....

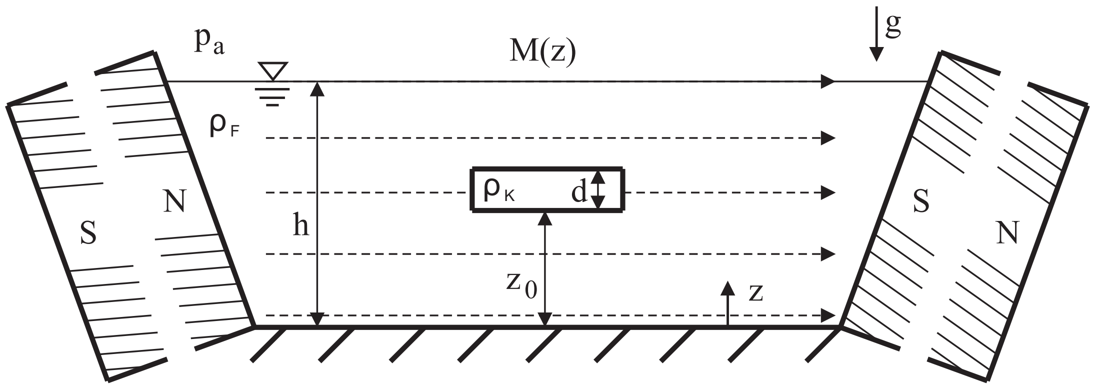
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungslehre“ (Diplom)

05. 08. 2011

1. Aufgabe (10 Punkte)

Zwischen den Polschuhen zweier Magnete befindet sich eine magnetisierbare Flüssigkeit der Dichte ρ_F. In der Höhe z_0 ruht eine magnetisch neutrale Platte (Dicke d) mit der Dichte ρ_K. Auf der Oberfläche der Flüssigkeit wirkt der Außendruck p_a.



Aufgrund des eindimensionalen Magnetfeldes M gilt für die Druckänderung in der Flüssigkeit folgende Gesetzmässigkeit:

$$\frac{dp}{dz} = K\frac{dM}{dz} - \rho_F g$$

Bei den skizzierten Polschuhen ist der Gradient $\frac{dM}{dz}$ konstant.

a) Berechnen Sie den Druckverlauf $p(z, \frac{dM}{dz})$.

b) Wie groß muss der Gradient $\frac{dM}{dz}$ eingestellt werden, damit die Platte schwebt?

Im Folgendem ist der Gradient $\frac{dM}{dz}$ nicht konstant.

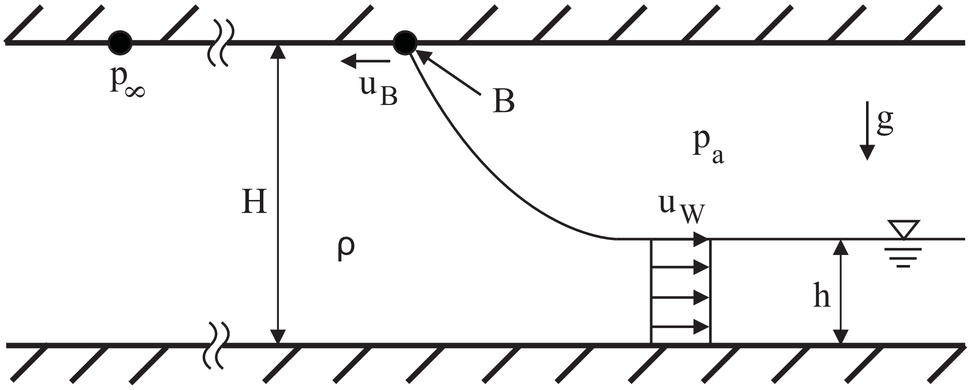
c) Bei der Verwendung anderer Polschuhe wird das Magnetfeld durch $M(z) = \alpha(\frac{h}{2} - z)^2$ beschrieben. Berechnen Sie die sich einstellende Höhe z_0.

