....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

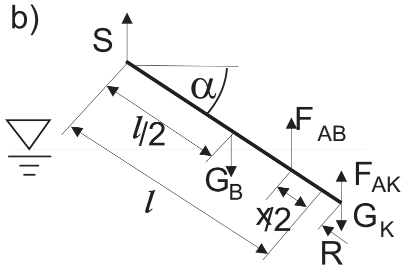
Klausur Strömungslehre

04. 08. 2006

1. Aufgabe

a) Kräfte am Balken:
$G_B = \varrho_B A l g$
$G_K = \frac{4}{3}\pi \varrho_K R^3 g$
$F_{AB} = x A \varrho_F g$
$F_{AK} = \frac{4}{3}\pi \varrho_F R^3 g$
Momentengleichgewicht um S ergibt:
$G_B \frac{l}{2} cos\alpha + G_K (l+R) cos\alpha - F_{AB}\left(l - \frac{x}{2}\right)\cos\alpha - F_{AK}(l+R)\cos\alpha = 0.$
Einsetzen der Kräfte liefert
$\varrho_B A l \frac{l}{2} cos\alpha g + \frac{4}{3}\pi \varrho_K R^3 (l+R) cos\alpha g - x A \varrho_F \left(l - \frac{x}{2}\right)\cos\alpha g - \frac{4}{3}\pi \varrho_F R^3 (l+R)\cos\alpha g = 0.$
$\Rightarrow \varrho_B A l \frac{l}{2} + \frac{4}{3}\pi R^3 (\varrho_K - \varrho_F)(l+R) - x A \varrho_F l + A \varrho_F \frac{x^2}{2} = 0$
$\Rightarrow x^2 - x 2l = -\left(\frac{\varrho_B A l^2 + \frac{8}{3}\pi R^3 (\varrho_K - \varrho_F)(l+R)}{A \varrho_F}\right)$
$\Rightarrow x = l \pm \sqrt{l^2 - \left(\frac{\varrho_B A l^2 + \frac{8}{3}\pi R^3 (\varrho_K - \varrho_F)(l+R)}{A \varrho_F}\right)}$ (nur neg. Vorzeichen sinnvoll)

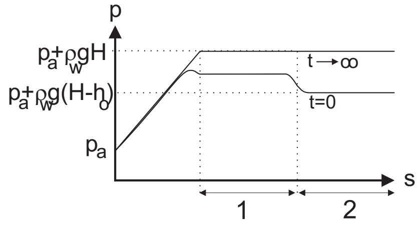
zu a), b)



b) Der Neigungswinkel α ergibt sich aus der Geometrie wie folgt:
$\sin\alpha = \frac{H}{l-x}$
Einsetzen von a) liefert
$\sin\alpha = \frac{H}{\sqrt{l^2 - \left(\frac{\varrho_B A l^2 + \frac{8}{3}\pi R^3 (\varrho_K - \varrho_F)(l+R)}{A \varrho_F}\right)}}$

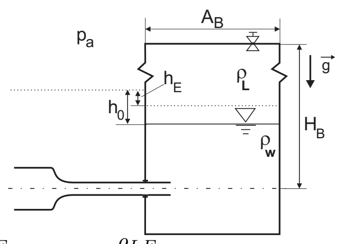
c) Gewichtskraft $G_K = \frac{4}{3}\pi \varrho_K R^3 g$
Auftriebskraft $F_A = \varrho_F g \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi (2R-h)^2 (R+h)\right)$
Gewichtskraft=Auftriebskraft
$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi \varrho_K R^3 g = \varrho_F g \left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi (2R-h)^2 (R+h)\right)$
$\frac{\varrho_K}{\varrho_F} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{1}{3}\pi (2R-h)^2 (R+h)}{\frac{4}{3}\pi R^3}$
$\frac{\varrho_K}{\varrho_F} = \frac{4R^3 - 4R^3 + 4R^2 h - R h^2 - 4R^2 h + 4R h^2 - h^3}{4R^3}$
$= \frac{3Rh^2 - h^3}{4R^3} = \frac{1}{4}\frac{h^2}{R^2}\left(3 - \frac{h}{R}\right)$

