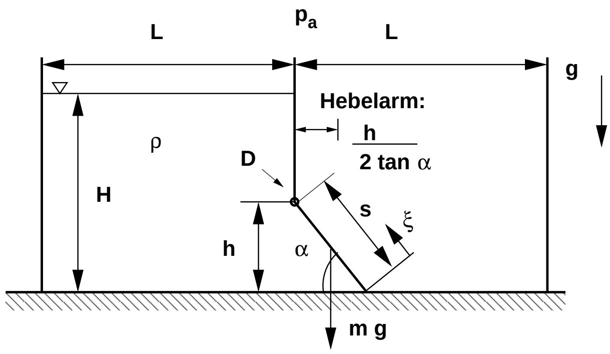
Musterlösung Klausur Strömungslehre SS05

1. Aufgabe

a) $M_{Platte} = m \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot h \, \frac{1}{2 \cdot \sin\alpha}$



$p(z) = p_a + \rho \cdot g(H - z)$

$\xi \; \sin\alpha = z \Leftrightarrow \xi = \frac{z}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow p(\xi) = p_a + \; \rho \, g \, (H - \xi \sin\alpha)$

$M_{Wasser} = \int\limits_0^s [p(\xi) - p_a] \; T \; (s - \xi) \; d\xi$ mit $s = \frac{h}{\sin\alpha}$

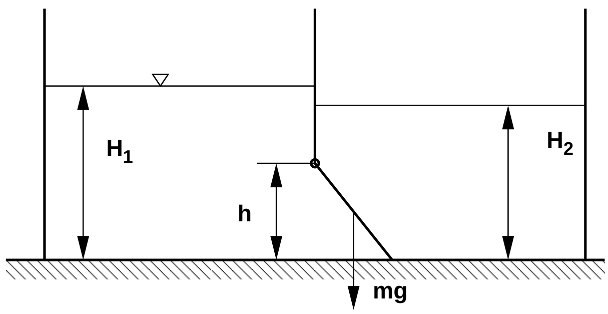
einsetzen von $p(\xi)$ und Koordinatentransformation:

$M_{Wasser} = \int\limits_0^h \; T \; \rho \, g \, (H - z)(h - z) \frac{1}{\sin^2\alpha} \; dz = T \; \rho \; g \; \frac{1}{\sin^2\alpha} \left[\frac{H \; h^2}{2} - \frac{h^3}{6} \right]$

Momentengleichgewicht um 'D': $\sum M_D = M_{Platte} - M_{Wasser} \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow H = \left(\frac{m}{T \; \rho \; h^2} \; \sin\alpha \; \cos\alpha + \frac{1}{3} \right) \cdot h$

b) $\sum M_D = m \cdot g \cdot h \, \frac{\cos\alpha}{2 \sin\alpha} - T \cdot \int\limits_0^s \Delta p(\xi)(s - \xi) \; d\xi \stackrel{!}{=} 0$



$\Delta p(\xi) = \rho \, g \, (H_1 - \xi \sin\alpha) - \rho \, g \, (H_2 - \xi \sin\alpha) = \rho \, g \, (H_1 - H_2) = konst.$

$2 \, H \, L \, T = H_1 \, L \, T + H_2 \, L \, T \Rightarrow H_1 = (2 \, H - H_2)$

$\Rightarrow \Delta p(\xi) = \rho \, g \; \; [(2 \, H - H_2) - H_2] = 2\rho \, g \; (H - H_2)$

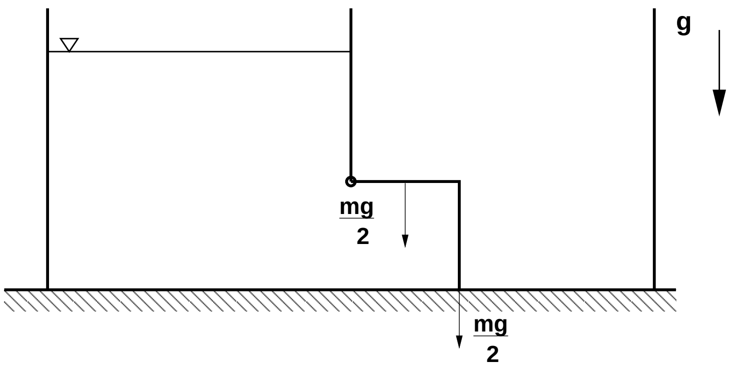
in Momentengleichgewicht einsetzen und Koordinatentransf. mit $\xi = \frac{z}{\sin\alpha}, \; s = \frac{h}{\sin\alpha}$