Gegeben:

$g, \quad \rho_F, \quad \rho_K, \quad K > 0, \quad \alpha > 0, \quad h, \quad d, \quad p_a$

2. Aufgabe (11 Punkte)

Ein langer ebener Kanal der Höhe H ist zunächst allseitig geschlossen und mit Wasser (Dichte ρ) gefüllt. Die rechte Seitenwand wird plötzlich geöffnet, so dass sich eine Luftblase mit konstanter Geschwindigkeit u_B (Geschwindigkeit am Punkt 'B' gilt innerhalb des Wassers und der Luft) in den Kanal hinein bewegt und das Wasser unter der Blase in einiger Entfernung von Punkt 'B' mit konstanter, nicht bekannter Geschwindigkeit u_W reibungsfrei strömt.



a) Berechnen Sie, anhand einer mitbewegten Kontrollfläche, den statischen Druck p_∞ am oberen Kanalrand in großer Entfernung von Punkt B als Funktion von u_B.

b) Berechnen Sie die Höhe h der auströmenden Wasserschicht.

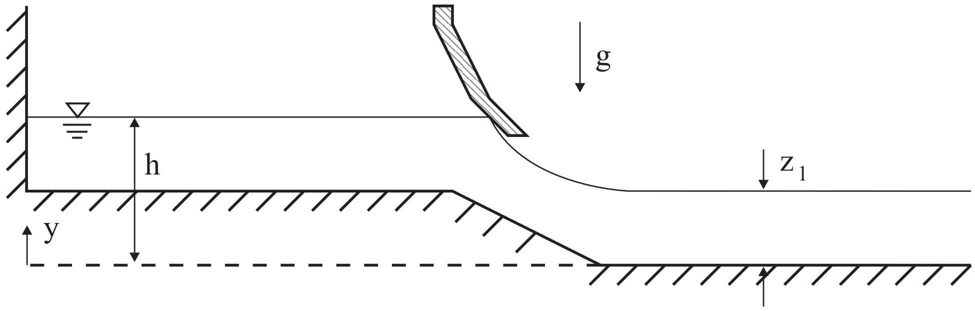
Gegeben:

$H, \quad p_a, \quad \rho, \quad u_B$

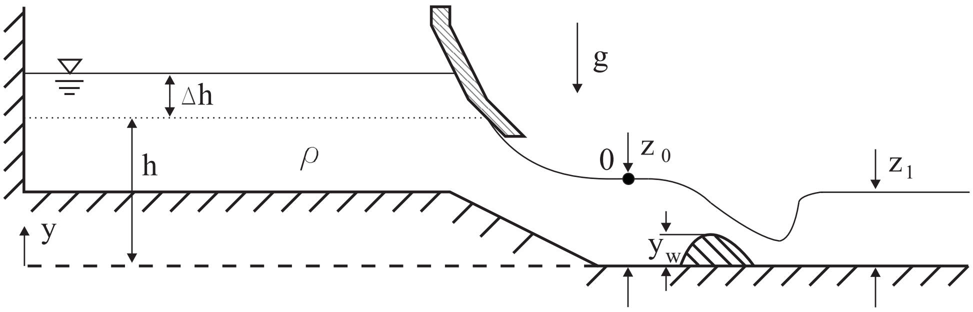
3. Aufgabe (11 Punkte)

Aus einem großen Becken strömt Wasser in einen offenen Abwasserkanal der Breite B und der Wassertiefe z_1.

a) Bestimmen Sie den Volumenstrom $\dot{V}$.



b) Durch Verschmutzung bildet sich im Abwasserkanal ein Hindernis in Form eines Wehres (Höhe y_W) durch das sich der abgebildete Strömungszustand einstellt. Wie groß muss der Anstieg des Wasserspiegels Δh im großen Behälter sein, damit derselbe Volumenstrom mit derselben Geschwindigkeit transportiert wird?



c) Bestimmen Sie die horizontale Kraft F_W auf das Wehr.

d) Skizzieren Sie ein Energiehöhendiagramm und tragen Sie qualitativ die Zustandsänderungen ab Punkt '0' für Teil b) ein.