2. Aufgabe



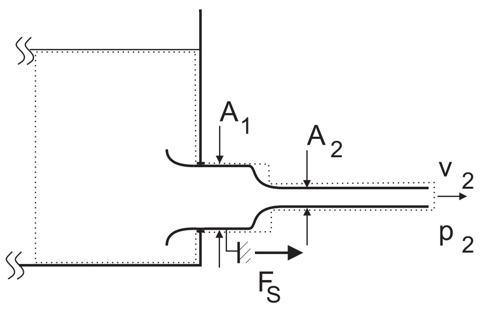
a) Bernoulli von $0-2$:
$p_a + \varrho_w g H = p_2 + \frac{\varrho_w}{2} v_2^2$
HGG:
$t = 0 : p_2 = p_a + \varrho_w g(H - h_0)$
$t \Rightarrow \infty : p_2 = p_a + \varrho_w g H$
Bernoulli von $1-2$:
$p_1 + \frac{\varrho_w}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\varrho_w}{2} v_2^2$
Konti:
$v_1 A_1 = v_2 A_2$

b) h_E für $t \Rightarrow \infty : v_2 = 0$
$p_a + \varrho_w g H = p_{LE} + \varrho_w g(H - h_E)$
Ventil geschlossen: Luftmasse im Behälter konst.
$\Rightarrow \quad \varrho_{L0}(H_B - H + h_0) = \varrho_{LE}(H_B - H + h_E)$

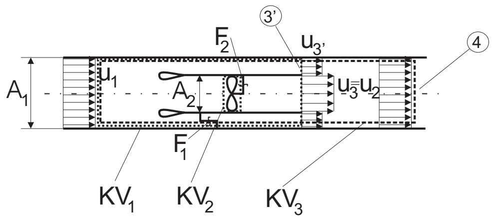


ideale Gasgleichung, T_L =const.$\Rightarrow \frac{p_a}{\varrho_{L0}} = \frac{p_{LE}}{\varrho_{LE}}; p_{LE} = \frac{\varrho_{LE}}{\varrho_{L0}} \cdot p_a$
einsetzen:
$p_a + \varrho_w g H = p_a \frac{H_B - H + h_0}{H_B - H + h_E} + \varrho_w g(H - h_E)$
$p_a h_E = p_a h_0 - \varrho_w g h_E (H_B - H + h_E) \Rightarrow h_E^2 + \left(\frac{p_a}{\varrho_w g} + H_B - H\right) h_E - \frac{p_a h_0}{\varrho_w g} = 0$
$h_E = -\frac{1}{2}\left(\frac{p_a}{\varrho_w g} + H_B - H\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{p_a}{\varrho_w g} + H_B - H\right)^2 + \frac{p_a h_0}{\varrho_w g}}$

c) $t = 0$; Bernoulli $0 \Rightarrow 2$:
$p_a + \varrho_w g H = p_a + \varrho_w g\left(H - h_0\right) + \frac{\varrho_w}{2} v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2 g h_0}$
Impulssatz (x-Richtung):
$\varrho_w v_2^2 A_2 = \left(p_a + \varrho_w g H\right) A_1 - \left(p_a + \varrho_w g (H - h_0)\right) A_2 - \left(A_1 - A_2\right) p_a + F_S$
$2 \varrho_w g h_0 A_2 = \varrho_w g H A_1 - \varrho_w g H A_2 + \varrho_w g h_0 A_2 + F_S$
$F_S = \varrho_w g \left[h_0 A_2 + H(A_2 - A_1)\right]$



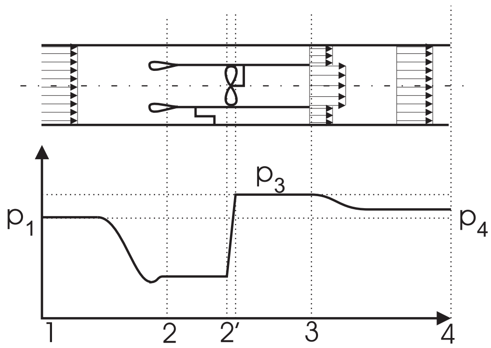
3. Aufgabe



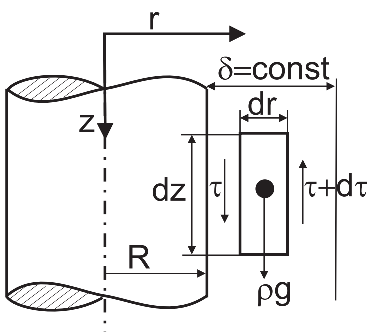
a) F_1:
Impuls KV 1: $u_2 = u_3$
$-\varrho u_1^2 A_1 + \varrho u_2^2 A_2 + \varrho u_{3'}^2 (A_1 - A_2) = (p_1 - p_3) A_1 + F_1$
Konti:
$-\varrho u_1 A_1 + \varrho u_2 A_2 + \varrho u_{3'} (A_1 - A_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{3'} = 10 \frac{m}{s}$
Bernoulli $1 - 3'$:
$p_1 + \frac{\varrho}{2} u_1^2 = p_3 + \frac{\varrho}{2} u_{3'}^2$
Einsetzen:
$F_1 = \varrho \left[-u_1^2 \frac{A_1}{2} + u_2^2 A_2 + \left(\frac{A_1}{2} - A_2 \right) u_{3'}^2 \right] = 312,5 N$ (Zug)
F_2:
Impuls KV 2:
$0 = (p_2 - p_3) A_2 + F_2$
Bernoulli $1 - 2$:
$p_1 + \frac{\varrho}{2} u_1^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2} u_2^2 = p_3 + \frac{\varrho}{2} u_{3'}^2$ mit $p_{3'} = p_3$
Einsetzen:
$F_2 = \frac{\varrho}{2} (u_2^2 - u_{3'}^2) A_2 = 250 N$ (Zug)

b) $P = F_2 u_2 = 7500 W$

c) Druck p_4 - Impuls KV 3: $0 = (p_1 - p_4) A_1 + F_1$
$p_4 = p_1 + \frac{F_1}{A_1} = 100312,5 N/m^2$



<u>4. Aufgabe</u>



a) Kräftegleichgewicht am infinitesimalen Element:
$\delta = konst. \quad \Rightarrow \quad dp = 0$
$\sum F = 0$
$\tau 2\pi r dz - (\tau + \frac{d\tau}{dr}dr)2\pi(r+dr)dz + \rho g 2\pi r dr dz = 0$
$-\tau dr dz - \frac{d\tau}{dr}dr r dz - \frac{d\tau}{dr}dr dr dz + \rho g r dr dz = 0$
$\frac{d\tau}{dr}dr dr dz \quad \Rightarrow \quad 0 \quad$ für $\quad dr << 1$
$\Rightarrow -\tau - r\frac{d\tau}{dr} + \rho g r = 0$
DGL:
$\frac{d(r\tau)}{dr} = \rho g r$
mit $\tau = -\eta\frac{du}{dr} \Rightarrow \frac{d}{dr}\left(r\frac{du}{dr}\right) + \frac{\rho g r}{\eta} = 0$

b) Randbedingungen:
(1) $r = R : u = -v$
(2) $r = R + \delta : \tau = -\eta\frac{du}{dr} = 0$
1. Integration:
$r\frac{du}{dr} + \frac{\rho g r^2}{2\eta} = C_1$
mit (2): $C_1 = \frac{\rho g (R+\delta)^2}{2\eta}$
$\frac{du}{dr} = -\frac{\rho g r}{2\eta} + \frac{\rho g (R+\delta)^2}{2\eta}\frac{1}{r}$
2. Integration:
$u(r) = \frac{\rho g}{2\eta}\left(-\frac{r^2}{2} + (R+\delta)^2 \ln r\right) + C_2$
mit (1):
$C_2 = -v + \frac{\rho g}{2\eta}\left(\frac{R^2}{2} - (R+\delta)^2 \ln R\right)$
$\Rightarrow u(r) = \frac{\rho g}{2\eta}\left((R+\delta)^2 \ln\frac{r}{R} + \frac{R^2-r^2}{2}\right) - v$

c) kein Transport:
$\dot{Q} = \int\limits_R^{R+\delta} u(r) 2\pi r dr = 0$
Lösungsweg:

- $\dot{Q} = 0$,
- $u(r)$ einsetzen und integrieren,
- nach v auflösen.

5. Aufgabe

a) lokale Beschleunigung, konvektive Beschleunigung, Druckänderung

b) $\nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}\right)^T$

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\,\vec{v} = \left(\; u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \; \right) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} uu_x + vu_y + wu_z \\ uv_x + vv_y + wv_z \\ uw_x + vw_y + ww_z \end{pmatrix}$$

c) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$

$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$

Rotationsfreiheit 2D:

$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

Eingesetzt:

$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$

$u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2+v^2}{2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$

$\frac{\partial}{\partial y}\frac{u^2+v^2}{2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$

$\frac{\partial \frac{\vec{v}^2}{2}}{\partial x}dx = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}dx$

$\frac{\partial \frac{\vec{v}^2}{2}}{\partial y}dy = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}dy$

$d\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = -\frac{1}{\rho}dp$

$p + \rho\frac{\vec{v}^2}{2} = \text{konst.}$

d) Ablesen:

$Re_{krit} = 4 \cdot 10^5$

Durchmesser:

$d = \text{Umfang}/\pi = 0.2196m$

$u = \frac{Re_{krit}\eta}{\rho d} = 24,92\frac{m}{s} = 89,70\frac{km}{h}$

6. Aufgabe

a) $F(z) = az^2 + \frac{E}{2\pi}\ln z = \Phi + i\Psi$
$\Phi(x,y) = ax^2 - ay^2 + \frac{E}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}$
$\Psi(x,y) = 2axy + \frac{E}{2\pi}\arctan\frac{y}{x}$

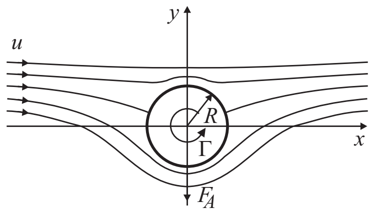
b) $u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 2ax + \frac{E}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$
$v = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = -2ay + \frac{E}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$
oder
$\Phi(r,\theta) = ar^2\cos 2\theta + \frac{E}{2\pi}\ln r$
$\Psi(r,\theta) = ar^2\sin 2\theta + \frac{E}{2\pi}\theta$
$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = 2ar\cos 2\theta + \frac{E}{2\pi r}$
$v_\theta = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -2ar\sin 2\theta$

c) Staupunkt $v_r = v_\theta = 0$
$v_\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, \ldots$
$v_r = 0 \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{E}{2\pi}\frac{1}{2ar^2} < 0$
allgemein gilt: $\cos x \leq 0 \Rightarrow$ für $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$
$\Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \theta_{st} = \frac{\pi}{2}$.
Es ist
$\cos\pi = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{E}{2\pi} = 2ar^2$
$\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{E}{4a\pi}} = 1$ (Einheitskreis)
$\Rightarrow \quad E = 4a\pi$

d) Konturstromlinie:
$ar_k^2\sin 2\theta_k + \frac{E}{2\pi}\theta_k = \Psi_{st}$
$\theta_{st} = \frac{\pi}{2}$ und $r_{st} = 1$
$\Rightarrow \Psi_{st} = \frac{E}{4}$
$\Rightarrow r_k^2 a\sin 2\theta_k = \frac{E}{4} - \frac{E}{2\pi}\theta_k$
$r_k = \sqrt{\frac{\pi - 2\theta}{\sin 2\theta}}$

e) $\frac{\partial\Phi}{\partial x} = u$
$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = v$
$\frac{\partial\Psi}{\partial x} = -v$
$\frac{\partial\Psi}{\partial y} = u$
$\nabla\Phi\cdot\nabla\Psi = uv - vu = 0$
Bedeutung:
Strom- und Potentiallinien stehen senkrecht aufeinander, da $\nabla\Phi\nabla\Psi = |\nabla\Phi||\nabla\Psi|\cos\angle(\nabla\Phi,\nabla\Psi)$
$\Rightarrow \cos\angle(\nabla\Phi,\nabla\Psi) = 0$ für $|\nabla\Phi|, |\nabla\Psi| \neq 0$

f) Magnuseffekt:
Durch die Zirkulation werden auf der Seite, auf der die Rotationsgeschw. in die gleiche Richtung wie die Anströmgeschwindigkeiten weist, höhere Geschwindigkeiten erzeugt als auf der anderen. Folglich entsteht eine Druckdifferenz. Der Ball erfährt eine resultierende Kraft, die zu einer Krümmung der Flugbahn führt.



7. Aufgabe

a) $\frac{u}{U} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + a_4 \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$
Randbedingungen:
1.)$\frac{u}{U} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 0$
2.)$\frac{u}{U} = 1$ für $\frac{y}{\delta} = 1$
3.)$\frac{\partial^2\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 0$
4.)$\frac{\partial\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 1$
5.)$\frac{\partial^2\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 1$
mit 1.) $\Rightarrow a_0 = 0$
mit 2.) $\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$
mit 3.) $\Rightarrow a_2 = 0$
mit 4.) $\Rightarrow a_1 + 3a_3 + 4a_4 = 0$
mit 5.) $\Rightarrow 6a_3 + 12a_4 = 0$
Damit folgt: $a_1 = 2, \quad a_3 = -2, \quad a_4 = 1$ und $\frac{u}{U} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$

b) 1.) Verdrängungsdicke: Abstand, um den der Körper in einer reibungsfreien Strömung aufgedickt werden muß, so dass sich der gleiche Massenstrom wie in der tatsächlichen Strömung ergibt (Skizze siehe Skript S.257).
2.) Impulsverlustdicke: $\rho U^2 \delta_2$ muß den Impulsverlust aufgrund der Grenzschicht darstellen.

c) $\frac{\delta_2}{\delta} = \int\limits_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{37}{315}$
die von Kármánsche Integralbeziehung ergibt für das ebene Problem:
$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\tau(y=0)}{\varrho U^2} = 0$
$\tau(y=0) = -\frac{\eta U}{\delta} \frac{\partial\left(\frac{u}{U}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}|_{\frac{y}{\delta}=0} = -2\frac{\eta U}{\delta}$
$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{2\eta U}{\delta\varrho U^2} = \frac{2\eta}{\varrho\delta U}$
$\frac{37}{315}\frac{d\delta}{dx} = \frac{2\eta}{\varrho\delta U}$
$\delta d\delta = \frac{315}{37} 2 \frac{\eta}{\varrho U} dx$
$\frac{\delta^2}{2} = \frac{315}{37} 2 \frac{\eta}{\varrho U} x$
$\delta^2 = \frac{1260}{37}\frac{\eta}{\varrho U} x$
$\frac{\delta}{x} = \frac{5.84}{\sqrt{Re_x}}$

d) $h_E = \delta(L) = \frac{5.84}{\sqrt{\frac{\varrho U}{\eta L}}}$

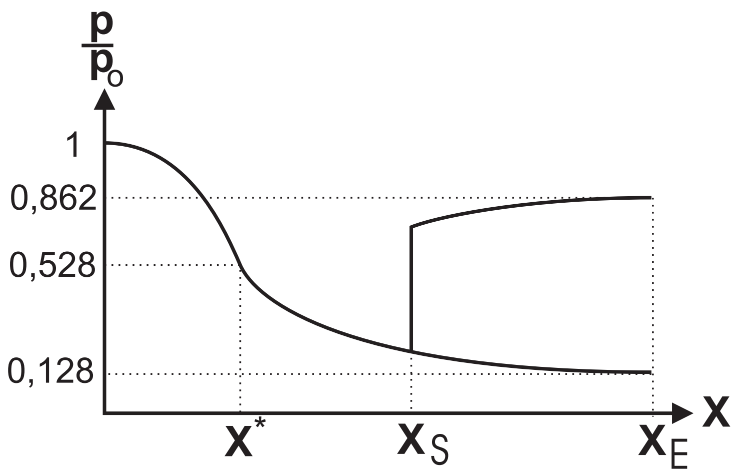
8. Aufgabe

a) Konti:
$\varrho^* u^* A^* = \varrho u A$
$\frac{A^*}{A} = \frac{\varrho u}{\varrho^* u^*} = \frac{\varrho}{\varrho_0}\frac{\varrho_0}{\varrho^*}\frac{u}{\sqrt{\gamma RT}}\frac{\sqrt{\gamma RT}}{u^*}$
mit $u^* = a^* \quad \Rightarrow \frac{A^*}{A} = \left(\frac{T}{T_0}\frac{T_0}{T^*}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot M \cdot \left(\frac{T}{T^*}\right)^{\frac{1}{2}}$
$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{T}{T_0}\frac{T_0}{T^*}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot M \cdot \left(\frac{T}{T_0}\frac{T_0}{T^*}\right)^{\frac{1}{2}}$
$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{T}{T_0}\frac{T_0}{T^*}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot M$
$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{1}{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot M$
$\frac{A^*}{A} = \left(\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \cdot M$

b) An der Stelle 1:
$M_1^* = f(\frac{A^*}{A_s}) = f\left(\frac{A^*}{A_E}\frac{A_E}{A_s}\right)$
$M_E^* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{(\gamma-1)+\frac{2}{M_E^2}}}$ mit $M_E = 2 \Rightarrow M_E^* = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1+\frac{1}{2}}} = 1.63$
Ablesen:
$\frac{A^*}{A_E} = 0.6, \quad \frac{A^*}{A_s} = \frac{A^*}{A_E}\frac{A_E}{A_S} = 0.6 \cdot \frac{1}{0.8} = 0.75$
$M_1^* = 1.5$
Über den Stoß gilt: $M_2^* = \frac{1}{M_1^*} = 0.67$

c) $M_2^* = 0.67 \quad \Rightarrow \quad \frac{A^*}{A_s} = 0.875$
$\frac{A^*}{A_E} = \frac{A^*}{A_s}\frac{A_s}{A_E} = 0.875 \cdot 0.8 = 0.7$
Ablesen im Diagramm:
$M_E^* = 0.5$
$M_E = \sqrt{\frac{2}{\frac{\gamma+1}{M_E^{2*}}-(\gamma-1)}} = 0.466$

d) Druckverhältnis im Austrittsquerschnitt für Auslegung mit $M_E = 2$:
$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.128$
Druckverhältnis im Austrittsquerschnitt für Probelauf mit $M_E = 0.466$:
$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.862$



p/p$_o$
1
0,862
0,528
0,128
x
x*
x$_S$
x$_E$