$-\rho v_F^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 = (p_a - p_2) A_1 + F_S$

$\Rightarrow F_W = -F_S = 1334\,N$

e)

IES_x:

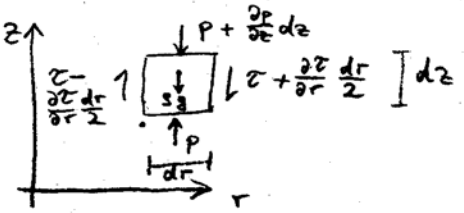
$(p_a - p_3) A_1 + F_S = 0$

$\Rightarrow p_3 = 0{,}999 \cdot 10^5\,\frac{N}{m^2}$

4. Aufg.)

a) Der Druckgradient muß in z-Richtung negativ sein; $\partial p/\partial z < 0$

b) Kräftebilanz am Kreisringsegment



$$\sum F_z = 0 \Rightarrow p 2\pi r\, dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) 2\pi r\, dr + \left(\tau - \frac{\partial \tau}{\partial r}\frac{dr}{2}\right) 2\pi \left(r - \frac{dr}{2}\right) dz$$

$$- \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r}\frac{dr}{2}\right) 2\pi \left(r + \frac{dr}{2}\right) dz - \rho g\, 2\pi r\, dr\, dz = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} dz\, r\, dr - \tau \frac{dr}{2} 2\, dz - \frac{\partial \tau}{\partial r}\frac{dr}{2} r\, 2\, dz + \cancel{O\left(\left(\tfrac{dr}{2}\right)^2\right)} r\, dz - \rho g\, r\, dr\, dz = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} \underbrace{- \frac{\tau}{r} - \frac{\partial \tau}{\partial r}} - \rho g = 0 \qquad \Big| \; \frac{\partial (r\tau)}{\partial r} = \tau + r\frac{\partial \tau}{\partial r} \text{ („Kettenregel")}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r\tau)}{\partial r} - \rho g = 0 \Rightarrow \left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\right) r\, dr = d(r\tau)$$

$$\Rightarrow r\tau = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\right)\frac{r^2}{2} + C_1 \qquad \text{R.B.: } r \to 0 : \tau \to 0 \Rightarrow C_1 = 0$$

(Symmetrie!)

$$\Rightarrow \tau(r) = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\right)\frac{r}{2}$$

c) $$\tau = \tau_0 - \eta_B \frac{\partial u}{\partial r} \xRightarrow{\text{in } \tau(r) \text{ einsetzen}} \tau_0 - \eta_B \frac{\partial u}{\partial r} = \underbrace{\left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\right)}_{K}\frac{r}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{K}{\eta_B}\frac{r}{2} + \frac{\tau_0}{\eta_B}$$

$$\xRightarrow{\text{Integration}} u(r) = -\frac{K}{\eta_B}\frac{r^2}{4} + \frac{\tau_0}{\eta_B} r + C_2$$

$$\text{R.B.: } r = R : u = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{K}{\eta_B}\frac{R^2}{4} - \frac{\tau_0}{\eta_B} R$$

$$\Rightarrow u(r) = \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right)\frac{(r^2 - R^2)}{4\eta_B} + \frac{\tau_0}{\eta_B}(r - R) \qquad (*)$$

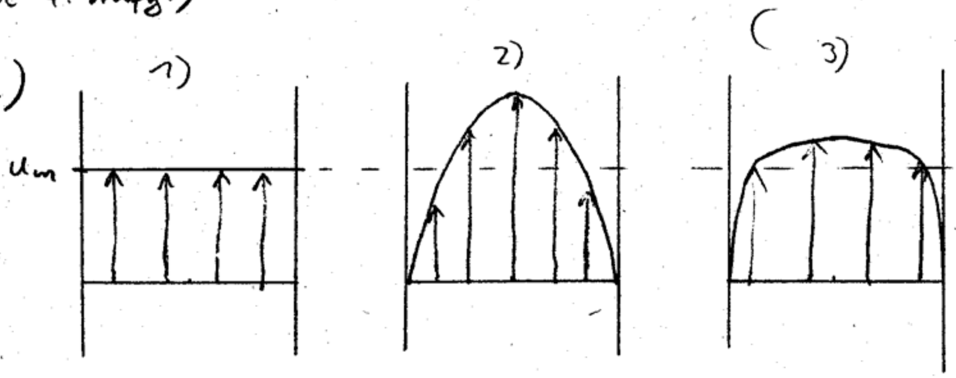
Gültigkeitsbereich: $\tau = \tau_0$ bei $r = ?$