Gegeben:

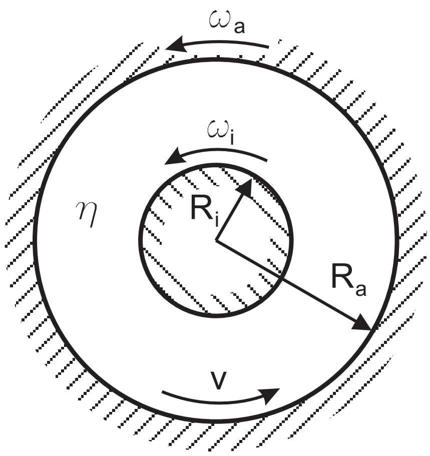
$h, \quad z_1, \quad B, \quad y_W, \quad z_0, \quad \rho, \quad g$

Hinweis:

- Die Ergebnisse einer Teilaufgabe dürfen in den folgenden Teilaufgaben als bekannt voraus gesetzt werden.

4. Aufgabe (13 Punkte)

Eine Flüssigkeitspumpe besteht aus einem antreibenden Vollzylinder mit dem Radius R_i, der sich in einem Hohlzylinder mit dem Radius R_a dreht. Beide Zylinder besitzen die Länge L. In dem Spalt befindet sich ein zähes Fluid der Viskosität η. Der innere Zylinder dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_i, an dem Äußeren wird das Drehmoment M_a bei der Winkelgeschwindigkeit ω_a abgenommen.



a) Zeigen Sie mit Hilfe eines Momentengleichgewichtes für ein Zylinderelement die Gültigkeit von:

$$\frac{\partial(r^2\tau)}{\partial r} = 0$$

b) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Hinweise die Geschwindigkeitsverteilung $v(r, \omega_a)$ als Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω_a.

c) Bestimmen Sie das maximale übertragbare Drehmoment und die zugehörige Winkelgeschwindigkeit ω_a.

d) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω_a, bei der die zu übertragende Leistung maximal wird.

Gegeben:

$R_i, \quad R_a, \quad \omega_i, \quad L, \quad \eta, \quad 0 \leq \omega_a \leq \omega_i$

Hinweis:

- Terme höherer Ordnung sind zu vernachlässigen.
- Die Strömung in dem Spalt sei stationär und ausgebildet.
- Es gilt:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d(r^2\tau)}{dr} = -\eta\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr}\right)$$

$$\tau = -\eta r\frac{d(\frac{v}{r})}{dr}$$

5. Aufgabe (8 Punkte)

Die laminare Grenzschichtströmung über einer längsangeströmten ebenen Platte lässt sich unter Vernachlässigung der Reibungswärme durch die Kontinuitäts-, die Impuls- und die Energiegleichung in der folgenden Form beschreiben:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

a) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung des Hinweises die Kennzahlen des Problems mit Hilfe der Methode der Differentialgleichungen.

b) Überführen Sie die erhaltenen Kennzahlen in bekannte Kennzahlen der Strömungsmechanik.

Unter der Annahme konstanter Stoffwerte ist das Strömungsfeld unabhängig vom Temperaturfeld, so dass beide Felder getrennt berechnet werden können.

c) Nennen Sie die Voraussetzung, für die die Temperaturverteilung in der Grenzschicht direkt aus der Geschwindigkeitsverteilung bestimmt werden kann. Beachten Sie den Hinweis.

Gegeben:

alle notwendigen Referenzgrößen

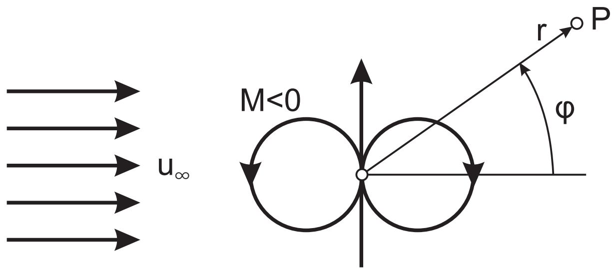
Hinweis für a):

- Es ist nicht notwendig, unterschiedliche Referenzgrößen für die unterschiedlichen Geschwindigkeiten und Koordinatenrichtungen zu wählen.