$\Rightarrow m \cdot g \cdot h \, \frac{\cos\alpha}{2 \cdot \sin\alpha} = T \cdot \int\limits_0^s 2\rho \, g \; (H - H_2) \, \frac{(h-z)}{\sin\alpha} d\xi$

$\Leftrightarrow H_2 = H - \frac{m}{2 \, T \rho h} \sin\alpha \; \cos\alpha$

c) Moment der Gewichtskraft der Klappe um 'D':

$M_{Klappe} = g(\frac{m}{2} \cdot \frac{h}{2} + \frac{m}{2} \cdot h) = \frac{3}{4}\, m \cdot h \cdot g$



Moment der Druckkraft auf den waagerechten Teil der Klappe um 'D':

$M_{horiz} = \Delta p_{horiz}\, Th\frac{h}{2} = \frac{1}{2}\rho g(H-h)Th^2$

Moment der Druckkraft auf den vertikalen Teil der Klappe um 'D':

$$M_{vert} = \int_0^h \Delta p_{vert}(z)(h-z)\, T\, dz = \rho\, g\, T \int_0^h (H-z)(h-z)\, dz = \rho\, g\, T(H - \frac{h}{3})\frac{h^2}{2}$$

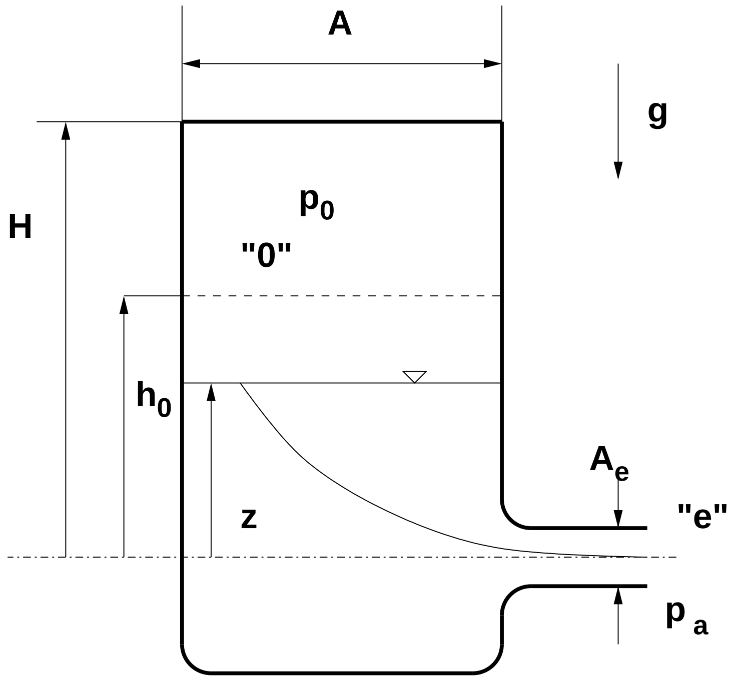
Summe der Momente um 'D':

$\frac{3}{4}\, m \cdot h \cdot g - \rho\, g\, T(H - \frac{h}{3})\frac{h^2}{2} - \frac{1}{2}\, \rho g(H-h)Th^2 \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow H = (\frac{3}{4}\frac{m}{\rho\, T\, h^2} + \frac{2}{3}) \cdot h$

2. Aufgabe

a)



Konti: $v_0 \cdot A = v_e A_e$

Die Masse der eingeschlossenen L ist konstant: $m_L = \rho_0\, A\, (H - h_0) = konst.$

ideales Gas: $p_L = \rho_L\, R\, T_0$

mit isothermer Zustandsänderung: $R\, T_0 = konst.$

$\Rightarrow \rho_L = \frac{m_L}{V(z)} = \frac{m_L}{A(H-z)}$

$\Rightarrow p_L(z) = \rho(z)\, R\, T_0 = \frac{\rho_0\ R\ T_0\ A(H-h_0)}{A(H-z)} = p_0\ \frac{H-h_0}{H-z}$

$\Rightarrow v_e^2 - v_0^2 = \frac{2}{\rho}\left(p_0\ \frac{H-h_0}{H-z} + \rho g z - p_a\right)$

$\Rightarrow v_e^2\left(1 - (\frac{A_e}{A})^2\right) = \frac{2}{\rho}\left(p_0\ \frac{H-h_0}{H-z} + \rho g z - p_a\right)$