$$\tau \overset{!}{=} \tau_0 = K\frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{2\tau_0}{K} \quad , r > 0 , K > 0$$

$$\begin{cases} \text{für } \frac{2\tau_0}{K} \le r \le R \text{ gilt } u(r) \text{ wie oben } (*) \\ \text{für } 0 < r < \frac{2\tau_0}{K} \text{ gilt } u = \text{const} = u\left(r = \frac{2\tau_0}{K}\right) \end{cases}$$

zu 4. Aufg.)

d)



e) $Re := \frac{\varrho u_m D}{\eta}$; $Re_{krit} \approx 2300$

Transition kann verzögert werden durch

z.B. die Verringerung der Wandrauhigkeit des Rohres.

5. Aufg.) (

a) Mit dem Buckinghamschen Π-Theorem erhält man die maximale Anzahl von Kennzahlen eines physikalischen Problems. Da in einer DGL noch weitere Informationen stecken, ist die Anzahl der Kennzahlen, die mit der Methode der DGL'en erhalten werden kleiner oder gleich der Anzahl der Kennzahlen, die durch das Buckinghamsche Π-Theorem erhalten werden.

b)

$$z = \bar{z} \cdot d_p \qquad v_z = \bar{v}_z \cdot v_{ref} \qquad t = \bar{t} \cdot \frac{d_p}{v_{ref}} \qquad \nu = \bar{\nu} \cdot \nu_{ref}$$

DGL:

$$\frac{d^2 \bar{z}}{d\bar{t}^2} \cdot \frac{d_p v_{ref}^2}{d_p^2} = 18 \bar{\nu} \frac{\nu_{ref}}{d_p^2} \left(\frac{\delta}{1+\alpha\delta}\right)\left(\bar{v}_z v_{ref} - \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} \cdot \frac{d_p v_{ref}}{d_p}\right) + g\left(\frac{1-\delta}{1+\alpha\delta}\right)$$

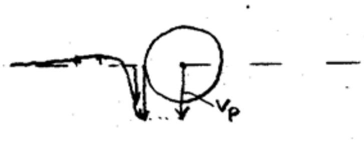
dividiere durch $\frac{v_{ref}^2}{d_p}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\bar{z}}{d\bar{t}^2} = \underbrace{18 \frac{\nu_{ref}}{d_p \cdot v_{ref}}}_{K1} \cdot \bar{\nu}\left(\frac{\delta}{1+\alpha\delta}\right)\left(\bar{v}_z - \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}}\right) + \underbrace{\frac{g \cdot d_p}{v_{ref}^2}}_{K2}\left(\frac{1-\delta}{1+\alpha\delta}\right)$$

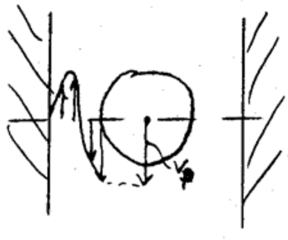
$$K1 = [18] \frac{\nu_{ref}}{d_p v_{ref}} = [18] \frac{1}{Re} \qquad K2 = \frac{g\, d_p}{v_{ref}^2} = \frac{1}{Fr^2}$$

c)

$d_R >> d_p$



$d_R \approx 2 d_p$



6. Aufg.) (

a) $\frac{du}{dx} = 0$ und $\frac{dv}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} = 0$ ✓

Konti wird erfüllt.

b) Die Strömung muß drehungsfrei sein.

c) drehungsfrei $\overset{2d}{\Longrightarrow} \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right) \overset{!}{=} 0$

hier: $\omega_z = \frac{1}{2}(B - A) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \quad A \overset{!}{=} B$

d) $\frac{dF}{dz} = \bar{w} \Rightarrow dF = (u - iv)\, dz$ mit $A = B$

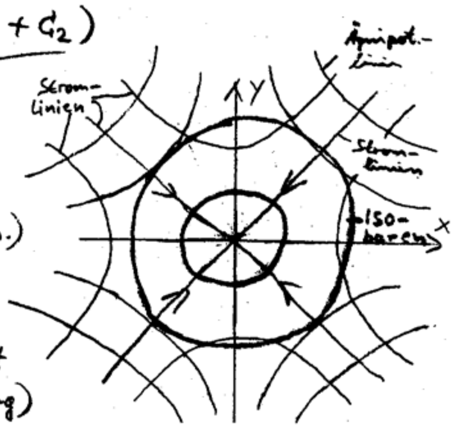
$\Rightarrow dF = (Ay - iAx)\, dz = -iAz\, dz$

$\Rightarrow F = -iA\frac{z^2}{2} + C$ mit $C \in \mathbb{C}$, d.h. $C = C_1 + iC_2$
$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

A und C (d.h. C_1 und C_2) müssen bekannt sein!

e) $F(z) = \frac{-iA}{2}(x+iy)^2 + C = \frac{-iA}{2}(x^2 + 2ixy - y^2) + C$

$= \underbrace{Axy + C_1}_{\phi} + i\underbrace{\left(\frac{-A}{2}(x^2 - y^2) + C_2\right)}_{\psi}$



Stromlinien aus $\psi = const$ oder u, v (Hyp.)

Äquipot.-Linien aus $\phi = const \Rightarrow Axy + C_1 = const$

$\Rightarrow y = \frac{const}{x}$ (Hyp.)

Isobaren: Bern. gilt: $p + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2) = const$

mit $p = const \Rightarrow u^2 + v^2 = const \Rightarrow x^2 + y^2 = const$

(Kreisgleichung)

7. Aufg.) (

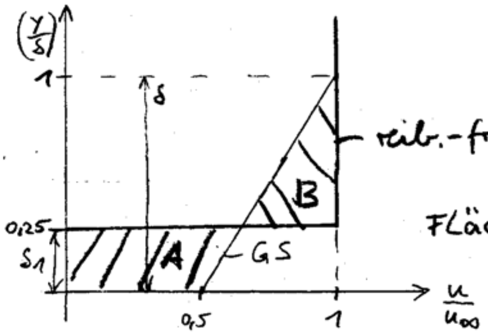
a) $\frac{u_1(y)}{u_\infty} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right)$

1. RB.: $y=0$: $u = u_B \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{u_B}{u_\infty} = K$

2. RB.: $y=\delta$: $u = u_\infty \quad \Rightarrow \quad a_0 + a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1-K$

$$\Rightarrow \frac{u(y/\delta)}{u_\infty} = K + (1-K)\, y/\delta$$

b) $K = 0{,}5$



reib.-freie Außenstr.

Fläche A $\hat{=}$ Fläche B
(oder δ_1 berechnen: $\delta_1 = 0{,}25$)

c)

ebene Grenzschichtströmung: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

mit Euler-Gl. $\left(u_a \frac{du_a}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) \Rightarrow \frac{du_a}{dx} = 0$

$\Rightarrow u_a = u_\infty = \text{const}$

v. Kármán Int.-Gl.: $\frac{d\delta_2}{dx} + \underbrace{\cancel{\frac{1}{u_a}\frac{du_a}{dx}(2\delta_2 + \delta_1)}}_{\to 0} - \frac{\tau_w}{\rho u_a^2} = 0 \qquad (*)$

$$\tau_w = -\tau(y=0) = \eta \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \eta \frac{u_\infty}{\delta} \frac{\partial(u/u_\infty)}{\partial(y/\delta)}\Big|_{y/\delta=0} = \eta \frac{u_\infty}{\delta}(1-K)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{u_\infty}\left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) d(y/\delta) = \int_0^1 \left(K - K^2 + (2K^2 - 3K + 1)\frac{y}{\delta} - (1-K)^2 \frac{y^2}{\delta^2}\right) d\frac{y}{\delta}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}K - \frac{1}{3}K^2 =: C$$

einsetzen in (*) $\quad C \frac{d\delta}{dx} - \eta \frac{u_\infty}{\delta} \frac{(1-K)}{\rho u_\infty^2} = 0$

$$\Rightarrow \delta\, d\delta = \eta \frac{(1-K)}{C \rho u_\infty}\, dx$$

zu 7. Aufg.)

noch c)

Integr. $\Rightarrow \frac{1}{2}\delta^2(x) = \eta \frac{(1-K)}{C_1 S u_\infty} x + C_1$

RB: $x \to 0 : \delta \to 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\Rightarrow \delta(x) = \sqrt{\frac{2\eta(1-K)}{C_1 S u_\infty} x}$$

d) $\mathbb{P} = F \cdot u_B = \int_0^L \tau_w B \, dx \cdot u_B$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{P}}{B} = u_B \int_0^L \eta \frac{u_\infty}{\delta(x)} (1-K) \, dx$$

$$= \eta u_B u_\infty (1-K) \int_0^L \left(\frac{2\eta(1-K)}{C_1 S u_\infty} x \right)^{-\frac{1}{2}} dx$$

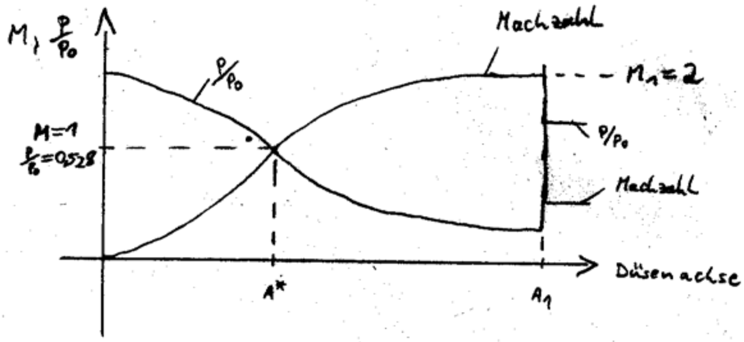
$$= \frac{\eta K u_\infty^2 (1-K)}{\sqrt{\frac{2\eta(1-K)}{C_1 S u_\infty}}} \int_0^L x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= K u_\infty^2 \sqrt{\frac{\eta(1-K) C_1 S u_\infty}{2}} \, 2\sqrt{L}$$

$$= K u_\infty^2 \cdot \sqrt{2\eta(1-K) C_1 S u_\infty L}$$

8. Aufg.) (

a)



b) aus Konti $\quad \rho u A = \text{const} \Rightarrow \rho_1 u_1 A_1 = \rho^* u^* A^*$

$$\Rightarrow \frac{\rho_1 u_1}{\rho^* u^*} = \frac{A^*}{A_1} = 0{,}592$$

c) mit Prandtl-Beziehung

$$u_1 \cdot u_2 = c^{*2} \Rightarrow u_1 = u_2 M_1^{*2} \qquad M_1^{*2} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+\frac{2}{M_1^2}} = 2{,}6\overline{6}$$

$$\Rightarrow u_1 = 267\,\frac{m}{s}$$

d)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \overset{\text{Konti}}{=} \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{c^{*2}} = M_1^{*2} = \frac{\gamma+1}{(\gamma-1)+\frac{2}{M_1^2}}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \quad \text{für } M_1 \to \infty$$

$$\text{IES:} \quad \rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = p_1 - p_2 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{\rho_1}{p_1} u_1^2 - \frac{\rho_2}{p_1} u_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 1 + \gamma \cdot \frac{\rho_1 u_1^2}{\gamma p_1} - \gamma \frac{\rho_1 u_1^2}{\gamma p_1} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{u_2^2}{u_1^2} \qquad \Big| \text{mit } \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} \text{ s.o.}$$

$$\Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 1 + \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 - 1\right)$$

$$\frac{p_2}{p_1} \to \infty \quad \text{für } M_1 \to \infty$$