Hinweis für c):

- Vergleichen Sie die Differentialgleichungen und gehen Sie davon aus, dass die Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v}(x,\ y)$ bekannt ist.

6. Aufgabe (16 Punkte)



Gegeben sei ein Dipol, der mit seiner Achse normal zur Richtung einer Parallelströmung steht. Der Dipol mit Dipolmoment $M < 0$ sei im Ursprung eines Polarkoordinatensystems plaziert.

a) Die komplexe Potentialfunktion $F(z) = \frac{M}{2\pi z}$ beschreibt einen Dipol, dessen Achse in Strömungsrichtung ausgerichtet ist. Wie muss die komplexe Potentialfunktion verändert werden, damit die Dipolachse um $90°$ im mathematisch positiven Drehsinn rotiert wird? Geben Sie die komplexe Potentialfunktion an, die das obige Strömungsfeld beschreibt.

Unter Beachtung der Hinweise:

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponenten $u(r, \varphi)$ und $v(r, \varphi)$ in Abhängigkeit von M für $u_\infty = 1$.

c) Geben Sie alle Orte an, für die $v(r, \varphi) = 0$ gilt.

d) Bestimmen Sie die Dipolstärke M so, dass alle Staupunkte auf einem Kreis mit Radius $R = 1$ liegen und geben Sie die Staupunkte explizit an. Ersetzen Sie für die folgenden Teilaufgaben die Dipolstärke M durch den berechneten Wert.

e) Geben Sie die Gleichungen für die Staupunktstromlinien in der Form $r = f(\varphi)$ an.

f) Berechnen Sie für die obere Staupunktstromlinie die Asymptote $\lim\limits_{r\to\infty} y(r, \varphi)$.

g) Zeichnen Sie unter Angabe der Staupunktstromlinien und der Staupunkte das Stromlinienbild im Nah- und Fernbereich. Arbeiten Sie die Ergebnisse der anderen Teilaufgaben sowie die Strömungsrichtung jeweils deutlich heraus.

Gegeben:

$u_\infty = 1,\ R = 1$

Winkeltabelle:

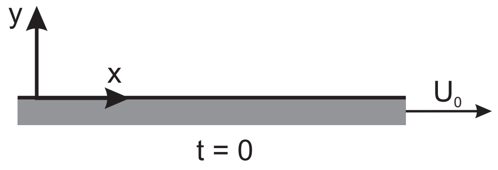
φ	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\sin\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0
$\cos\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

Hinweise:

- $z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- Falls Sie Aufgabenteil a) nicht lösen konnten, rechnen Sie in den folgenden Aufgabenteilen mit der komplexen Potentialfunktion $F(z) = \left(\frac{1}{i}\right)\left(iu_\infty z - \frac{M}{2\pi z}\right)$.

7. Aufgabe (8 Punkte)

Bei dem sogenannten Rayleigh-Stokes-Problem handelt es sich um eine unendlich ausgedehnte ebene Platte, die zum Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich aus dem Stillstand mit der Geschwindigkeit U_0 in Bewegung gesetzt wird. Da die Platte unendlich ausgedehnt ist, stellt sich sofort ein in x-Richtung ausgebildetes Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht zwischen der ruhenden Außenströmung und der Platte ein. Der Druck in der ruhenden Außenströmung entlang der Platte ist konstant.



a) Skizzieren Sie für einen Zeitpunkt $t > 0$ das Geschwindigkeitsprofil das sich im Fluid über der Platte einstellt.

b) Vereinfachen Sie für dieses Problem die Navier-Stokes-Gleichungen (siehe Hinweis). Das Fluid ist inkompressibel und besitzt eine konstante Viskosität.

c) Geben Sie geeignete Anfangsbedingungen ($t = 0$) und Randbedingungen ($t > 0$) für die aus Ihrer Vereinfachung in b) resultierenden Gleichungen an.