Bernoulli Oberfläche - Austritt

$p(z) + \rho\ g\ z + \frac{1}{2}\ \rho v_0^2 = p_a + \frac{1}{2}\ \rho v_e^2$

$v_e(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-(\frac{A_e}{A})^2)}}\sqrt{\frac{2}{\rho}\left(p_0\ \frac{H-h_0}{H-z} + \rho g z - p_a\right)}$

b) Stillstand für $v_e = 0 \Rightarrow p_0\ \frac{H-h_0}{H-h_1} + \rho g h_1 - p_a \stackrel{!}{=} 0$

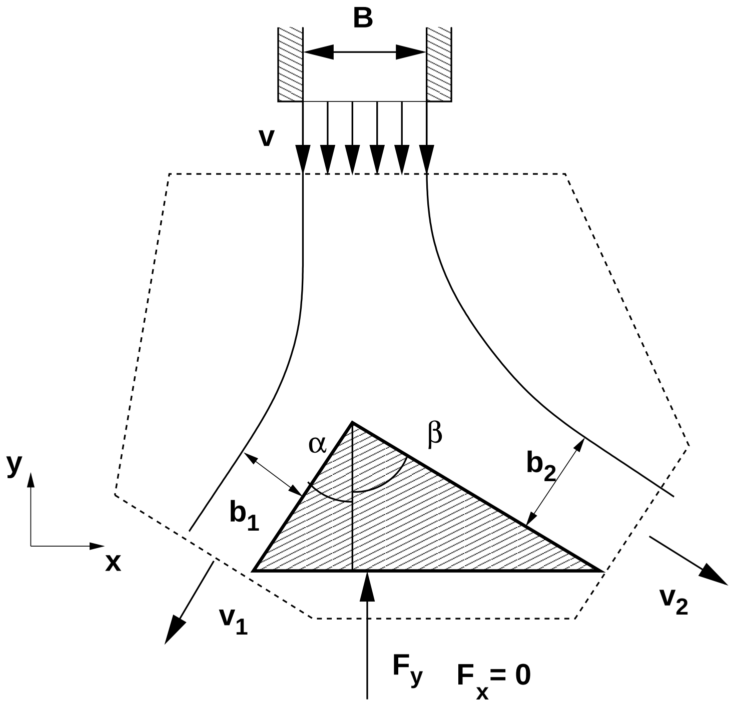
$\Rightarrow {h_1}^2 - \frac{p_a+\rho g H}{\rho g} \cdot h_1 - \frac{p_0(H-h_0)-p_a H}{\rho g} = 0$

$\Rightarrow h_{1,2} = \frac{p_a+\rho g H}{2\ \rho g} \pm \sqrt{(\frac{p_a+\rho g H}{2\ \rho g})^2 + \frac{p_0(H-h_0)-p_a\ H}{\rho g}} = 8\ m \pm \sqrt{(8\ m)^2 + (-20\ m^2)}$

einzig physikalisch sinnvolle Lösung: $h_1 = 8\ m - \sqrt{44\ m^2} \approx 1.37\ m$, da $h_2 = 8\ m + \sqrt{44\ m^2} \approx 14.63\ m > H$

3. Aufgabe

a) Bernoulli: $p_a + \frac{\varrho}{2}v^2 = p_a + \frac{\varrho}{2}{v_1}^2 = p_a + \frac{\varrho}{2}{v_2}^2 \Rightarrow v_1 = v_2 = v$



Konti: $v \cdot B = v_1 \cdot b_1 + v_2 \cdot b_2 \Leftrightarrow B = b_1 + b_2$

x-Impuls: $-\rho v b_1 h \cdot v \sin\alpha + \rho v b_2 h \cdot v \sin\beta = 0 \Rightarrow b_1 = b_2 \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

Einsetzen in Konti

$\Rightarrow b_2 = B \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta}$

$b_1 = B - b_2 = B \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$

b) y-Impuls: $\rho v B h v - \rho v b_1 h \cdot v \cos\alpha - \rho v b_2 h \cdot v \cos\beta = F_y$

$F_y = \rho h v^2 \left(B - b_1 \cos\alpha - b_2 \cos\beta\right) = \rho B h v^2 \left(\frac{\sin\alpha - \sin\beta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}\right)$

4. Aufgabe / nicht in TSL

a) $\dot{V} = z_1 \, v_1 \, B$

Energiegleichung ($\widehat{=}$ Bernoulli) Beckenoberfläche $\rightarrow$ Abwasserkanaloberfläche:

$H = \frac{v_1^2}{2g} + z_1$

$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(H - z_1)}$

$\Rightarrow \dot{V} = \sqrt{2g(H - z_1)} \cdot z_1 \, B = 0.493 \frac{m^3}{s}$

b) Wenn $y_W < y_{gr}$ ist keine zusätzliche Energie erforderlich.

$H = H_{min} + y_{gr} = \frac{3}{2} z_{gr} + y_{gr}$

mit $v_{gr} = \sqrt{z_{gr} g}$ und $\dot{V} = z_{gr} v_{gr} B = z_{gr} \sqrt{z_{gr} g} B \Rightarrow z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}}$

$y_{gr} = H - \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}} = 0.028 \text{ m} < y_W = 0.25 \text{ m}$

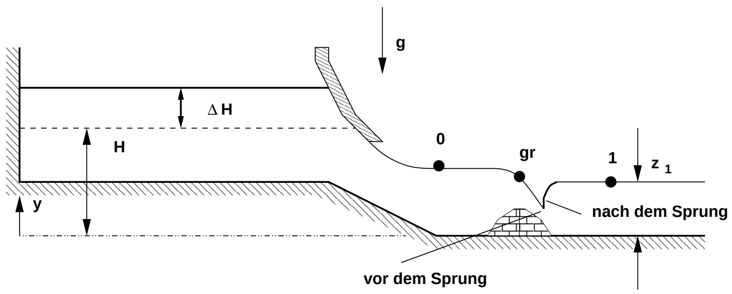
$\Rightarrow$ Aufstau des Wassers vor der Versperrung, auf dem Wehr stellt sich der Grenzzustand ein.

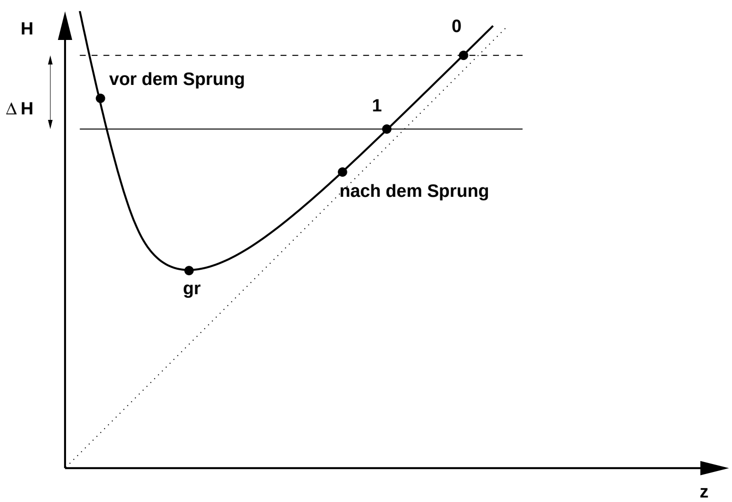
$H + \Delta H = \frac{v_{gr}^2}{2g} + z_{gr} + y_W$

$\Rightarrow H + \Delta H = \frac{3}{2} z_{gr} + y_W$

$\Rightarrow \Delta H = y_W - H + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}} = 0.222\text{m}$

c)



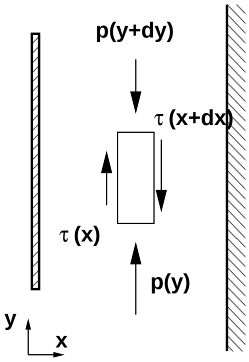


5. Aufgabe SL / 4. Aufgabe TSL

a) Kräftegleichgewicht am infinitesimalen Element:

$$-\rho g\ dxdydz + \tau\ dydz - \left(\tau + \frac{\partial\tau}{\partial x}dx\right)\ dydz + p(y)\ dxdz - \left(p(y) + \frac{\partial p}{\partial y}dy\right)\ dxdz\ =\ 0$$

$$\Rightarrow -\rho g - \frac{\partial\tau}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$



1. Integration $\Rightarrow \tau(x) = -\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right) x + C_1$

Newtonsches Fluid, ausgebildete Strömung $\tau = -\eta\frac{dv}{dx}$

2. Integration $\Rightarrow v(x) = -\frac{1}{\eta}\int \tau dx = \frac{1}{\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{x^2}{2} - \frac{C_1 x}{\eta} + C_2$

Randbedingungen: $v(x=0) = -v_P,\ v(x=B) = 0$

$v(x=0) = -v_P \Rightarrow C_2 = -v_P$

$v(x=B) = \frac{1}{\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\frac{B^2}{2} - \frac{C_1 B}{\eta} - v_P = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right) B - \frac{v_P\eta}{B}$

einsetzen liefert $v(x) = \frac{B^2}{2\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\left(\frac{x}{B}\right)^2 - \frac{x}{B}\right) + v_P\left(\frac{x}{B} - 1\right)$

b) Konti: $\dot m = \rho\int\limits_0^B v\ dx = B\rho\int\limits_0^1 v\ d(\frac{x}{B}) \overset{!}{=} 0$

$$\rho B\left[\frac{B^2}{2\eta}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{3}\left(\frac{x}{B}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{B}\right)^2\right) + v_P B\left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{B}\right)^2 - \frac{x}{B}\right)\right]_0^1 \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{6 v_P\eta}{B^2} - \rho g$$

c) Kraft auf die Platte $F_R = 2\cdot\int\limits_0^L T\ \tau_W\ dy$

$\tau_W = -\tau(x=0) = -\frac{1}{2}\left(\rho g + \frac{\partial p}{\partial y}\right) B + \frac{v_P\eta}{B}$

mit $\frac{\partial p}{\partial y}$ aus b) $\Rightarrow \tau_W = \frac{4\eta v_P}{B} \neq f(y)$

$\Rightarrow F_R = 8\eta v_P LT/B$

6. Aufgabe / 5. Aufgabe in TSL

a) $n', \nu_1', \nu_2' = ?$

$Fr = Fr', Re = Re'$ mit $u = \omega\, R = 2\pi n\, R$

$Fr = \frac{u}{\sqrt{gR}} = \frac{2\pi n\; R}{\sqrt{gR}} = \frac{2\pi n'\; R'}{\sqrt{gR'}} \Rightarrow n' = n \cdot \sqrt{\frac{R}{R'}} = \sqrt{3}\, n$

$Re = \frac{u \cdot R}{\nu_1} = \frac{2\pi n R \cdot R}{\nu_1} = \frac{2\pi n' R'^2}{\nu_1'}$

$\Rightarrow \nu_1' = \nu_1 (\frac{R'}{R})^2\, \frac{n'}{n} = \nu_1 (\frac{R'}{R})^{\frac{3}{2}} = 0.19 \cdot \nu_1$

und wegen $\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{\nu_1'}{\nu_2'} \Rightarrow \nu_2' = 0.19 \cdot \nu_2$

b) $c_M = c_M' \Rightarrow M = c_M \cdot \frac{1}{2}\rho_1 u^2 R \cdot \pi R^2$

$\Rightarrow \frac{M}{M'} = \frac{\rho_1 (R\; n)^2 R^3}{\rho_1' (R' n')^2 R'^3} = (\frac{R}{R'})^4 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1'}$

$\Rightarrow M = 81\, \frac{\rho_1}{\rho_1'} M'$

c) $P = M \cdot \omega = M\; 2\pi\; n = 508.94 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1'}\; n\; M'$

7. Aufgabe SL / 6. Aufgabe TSL

a) $\frac{u(x,y)}{U(x)} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$ mit $U(x) = u_\infty = konst.$

Randbedingungen:

(a) $y = 0: \; u(x,y) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$ (Haftbedingung)

(b) $y = 0: \; 0 = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Rightarrow 2 \cdot a_2 = 0$ (Wandbindungsgleichung)

(c) $y = \delta: \; u(x,y) = u_\infty \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 1$ (Grenzschichtrand)

(d) $y = \delta: \; \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow a_1 + 3 \cdot a_3 = 0$ (glatter Übergang)

aus (b) $\Rightarrow a_2 = 0$

aus (c)+(d) $\Rightarrow a_1 = \frac{3}{2}, \; a_3 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{u(x,y)}{u_\infty} = \frac{3}{2}(\frac{y}{\delta}) - \frac{1}{2}(\frac{y}{\delta})^3$

b) $\tau_W = ?$

Newton: $\tau = -\eta \frac{du}{dy} = -\eta u_\infty \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\delta} - \frac{3}{2} \cdot \frac{y^2}{\delta^3}\right)$

$\tau_W = -\tau(y=0) \Rightarrow \tau_W(x) = \frac{3}{2} \frac{\eta}{\delta(x)} u_\infty$

c) aus Hinweis: von Kármánsche Integralbeziehung: $\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) = \frac{\tau_W}{\rho U^2}$

$U(x) = u_\infty = konst. \Rightarrow \frac{dU}{dx} = 0$, also: $\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_W}{\rho u_\infty^2}$

$$\delta_2 = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) \frac{u}{u_\infty} d(\tfrac{y}{\delta}) = \delta \int_0^1 \tfrac{3}{2}(\tfrac{y}{\delta}) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{y}{\delta})^3 - \left[\tfrac{3}{2}(\tfrac{y}{\delta}) - \tfrac{1}{2}(\tfrac{y}{\delta})^3\right]^2 d(\tfrac{y}{\delta}) = \frac{39}{280}\,\delta(x)$$

$\Rightarrow \frac{d\delta_2}{dx} = \frac{39}{280}\,\frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{\tau_W}{\rho u_\infty^2} = \frac{3}{2}\frac{\eta}{\delta(x)\rho u_\infty}$

$\delta \; d\delta = \frac{140}{13}\,\frac{\eta}{\rho u_\infty}\,dx$

Integration: $\frac{1}{2}\,\delta^2 = \frac{140}{13}\,\frac{\eta}{\rho u_\infty} \cdot x$

$\Leftrightarrow \delta(x) = \sqrt{\frac{280}{13}}\,\sqrt{\frac{\eta}{\rho u_\infty}}\sqrt{x} = \frac{4{,}64}{\sqrt{Re}} \cdot x$

d) Haftreibung bis zum Einsetzen der Bewegung:

$F_{max} = \mu \cdot m \cdot g = F_{Strömung} = \int_0^L \tau_W(x) \cdot T\,dx$

$\tau_W(x) = \sqrt{\frac{117}{560}}\frac{\sqrt{\eta\rho u_\infty^3}}{\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; \mu \cdot m \cdot g = \left[\sqrt{\frac{117}{560}}\sqrt{\eta\rho u_\infty^3}2 \cdot T\sqrt{x}\right]_0^L$

$\Rightarrow u_\infty = \sqrt[3]{\frac{140}{117}\,\frac{(\mu\;m\;g)^2}{\eta\;\rho\;T^2\;L}} \qquad \left(= 1.06 \cdot \sqrt[3]{\frac{(\mu\;m\;g)^2}{\eta\;\rho\;T^2\;L}}\right)$

8. Aufgabe SL / 7. Aufgabe TSL

a) $M(z) = \frac{v}{c(z)} = \frac{v}{\sqrt{\gamma R(T_0 - k \cdot z)}}$

b) $c(z) = \sqrt{\gamma R(T_0 - k \cdot z)} = \frac{dz}{dt}$

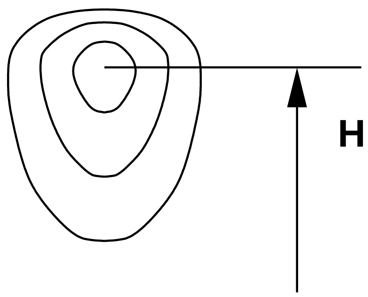
Trennung der Variablen liefert: $dt = \frac{dz}{\sqrt{\gamma R(T_0 - k \cdot z)}}$

Integrieren: $\Delta t_{Schall} = \left[-\frac{2}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma R}} \sqrt{T_0 - k \cdot z} \right]_0^H = 2 \cdot \frac{\left(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_0 - k \cdot H}\right)}{k\sqrt{\gamma R}}$

Annäherungsgeschwindigkeit: $v_{Meteorit} = v \cdot \sin\alpha = konst. = \frac{dz}{dt} \Rightarrow \Delta t_{Meteorit} = \frac{H}{v \cdot \sin\alpha}$

$\Delta t = \Delta t_{Schall} - \Delta t_{Meteorit} = \frac{2}{k\sqrt{\gamma R}} \left(\sqrt{T_0} - \sqrt{T_0 - k \cdot H}\right) - \frac{H}{v \cdot \sin\alpha}$

c) Die Schallausbreitung nach unten erfolgt schneller, da $c(z) = \sqrt{\gamma R(T_0 - kz)}$ mit der Höhe z abnimmt!



d) Verzerrung der Bereiche aufgrund der Höhenabhängigkeit der Schallgeschwindigkeit

$\sin\alpha = \frac{c}{v}$