Durch Einführen der dimensionslosen Ähnlichkeitsvariable $\xi = \dfrac{y}{2\sqrt{\nu t}}$ kann die vereinfachte Gleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung der Form $\zeta'' + 2\xi\zeta' = 0$ überführt werden mit $\zeta = u/U_0$. Die Lösung der Differentialgleichung ergibt:

$$\frac{u}{U_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-k^2}\, dk.$$

d) Skizzieren Sie qualitativ das Geschwindigkeitsprofil für einen Zeitpunkt $t = t_1 > 0$, $\xi = f(u/U_0)$. Wie verhalten sich die Profile für unterschiedliche Zeitpunkte $t > 0$ bezüglich der skizzierten Geschwindigkeitsverteilung?

Gegeben: U_0

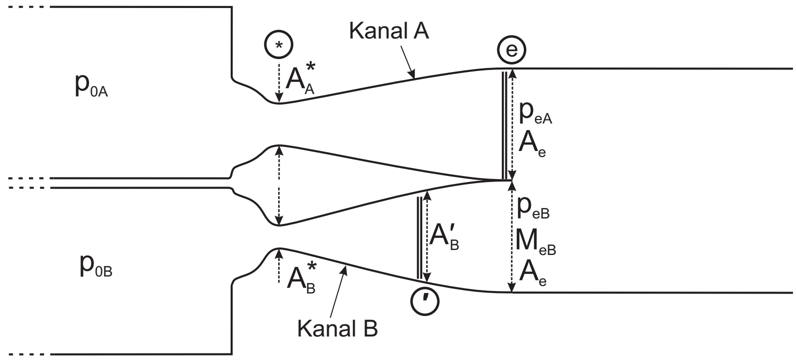
Hinweise:

- Beschleunigungsvorgänge der Platte können vernachlässigt werden, d.h. es kann angenommen werden, dass sich die Platte sofort mit der angegebenen Geschwindigkeit bewegt.

- Die Navier-Stokes-Gleichungen lauten für eine instationäre ebene und inkompressible Strömung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \\
\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}$$

8. Aufgabe (13 Punkte)



Um die Interaktion zweier Überschallströmungen zu untersuchen, werden zwei Überschallwindkanäle A und B wie in der Skizze gezeigt parallel betrieben. Ab dem Punkt e werden die zwei getrennten Kanäle zu einem Kanal vereinigt. Im Betrieb stellt sich durch einen Fehler in Kanal A im Querschnitt A_e direkt vor der Vereinigung der Kanäle sowie in Kanal B weiter stromauf im Querschnitt A'_B ein senkrechter Verdichtungsstoß ein.

a) Leiten Sie das Verhältnis $\frac{T_0}{T}$ in Abhängigkeit von der Machzahl her.

b) Berechnen Sie unter Berücksichtigung der gegebenen Größen und der Hinweise den statischen Druck p_{eA} im Querschnitt e hinter dem Stoß in Kanal A.

c) Was gilt für den statischen Druck p_{eB} im Querschnitt e in Kanal B, wenn sich die Strömung in diesem Querschnitt in beiden Kanälen im Unterschall befindet?

d) Bestimmen Sie den Kesseldruck p_{0B} im zu Kanal B gehörenden Druckbehälter.

e) Skizzieren Sie die Machzahlverläufe in beiden Kanälen bis zum Punkt e.

Gegeben:

$\gamma,\ p_{0A},\ A_A^*,\ A_B^*,\ A_e = 2A_A^*,\ A'_B = 4A_B^*,\ M_{eB}$

Hinweise:

- Die Ergebnisse einer Teilaufgabe dürfen in den nachfolgenden Teilaufgaben als bekannt vorausgesetzt werden.
- Verhältnis der stat. Drücke über den Stoß:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}$$

- Verhältnis der Ruhedrücke über den Stoß:

$$\frac{p_{02}}{p_{01}} = \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2}M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}\right)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$$

- Isentropenbeziehung: $\displaystyle \frac{T_a}{T_b} = \left(\frac{p_a}{p_b}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_a}{\rho_b}\right)^{\gamma-1}$

- $A^*/A = f(M)$: