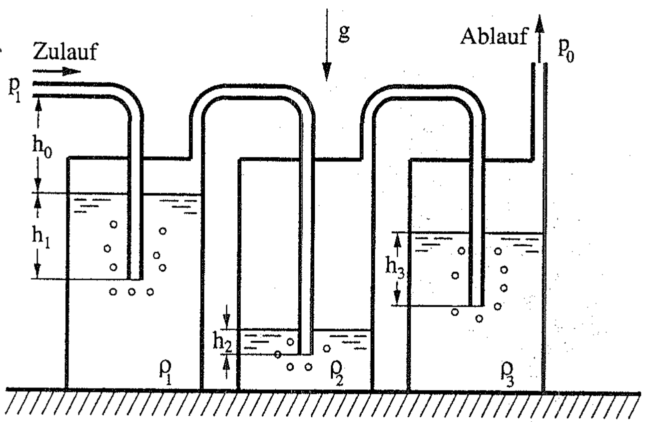
1

Klausur Technische Strömungslehre

27. 7. 2001

1. Aufgabe (6 Punkte)

Mit der dargestellten Anlage wird ein Gas dadurch gereinigt, daß man es langsam durch drei verschiedene Flüssigkeiten strömen läßt. Da die Gasdichte zu vernachlässigen ist, kann der Druck im Gas unabhängig von der Höhe angenommen werden.



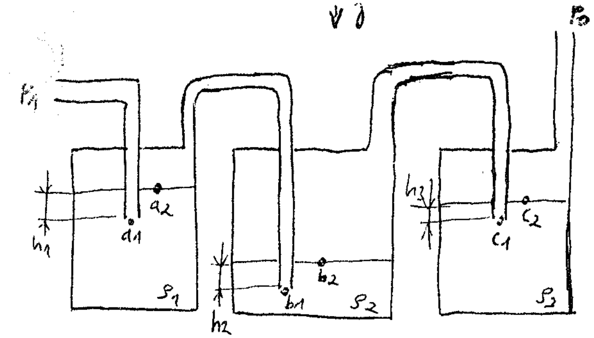
Gegeben: $h_1, h_2, h_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3, p_0, g$

a) Wie groß muß der Zulaufdruck p_1 mindestens sein, damit Gas durch die Anlage strömen kann?

b) Nach Abschluß der Gasreinigung wird der Druck p_1 auf den Ablaufdruck p_0 vermindert. In welcher Höhe h_0 muß der horizontale Zulauf mindestens über dem Flüssigkeitsspiegel im ersten Behälter liegen, damit unter diesen Umständen keine Flüssigkeit in den Zulauf gelangen kann? Die Behälter sind so groß, daß keine Spiegelveränderung auftritt. Nehmen Sie an, daß die Gasdrücke in den Behältern (bei Verminderung des Druckes im Zulauf auf den Wert p_0) unverändert bleiben.

1. Aufgabe

a) $\boxed{3}$



$$p_{a1} = p_1 = p_{a2} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1$$
$$p_{b1} = p_{a2} = p_{b2} + \rho_2 \cdot g \cdot h_2$$
$$p_{c1} = p_{b2} = p_{c2} + \rho_3 \cdot g \cdot h_3$$
$$p_{c2} = p_0$$
$$\Rightarrow p_1 = p_{a2} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 = p_{b2} + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1$$
$$= p_{c2} + \rho_3 \cdot g \cdot h_3 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1$$
$$= p_0 + g \cdot (\rho_3 \cdot h_3 + \rho_2 \cdot h_2 + \rho_1 \cdot h_1)$$
$$= p_0 + g \cdot \sum_{i=1}^{3} \rho_i \cdot h_i \quad 3$$

b) $\boxed{3}$

$$p_1 \overset{!}{=} p_0$$

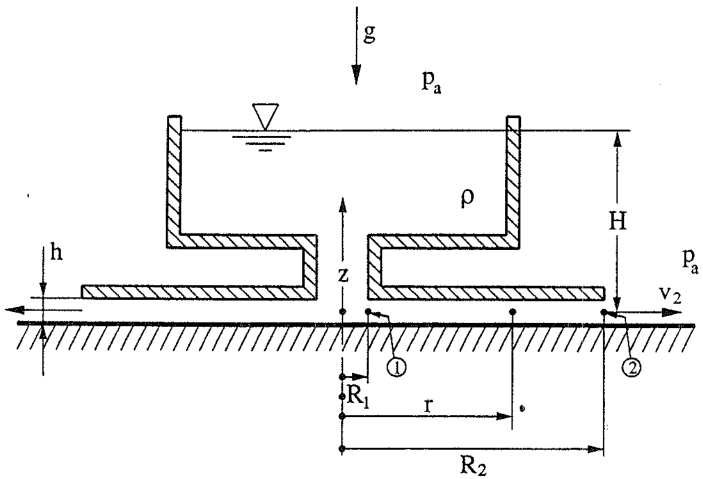
Extremfall: $p_{a1} = p_0 + \rho_1 \cdot g \cdot (h_1 + h_0)$ 1

$$= p_{a2} + \rho_1 \cdot g \cdot h_1$$
$$= p_0 + \rho_3 \cdot g \cdot h_3 + \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + \rho_1 \cdot g \cdot h_1 \quad 1$$
$$\Rightarrow \rho_1 \cdot g \cdot h_0 = g \cdot (\rho_3 \cdot h_3 + \rho_2 \cdot h_2) \quad 1$$
$$\Rightarrow h_0 = \frac{\rho_3 \cdot h_3 + \rho_2 \cdot h_2}{\rho_1} = \frac{\sum_{i=2}^{3} \rho_i \cdot h_i}{\rho_1}$$

2

2. Aufgabe (8 Punkte)

Aus einem großen, rotationssymmetrischen Behälter strömt eine Flüssigkeit der Dichte ρ stationär, reibungs- und verlustfrei zwischen einer kreisförmigen Platte mit dem Radius R_2 und dem Boden aus. Der Behälter ist so groß, daß die Absenkung des Flüssigkeitsspiegels zu vernachlässigen ist!



Gegeben: $H, h, R_2, p_a, \rho, g, p_D$

a) Wie groß ist der austretende Volumenstrom $\dot{Q}$?

b) Berechnen Sie die Druckverteilung $p(r)$ zwischen den Platten als Funktion von r.

c) Wie groß darf das Verhältnis R_2/R_1 gewählt werden, damit die Flüssigkeit an der Stelle „1" gerade nicht verdampft? Der Dampfdruck der Flüssigkeit ist p_D.

2. Aufgabe

$\boxed{3}$ a) Konti: $\dot{Q} = v_2 \cdot A_2 = \text{const.}$ 1

$= v_2 \cdot 2\pi \cdot R_2 \cdot h$

Bernoulli $0 \to 2$: $p_a + \rho \cdot g \cdot H = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$ 1

$p_2 = p_a$

$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot H}$

$\Rightarrow \dot{Q} = \sqrt{2 \cdot g \cdot H} \cdot 2\pi \cdot R_2 \cdot h$ 1

$\boxed{3}$ b) Bernoulli $r \to 2$: $p(r) + \frac{\rho}{2} v^2(r) = p_a + \frac{\rho}{2} v_2^2$

$\Rightarrow p(r) = p_a + \frac{\rho}{2}\left(v_2^2 - v^2(r)\right)$ 1

Konti: $v(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot h = v_2 \cdot 2\pi \cdot R_2 \cdot h$

$\Rightarrow v(r) = v_2 \cdot \frac{R_2}{r}$ 1

$\Rightarrow p(r) = p_a + \frac{\rho}{2}\left[v_2^2 - v_2^2 \cdot \frac{R_2^2}{r^2}\right]$

$= p_a + \frac{\rho}{2}\left[2 \cdot g \cdot H \cdot \left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right)\right]$

$= p_a + \rho \cdot g \cdot H \cdot \left[1 - \left(\frac{R_2}{r}\right)^2\right]$ 1

$\boxed{2}$ c) Stelle „1": $r = R_1$; $p(R_1) = p_D$

$\Rightarrow p(R_1) = p_D < p_a + \rho \cdot g \cdot H \cdot \left[1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2\right]$ 1

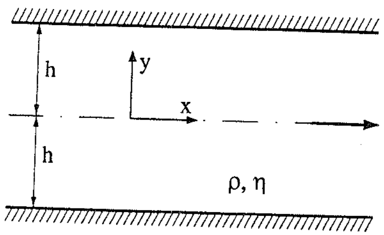
$\Rightarrow \frac{p_D - p_a}{\rho \cdot g \cdot H} < 1 - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{R_2}{R_1} < \sqrt{1 - \frac{p_D - p_a}{\rho \cdot g \cdot H}}$ 1

3

3. Aufgabe (11 Punkte)

Zwischen zwei horizontal verlaufenden, parallelen und unendlich ausgedehnten Platten im Abstand $2 \cdot h$ soll ein Bingham Fluid im vorgegebenen Koordinatensystem in positive x-Richtung fließen. Zur Überwindung der Reibungskräfte wird der ausgebildeten Strömung ein Druckgradient dp/dx in Strömungsrichtung aufgeprägt.



Gegeben: $h, \tau_0, dp/dx, \eta, \rho$

a) Ermitteln Sie aus dem Kräftegleichgewicht an einem differentiellen Element die Schubspannungsverteilung $\tau(y)$ in Abhängigkeit vom Druckgradienten dp/dx.

b) In welchem Abstand a von der Symmetrieebene ($y = 0$) findet der Übergang vom festen zum fließenden Zustand statt?

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$ zwischen den Platten in Abhängigkeit vom Druckgradienten dp/dx.

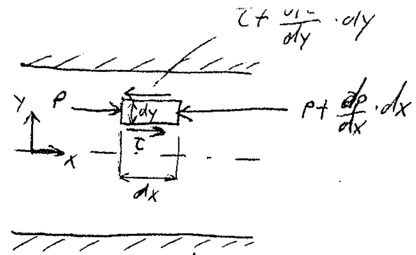
d) Skizzieren Sie die Schubspannungs- und Geschwindigkeitsverteilung $(\tau(y), u(y))$ qualitativ für einen negativen Druckgradienten in Strömungsrichtung ($dp/dx < 0$) sowie den Verlauf der Schubspannung in Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsgradienten $-du/dy$.

Hinweis:

- Für ein Bingham Fluid gilt: $$\tau(y) = \begin{cases} +\tau_0 - \eta\frac{du}{dy} & \text{für} \quad \frac{du}{dy} < 0 \\ -\tau_0 - \eta\frac{du}{dy} & \text{für} \quad \frac{du}{dy} > 0 \end{cases}$$

3. Aufgabe

3 a)



$$\sum \vec{F}_x = 0 \Rightarrow p \cdot dy - \left(p + \frac{dp}{dx} \cdot dx\right) \cdot dy + \tau \cdot dx - \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} \cdot dy\right) \cdot dx = 0$$
$$\Rightarrow -\frac{dp}{dx} - \frac{d\tau}{dy} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dp}{dx} + \frac{d\tau}{dy} = 0 \quad \Big\} \; 1$$
$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = -\frac{dp}{dx}$$
Integration: $\tau(y) = -\frac{dp}{dx} \cdot y + C_1$

Symmetrie: $\tau(y=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad \Big\} \; 1$
$$\Rightarrow \tau(y) = -\frac{dp}{dx} \cdot y \quad 1$$

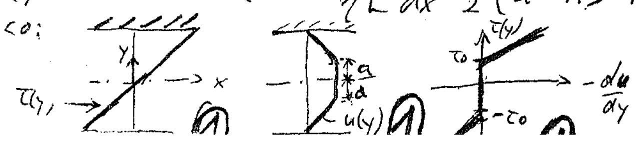
1 b) für $y = \pm a$ gilt $|\tau| = \tau_0$
$$\Rightarrow |\tau(y = \pm a)| = \left|\mp \frac{dp}{dx} \cdot a\right| = \frac{dp}{dx} \cdot a = \tau_0$$
$$\Rightarrow a = \frac{\tau_0}{dp/dx} \quad 1$$

4 c) Geschwindigkeitsprofil ist symmetrisch: $u(y) = u(-y)$

→ Betrachtung nur für $y > 0$!

$\frac{du}{dy} = 0$ für $0 < y < a$; $\frac{du}{dy} < 0$ für $a < y < h$
$$\Rightarrow \tau(y) = +\tau_0 - \eta \frac{du}{dy} \quad \text{für } a < y < h \quad \Big\} \; 1$$
$$= -\frac{dp}{dx} \cdot y$$
$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{y}{\eta} + \frac{\tau_0}{\eta} \xrightarrow{\text{Integration}} u(y) = \frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dx} \cdot \frac{y^2}{2} + \tau_0 \cdot y\right) + C_2$$
R.B.: $u(y = h) = 0$ (Haftbedingung) $\Rightarrow C_2 = -\frac{1}{\eta}\left(\frac{dp}{dx} \cdot \frac{h^2}{2} + \tau_0 \cdot h\right)$ 1
$$\Rightarrow u(y) = \frac{1}{\eta}\left[\frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{2} \cdot (y^2 - h^2) + \tau_0 (y - h)\right] \quad \text{für } h > y > a \quad 1$$
$$u(y) = \text{const} = u(a) = \frac{1}{\eta}\left[\frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{2}(a^2 - h^2) + \tau_0 (a - h)\right] \quad \text{für } 0 < y < a \quad 1$$

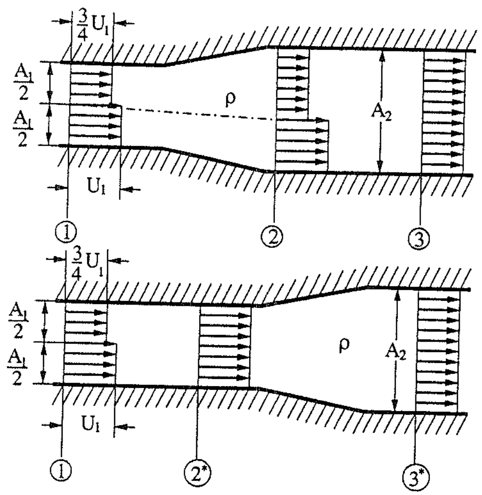
3 d) $dp/dx < 0$:



4

4. Aufgabe (13 Punkte)

In einem rechteckigen Rohr mit der Querschnittsfläche A_1 strömt eine Flüssigkeit der Dichte ρ mit ungleichförmiger Geschwindigkeitsverteilung. In der einen Hälfte der Querschnittsfläche $(A_1/2)$ herrscht die Geschwindigkeit U_1, in der anderen die Geschwindigkeit $\frac{3}{4}U_1$. In einem anschließenden Diffusor steigt der Druck um $p_2 - p_1 = \frac{3}{16}\rho U_1^2$ an; danach folgt eine Ausgleichsstrecke. Zur Vereinfachung sei angenommen, daß im Diffusor keine Vermischung stattfindet und die Bernoulli Gleichung dort anwendbar ist.



Gegeben: $A_1, U_1, \rho, p_2 - p_1 = \frac{3}{16}\rho U_1^2$

Anordnung I :

a) Wie groß ist die Querschnittsfläche A_2?

b) Welcher Druckanstieg $p_3 - p_1$ stellt sich ein?

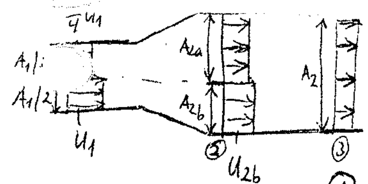
Anordnung II :

In der zweiten Anordnung (II) wird die Ausgleichsstrecke dem Diffusor vorgeschaltet. Der Diffusor soll sich auf dieselbe Fläche A_2 wie vorher erweitern. Die Bernoulli Gleichung sei im Diffusor weiterhin anwendbar.

c) Wie groß ist der Druckanstieg $p_3^* - p_1$ jetzt?

4. Aufgabe

a)



I

$\boxed{6}$

Konti: 1.) $\frac{3}{4}U_1 \cdot \frac{A_1}{2} = U_{2a} \cdot A_{2a}$ 1 ; 2.) $U_1 \cdot \frac{A_1}{2} = U_{2b} \cdot A_{2b}$ 1

Geometrie: $A_{2a} + A_{2b} = A_2$

Bernoulli: $1 \to 2a$: $p_1 + \frac{\rho}{2}\left(\frac{3}{4}U_1\right)^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}U_{2a}^2$ 1

$1 \to 2b$: $p_1 + \frac{\rho}{2}U_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}U_{2b}^2$ 1

$\Rightarrow U_{2a} = \sqrt{\frac{9}{16}U_1^2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho/2}}$; $U_{2b} = \sqrt{U_1^2 + \frac{p_1 - p_2}{\rho/2}}$

aus Aufgabenstellung : $p_2 - p_1 = \frac{3}{16}\rho \cdot U_1^2$

$\Rightarrow U_{2a} = \frac{\sqrt{3}}{4}U_1$; $U_{2b} = \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot U_1$

in Konti eingesetzt

$\Rightarrow$ 1 1.) $\frac{3}{4}U_1 \cdot \frac{A_1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot U_1 \cdot A_{2a} \Rightarrow A_{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1$

2.) $U_1 \cdot \frac{A_1}{2} = \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot U_1 \cdot A_{2b} \Rightarrow A_{2b} = \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot A_1$

$A_2 = A_{2a} + A_{2b}$

$\Rightarrow A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{10}}\right) \cdot A_1 \approx 1{,}50 \cdot A_1$. 1

$\boxed{3}$ b) Impulssatz: 2 3 $\to x$ $\frac{dI_x}{dt} = -\left(\frac{\sqrt{3}}{4}U_1\right)^2 \cdot \rho \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} A_1 - \left(\frac{\sqrt{10}}{4}U_1\right)^2 \cdot \rho \cdot \frac{2}{\sqrt{10}} \cdot A_1$

$+ \rho \cdot U_3^2 \cdot A_2 = (p_2 - p_3) \cdot A_2$ 1

Konti $\frac{3}{4}U_1 \cdot \frac{A_1}{2} + U_1 \cdot \frac{A_1}{2} = A_2 \cdot U_3 \Rightarrow U_3 = \frac{7}{8}U_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}$ 1

$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \cdot \rho \cdot U_1^2 \cdot \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{32} + \frac{\sqrt{10}}{8} - \frac{49}{64}\frac{A_1}{A_2}\right) = p_3 - p_2 = p_3 - p_1 + p_1 - p_2 = p_3 - p_1 - \frac{3}{16}\rho U_1^2$

$\Rightarrow p_3 - p_1 = \rho \cdot U_1^2 \cdot \left[\frac{3}{16} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{32} + \frac{\sqrt{10}}{8} - \frac{49}{64}\frac{A_1}{A_2}\right)\right] \approx \rho \cdot U_1^2 \cdot 0{,}2187$ 1

$\boxed{4}$ c) Bernoulli: $2^* \to 3^*$: $\frac{\rho}{2}U_2^{*2} + p_2^* = p_3^* + \frac{\rho}{2}U_3^{*2} \Rightarrow p_3^* - p_2^* = \frac{\rho}{2}\left(U_2^{*2} - U_3^{*2}\right)$ 1

Konti: $\frac{3}{4}U_1 \cdot \frac{A_1}{2} + U_1 \cdot \frac{A_1}{2} = U_2^* \cdot A_1 \Rightarrow U_2^* = 7/8 \cdot U_1$ 1

$U_3^* = U_3$ aus Teil b) $= 7/8 \cdot U_1 \cdot \frac{A_1}{A_2}$;

Impulssatz: 1 2* $\to x$ $\frac{dI_x}{dt} = -\rho \cdot \frac{9}{16}U_1^2 \cdot \frac{A_1}{2} - \rho \cdot U_1^2 \cdot \frac{A_1}{2} + \rho \cdot \frac{49}{64} \cdot U_1^2 \cdot A_1 = (p_1 - p_2^*) \cdot A_1$ 1

$\Rightarrow p_1 - p_2^* = \rho \cdot U_1^2 \cdot \left(-\frac{9}{32} - \frac{1}{2} + \frac{49}{64}\right)$

$p_3^* - p_1 = p_3^* - p_2^* - (p_1 - p_2^*) = \frac{\rho}{2}\left(\frac{49}{64} \cdot U_1^2 - \frac{49}{64}U_1^2 \cdot \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right) - \rho \cdot U_1^2 \cdot \left(-\frac{9}{32} - \frac{1}{2} + \frac{49}{64}\right)$

....

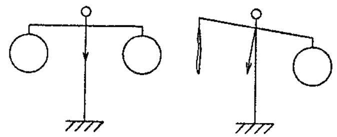
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

6

Klausur Strömungslehre

27. 07. 2001

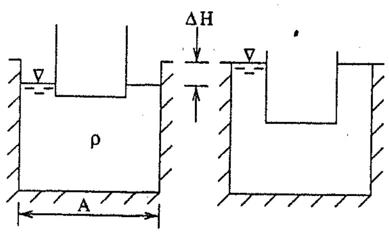
1. Aufgabe (8 Punkte)



a) Zwei identische Gummiluftballons werden mit Luft aufgepumpt und an eine Balkenwaage gehängt (s. linkes Bild). Nach langer Zeit ist aus dem linken Luftballon die Luft entwichen. Die Waage zeigt den im rechten Bild dargestellten Ausschlag an.
Erklären Sie warum die Kraft, die auf die rechte Seite der Waage wirkt, größer ist als die auf der linken Seite. Gehen Sie in Ihrer Erklärung auch auf den Auftrieb ein!

b) Geben Sie in Worten die Definition einer Rauchlinie an.

Ein oben offenes, zylindrisches Gefäß schwimmt in einem zylindrischen Becken, das die Grundfläche A besitzt. Der Wasserspiegel im Becken kann maximal noch um ΔH ansteigen.



c) Mit welcher maximalen Masse darf das Gefäß zusätzlich beladen werden, so daß kein Wasser über den Beckenrand tritt?

Gegeben zu c): ρ, A, ΔH

Musterlösung zur Klausur Strömungslehre

1. Aufgabe (8 Punkte)

1

a) Durch den erhöhten Druck im rechten Luftballon ist auch die Dichte der Luft dort höher als in der Umgebung. Deshalb wirkt auch nach Abzug der Auftriebskraft immer noch eine Kraft $\Delta\rho g V$ in Richtung der Erdschwere auf den rechten Arm der Waage. 1

b) Eine Rauchlinie ist die konsekutive Verbindungslinie aller Partikel, die einen festgelegten Punkt im Raum passiert haben. 1

c) KGG für den unbeladenen Fall:
$G_1 = \rho A_G h_1 g$ 1
KGG für den beladenen Fall:
$G_1 + m_{max} g = \rho A_G h_2 g$ 1
aus beiden Gleichungen erhält man:
$\Rightarrow \quad m_{max} = \rho A_G h_2 - \rho A_G h_1 \quad (1)$

Wobei A_G die Gefäßgrundfläche, h_1 die Eintauchtiefe des Gefäßes für den unbeladenen Fall und h_2 für den beladenen Fall ist.

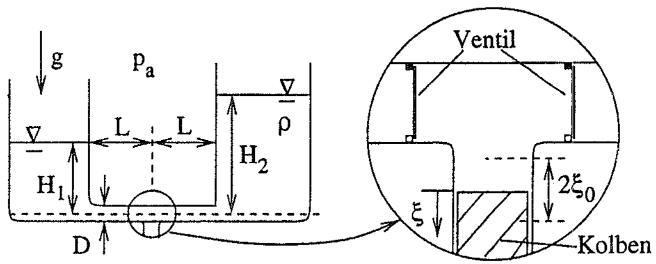
Das vom Wasser eingenommene Volumen bleibt konstant: 1
$AH - A_G h_1 = A(H + \Delta H) - A_G h_2$
$\Rightarrow \quad A_G h_2 - A_G h_1 = A\Delta H \quad (2)$ 1

Aus (1) und (2) erhält man:
$\Rightarrow \quad m_{max} = \rho A \Delta H$ 1

7

2. Aufgabe (13 Punkte)

Zwei große Wasserbehälter mit jeweils konstanter Spiegelhöhe sind über eine Rohrleitung (Länge $2L$) mit einem gut gerundeten Rohreinlauf miteinander verbunden. In der Mitte der Rohrleitung befördert eine Kolbenpumpe Wasser von links nach rechts. Der Querschnitt der Kolbenpumpe ist gleich dem Rohrquerschnitt.
Der Hubweg ξ der Pumpe wird beschrieben durch $\xi = \xi_0 \sin \omega t$. Der geodätische Höhenunterschied im Bereich der Pumpe (s. Ausschnittsvergrößerung) ist vernachlässigbar. Der Hubweg $2\xi_0$ ist vernachlässigbar im Vergleich zur Länge L.



a) Berechnen Sie die maximale Winkelgeschwindigkeit ω, bei der der Dampfdruck p_D nicht unterschritten wird. Nehmen Sie eine reibungsfreie Strömung an und gehen Sie davon aus, daß das linke Ventil stets offen und das rechte Ventil stets geschlossen ist.
<u>Hinweis:</u> Der minimale Druck wird bei einem Phasenwinkel von $\omega t = \frac{3}{2}\pi$ erreicht.

b) Berechnen Sie den maximalen Druck p_{max} während des Auspumpvorgangs für die unter a) bestimmte Winkelgeschwindigkeit ω. Nehmen Sie eine reibungsfreie Strömung an und gehen Sie davon aus, daß nun das rechte Ventil stets offen und das linke Ventil stets geschlossen ist.

c) Wird für den Fall von Rohrreibungsverlusten der minimale Druck während des Ansaugvorgangs geringer, größer oder gleich sein im Vergleich zum Fall ohne Rohrreibungsverluste bei gleicher Winkelgeschwindigkeit ω? Der minimale Druck soll weiterhin bei $\omega t = \frac{3}{2}\pi$ erreicht werden. Begründen Sie Ihre Aussage!

<u>Gegeben:</u>

$\xi = \xi_0 \sin \omega t$, $\xi_0 = 0,1\text{m}$, $L >> D$, $L = 5\text{m}$, $H_1 = 2\text{m}$, $H_2 = 5,25\text{m}$,
$\rho = 10^3\text{kg/m}^3$, $g = 10\text{m/s}^2$, $p_a = 10^5\text{N/m}^2$, $p_D = 2500\text{N/m}^2$

2. Aufgabe (13 Punkte)

a) Hubweg gegeben: $\xi = \xi_0 \sin \omega t$; daraus folgt für a): $v = \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t$
Instationärer Bernoulli von der linken Wasseroberfläche 1 bis zum Kolbenboden K:

$$p_a + \rho g H_1 = p_K + \overbrace{\frac{\rho}{2}\left(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t\right)^2}^{1} + \rho \int_1^K \frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}s \quad 1$$

$$p_K = p_a + \rho g H_1 - \frac{\rho}{2}\left(\xi_0 \omega \cos \omega t\right)^2 - \rho \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}\int_{Einlauf}^K \mathrm{d}s \quad 1$$

$$p_K = p_a + \rho g H_1 - \frac{\rho}{2}\xi_0^2\omega^2 \cos^2 \omega t + \underbrace{\rho \xi_0 \omega^2 \sin \omega t \cdot L}_{1}$$

Für den minimalen Druck gilt $\sin \omega t = -1$ und $\cos \omega t = 0$, da $\omega t = 3\pi/2$; außerdem gilt $p_K = p_D$ für $\omega = \omega_{max}$: 1

$$p_K - p_a - \rho g H_1 = -\rho L \xi_0 \omega^2$$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{p_a + \rho g H_1 - p_D}{\rho L \xi_0} \quad 1$$

$$\Rightarrow \quad \omega = 15,33\frac{1}{\text{s}} \quad 1$$

b) Hubweg gegeben: $\xi = \xi_0 \sin \omega t$; aber für b): $v = -\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t$
Instationärer Bernoulli vom Kolbenboden K bis zum Rohrleitungsaustritt 2 in der Tiefe H_2 unter der rechten Wasseroberfläche:

$$p_K + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right)^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \rho\int_K^2 \frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}s \quad 1$$

$$p_K = p_a + \rho g H_2 - \rho\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2}\int_K^2 \mathrm{d}s \quad \text{mit} \quad \underbrace{p_2 = p_a + \rho g H_2}_{1}$$

$$p_K = p_a + \rho g H_2 + \rho L \xi_0 \omega^2 \sin \omega t$$

$p_K = p_{max}$ wird offensichtlich bei $\sin \omega t = 1$ erlangt:

$$p_{max} = p_a + \rho g H_2 + \rho L \xi_0 \omega^2 \quad 1$$

$$p_{max} = 2,7 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad 1$$

c) Der minimale Druck wird bei einem Phasenwinkel von $\omega t = \frac{3}{2}\pi$ erreicht. Für $\omega t = \frac{3}{2}\pi$ ist die Geschwindigkeit jedoch genau gleich null (s. a)). Da die Reibung proportional zur Geschwindigkeit ist, haben die Reibungsverluste zwar einen Einfluß auf die Druckverteilung, jedoch ohne den minimalen Druck zu ändern.

2

8

3. Aufgabe (14 Punkte)

a) Ist die Froude Zahl für die in Bild 1 abgebildete Gerinneströmung größer oder kleiner 1?

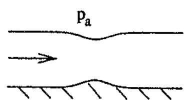


Bild 1

Ein Gerinne (Dichte ρ) mit konstantem, auf die Gerinnebreite b bezogenen Volumenstrom q wird durch ein Wehr auf die Wassertiefe z_1 angestaut. Hinter dem Punkt 4 tritt eine horizontale Verengung mit der Breite $b_V = 0,644b$ auf, die den Wasserspiegel auf die doppelte Höhe im Vergleich zu Punkt 4 ansteigen läßt. Vor dem Punkt 5 befindet sich ein Wassersprung.

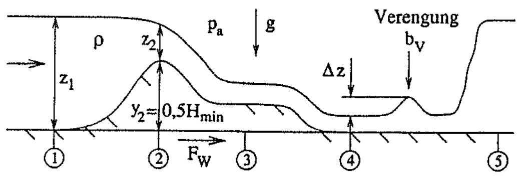


Bild 2

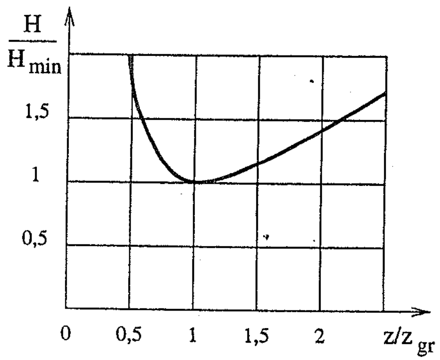
b) Leiten Sie die minimale Energiehöhe H_{min} und die dazugehörige Wassertiefe z_{gr} als Funktion des Volumenstroms q und der Erdbeschleunigung g her.

c) Übertragen Sie das Diagramm H/H_{min} über z/z_{gr} auf Ihr Lösungsblatt und tragen Sie dort die Punkte 1 bis 5 aus Bild 2 ein.

d) Berechnen Sie die Froude Zahl im Punkt 4.

e) Geben Sie das Wassertiefenverhältnis z_1/z_4 an. Verwenden Sie das Diagramm.

f) Die horizontale Kraft, die in Strömungsrichtung vom Fluid auf das Wehr wirkt, ist mit $F_W = 28,56\text{kN}$ gegeben. Berechnen Sie die Wassertiefe z_4.



Gegeben:

$b = \sqrt{10}\text{m}$, $b_V = 0,644b$, $y_2/H_{min} = 0,5$, $\Delta z = z_4$, $\rho = 10^3\text{kg}/$ $\quad$ $= 10\text{m/s}^2$

3. Aufgabe (14 Punkte)

a) $Fr < 1$ 1

b) Bernoulli:

$\rho g z + \rho g y + \frac{\varrho}{2}v^2 = const$ 1

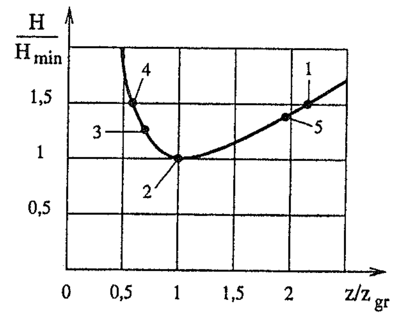
$\Rightarrow \quad z + \frac{v^2}{2g} + y = const \quad$ mit $\quad H = z + \frac{v^2}{2g} \quad$ und $\quad v = \frac{q}{z}$

$\Rightarrow \quad H = z + \frac{q^2}{2gz^2}$ 1

$H_{min} \; : \frac{\partial H}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$ 1

$\Rightarrow \quad H_{min} = z_{gr} + \frac{q^2}{2gz_{gr}^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}$

c) Skizze:



1

d) Konti:

$v_4 z_4 b = v_V z_V b_V \quad \Rightarrow \quad v_V = v_4 \frac{1}{2 \cdot 0,644}$ 1

Bernoulli von 4 bis zur Verengung V:

$\rho g z_4 + \frac{\varrho}{2}v_4^2 = \rho g z_V + \frac{\varrho}{2}v_V^2$ 1

$\Rightarrow \quad (v_4^2 - v_V^2) = 2gz_4 \quad \Rightarrow \quad v_4^2 = \frac{2gz_4}{1 - \frac{1}{4 \cdot 0,644^2}}$

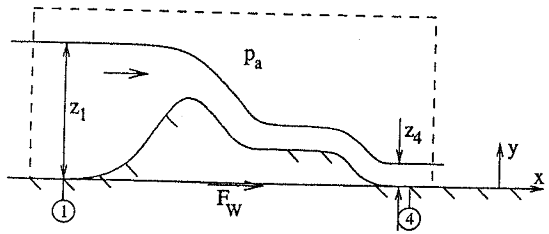
$\Rightarrow \quad \frac{v_4^2}{gz_4} = 5,04 \quad \Rightarrow \quad Fr_4 = \frac{v_4}{\sqrt{gz_4}} = 2,24$ 1

e) Mit $y_2 = y_{gr}$, d.h. $H_2/H_{min} = 1$, erhält man auf der Linie $H/H_{min} = 1,5$ aus dem Diagramm für den strömenden Zustand $z_1/z_{gr} = 2,16$ und für den schießenden Zustand $z_4/z_{gr} = 0,583$ 1

$\Rightarrow \quad z_1/z_4 = 3,7$ 1

9

f) Impulserhaltungssatz (Bilanzhülle):



$$-\rho v_1^2 z_1 b - b\int_0^{z_1} p_1(z)\mathrm{d}z + \rho v_4^2 z_4 b + b\int_0^{z_4} p_4(z)\mathrm{d}z + p_a b(z_1 - z_4) + F_W = 0$$ 1

mit $p_1(z) = p_a + \rho g(z_1 - z)$ und $p_4(z) = p_a + \rho g(z_4 - z)$ 1

$\Rightarrow \quad F_W = \rho v_1^2 z_1 b - \rho v_4^2 z_4 b + b\rho g\frac{z_1^2}{2} - b\rho g\frac{z_4^2}{2}$

$\Rightarrow \quad F_W = \rho b v_4^2\left(\frac{z_4^2}{z_1^2}z_1 - z_4\right) + \rho g b\left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_4^2}{2}\right)$ mit $v_1 = v_4\frac{z_4}{z_1}$ Konti 1

$\Rightarrow \quad \frac{F_W}{\rho g b} = \frac{v_4^2}{g z_4}z_4^2\left(\frac{z_4}{z_1} - 1\right) + z_4^2\left(\frac{z_1^2}{2z_4^2} - \frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \quad \frac{F_W}{\rho g b} = z_4^2(Fr)^2\left(\frac{z_4}{z_1} - 1\right) + \frac{z_4^2}{2}\left(\frac{z_1^2}{z_4^2} - 1\right)$

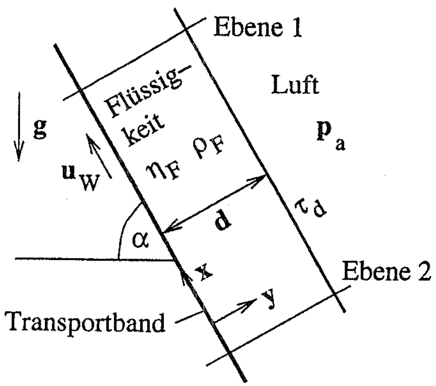
$\Rightarrow \quad z_4^2 = \frac{F_W}{\rho g b}\left((Fr)^2\left(\frac{z_4}{z_1} - 1\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z_1^2}{z_4^2} - 1\right)\right)^{-1}$

$\Rightarrow \quad z_4 = 0,58\mathrm{m}$ 1

10

4. Aufgabe (11 Punkte)

In einer ausgebildeten Mehrphasenströmung befindet sich ein Flüssigkeitsfilm (η_F, ρ_F) auf einem ebenen, um den Winkel α geneigten Transportband, das sich mit der Geschwindigkeit u_W bewegt. Durch einen aufwärts gerichteten Strom der umgebenden Luft wird an der Grenze zwischen Luft und Flüssigkeit die Schubspannung τ_d aufgeprägt.



a) Ändert sich das Geschwindigkeitsprofil $u(y)$ von Ebene 1 zu Ebene 2 (wenn ja, wie)?

b) Leiten Sie die Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeit als Funktion von y und u_W her.

c) Bestimmen Sie $u_{W,min}$ derart, daß die Flüssigkeit gerade an keiner Stelle in negative x-Richtung strömt.

d) Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeit für die unter c) berechnete Geschwindigkeit $u_{W,min}$.

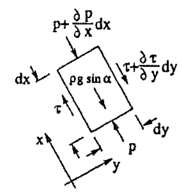
e) In Mehrphasenströmungen werden Gasblasen in Flüssigkeiten nicht nur als starre Kugelblasen betrachtet. Benennen Sie eine andere Blasenart. Nennen Sie einen wesentlichen Grund, warum in der Mehrphasenströmung verschiedene Blasenarten betrachtet werden.

Gegeben: $g, \quad d, \quad \alpha, \quad \rho_F, \quad \eta_F, \quad \tau_d = -\frac{1}{2}\rho_F g d \sin\alpha$

4. Aufgabe (12 Punkte)

a) Nein. 1

b) Kräftegleichgewicht in x-Richtung (am Volumenelement):



$$p\mathrm{d}y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \tau\mathrm{d}x - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - \rho_F g \sin\alpha \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0 \qquad 1$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} - \rho_F g \sin\alpha = 0$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \tau = -\eta_F \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \qquad 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\rho_F g \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \tau = -\rho_F g y \sin\alpha + c_1$$

1 $\quad$ mit RB1 $\tau(d) = \tau_d: \quad \tau_d = -\rho_F g d \sin\alpha + c_1 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{1}{2}\rho_F g d \sin\alpha$

$$\Rightarrow \quad \tau = -\rho_F g (y - \frac{1}{2}d)\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}u = \frac{\rho_F g \sin\alpha}{\eta_F}(y - \frac{1}{2}d)\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{\rho_F g \sin\alpha}{\eta_F}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{yd}{2}\right) + c_2$$

1 $\quad$ mit RB2 $u(0) = u_W: \quad c_2 = u_W$

$$\Rightarrow \quad u = \frac{\rho_F g d^2 \sin\alpha}{2\eta_F}\left(\left(\frac{y}{d}\right)^2 - \frac{y}{d}\right) + u_W \qquad 1$$

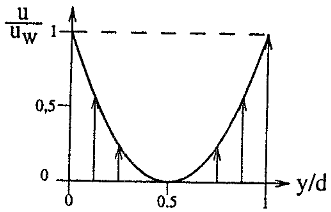
c) Die minimale Geschwindigkeit u liegt bei

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{2}d \qquad 1$$

$$u(\frac{d}{2}) = \frac{\rho_F g d^2 \sin\alpha}{2\eta_F}(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}) + u_W \geq 0$$

$$u_{W,min} = \frac{\rho_F g d^2 \sin\alpha}{8\eta_F} \qquad 1$$

11 d) Skizze:



(1)

e) Es existieren z.B. Kugelblasen mit innerer Zirkulation (oder elliptische (1) Blasen oder Schirmblasen). Diese Blasenarten werden unterschieden, da sie veränderten Gesetzen für den jeweiligen Widerstandsbeiwert folgen. (1)

12

5. Aufgabe (10 Punkte)

a) Bei welchen Strömungen ist die Prandtl Zahl von Bedeutung?

b) Zur Erstellung des Kennfeldes einer Pumpe soll der Druckanstieg Δp als Funktion des Durchmessers D, der Winkelgeschwindigkeit ω, der Dichte ρ und des Volumenstroms $\dot{Q}$ ermittelt werden. Bestimmen Sie mit Hilfe des Buckinghamschen Π-Theorems die Kennzahl(en) dieses Problems. Drücken Sie die erhaltene(n) Kennzahl(en) durch eine oder mehrere in der Strömungsmechanik häufig verwendete Kennzahlen aus.

c) Ein Flugzeug soll bei einer Mach Zahl von $M = 0,7$ mit einer Reynolds Zahl von $Re = 2 \cdot 10^7$ fliegen. Für ein Windkanalmodell soll nun die charakteristische Länge l des Modells bei dynamischer Ähnlichkeit berechnet werden.
Für den Windkanal ist die Gaskonstante $R = 287\text{Nm/kgK}$, der Isentropenexponent $\gamma = 1,4$ und die Ruhetemperatur $T_0 = 290\text{K}$ bekannt. Desweiteren herrscht im Windkanal bei einer Mach Zahl von $M = 0,7$ die Dichte $\rho = 0,94\text{kg/m}^3$ und eine Temperatur von $T = 264\text{K}$. Die Viskosität wird angenähert durch $\eta = (T/T_0)^{0,72} \cdot 18,22 \cdot 10^{-6}\text{kg/sm}$.
Berechnen Sie l.

d) Nennen Sie eine Maßnahme, wie man für das Problem aus c) bei gleichen Kennzahlen die notwendige Abmessung l verringern könnte?

5. Aufgabe (10 Punkte)

1 a) Die Prandtl Zahl ist dann von Bedeutung, wenn die Wärmeübertragung in einer Strömung eine Rolle spielt.

b) 5 Einflußgrößen ($\Delta p, D, \omega, \rho, \dot{Q}$), 3 Grunddimensionen (kg, m, s) $\Rightarrow$ 2 Kennzahlen
Wähle D, ρ und ω als sich wiederholendes Variablenset. 1

$$K_1 = \Delta p D^\alpha \omega^\beta \rho^\gamma$$
$$1 = \left(\frac{\text{kg}}{\text{ms}^2}\right)(\text{m})^\alpha \left(\text{s}^{-1}\right)^\beta \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^\gamma$$
$$\text{kg} : \quad 0 = 1 + \gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = -1$$
$$\text{s} : \quad 0 = -2 - \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -2$$
$$\text{m} : \quad 0 = -1 + \alpha - 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2$$
$$\Rightarrow \quad K_1 = \frac{\Delta p}{D^2 \rho \omega^2} \quad \Rightarrow \quad K_1 = \frac{\Delta p}{\rho v^2} = Eu \quad \text{mit} \quad v = D\omega$$
1 1

$$K_2 = \dot{Q} D^\alpha \omega^\beta \rho^\gamma$$
$$1 = \left(\frac{\text{m}^3}{\text{s}}\right)(\text{m})^\alpha \left(\text{s}^{-1}\right)^\beta \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^\gamma$$
$$\text{kg} : \quad 0 = \gamma$$
$$\text{s} : \quad 0 = -1 - \beta \quad \Rightarrow \quad \beta = -1$$
$$\text{m} : \quad 0 = 3 + \alpha - 3\gamma \quad \Rightarrow \quad \alpha = -3$$
$$\Rightarrow \quad K_2 = \frac{\dot{Q}}{D^3 \omega} \quad \Rightarrow \quad K_2 = \frac{\bar{u}}{D\omega} = \frac{1}{Sr} \quad \text{mit} \quad \bar{u} = \frac{\dot{Q}}{D^2}, \quad f = \omega$$
1 1

c) Die Kennzahlen (Re, M) des Modells müssen gleich den Kennzahlen des Flugzeugs sein.

Die Geschwindigkeit im Windkanal beträgt bei $M = 0,7$:
$u = M \cdot c = 0,7 \cdot \sqrt{\gamma R T} = 228\text{m/s}$ 1

Die dynamische Viskosität im Windkanal beträgt bei $M = 0,7$:
$\eta = (T/T_0)^{0,72} \cdot 18,22 \cdot 10^{-6}\text{kg/sm} = 17,03 \cdot 10^{-6}\text{kg/sm}$ 1

Bei einer vorgegebenen Reynolds Zahl ergibt sich die charakteristische Länge l zu:
$Re = \frac{\rho u l}{\eta} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\eta Re}{\rho u} = 1,58\text{m}$ 1

1 d) Eine mögliche Maßnahme ist die Verringerung der Temperatur, wodurch die Reynolds Zahl bei konstanter Länge l ansteigt bzw. bei konstanter Reynolds Zahl die Länge l kleiner wird.

13

....

(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

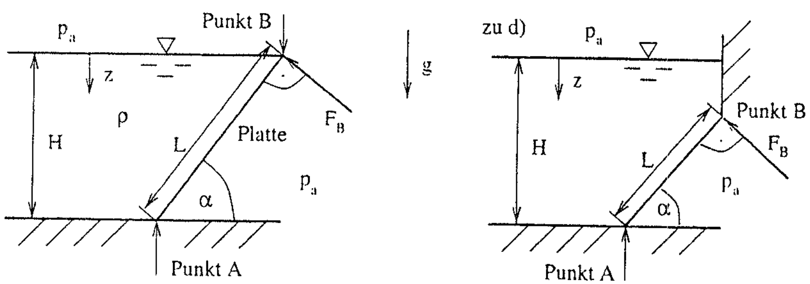
23. 03. 2001

1. Aufgabe (11 Punkte)

a) Beschreiben Sie in Worten das Prinzip des hydrostatischen Auftriebs nach Archimedes.

b) Nennen Sie ein Beispiel bei dem das unter a) benannte Prinzip nicht gilt.

Eine im Punkt A gelenkig gelagerte, gewichtslose Platte der Länge L wird im Punkt B durch eine senkrecht zur Platte wirkende Kraft F_B gestützt. Links und oberhalb von der Platte befindet sich Fluid (Dichte ρ), während rechts und unterhalb von der Platte Umgebungsdruck p_a herrscht.



c) Bestimmen Sie die Kraft F_B pro Einheitsbreite als Funktion von α für den Fall, daß $H = L \cdot \sin\alpha$. Skizzieren Sie den Verlauf von $F_B = f(\alpha)$.

d) Bestimmen Sie die Kraft F_B pro Einheitsbreite als Funktion von α für den Fall, daß $H = L = const.$ Skizzieren Sie den Verlauf von $F_B = f(\alpha)$.

Gegeben: ρ , g , L , $0 \leq \alpha \leq 90°$

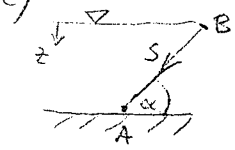
1. Aufg.)

a) Die Auftriebskraft, die ein eingetauchter Körper erfährt, ist gleich der Gewichtskraft des verdrängten Fluides.

b) z. B. – nicht vollständig benetzte Körper

oder – Druckgradient ist linear (oder einfach nicht const.)

c)

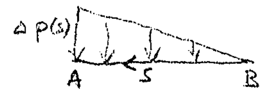


$F_p \mathrel{\hat=}$ Druckkraft auf Platte pro Einheitstiefe

$$F_p = \int_{B'}^{A'} \Delta p \, ds = \int_0^L \rho g s \sin\alpha \, ds = \frac{\rho g L^2}{2} \sin\alpha$$

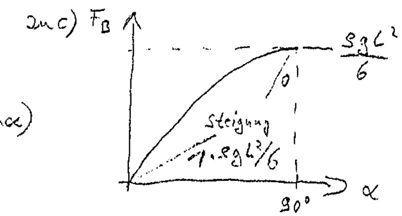
$z = s \cdot \sin\alpha$

Kraftangriffspkt (KAP) von F_p entweder rechnerisch oder geometrisch bestimmen:

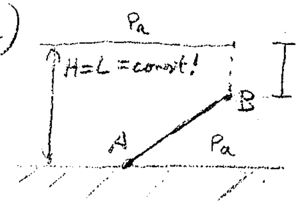


Schwerpkt. d. Dreiecks liegt bei $s = \frac{2}{3} L$

$$\sum M_A: \quad F_p \cdot \frac{1}{3} L = F_B \cdot L \qquad \Rightarrow F_B = \frac{\rho g L^2}{6} \sin\alpha \quad (= f(\alpha))$$

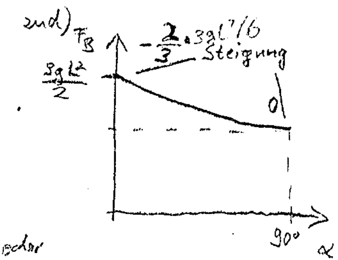


d)



$h = H - L \sin\alpha = L(1 - \sin\alpha)$

$\Delta p_B = \rho g L (1 - \sin\alpha)$



$$F_p = \int_0^L \Delta p \, ds = \int_0^L (\Delta p_B + \rho g s \sin\alpha) ds$$

$$F_p = \underbrace{\Delta p_B \cdot L}_{} + \underbrace{\frac{\rho g L^2}{2} \sin\alpha}_{}$$

$F_p = F_{p\,\square} + F_{p\,\triangle}$

KAP berechnen oder F_p aufspalten

$$\sum M_A: \quad F_{p\,\square} \cdot \frac{L}{2} + F_{p\,\triangle} \cdot \frac{L}{3} = F_B \cdot L$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{\rho g L^2}{\dots} - \frac{\rho g L^2}{\dots} \sin\alpha + \frac{\rho g L^2}{\dots} \sin\alpha = \frac{\rho g L^2}{\dots} \left(1 - \frac{2}{\dots} \sin\alpha\right)$$

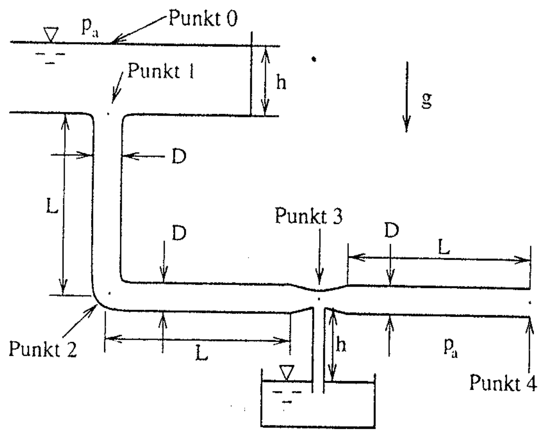
14

2. Aufgabe (14 Punkte)

a) Ein kreiszylindrisches Glas (Radius R) ist bis zur Höhe H mit Wasser gefüllt. Mit welcher Winkelgeschwindigkeit ω darf das Glas konzentrisch rotieren, damit der Boden des Glases gerade noch mit Wasser benetzt bleibt? Es tritt kein Wasser über den Rand des Glases.

Gegeben: $H = 10\text{cm}$, $R = 2\text{cm}$, $g = 10\text{m/s}^2$

In der skizzierten Anordnung fließt Wasser aus einem sehr großen Becken über einen gut gerundeten Einlauf in eine Rohrleitung. Im Punkt 3 wird der Querschnitt der Rohrleitung derart verengt, daß gerade kein Wasser aus einem anderen Becken in die Rohrleitung gesaugt wird. Im Punkt 4 strömt das Wasser ins Freie.



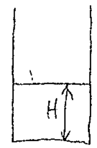
b) Bestimmen Sie für eine verlustfreie Strömung das Querschnittsverhältnis A_4/A_3 allgemein als Funktion von L und h. Geben Sie für den Fall $h = L$ den Wert für A_4/A_3 an.

c) Berechnen Sie nun das benötigte Querschnittsverhältnis A_4/A_3 für den Fall, daß in allen drei Teilabschnitten der Länge L jeweils der Rohrreibungsbeiwert λ vorherrscht. Ansonsten bleibt die Strömung verlustfrei.

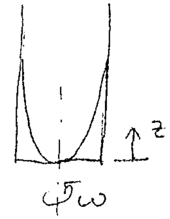
Gegeben für c): $L = 10\text{m}$, $h = 5\text{m}$, $D = 1\text{m}$, $\lambda = 0,1$, $g = 10\text{m/s}^2$

2. Aufg.)

a)



$V_{Wasser} = H\pi R^2$



Bernoulli entlang der Oberfläche:

$p_a + \rho g z(r) - \frac{\rho}{2}\omega^2 r^2 = p_a$

$\Rightarrow z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2$

$V_{Wasser} = \int_0^R 2\pi r\, z(r)\, dr = \int_0^R \frac{\pi \omega^2}{g} r^3\, dr = \frac{\pi \omega^2 R^4}{4g}$

gleichsetzen: $H\pi R^2 = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4gH}{R^2}} = 100\,\frac{1}{s}$

b)

verl.-freie Bern. ⓪→④: $p_a + \rho g(L+h) = p_4 + \frac{\rho}{2}v_4^2 \xRightarrow{p_4=p_a} v_4 = \sqrt{2g(L+h)}$

verl.-freie Bern. ⓪→③: $p_a + \rho g(L+h) = p_3 + \frac{\rho}{2}v_3^2$ (*)

aus Konti $v_3 = v_4\frac{A_4}{A_3}$; für Ansaugen $p_3 \stackrel{!}{=} p_a - \rho g h$

$\xRightarrow{(*)} \rho g(L+h) = -\rho g h + \frac{\rho}{2}v_4^2\left(\frac{A_4}{A_3}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{A_4}{A_3}\right)^2 = \frac{2g(L+2h)}{v_4^2}$

$\Rightarrow \frac{A_4}{A_3} = \sqrt{\frac{L+2h}{L+h}} = f(L,h)$ für $h=L \Rightarrow \frac{A_4}{A_3} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

c)

verl.-behafteter Bern. ⓪→④: $p_a + \rho g(L+h) = p_4 + \frac{\rho}{2}v_4^2 + \Delta p_V$ | $\Delta p_V = \frac{\rho}{2}v_4^2\cdot\lambda\frac{3L}{D}$

$\xRightarrow{p_4=p_a} \rho g(L+h) = \frac{\rho}{2}v_4^2\left(1+\lambda\frac{3L}{D}\right) \Rightarrow v_4^2 = \frac{2g(L+h)}{1+\lambda\frac{3L}{D}} \Rightarrow v_4 = 8{,}66\,\frac{m}{s}$

verl.-behafteter Bern. ⓪→③: $p_a + \rho g(L+h) = p_3 + \frac{\rho}{2}v_4^2\left(\frac{A_4}{A_3}\right)^2 + \frac{\rho}{2}v_4^2\cdot\lambda\frac{2L}{D}$

mit $p_3 = p_a - \rho g h$ (s.o.)

$\Rightarrow 2g(L+2h) = v_4^2\left(\left(\frac{A_4}{A_3}\right)^2 + \lambda\frac{2L}{D}\right)$

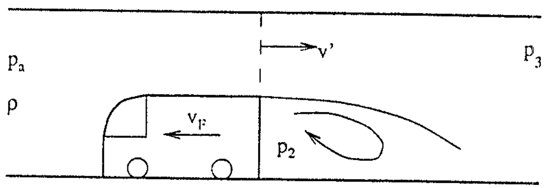
$\Rightarrow \frac{A_4}{A_3} = \sqrt{\frac{2g(L+2h)}{v_4^2} - \lambda\frac{2L}{D}} \Rightarrow \frac{A_4}{A_3} = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1{,}826$

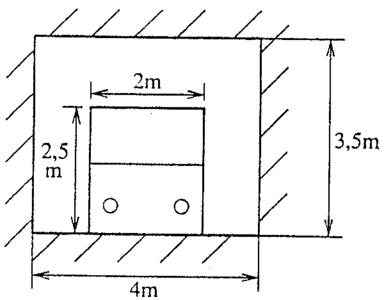
15

3. Aufgabe (10 Punkte)

a) Nennen Sie die Bedingung(en) unter der(denen) in einer Gerinneströmung ein Wassersprung auftreten kann.

Ein Lastwagen fährt mit der Geschwindigkeit v_F durch einen sehr langen Tunnel. An der Hinterkante des Fahrzeugs löst die Strömung ab. Vernachlässigen Sie die Reibung an den Wänden und am Fahrzeug. Die benötigten Abmessungen des Tunnels und des Fahrzeugs können der Skizze entnommen werden.





b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v' relativ zur Wand im Ablösequerschnitt.

c) Bestimmen Sie den Druck p_2 im Totwasser.

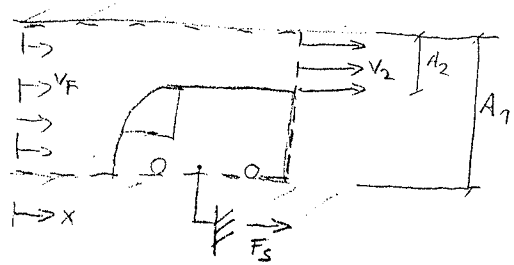
d) Bestimmen Sie den Luftwiderstand des Fahrzeugs.

e) Bestimmen Sie den Druck p_3 weit hinter dem Fahrzeug.

Gegeben für b) bis e): $\rho = 1,25 \mathrm{kg/m^3}$, $p_a = 10^5 \mathrm{N/m^2}$, $v_F = 80 \mathrm{km/h}$

3. Aufg.)

a) Die Gerinneströmung muß im schießenden Zustand sein bzw. die Froudezahl Fr muß größer als 1 sein.



$A_1 = 14 \mathrm{m}^2$

$A_2 = 9 \mathrm{m}^2$

$v_F = 22,2\bar{2} \frac{m}{s}$

b) Konti: $v_2 A_2 = v_F A_1 \Rightarrow v_2 = 34,57 \frac{m}{s}$

$v' = v_2 - v_F = 12,35 \frac{m}{s}$

c) $p_a + \frac{\rho}{2} v_F^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$ (Bern.)

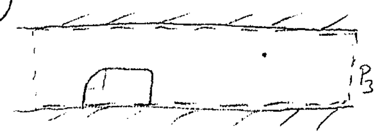
$p_2 = p_a + \frac{\rho}{2}(v_F^2 - v_2^2) = 0,9956 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$

d) IES_x $\boxed{}$ s.o. :

$-\rho v_F^2 A_1 + \rho v_2^2 A_2 = (p_a - p_2) A_1 + F_S$

$\Rightarrow F_W = -F_S = 1334 N$

e)



IES_x:

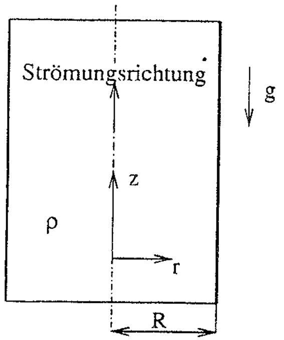
$(p_a - p_3) A_1 + F_S = 0$

$\Rightarrow p_3 = 0,999 \cdot 10^5 \frac{N}{m^2}$

4. Aufgabe (15 Punkte)

16

Ein Fluid (Dichte ρ) soll in einem vertikalen Rohr (Durchmesser $2R$) laminar, ausgebildet und stationär entgegengesetzt zur Gravitationskraft fließen.



a) Welches Vorzeichen muß $\partial p/\partial z$ besitzen?

b) Leiten Sie ausführlich die Schubspannungsverteilung $\tau(r)$ für $0 < r \leq R$ her.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(r)$ für ein Bingham-Fluid mit $\tau = \tau_0 - \eta_B \partial u/\partial r$.

d) Skizzieren Sie im Vergleich das Geschwindigkeitsprofil einer 1) reibungsfreien, 2) laminaren und 3) turbulenten Rohrströmung bei gleichem Volumenstrom und gleichem Rohrdurchmesser.

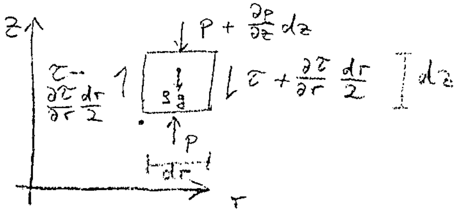
e) Geben Sie die exakte Definition und den Wert der Kennzahl an, mit der man i.a. die laminare von der turbulenten Rohrströmung unterscheidet. Nennen Sie mindestens eine Maßnahme, um diesen laminar-turbulenten Umschlag zu verzögern.

Gegeben: g , ρ , R , τ_0 , η_B , $\partial p/\partial z$ mit $|\partial p/\partial z| > \rho g$

4. Aufg.)

a) Der Druckgradient muß in z-Richtung negativ sein ; $\frac{\partial p}{\partial z} < 0$

b) Kräftebilanz am Kreisringsegment



$$\sum F_z = 0 \Rightarrow p 2\pi r\, dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) 2\pi r\, dr + \left(\tau - \frac{\partial \tau}{\partial r}\frac{dr}{2}\right) 2\pi \left(r - \frac{dr}{2}\right) dz$$

$$- \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r}\frac{dr}{2}\right) 2\pi \left(r + \frac{dr}{2}\right) dz - \rho g\, 2\pi r\, dr\, dz = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} dz\, r\, dr - \tau \frac{dr}{2} 2\, dz - \frac{\partial \tau}{\partial r}\frac{dr}{2} r\, 2\, dz + \cancel{O\left(\left(\frac{dr}{2}\right)^2\right)} r\, dz - \rho g\, r\, dr\, dz = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\tau}{r} - \frac{\partial \tau}{\partial r}} - \rho g = 0 \qquad \Big| \; \frac{\partial (r\tau)}{\partial r} = \tau + r\frac{\partial \tau}{\partial r} \text{ („Kettenregel")}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r\tau)}{\partial r} - \rho g = 0 \Rightarrow \left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\right) r\, dr = d(r\tau)$$

$$\Rightarrow r\tau = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\right)\frac{r^2}{2} + C_1$$

R.B.: $r \to 0 : \tau \to 0 \Rightarrow C_1 = 0$
(Symmetrie!)

$$\Rightarrow \tau(r) = \left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\right)\frac{r}{2}$$

c) $$\tau = \tau_0 - \eta_B \frac{\partial u}{\partial r} \xRightarrow{\text{in } \tau(r) \text{ aus b)}} \tau_0 - \eta_B\frac{\partial u}{\partial r} = \underbrace{\left(-\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g\right)}_{K}\frac{r}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{K}{\eta_B}\frac{r}{2} + \frac{\tau_0}{\eta_B}$$

$$\xRightarrow{\text{Integration}} u(r) = -\frac{K}{\eta_B}\frac{r^2}{4} + \frac{\tau_0}{\eta_B} r + C_2$$

R.B.: $r = R : u = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{K}{\eta_B}\frac{R^2}{4} - \frac{\tau_0}{\eta_B} R$

$$\Rightarrow u(r) = \left(\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g\right)\frac{(r^2 - R^2)}{4\eta_B} + \frac{\tau_0}{\eta_B}(r - R) \qquad (*)$$

Gültigkeitsbereich : $\tau = \tau_0$ bei $r = ?$

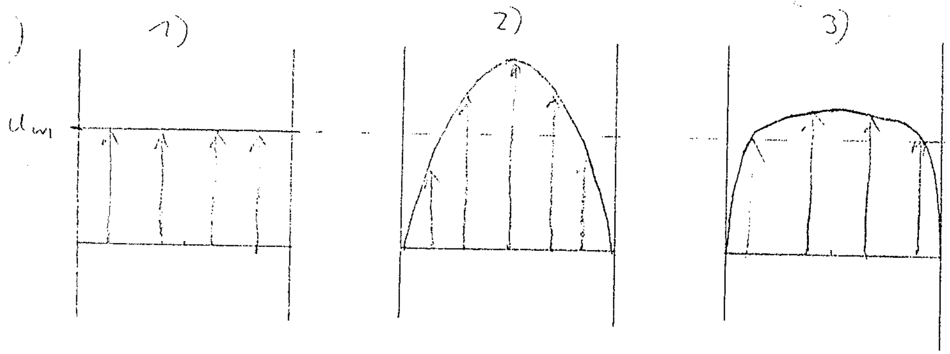
$$\tau \stackrel{!}{=} \tau_0 = K\frac{r}{2} \Rightarrow r = \frac{2\tau_0}{K} \quad , r > 0 \; , K > 0$$

$\Big\{$ für $\frac{2\tau_0}{K} \leq \; \leq R$ gilt $u(r)$ wie oben $(*)$

für $0 \; \leq \; \leq \frac{2\tau_0}{K}$ gilt $u = \ldots = u(r = \frac{2\tau_0}{K})$

17 4. Aufg.)

1)



2) $Re := \frac{3 u_m D}{\eta}$; $Re_{krit} \approx 2300$

Transition kann verzögert werden durch z.B. die Verringerung der Wandrauhigkeit des Rohres.

18

5. Aufgabe (9 Punkte)

a) Weshalb kann man bei demselben physikalischen Problem mit dem Buckinghamschen Π-Theorem auf eine andere Anzahl von Kennzahlen kommen als mit der Methode der Differentialgleichungen?

b) Bei der Beschreibung von Mehrphasenströmungen taucht die folgende vereinfachte Differentialgleichung auf:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 18 \frac{\nu}{d_P^2} \left(\frac{\delta}{1+\alpha\delta}\right) \left(v_z - \frac{dz}{dt}\right) + g \left(\frac{1-\delta}{1+\alpha\delta}\right)$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der Differentialgleichungen die Kennzahl(en) dieses Problems. Drücken Sie die erhaltene(n) Kennzahl(en) durch eine oder mehrere in der Strömungsmechanik häufig verwendete Kennzahlen aus.

Gegeben: ν_{ref} , d_P , g , v_{ref} , $\alpha = 0,5$, $\delta = \rho_F/\rho_P = const$

Hinweis: Betrachten Sie δ nicht als zu ermittelnde Kennzahl.

c) Ein kugelförmiges Partikel (Durchmesser d_P) fällt mit der Sinkgeschwindigkeit v_P in einem mit Luft gefüllten Rohr (Durchmesser d_R). Skizzieren Sie für einen ruhenden Beobachter die radiale Verteilung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente der umgebenden Luft in der horizontalen Ebene des Kugelmittelpunktes zum einen für $d_R >> d_P$ und zum anderen für $d_R \approx 2 \cdot d_P$.

5. Aufg.)

a) Mit dem Buckinghamschen Π-Theorem erhält man die maximale Anzahl von Kennzahlen eines physikalischen Problems. Da in einer DGL noch weitere Informationen stecken, ist die Anzahl der Kennzahlen, die mit der Methode der DGL'en erhalten werden kleiner oder gleich der Anzahl der Kennzahlen, die durch das Buckinghamsche Π-Theorem erhalten werden.

b)

$z = \bar{z} \cdot d_p \qquad v_z = \bar{v}_z \cdot v_{ref} \qquad t = \bar{t} \cdot \frac{d_p}{v_{ref}} \qquad \nu = \bar{\nu} \cdot \nu_{ref}$

DGL:

$$\frac{d^2\bar{z}}{d\bar{t}^2} \cdot \frac{d_p v_{ref}^2}{d_p^2} = 18 \bar{\nu} \frac{\nu_{ref}}{d_p^2} \left(\frac{\delta}{1+\alpha\delta}\right) \left(\bar{v}_z v_{ref} - \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} \cdot \frac{d_p v_{ref}}{d_p}\right) + g \left(\frac{1-\delta}{1+\alpha\delta}\right)$$

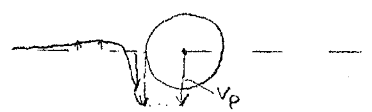
dividiere durch $\frac{v_{ref}^2}{d_p}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\bar{z}}{d\bar{t}^2} = \underbrace{18 \frac{\nu_{ref}}{d_p \cdot v_{ref}}}_{K1} \cdot \bar{\nu} \left(\frac{\delta}{1+\alpha\delta}\right) \left(\bar{v}_z - \frac{d\bar{z}}{d\bar{t}}\right) + \underbrace{\frac{g \cdot d_p}{v_{ref}^2}}_{K2} \left(\frac{1-\delta}{1+\alpha\delta}\right)$$

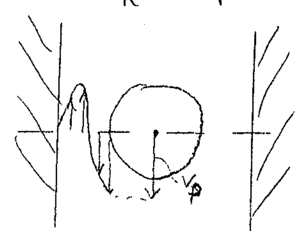
$$K1 = [18] \frac{\nu_{ref}}{d_p v_{ref}} = [18] \frac{1}{Re} \qquad K2 = \frac{g\, d_p}{v_{ref}^2} = \frac{1}{Fr^2}$$

c)

$d_R >> d_p$



$d_R \approx 2 d_p$



19

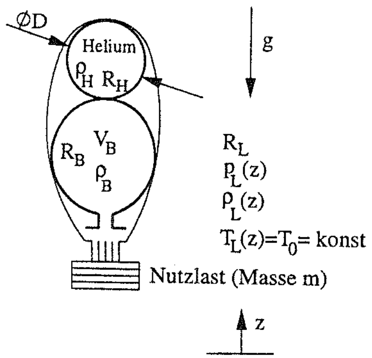
1/7

Klausur Technische Strömungslehre

27. 2. 2001

1. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Ballon zur Erdumrundung besteht aus einer zweigeteilten Ballonhülle und soll eine Nutzlast der Masse m tragen. In der Ballonhülle befindet sich oben ein geschlossener, kugelförmiger Auftriebskörper (Durchmesser D), der mit Helium (ϱ_H) gefüllt ist. Darunter folgt ein offener Auftriebskörper (V_B, ϱ_B), dessen Auftrieb durch Zufuhr von Heißluft aus einem Gasbrenner gesteuert werden kann. Zur Vereinfachung sollen beide Auftriebskörper als starr (Volumen=konst) angesehen werden. Das restliche Volumen in der Ballonhülle sowie der Auftrieb der Nutzlast sind zu vernachlässigen. Nehmen Sie isotherme Atmosphäre mit $T_L(z) = T_0 = konst$ an!



Gegeben: $m, g, V_B, T_L(z) = T_0 = konst$; Gaskonstanten: $R_L, R_B = R_L, R_H$;
für $z = 0$: $\varrho_L(z=0) = \varrho_{L_0}$, $\varrho_B(z=0) = \varrho_{L_0}$, $\varrho_H(z=0) = \varrho_{H_0}$.

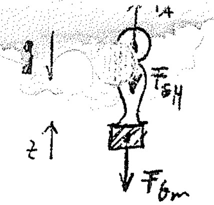
a) Welchen Durchmesser D muss der mit Helium gefüllte Auftriebskörper haben, damit der gesamte Ballon mit Nutzlast in der Höhe $z = 0$ gerade schwebt? Im unteren Auftriebskörper herrscht atmosphärischer Zustand (ϱ_{L_0}, T_0).

b) Bestimmen Sie für eine isotherme Atmosphäre ($T_L(z) = T_0 = konst$) den Verlauf der Dichte $\varrho(z)$ in Abhängigkeit von der Höhe z.

c) Der untere Auftriebskörper werde nun mit einem Gasbrenner für eine bestimmte Zeit beheizt, so daß die Temperatur auf $T_B = 1.1 \cdot T_0$ erhöht wird. Beim Aufstieg des Ballons bleibt die Temperatur T_B konstant; es wird keine Wärme an den oberen Auftriebskörper ($\varrho_H = \varrho_{H_0}$) bzw. an die Umgebung abgegeben. Welche maximale Höhe H erreicht der Ballon?

1. Aufgabe:

a) Σ3



Schweben $\Rightarrow \sum \vec{F}_z = 0$

$\Rightarrow F_A = F_{G_H} + F_{G_m}$ (1)

$\Rightarrow \rho_{L_0} \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{6} = \rho_{H_0} \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{6} + m \cdot g$ (1)

$\Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot m}{\pi \cdot (\rho_{L_0} - \rho_{H_0})}}$ (1)

b) Σ3

$g \downarrow \ \uparrow z$ $\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g$ (1) ; $p = \rho \cdot R \cdot T_0$ (1) mit $T = T_0 = konst$

Luft $\Rightarrow$ $\frac{d\rho_L}{\rho_L} = -\frac{g}{R_L \cdot T_0} dz \Rightarrow \rho_L(z) = \rho_{L_0} \cdot e^{-\left(\frac{g \cdot z}{R_L \cdot T_0}\right)}$ (1)

c) Σ6

$z = H$: Schweben $\Rightarrow \sum \vec{F}_z = 0 \Rightarrow F_{A_{ges}} = F_{G_H} + F_{G_m} + F_{G_B}$ (1)

$\Rightarrow \left(V_B + \frac{\pi \cdot D^3}{6}\right) \cdot g \cdot \rho_L(H) = \frac{\pi \cdot D^3}{6} \cdot g \cdot \rho_{H_0} + m \cdot g + \rho_B(H) \cdot g \cdot V_B$ (1)

$T_B = 1{,}1 \cdot T_0$; $p_B = \rho_B \cdot R_B \cdot 1{,}1 \cdot T_0$

$p_B(z) = p_L(z) \xRightarrow{R_B = R_L} \rho_B(z) = \frac{p_L(z)}{R_L \cdot 1{,}1 \cdot T_0}$ (1)

$p_L(z) = \rho_L(z) \cdot R_L \cdot T_0 \Rightarrow \rho_B(H) = \frac{\rho_L(H)}{1{,}1}$ (1)

$\Rightarrow \rho_L(H) \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^3}{6} + V_B - \frac{V_B}{1{,}1}\right) = m + \frac{\pi \cdot D^3}{6} \cdot \rho_{H_0}$

$\Rightarrow \rho_L(H) = \frac{m + \frac{\pi \cdot D^3}{6} \cdot \rho_{H_0}}{\frac{\pi \cdot D^3}{6} + \frac{V_B}{11}} \overset{!}{=} \rho_{L_0} \cdot e^{-\left(\frac{g \cdot H}{R_L \cdot T_0}\right)}$ (1)

$\Rightarrow H = \frac{R_L \cdot T_0}{g} \cdot \ln\left[\frac{\left(\frac{\pi \cdot D^3}{6} + \frac{V_B}{11}\right) \cdot \rho_{L_0}}{m + \frac{\pi \cdot D^3}{6} \cdot \rho_{H_0}}\right]$ (1)

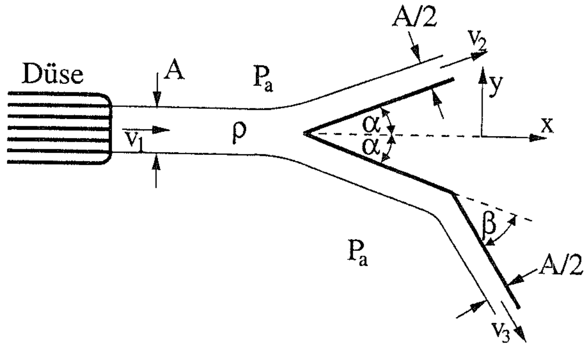
Σ12

Klausur Tech. Ström.
27.2.2001

20

2. Aufgabe (10 Punkte)

Aus einer Düse (Querschnitt A) tritt ein Wasserstrahl mit der Dichte ϱ und der Geschwindigkeit v_1 aus und trifft auf eine Werkzeugschneide. Diese teilt den Wasserstrahl in zwei gleich große Strahlen (Querschnitt A/2) auf. Es soll eine ebene und verlustfreie Strömung vorliegen.



Gegeben: $A, v_1, p_a, \varrho, \alpha, \beta$

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten v_2 und v_3.

b) Bestimmen Sie die Komponenten F_x und F_y der Kraft $\vec{F}$ im gegebenen Koordinatensystem (x, y), die vom Wasserstrahl auf die Werkzeugschneide ausgeübt wird.

Im folgenden soll der Fall $\alpha = 0$ betrachtet werden!

c) Die Werkzeugschneide bewege sich nun mit konstanter Geschwindigkeit v_F entlang der x-Achse auf die Düse zu. Bestimmen Sie die Komponenten F_x und F_y der resultierenden Kraft $\vec{F}$ des Wasserstrahls auf die Werkzeugschneide.

Hinweis:

- Der Einfluß der Erdbeschleunigung soll nicht berücksichtigt werden.
- Alle Reibungseinflüsse sind zu vernachlässigen.
- Auf die Werkzeugschneide wirkt von allen Seiten der Umgebungsdruck p_a.

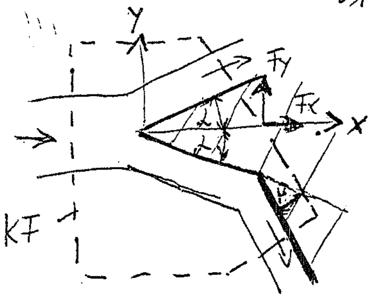
2. Aufgabe: a) Bernoulli: $\frac{\varrho}{2} v_1^2 + p_a = \frac{\varrho}{2} v_2^2 + p_a = \frac{\varrho}{2} v_3^2 + p_a$ (1)

Σ2

$\Rightarrow v_1 = v_2 = v_3$ (1) (oder Symmetrie (2))

b)

Σ4



$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_{KF} \varrho \cdot \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dA = \sum \vec{F}$$

(2) X-Richtung: $\varrho \cdot v_1 \cdot (-v_1) \cdot A + \varrho \cdot v_1 \cdot \cos\alpha \cdot (v_1) \cdot \frac{A}{2} + \varrho \cdot v_1 \cdot \cos(\alpha+\beta) \cdot v_1 \cdot \frac{A}{2} = F_x$

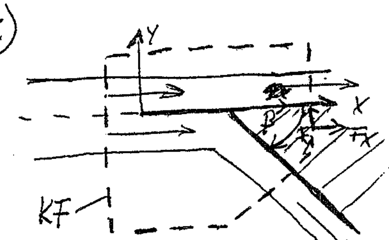
$\Rightarrow F_x = \frac{\varrho \cdot v_1^2 \cdot A}{2} \cdot [\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) - 2] \xRightarrow{\text{Kraft auf Schneide}} -F_x$

(2) Y-Richtung: $\varrho \cdot v_1 \cdot \sin\alpha \cdot (v_1) \cdot \frac{A}{2} - \varrho \cdot v_1 \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot v_1 \cdot \frac{A}{2} = F_y$

$\Rightarrow F_y = \frac{\varrho \cdot v_1^2 \cdot A}{2} \cdot [\sin\alpha - \sin(\alpha+\beta)] \xRightarrow{\text{Kraft auf Schneide}} -F_y$

c)

Σ4



Im Relativsystem:

$$\vec{v}_{rel} = \vec{v} + \vec{v}_F$$

Für die Bestimmung der Kraft auf die Schneide, ist nur der untere Teil der Kontrollfläche relevant!

(2) X-Richtung: $\varrho \cdot v_{rel} \cdot (-v_{rel}) \cdot \frac{A}{2} + \varrho \cdot v_{rel} \cdot \cos\beta \cdot (v_{rel}) \cdot \frac{A}{2} = F_x$

$v_{rel} = v_1 + v_F$

$\Rightarrow F_x = \varrho \cdot (v_1 + v_F)^2 \cdot \frac{A}{2} \cdot (\cos\beta - 1) \xRightarrow{\text{Kraft auf Schneide}} -F_x$

(2) Y-Richtung: $-\varrho \cdot v_{rel} \cdot \sin\beta \cdot (v_{rel}) \cdot \frac{A}{2} = F_y$

$\Rightarrow F_y = -\varrho \cdot (v_1 + v_F)^2 \cdot \frac{A}{2} \cdot \sin\beta \xRightarrow{\text{Kraft auf Schneide}} -F_y$

Σ10

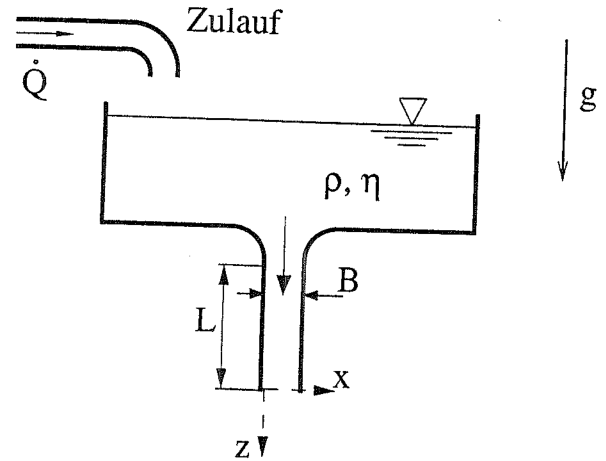
Klausur Techn. Ström.   S/7

27.2.2001

21

3. Aufgabe (12 Punkte)

Zur Bestimmung der Zähigkeit η einer Flüssigkeit mit der Dichte ϱ wird die abgebildete Vorrichtung benutzt. Über den Zulauf wird ein konstanter Volumenstrom $\dot{Q}$ in einen großen Behälter mit **konstanter** Füllhöhe gefördert. Von dort strömt das Fluid unter dem Einfluß der Erdschwere g durch einen Spalt mit rechteckigem Querschnitt (Breite B, Tiefe s) ins Freie. Die Strömung im Spalt kann als eben und laminar betrachtet werden. Am Spalteintritt sei die Strömung bereits voll ausgebildet. Der Druckgradient dp/dz in Strömungsrichtung z ist im Spalt über der Lauflänge L konstant.



Gegeben: $\dot{Q}, L, B, s, \eta, \varrho, g$

a) Ermitteln Sie aus dem Kräftegleichgewicht an einem differentiellen Element im Spalt die Schubspannungsverteilung $\tau(x)$ und die Geschwindigkeitsverteilung $w(x)$ in Abhängigkeit von der Koordinate x und dem Druckgradienten dp/dz.

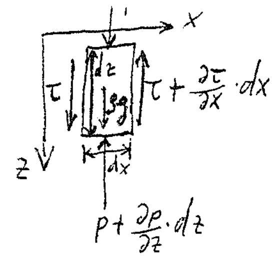
b) Skizzieren Sie die Schubspannungs- $\tau(x)$ und Geschwindigkeitsverteilung $w(x)$ qualitativ für einen negativen Druckgradienten in Strömungsrichtung ($dp/dz < 0$).

c) Bestimmen Sie den Druckgradienten dp/dz, indem Sie einen Zusammenhang zwischen dem Volumenstrom $\dot{Q}$ des Zulaufs und der Geschwindigkeitsverteilung $w(x)$ im Spalt herstellen.

Hinweis:

- Die Flüssigkeit verhalte sich wie ein Newtonsches Fluid.

3. Aufgabe: $\Sigma 7$



$$\frac{dI_z}{dt} = 0 = \sum \vec{F}_z \quad 1$$

$$\Rightarrow -\frac{dp}{dz} - \frac{d\tau}{dx} + \varrho \cdot g = 0 \Rightarrow \frac{d\tau}{dx} = -\frac{dp}{dz} + \varrho \cdot g \quad 1$$

Integration

$$\Rightarrow \tau(x) = \varrho \cdot g \cdot x - \frac{dp}{dz} \cdot x + C_1$$

Newton: $\tau = -\eta \frac{dw}{dx}$ 1

$$\Rightarrow \frac{dw}{dx} = -\frac{\varrho \cdot g}{\eta} \cdot x + \frac{dp}{dz} \cdot \frac{x}{\eta} - \frac{C_1}{\eta}$$

Integration

$$\Rightarrow w(x) = -\frac{\varrho \cdot g}{2 \cdot \eta} \cdot x^2 + \frac{dp}{dz} \cdot \frac{x^2}{2 \cdot \eta} - \frac{C_1 \cdot x}{\eta} + C_2$$

R.B.: 1 $w(x=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

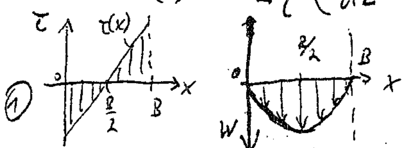
1 $w(x=B) = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{B}{2}\left(\varrho \cdot g - \frac{dp}{dz}\right)$

(oder über $\tau(x)$; 1. RB: $\tau(x=\frac{B}{2}) = 0$ Symmetrie $\Rightarrow C_1 = \dots$)

$$\Rightarrow \tau(x) = \left(\varrho \cdot g - \frac{dp}{dz}\right) \cdot \left(x - \frac{B}{2}\right) \quad 1$$

$$w(x) = \frac{1}{2\eta}\left(\frac{dp}{dz} - \varrho \cdot g\right) \cdot \left(x^2 - B \cdot x\right) \quad 1$$

$\Sigma 2$ b) 1



1

$\Sigma 3$ c)

$$\dot{Q} = \int_0^B w(x) \cdot s \cdot dx = \int_0^B \frac{1}{2\eta}\left(-\varrho \cdot g + \frac{dp}{dz}\right) \cdot \left(x^2 - B \cdot x\right) \cdot s \, dx \quad 1$$

$$= -\frac{s \cdot B^3}{12 \cdot \eta} \cdot \left(-\varrho \cdot g + \frac{dp}{dz}\right) \quad 1$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\frac{\dot{Q} \cdot 12 \cdot \eta}{s \cdot B^3} + \varrho \cdot g \quad 1$$

$\Sigma 12$

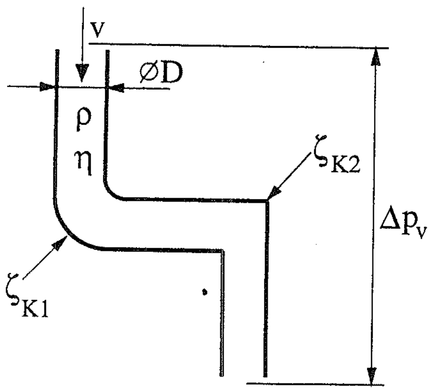
Klausur Tech. Strom. 4 1 +

27. 2. 2001

22

4. Aufgabe (8 Punkte)

Der dargestellte Teil einer geplanten Pipeline zur Förderung von Erdöl (ϱ, η) besteht aus zwei Rohrkrümmern mit den Verlustbeiwerten ζ_{K1} und ζ_{K2}. Die Pipeline soll für eine Durchflußgeschwindigkeit von $v = 1,5 m/s$ und den über der Lauflänge konstanten Durchmesser $D = 1m$ ausgelegt werden. In einem Modellversuch mit Wasser (ϱ', η') wird an einem verkleinerten Modell $(D'/D = 1/10)$ dieses Pipelineabschnitts aufgrund der strömungsmechanischen Verluste in den Krümmern ein Druckverlust von $\Delta p'_v = 1,2 N/m^2$ gemessen. Der Einfluß der Erdschwere und der Druckverlust durch Rohrreibung soll vernachlässigt werden!



Gegeben:

- Hauptausführung: $D = 1m,\ v = 1,5 m/s,\ \varrho = 850 kg/m^3,\ \eta = 10^{-1} Ns/m^2$
- Modell: $\frac{D'}{D} = \frac{1}{10},\ \Delta p'_v = 1,2 N/m^2,\ \varrho' = 10^3 kg/m^3,\ \eta' = 10^{-3} Ns/m^2$

a) Welche Geschwindigkeit v' ist im Modellversuch zu wählen?

b) Bestimmen Sie den Gesamtverlustbeiwert $\zeta_K = \zeta_{K1} + \zeta_{K2}$.

c) Wie groß ist der zu erwartende Druckverlust Δp_v für die Hauptausführung?

d) Welche Leistung P ist zur Überwindung der strömungsmechanischen Verluste in der Hauptausführung nötig?

4. Aufgabe:

a) $Re = Re' \Rightarrow \frac{\varrho \cdot v \cdot D}{\eta} = \frac{\varrho' \cdot v' \cdot D'}{\eta'}$ 1

Σ2

$\Rightarrow v' = v \cdot \frac{\varrho}{\varrho'} \cdot \frac{\eta'}{\eta} \cdot \frac{D}{D'} = 0,128 \frac{m}{s}$ 1

b) $\Delta p_v' = \frac{\varrho'}{2} \cdot v'^2 \cdot \zeta_K'$ 1

$\Rightarrow \zeta_K' = \frac{\Delta p_v'}{\frac{\varrho'}{2} \cdot v'^2} = 2 \cdot Eu'$

$Eu' = Eu$ 1

Σ4

$\Rightarrow \zeta_K = \zeta_K' = \frac{\Delta p_v'}{\frac{\varrho'}{2} \cdot v'^2} = 0,148$ 1

c) $\Delta p_v = \frac{\varrho}{2} v^2 \cdot \zeta_K = 141,5 \frac{N}{m^2}$ 1

d) $P = \dot{Q} \cdot \Delta p_v$ 1

Σ2

$= \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot v \cdot \Delta p_v = 0,167\ kW$ 1

$\boxed{\Sigma 8}$

(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

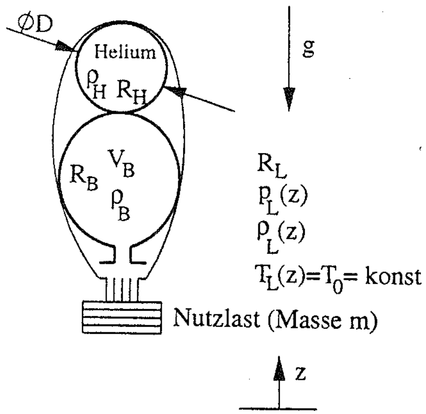
23

Kombinationsklausur
Teil Strömungslehre

27. 02. 2001

1. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Ballon zur Erdumrundung besteht aus einer zweigeteilten Ballonhülle und soll eine Nutzlast der Masse m tragen. In der Ballonhülle befindet sich oben ein geschlossener, kugelförmiger Auftriebskörper (Durchmesser D), der mit Helium (ρ_H) gefüllt ist. Darunter folgt ein offener Auftriebskörper (V_B, ρ_B), dessen Auftrieb durch Zufuhr von Heißluft aus einem Gasbrenner gesteuert werden kann. Zur Vereinfachung sollen beide Auftriebskörper als starr (Volumen=konst) angesehen werden. Das restliche Volumen in der Ballonhülle sowie der Auftrieb der Nutzlast sind zu vernachlässigen. Nehmen Sie isotherme Atmosphäre mit $T_L(z) = T_0 = konst$ an!



a) Welchen Durchmesser D muß der mit Helium gefüllte Auftriebskörper haben, damit der gesamte Ballon mit Nutzlast in der Höhe $z = 0$ gerade schwebt? Im unteren Auftriebskörper herrscht atmosphärischer Zustand (ρ_{L_0}, T_0).

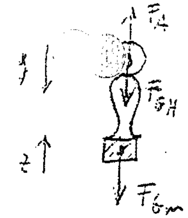
b) Bestimmen Sie den Verlauf der Dichte $\rho(z)$ in Abhängigkeit von der Höhe z.

c) Der untere Auftriebskörper werde nun mit einem Gasbrenner für eine bestimmte Zeit beheizt, so daß die Temperatur auf $T_B = 1,1 \cdot T_0$ erhöht wird. Beim Aufstieg des Ballons bleibt die Temperatur T_B konstant; es wird keine Wärme an den oberen Auftriebskörper ($\rho_H = \rho_{H_0}$) bzw. an die Umgebung abgegeben. Welche maximale Höhe H erreicht der Ballon?

Gegeben: $m, g, V_B, T_L(z) = T_0 = konst$, Gaskonstanten: $R_L, R_B = R_L, R_H$;
für $z = 0: \rho_L(z=0) = \rho_{L_0}$, $\rho_B(z=0) = \rho_{L_0}$, $\rho_H(z=0) = \rho_{H_0}$.

1. Aufgabe:

a)



Schweben $\Rightarrow \sum \vec{F}_z = 0$

$$\Rightarrow F_A = F_{GH} + F_{Gm}$$

$$\Rightarrow \rho_{L0} \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{6} = \rho_{H0} \cdot g \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{6} + m \cdot g$$

$$\Rightarrow D = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot m}{\pi \cdot (\rho_{L0} - \rho_{H0})}}$$

b) $\frac{dp}{dz} = -\rho \cdot g$; $p = \rho \cdot R \cdot T_0$ mit $T = T_0 = konst$

Luft $\Rightarrow \frac{d\rho_L}{\rho} = -\frac{g}{R_L \cdot T_0} dz \Rightarrow \rho_L(z) = \rho_{L0} \cdot e^{-\left(\frac{g \cdot z}{R_L \cdot T_0}\right)}$

c) $z = H$: Schweben $\Rightarrow \sum \vec{F}_z = 0 \Rightarrow F_{AGes} = F_{GH} + F_{Gm} + F_{GB}$

$$\Rightarrow \left(V_B + \frac{\pi \cdot D^3}{6}\right) \cdot g \cdot \rho_L(H) = \frac{\pi \cdot D^3}{6} \cdot g \cdot \rho_{H_0} + m \cdot g + \rho_B(H) \cdot g \cdot V_B$$

$T_B = 1,1 \cdot T_0$; $p_B = \rho_B \cdot R_B \cdot 1,1 \cdot T_0$

$$p_B(z) = p_L(z) \xRightarrow{R_B = R_L} \rho_B(z) = \frac{p_L(z)}{R_L \cdot 1,1 \cdot T_0}$$

$$p_L(z) = \rho_L(z) \cdot R_L \cdot T_0 \Rightarrow \rho_B(H) = \frac{\rho_L(H)}{1,1}$$

$$\Rightarrow \rho_L(H) \cdot \left(\frac{\pi \cdot D^3}{6} + V_B - \frac{V_B}{1,1}\right) = m + \frac{\pi \cdot D^3}{6} \cdot \rho_{H_0}$$

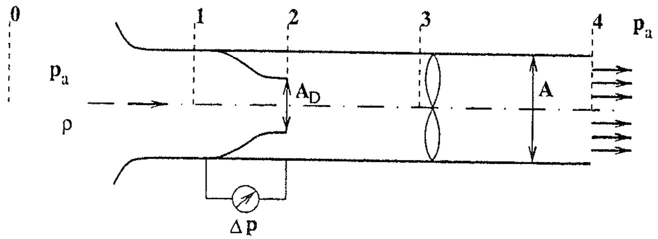
$$\Rightarrow \rho_L(H) = \frac{m + \frac{\pi \cdot D^3}{6} \cdot \rho_{H_0}}{\frac{\pi \cdot D^3}{6} + \frac{V_B}{11}} \doteq \rho_{L_0} \cdot e^{-\left(\frac{g \cdot H}{R_L T_0}\right)}$$

$$\Rightarrow H = \frac{R_L T_0}{g} \cdot \ln\left[\frac{\left(\frac{\pi \cdot D^3}{6} + \frac{V_B}{11}\right) \cdot \rho_{L0}}{m + \frac{\pi \cdot D^3}{6} \cdot \rho_{H0}}\right]$$

1 —

2. Aufgabe (12 Punkte)

Der Volumenstrom eines Lüftungsgebläses mit gut gerundetem Einlauf wird mit einer Düse gemessen.



a) Skizzieren Sie sorgfältig den Verlauf des statischen Druckes und des Gesamtdruckes entlang der Rohrachse.

b) Bestimmen Sie den Volumenstrom.

c) Bestimmen Sie den Druck im Punkt 3.

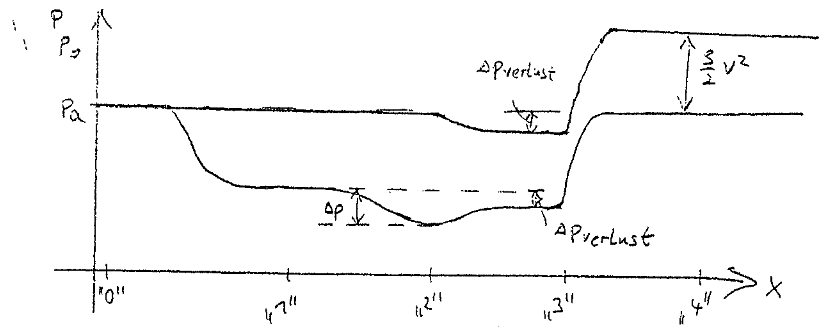
d) Bestimmen Sie die Gebläseleistung.

Gegeben: $A = 1\text{m}^2$, $A_D = 0,5\text{m}^2$, $p_a = 10^5\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $\Delta p = 300\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $\rho = 1,25\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

Hinweis: Die Reibungskräfte sind zu vernachlässigen. Die Ausdehnung der Rotorblätter des Gebläses sind zu vernachlässigen.

Aufg. 2)

a)



b) $p_a = p_1 + \frac{\varrho}{2}v_1^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2}v_2^2$ (Bern.)

$\Delta p > 0$ d.h. $\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$

$A \cdot v_1 = A_D \cdot v_2$ (Konti)

$\Rightarrow \Delta p = \frac{\varrho}{2}v_1^2\left(\left(\frac{A}{A_D}\right)^2 - 1\right)$

$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho\left(\left(\frac{A}{A_D}\right)^2 - 1\right)}} = 12,65\ \frac{m}{s}$

$\Rightarrow \dot{Q} = v_1 \cdot A = 12,65\ \frac{m^3}{s}$

c) mit Bilanzhülle!

IES: $\varrho v_3^2 A - \varrho v_2^2 A_D = (p_2 - p_3)A$, $p_2 = p_a - \frac{\varrho}{2}v_2^2$ (s.o.)

$\Rightarrow p_3 = p_2 + \varrho v_2^2 \frac{A_D}{A} - \varrho v_3^2$, $v_3 = v_1$ (Konti)

$\Rightarrow p_3 = p_a - \frac{\varrho}{2}v_2^2 - \varrho v_1^2 + \varrho v_2^2 \frac{A_D}{A}$, $v_2 = v_1 \frac{A}{A_D}$ (Konti)

$\Rightarrow p_3 = p_a - \frac{\varrho}{2}v_1^2\left(\frac{A^2}{A_D^2} + 2 - 2\frac{A}{A_D}\right)$

$\Rightarrow p_3 = 99800\ \frac{N}{m^2}$

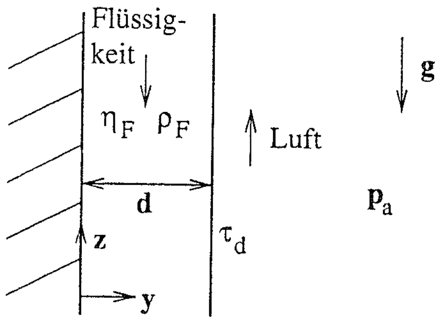
d) $P_{Gebl.} = \Delta p_0 \cdot \dot{Q}$ $v = \text{konst} \Rightarrow \Delta p_0 = p_a - p_3$

$= (p_a - p_3) \cdot \dot{Q} = 2530\ W$

25

3. Aufgabe (11 Punkte)

Ein Flüssigkeitsfilm (η_F, ρ_F) läuft vertikal an einer Wand herab. Durch einen aufwärts gerichteten Strom der umgebenden Luft wird an der Grenze zwischen Luft und Flüssigkeit die Schubspannung τ_d aufgeprägt.



a) Leiten Sie die Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeit als Funktion von y und τ_d her.

b) Bestimmen Sie τ_d derart, daß der über die Filmdicke d gemittelte Volumenstrom der Flüssigkeit verschwindet.

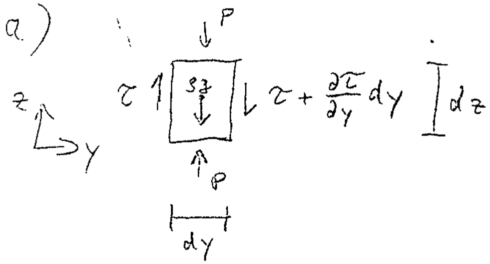
c) Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeit für die unter b) berechnete Schubspannung τ_d.

d) Auf eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω rotierende Scheibe wird mittig zulaufendes Fluid (Volumenstrom $\dot{Q}$) gegeben. Benennen Sie die 3 Arten der Ablösung am Scheibenrand und sortieren Sie diese nach steigendem $\dot{Q}$ bei konstantem ω.

Gegeben: g, d, ρ_F, η_F

· Aufg 3)

a)



Kräftegleichgewicht in z-Ri.:

$$\tau\,dz - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right) dz = \rho g\, dy\, dz$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\rho g$$

$$\Rightarrow \tau = -\rho_F g\, y + C_1 \qquad | \text{ mit } \tau(z, y=d) = \tau_d$$

$$\Rightarrow \tau_d = -\rho_F g\, d + C_1 \Rightarrow C_1 = \tau_d + \rho_F g\, d$$

mit $\tau = -\eta_F \frac{du}{dy}$

$$\Rightarrow -\eta_F \frac{du}{dy} = -\rho_F g (y-d) + \tau_d$$

$$\Rightarrow du = \left(\frac{\rho_F g}{\eta_F}(y-d) - \frac{\tau_d}{\eta_F}\right) dy$$

$$\Rightarrow u = \frac{\rho_F g}{\eta_F}\left(\frac{y^2}{2} - dy\right) - \frac{\tau_d}{\eta_F} y + C_2$$

mit $u(z, y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$.

$$\Rightarrow u(\tau_d, y) = \frac{\rho_F g}{\eta_F}\left(\frac{y^2}{2} - dy\right) - \frac{\tau_d}{\eta_F} y$$

b)

$$\dot{Q} = B \int_0^d \left[\frac{\rho_F g}{\eta_F}\left(\frac{y^2}{2} - y\cdot d\right) - \frac{\tau_d}{\eta_F} y\right] dy$$

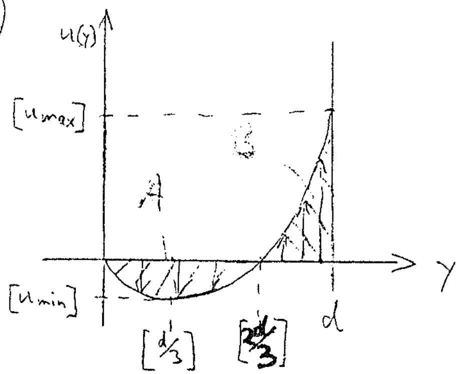
$$= B\left[\frac{\rho_F g}{\eta_F}\left(\frac{y^3}{6} - \frac{y^2 d}{2}\right) - \frac{\tau_d}{\eta_F}\frac{y^2}{2}\right]_0^d$$

Aufg. 3)

b) $\dot{Q} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \frac{\tau_d}{\eta_F}\frac{d^2}{2} = -\frac{\rho_F g d^3}{3\eta_F}$

$\Rightarrow \tau_d = -\frac{2}{3}\rho_F g d$

c)



[parabelförmiger Verlauf,
Fläche A = Fläche B]

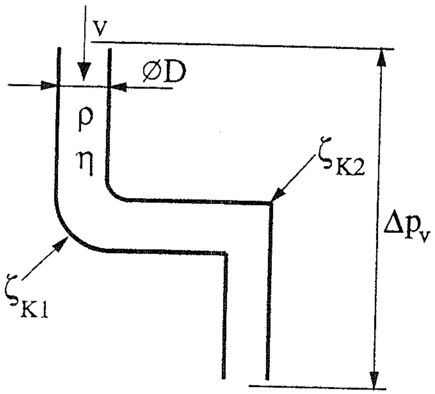
d)
- Tropfenablösung
- Fadenablösung
- Lamellenablösung

$\dot{Q}$ nimmt zu
bei konst. ω

27

4. Aufgabe (8 Punkte)

Der dargestellte Teil einer geplanten Rohrleitung zur Förderung von Erdöl (ρ, η) besteht aus zwei Rohrkrümmern mit den Verlustbeiwerten ζ_{K1} und ζ_{K2}. Die Rohrleitung soll für eine Durchflußgeschwindigkeit von $v = 1,5m/s$ und den über der Lauflänge konstanten Durchmesser $D = 1m$ ausgelegt werden. In einem Modellversuch mit Wasser (ρ', η') wird an einem verkleinerten Modell ($D'/D = 1/10$) dieses Rohrleitungsabschnitts ein Druckverlust von $\Delta p'_v = 1,2N/m^2$ gemessen. Der Einfluß der Erdschwere und der Druckverlust durch Rohrreibung soll vernachlässigt werden!



a) Welche Geschwindigkeit v' ist im Modellversuch zu wählen?

b) Bestimmen Sie den Gesamtverlustbeiwert $\zeta_K = \zeta_{K1} + \zeta_{K2}$.

c) Wie groß ist der zu erwartende Druckverlust Δp_v für die Hauptausführung?

d) Welche Leistung P ist zur Überwindung der strömungsmechanischen Verluste in der Hauptausführung nötig?

Gegeben:

- Hauptausführung: $D = 1m,\ v = 1,5m/s,\ \rho = 850kg/m^3,\ \eta = 10^{-1}Ns/m^2$
- Modell: $\frac{D'}{D} = \frac{1}{10},\ \Delta p'_v = 1,2N/m^2,\ \rho' = 10^3kg/m^3,\ \eta' = 10^{-3}Ns/m^2$

4 Aufgabe:

a) $Re = Re' \Rightarrow \frac{\rho \cdot v \cdot D}{\eta} = \frac{\rho' \cdot v' \cdot D'}{\eta'}$

$$\Rightarrow v' = v \cdot \frac{\rho}{\rho'} \cdot \frac{\eta'}{\eta} \cdot \frac{D}{D'} = 0,1275 \frac{m}{s}$$

b) $\Delta p_v' = \frac{\rho'}{2} \cdot v'^2 \cdot \zeta_K'$

$$\Rightarrow \zeta_K' = \frac{\Delta p_v'}{\frac{\rho'}{2} \cdot v'^2} = 2 \cdot Eu'$$

$Eu' = Eu$

$$\Rightarrow \zeta_K = \zeta_K' = \frac{\Delta p_v'}{\frac{\rho'}{2} \cdot v'^2} = 0,148$$

c) $\Delta p_v = \frac{\rho}{2} v^2 \cdot \zeta_K = 141,5 \frac{N}{m^2}$

d) $P = \dot{Q} \cdot \Delta p_v$

$$= \frac{\pi \cdot D^2}{4} \cdot v \cdot \Delta p_v = 0,167 \, kW$$

28

(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

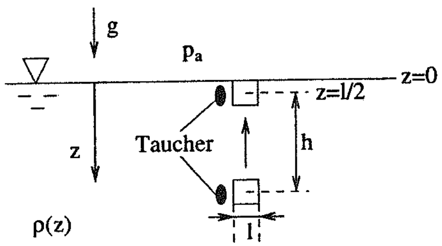
2,5 h

Klausur Strömungslehre

21. 7. 2000

1. Aufgabe (11 Punkte)

Im Meer sei die aufgrund unterschiedlichen Salzgehaltes vorliegende Dichteverteilung $\rho(z)$ bekannt. Ein Taucher soll eine würfelförmige Kiste der Kantenlänge l aus der Tiefe $z = h + l/2$ bis zur Tiefe $z = l/2$ heben (s. Skizze). Auf die Kiste wirkt die Gewichtskraft F_G, die an jeder Stelle größer ist, als die auf die Kiste wirkende Auftriebskraft.



a) Bestimmen Sie die Druckverteilung $p(z)$.

b) Welche Arbeit verrichtet der Taucher bei dieser Bergung? Berücksichtigen Sie dazu nur die Gewichts- und die Auftriebskraft der Kiste.

c) Der Taucher besitzt zusammen mit seiner Ausrüstung (ohne Schwimmweste) die Dichte ρ_T und das Volumen V_T. In der Tiefe z_T hat er seine im Volumen veränderliche Schwimmweste mit Luft unter Umgebungsdruck $p(z_T)$ derart befüllt, daß er gerade schwebt. Die Weste mitsamt der befüllten Luft hat eine Dichte $\rho_{Weste} \ll \rho_0$ und in der Tiefe z_T ein Volumen V_W.
Bestimmen Sie z_T.

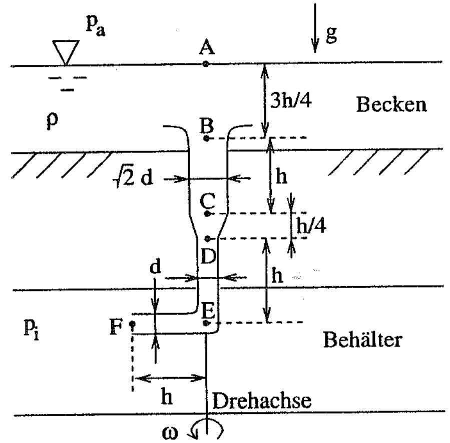
d) Die Schwimmweste aus c) darf sich maximal bis zu einem Volumen $V_{max} = 2V_W$ ausdehnen bevor sie platzt. Bis zu welcher Tiefe z_{min} darf der Taucher aus c) höchstens aufsteigen?
Nehmen Sie isotherme Zustandsänderung an.

Gegeben: $p_a, \rho_0, C, g, h, l, F_G, \rho_T, V_T, V_W, \quad \rho(z) = \rho_0 + Cz, \quad C > 0, \quad z \geq 0$

Hinweis: $l \ll h$

2. Aufgabe (15 Punkte)

Ein großes Becken ist über einen gut gerundeten Abfluß mit einem Behälter verbunden, in dem der Druck p_i herrscht. In dem großen Behälter ist ein abgewinkeltes Rohr angeschlossen, das um die Drehachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω angetrieben wird. Zwischen den Punkten C und D tritt durch Einbauten der Druckverlustbeiwert ζ auf. Das Rohr hat zwischen den Punkten B und C den Rohrreibungsbeiwert λ_1 und zwischen den Punkten D und F den Rohrreibungsbeiwert λ_2.



a) Es wird die Druckdifferenz $\Delta p = p_C - p_D = \rho g h 7/4$ gemessen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_C im Punkt C. (Δp ist nur für Teilaufgabe a) gegeben!)

b) Berechnen Sie bei einem Behälterinnendruck $p_i = p_a$ die Winkelgeschwindigkeit ω derart, daß die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit des Fluids im Punkt F gleich der Radialkomponente ist.

c) Betrachten Sie eine Stromlinie von A nach F für die Anordnung aus b). Zeichnen Sie sorgfältig die gesamte mechanische Energie und deren Anteile entlang der Stromlinie als Funktion der Lauflänge.

d) Nun sei $\lambda_1, \lambda_2, \zeta, \omega = 0$ und die Geschwindigkeit im Punkt F $v_F = v_0$. Plötzlich wird der Druck im Behälter erhöht auf $p_i = p_a + 3\rho g h$ (d.h. $v_F = 0$ für den stationären Zustand). Berechnen Sie das Volumen, das von jetzt bis zu dem Zeitpunkt austritt, an dem die Geschwindigkeit $v_F = 0{,}01 v_0$ ist. Vernachlässigen Sie dabei den instationären Anteil von Punkt C nach Punkt D.

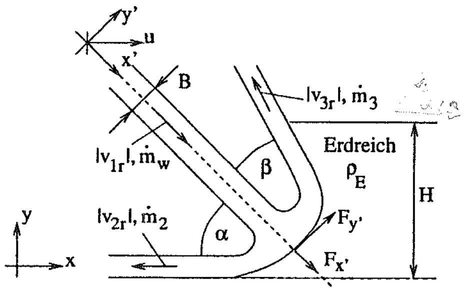
Gegeben: $g, h, d, \zeta, \lambda_1, \lambda_2 \quad d \ll h$

Hinweis: $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r$

29

3. Aufgabe (13 Punkte)

Mit einem Wasserstrahl (Dichte ρ_w, Breite B) wird das Erdreich (Dichte ρ_E) auf einer Höhe H und einer Tiefe T abgetragen. Dabei bewegt sich der Wasserstrahl mit einer Geschwindigkeit u in x-Richtung relativ zum Erdreich. Der Wasserstrahl trifft unter einem Winkel α auf das Erdreich auf und teilt sich gemäß der Zeichnung in zwei Teilstrahlen auf. Diese Teilstrahlen führen jeweils einen Teil des abgespülten Erdreiches ($\dot{m}_E$) mit sich. Die eingezeichneten Geschwindigkeiten $|v_{1r}|$, $|v_{2r}|$ und $|v_{3r}|$ beziehen sich auf das mit u mitbewegte Relativsystem (x', y').



Das abströmende Erdreich soll als Kontinuum betrachtet werden. In allen Bereichen herrscht der Druck p_a. Alle Strahlen haben die Tiefe T.

a) Bestimmen Sie den Massenstrom $\dot{m}_W$ und $\dot{m}_E$.

b) Vom Erdreich wirken auf den Strahl die Kräfte $F_{x'}$ und $F_{y'}$. Stellen Sie die Impulsbilanz im Koordinatensystem (x', y') für die x'- und die y'-Richtung in Abhängigkeit von $\dot{m}_2, \dot{m}_3$ und β auf (Formulieren Sie nur den Ansatz).

c) Stellen Sie zusätzlich zu den beiden Gleichungen aus b) eine dritte Gleichung zur Bestimmung von $\dot{m}_2, \dot{m}_3$ und β auf.

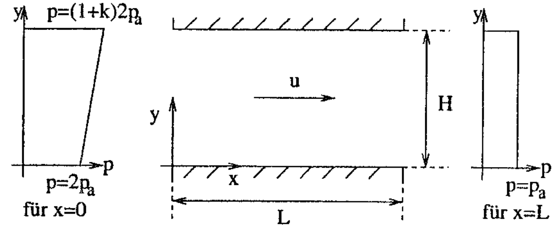
d) Nun sei $\beta < \pi/2$ und $\alpha = 0$, wobei der untere Teilstrahl ($\dot{m}_2$) weiterhin in negativer x-Richtung strömt. Die Kräfte F_x und F_y, die vom Erdreich auf den Strahl wirken, sind nun gegeben.
Stellen Sie für das mit dem Erdreich verbundene Koordinatensystem (x, y) die Impulsbilanz in x- und in y-Richtung in Abhängigkeit von $\dot{m}_2, \dot{m}_3$ und β auf (Formulieren Sie nur den Ansatz).

Gegeben: $\rho_W, \rho_E, B, T, H, u, |v_{1r}|, |v_{2r}|, |v_{3r}|, \alpha, F_{x'}, F_{y'}$

4. Aufgabe (9 Punkte)

Zwischen zwei ebenen Platten mit dem Abstand H strömt ein inkompressibles Newtonsches Fluid mit konstanter Zähigkeit η. In dem Bereich $0 \leq x \leq L$ sei die Strömung stationär und laminar. Bei $x = 0$ und $x = L$ sind die skizzierten Druckprofile aufgeprägt. Man erhält die folgende angenäherte Druckverteilung:

$$p(x,y) = p_a\frac{x}{L} + 2p_a(1 + k\frac{y}{H})(1 - \frac{x}{L}) \quad , \quad k > 0$$



a) Leiten Sie das Geschwindigkeitsprofil der Kanalströmung für $0 \leq x \leq L$ her. Vernachlässigen Sie Querströmungen (u hängt nur von y ab; $v = 0$)!

b) An welcher Stelle (y/H) ist die Schubspannung für $k = 0.2$ gleich null?

Gegeben: p_a, k, L, H, η

5. Aufgabe (11 Punkte)

a) Das Verhältnis welcher Kräfte beschreibt die Reynoldszahl? Geben Sie die Definition der Reynoldszahl an.

b) Ein unendlich langer Zylinder mit dem Durchmesser D wird von einem Fluid, das die Zähigkeit η und die Dichte ρ besitzt, mit der Geschwindigkeit u_∞ quer angeströmt. Die Widerstandskraft W des Zylinders soll gemessen werden. Bestimmen Sie mit Hilfe des Buckinghamschen Π-Theorems die relevanten Kennzahlen.

c) Gegeben sind die instationären, kompressiblen, zweidimensionalen Erhaltungsgleichungen der Masse, des Impulses in y-Richtung und der Energie. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung das Gleichungssystem für eine inkompressible und reibungsfreie Strömung.

Hinweis:
Die instationären, zweidimensionalen, kompressiblen Erhaltungsgleichung lauten:

- Masse:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

- y-Impuls:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv + \sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p + \sigma_{yy}) = 0$$

- Energie:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uE + up + u\sigma_{xx} + v\sigma_{xy} + q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vE + vp + v\sigma_{yy} + u\sigma_{xy} + q_y) = 0$$

mit

$$\sigma_{xx} = -\eta[2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})] \quad , \quad \sigma_{yy} = -\eta[2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})] \quad , \quad \sigma_{xy} = -\eta(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})$$

und

$$q_x = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad q_y = -\lambda\frac{\partial T}{\partial y}$$

31

Musterlösung zur Klausur Strömungslehre

Die aufgeführten *Bemerkungen* dienen nur der zusätzlichen Erklärung.

1. Aufgabe (11 Punkte)

a) Hydrostatisches Grundgesetz:

$$dp = g\rho(z)dz \quad \Rightarrow \quad p(z) = g\left(\rho_0 z + \frac{C}{2}z^2\right) + \text{const}$$

$$\text{mit RB:} \quad p(0) = p_a \quad \Rightarrow \quad p(z) = p_a + g\left(\rho_0 z + \frac{C}{2}z^2\right)$$

b)

$$W = \int_{h+l/2}^{l/2} -F\,dz \qquad \text{mit } l \ll h \quad \text{Grenzen: } \int_h^0 \quad ; \quad F = F_G - F_A$$

$$\Rightarrow \quad W = \int_h^0 \left(-F_G + (\rho_0 + Cz)l^3 g\right) dz$$

$$\Rightarrow \quad W = \left(F_G - \rho_0 g l^3\right) h - \frac{C}{2} g l^3 h^2$$

c)

$$F_G = F_A \quad \Rightarrow \quad \rho_T V_T g = \rho(z_T)(V_T + V_W)g$$

$$\Rightarrow \quad \rho(z_T) = \frac{\rho_T V_T}{V_T + V_W} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 + C z_T = \frac{\rho_T V_T}{V_T + V_W}$$

$$\Rightarrow \quad z_T = \frac{\rho_T V_T}{C(V_T + V_W)} - \frac{\rho_0}{C}$$

d) isotherm $\rightarrow pV = \text{const}$

$$p(z_T)V_W = p(z_{min})2V_W$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\rho_0 g z_T + \frac{C}{2} g z_T^2 + p_a\right) = \rho_0 g z_{min} + \frac{C}{2} g z_{min}^2 + p_a$$

$$\Rightarrow \quad z_{min}^2 + \frac{2\rho_0}{C} z_{min} + \left(\frac{\rho_0}{C}\right)^2 = \left(\frac{\rho_0}{C}\right)^2 + \underbrace{\frac{z_T^2}{2} + \frac{\rho_0 z_T}{C} - \frac{p_a}{gC}}_{K}$$

$$\Rightarrow \quad z_{min} = -\frac{\rho_0}{C} + \sqrt{\left(\frac{\rho_0}{C}\right)^2 + K}$$

$$\left[z_{min} = -\frac{\rho_0}{C} - \sqrt{\left(\frac{\rho_0}{C}\right)^2 + K} \qquad \text{sinnlos, da } z \geq 0\right]$$

2. Aufgabe (15 Punkte)

a) *Bemerkungen: Bei Einbauten ist ζ mit der Eintrittsgeschwindigkeit definiert.*

Bernoulli von C nach D:

$$p_C + \frac{\rho}{2}v_C^2 + \rho g\frac{h}{4} = p_D + \frac{\rho}{2}v_D^2 + \frac{\rho}{2}v_C^2\zeta \qquad \text{mit } v_D = 2v_C \text{ aus Konti}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(p_C - p_D)}_{=\rho g h 7/4} + \rho g\frac{h}{4} = -\frac{\rho}{2}v_C^2 + \frac{\rho}{2}v_C^2 2^2 + \frac{\rho}{2}v_C^2\zeta$$

$$\Rightarrow \quad 2\rho g h = \frac{\rho}{2}v_C^2(3 + \zeta) \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{4gh}{3+\zeta}}$$

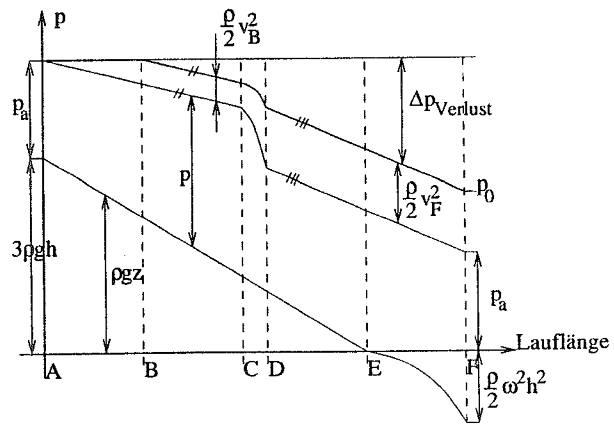
b) Bedingung: $p_F = p_i = p_a (= p_A)$ und $\omega h = v_F$!
Bernoulli von A nach F:

$$p_A + 3\rho g h = p_F + \frac{\rho}{2}v_F^2 - \frac{\rho}{2}\omega^2 h^2 + \frac{\rho}{2}v_B^2\left(\frac{\lambda_1 h}{d\sqrt{2}} + \zeta\right) + \frac{\rho}{2}v_F^2 \lambda_2 \frac{2h}{d}$$

$$\Rightarrow \quad 3\rho g h = \frac{\rho}{2}v_F^2 \underbrace{\left(\frac{\lambda_1 h}{4d\sqrt{2}} + \frac{\zeta}{4} + \frac{\lambda_2 2h}{d}\right)}_{K} \qquad \text{mit } v_B = v_F/2 \text{ aus Konti}$$

$$\Rightarrow \quad v_F = \sqrt{\frac{6gh}{K}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{6g}{hK}}$$

c)



d) Bedingung: $p_F = p_a + 3\rho g h$
„instationärer" Bernoulli von A nach F:

$$p_A + 3\rho g h = p_F + \frac{\rho}{2} v_F^2 + \rho \int_A^F \frac{\partial v}{\partial t} \mathrm{d}s \qquad \text{mit } \partial v_B = \partial v_F/2 \text{ aus Konti}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = v_F^2 + \int_A^C \frac{\partial v_F}{\partial t} \mathrm{d}s + \underbrace{2 \int_C^D \frac{\partial v(s)}{\partial t} \mathrm{d}s}_{\text{zu vernachlässigen}} + 2 \int_D^F \frac{\partial v_F}{\partial t} \mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow \quad 0 = v_F^2 + \Bigg(\underbrace{\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}_{\approx 0,\ \text{da } d \ll h} + h \Bigg) \frac{\mathrm{d}v_F}{\mathrm{d}t} + 4h \frac{\mathrm{d}v_F}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

$$Q = A \int_{t=0}^{t_{0.01v_0}} v_F \mathrm{d}t \qquad \text{mit } A = \pi d^2/4$$

$$\Rightarrow \quad Q = A \int_{v_0}^{0.01v_0} v_F \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v_F} \mathrm{d}v_F = -5hA \int_{v_0}^{0.01v_0} \frac{\mathrm{d}v_F}{v_F} \qquad \text{mit (1)}$$

$$\Rightarrow \quad Q = -\frac{5\pi d^2 h}{4} \ln\left(\frac{0.01 v_0}{v_0}\right) = \frac{5}{4}\pi d^2 h \ln 100$$

3. Aufgabe (13 Punkte)

Bemerkungen: Die Betragsstriche wurden nur verwendet, um etwaige Irritationen mit den Vorzeichen/Richtungen der Geschwindigkeiten auszuschließen.

a)

$$\dot{m}_W = \rho_W B T |v_{1r}|$$
$$\dot{m}_E = \rho_E H T u$$

b) Impulsbilanz
in x'-Richtung:

$$F_{x'} = -\dot{m}_W |v_{1r}| - \dot{m}_3 |v_{3r}| \cos\beta - \dot{m}_2 |v_{2r}| \cos\alpha + \dot{m}_E u \cos\alpha$$

in y'-Richtung:

$$F_{y'} = \dot{m}_3 |v_{3r}| \sin\beta - \dot{m}_2 |v_{2r}| \sin\alpha + \dot{m}_E u \sin\alpha$$

c) zusätzlich zu den beiden Impulsgleichungen aus b)

$$\dot{m}_W + \dot{m}_E = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$
$\Rightarrow$ 3 Gleichungen für 3 Unbekannte $(\dot{m}_2, \dot{m}_3, \beta)$

d) *Bemerkungen: Das vorher „einströmende" Erdreich bewegt sich in diesem System mit einer Geschwindigkeit von $u_E = 0$; deshalb taucht $\dot{m}_E$ nur noch implizit in $\dot{m}_2$ und $\dot{m}_3$ auf.*

mit $\alpha = 0$ und $\beta < 90^o$

$$v_{1absx} = |v_{1r}| + u \quad , \quad v_{1absy} = 0$$
$$v_{2absx} = -|v_{2r}| + u \quad , \quad v_{2absy} = 0$$
$$v_{3absx} = -|v_{3r}| \cos\beta + u \quad , \quad v_{3absy} = |v_{3r}| \sin\beta$$

Impulsbilanz
in x-Richtung:

$$F_x = -v_{1absx}\dot{m}_W + v_{2absx}\dot{m}_2 + v_{3absx}\dot{m}_3$$

in y-Richtung:

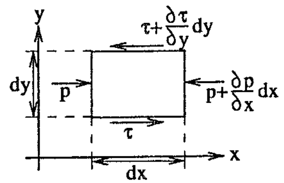
$$F_y = v_{3absy}\dot{m}_3$$

Bemerkungen: Für $u < |v_{2r}|$ und $u < |v_{3r}| \cos\beta$ sind alle Terme der Impulsbilanz in x-Richtung negativ.

33

4. Aufgabe (9 Punkte)

a) Kräftegleichgewicht in x-Richtung:



$$p\mathrm{d}y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \tau \mathrm{d}x - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}\mathrm{d}y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

mit $\tau = -\eta \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ und aus $p(x,y)$: $\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\dfrac{p_a}{L}\left(1 + \dfrac{2ky}{H}\right)$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\tau = \left(\frac{2p_a}{L}\left(1 + k\frac{y}{H}\right) - \frac{p_a}{L}\right)\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{p_a H}{L}\left(C_1 + \frac{y}{H} + k\frac{y^2}{H^2}\right) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}u = -\frac{\tau}{\eta}\mathrm{d}y = \left(-\frac{p_a H}{\eta L}\left(C_1 + \frac{y}{H} + k\frac{y^2}{H^2}\right)\right)\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \quad u = -\frac{p_a H^2}{\eta L}\left(C_1\frac{y}{H} + \frac{y^2}{2H^2} + k\frac{y^3}{3H^3}\right) + C_2$$

mit RB1: $u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

mit RB2: $u(H) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\dfrac{p_a H^2}{\eta L}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{k}{3} + C_1\right) \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{k}{3}$

$$\Rightarrow \quad u(y) = \frac{p_a H^2}{\eta L}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{3}\right)\left(\frac{y}{H}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{H}\right)^2 - \frac{k}{3}\left(\frac{y}{H}\right)^3\right]$$

b) aus (1) mit $\tau = 0$:

$$0 = \frac{p_a H}{L}\left(-\frac{1}{2} - \frac{k}{3} + \left(\frac{y}{H}\right) + \left(k\frac{y}{H}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y}{H}\right)^2 + \frac{1}{k}\left(\frac{y}{H}\right) + \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y}{H}\right) = -\frac{1}{2k} + \sqrt{\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{3}}$$

$$\left[\left(\frac{y}{H}\right) = -\frac{1}{2k} - \sqrt{\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{3}} \qquad \text{sinnlos, da } (y/H) \geq 0\right]$$

für $k = 0.2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{y}{H} = 0.514$

5. Aufgabe (11 Punkte)

a) Die Reynoldszahl $Re := \rho u l/\eta$ beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften.

b) 5 Einflußgrößen $(W, u_\infty, \eta, \rho, D)$, 3 Grunddimensionen (kg, m, s) $\Rightarrow$ 2 Kennzahlen

$$K_1 = W u_\infty^{\beta_1} \rho^{\gamma_1} D^{\delta_1}$$

$$1 = \left(\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^{\gamma_1}(\text{m})^{\delta_1}$$

$$\begin{array}{llll} \text{kg} & : & 0 = 1 + \gamma_1 & \Rightarrow \quad \gamma_1 = -1 \\ \text{s} & : & 0 = -2 - \beta_1 & \Rightarrow \quad \beta_1 = -2 \\ \text{m} & : & 0 = 1 + \beta_1 - 3\gamma_1 + \delta_1 & \Rightarrow \quad \delta_1 = -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad K_1 = \frac{W}{\rho u_\infty^2 D^2} \qquad [= c_w]$$

$$K_2 = \eta u_\infty^{\beta_2} \rho^{\gamma_2} D^{\delta_2}$$

$$1 = \left(\frac{\text{kg}}{\text{m s}}\right)\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{\beta_2}\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^{\gamma_2}(\text{m})^{\delta_2}$$

$$\begin{array}{llll} \text{kg} & : & 0 = 1 + \gamma_2 & \Rightarrow \quad \gamma_2 = -1 \\ \text{s} & : & 0 = -1 - \beta_2 & \Rightarrow \quad \beta_2 = -1 \\ \text{m} & : & 0 = -1 + \beta_2 - 3\gamma_2 + \delta_2 & \Rightarrow \quad \delta_2 = -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad K_2 = \frac{\eta}{\rho u_\infty D} \qquad \left[= \frac{1}{Re}\right]$$

c) *Bemerkungen: Reibungsfrei bedeutet $\eta = 0$ und generell auch $\lambda = 0$ (es sei denn, es wird gesondert erwähnt), da Reibung und Wärmeleitung auf denselben molekularen Effekten beruhen.*

Masse (Konti):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{mit } \rho = \text{const} \quad \text{(inkompressibel)}$$

y-Impuls:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \text{mit } \lambda, \eta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \text{mit } \rho = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + v\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0\ \text{(Konti)}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

34

Energie:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u E)}{\partial x}+\frac{\partial(up)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v E)}{\partial y}+\frac{\partial(vp)}{\partial y}=0 \qquad \text{mit } \lambda,\eta=0$$

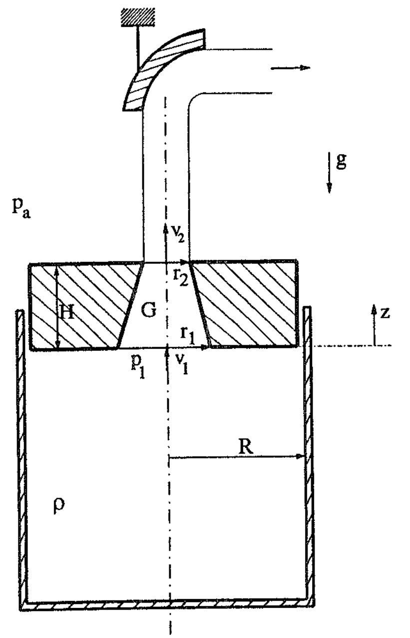
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial(uE)}{\partial x}+\frac{\partial(vE)}{\partial y}+\frac{u}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{v}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{p}{\rho}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0\text{ (Konti)}}=0 \qquad \text{mit } \rho=const$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial t}+u\frac{\partial E}{\partial x}+v\frac{\partial E}{\partial y}+\frac{u}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{v}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+E\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0\text{ (Konti)}}=0$$

36

2. Aufgabe (10 Punkte)

Ein Stempel mit dem Gewicht G verschließt einen mit Wasser (Dichte ϱ) gefüllten zylindrischen Behälter (Radius R). Der Stempel sinkt langsam zu Boden, wobei das verdrängte Wasser durch eine konische Bohrung als paralleler vertikaler Strahl in die umgebende Luft austritt. Anschließend wird der Wasserstrahl durch eine Umlenkschaufel horizontal umgelenkt. Die Durchströmung des Stempels erfolgt verlustfrei.



③ a) Bestimmen Sie das Verhältnis $\frac{p_1-p_a}{\varrho}$ als Funktion von v_2, r_1, r_2, H und g.

⑤ b) Bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeit v_2.

② c) Welche Zeit T vergeht, bis der Stempel um die Höhe H abgesunken ist?

Gegeben: ϱ, p_a, H, G, R, r_1, r_2, g

Hinweis:

- Das Gewicht des Fluids innerhalb des Stempels kann vernachlässigt werden.
- Alle Reibungseinflüsse sind zu vernachlässigen.
- Der gesamte Vorgang kann stationär betrachtet werden.

2. Aufgabe. a) Bernoulli ① → ②:

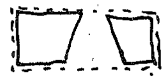
① $p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho \cdot g \cdot H \; ; \; p_2 = p_a$

① Konti.: $v_1 \cdot \pi \cdot r_1^2 = v_2 \cdot \pi \cdot r_2^2$

$\Rightarrow \quad v_1 = v_2 \cdot \frac{r_2^2}{r_1^2}$

$\Rightarrow \quad \frac{p_1 - p_a}{\rho} = \frac{v_2^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{r_2^4}{r_1^4}\right) + g \cdot H$ ①

b)



Impulssatz in z-Richtung:

$$\frac{dI_z}{dt} = \int_A \rho \cdot \vec{v} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{n})\, dA \Big| = \sum F_z \quad ①$$

$$\Rightarrow \underbrace{-\rho v_1^2 \cdot \pi \cdot r_1^2 + \rho \cdot v_2^2 \cdot \pi \cdot r_2^2}_{①} = \overbrace{p_1 \cdot \pi \cdot R^2 - p_a \cdot \pi \cdot R^2 - G}^{\text{z-Richtung } ①}$$

$$= (p_1 - p_a) \cdot \pi \cdot R^2 - G$$

$$= \frac{\rho}{2} v_2^2 \left(1 - \frac{r_2^4}{r_1^4}\right) \cdot \pi R^2 + \rho \cdot g \cdot H \cdot \pi \cdot R^2$$

① $\Rightarrow \quad \pi \cdot \rho \cdot v_2^2 \left(r_2^2 - \frac{r_2^4}{r_1^2} - \frac{R^2}{2}\left(1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4\right)\right) = \rho \cdot g \cdot H \cdot \pi \cdot R^2 - G$

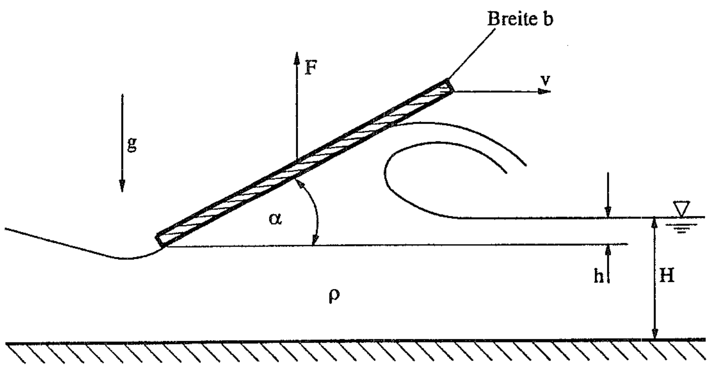
$$\Rightarrow \quad v_2 = \sqrt{\frac{g \cdot H \cdot R^2 - \frac{G}{\rho \cdot \pi}}{r_2^2 - \frac{r_2^4}{r_1^2} - \frac{R^2}{2}\left(1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4\right)}} \quad ①$$

c) $\pi \cdot R^2 \cdot H = v_2 \cdot \pi r_2^2 \cdot \Delta T$ ①

$\Rightarrow \quad \Delta T = \frac{R^2 \cdot H}{v_2 \cdot r_2^2}$ ①

4. Aufgabe (8 Punkte)

Ein schnell fahrendes Gleitboot erhält seine Auftriebskraft F aufgrund der dynamischen Druckverteilung entlang der benetzten Fläche des Bootsrumpfes. Der Bootsrumpf ist während der Fahrt um einen kleinen Winkel α gegenüber der ungestörten Wasseroberfläche geneigt. Beschränkt man sich auf geometrisch ähnliche Boote, so ist der Bootsrumpf allein durch seine Breite b in Tiefenrichtung beschrieben. Die Auftriebskraft F wird außer durch b durch den Neigungswinkel α, die Geschwindigkeit v des Bootes, die Eintauchtiefe des Bootes h, die Wasserhöhe H, die Dichte ϱ des Wassers und die Schwerkraft g bestimmt.



3 a) Geben Sie die Anzahl der Einflußgrößen und der Grunddimensionen, die diesem Problem zugrundeliegen, an. Wieviele Kennzahlen sind nach dem Π-Theorem zu erwarten?

5 b) Bestimmen Sie diese Kennzahl(en) mit Hilfe des Π-Theorems. Wählen Sie die Breite b des Bootes als Bezugsgröße für eine Länge.

Gegeben: F, g, α, ϱ, v, h, H, b

4. Aufgabe: a) $F = f(b, \alpha, v, h, H, \rho, g)$

8 Einflußgrößen 1

$F\left[\frac{kg\cdot m}{s^2}\right]$; $b\,[m]$; $\alpha\,[\,]$; $v\left[\frac{m}{s}\right]$

$h\,[m]$; $H\,[m]$; $\rho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$; $g\left[\frac{m}{s^2}\right]$

3 Grunddimensionen (kg, m, s) 1

Π-Theorem: ⇒ 5 Kennzahlen 1

b) als Bezugsgrößen gewählt: b, ρ, v

$\boxed{K_1 = \alpha}$ 1

$K_2 = F\cdot\rho^{\alpha_1}\cdot b^{\beta_1}\cdot v^{\gamma_1}$

$[-] = \left[\frac{kg\cdot m}{s^2}\right]\cdot\left[\frac{kg}{m^3}\right]^{\alpha_1}\cdot[m]^{\beta_1}\cdot\left[\frac{m}{s}\right]^{\gamma_1}$

$$\left.\begin{array}{ll} kg: & 0 = 1 + \alpha_1 \\ m: & 0 = 1 - 3\cdot\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \\ s: & 0 = -2 - \gamma_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{K_2 = \frac{F}{\rho\cdot v^2\cdot b^2}}$$ 1

$K_3 = h\cdot\rho^{\alpha_2}\cdot b^{\beta_2}\cdot v^{\gamma_2}$

$\Rightarrow \boxed{K_3 = \frac{h}{b}}$ 1

$K_4 = H\cdot\rho^{\alpha_3}\cdot b^{\beta_3}\cdot v^{\gamma_3}$

$\Rightarrow \boxed{K_4 = \frac{H}{b}}$ 1

$K_5 = g\cdot\rho^{\alpha_4}\cdot b^{\beta_4}\cdot v^{\gamma_4}$

$\Rightarrow \boxed{K_5 = \frac{g\cdot b}{v^2}}$ 1

39

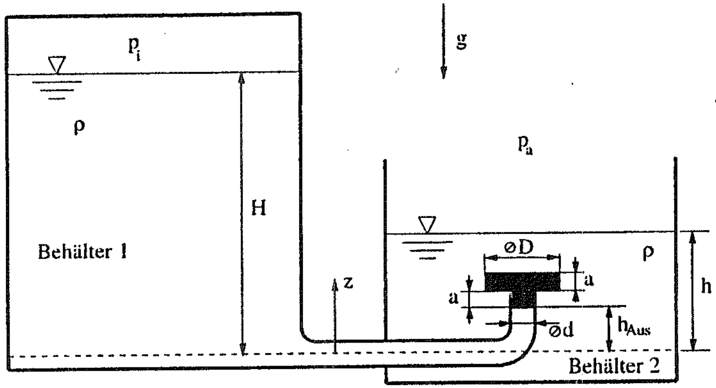
1,-

Klausur Technische Strömungslehre

17. 3. 2000

1. Aufgabe (10 Punkte)

Aus einem großen Überdruckbehälter (Behälter 1, Innendruck p_i), der mit einem Fluid der Dichte ϱ bis zur Höhe H über der Bezugslinie gefüllt ist, führt eine Rohrleitung in einen nach oben offenen Behälter (Behälter 2), der mit dem gleichen Fluid bis zur Höhe h gefüllt ist. Das Ende der Rohrleitung (h_{Aus}) wir von einem rotationssymmetrischen Körper mit dem Gewicht G_K verschlossen.



4 a) Das Fluid im Behälter 2 erzeugt eine Druckverteilung auf der Oberfläche des rotationssymmetrischen Verschlußkörpers. Bestimmen Sie die resultierende Kraft F_a aus der Druckverteilung. (Der Einfluß des Fluids in der Rohrleitung soll hier nicht berücksichtigt werden!)

3 b) Setzen Sie die Kraft F_a aus Unterpunkt a) als bekannt voraus. Diese Kraft wirke in positive z-Richtung. Auf welchen Wert p_{i2} muß der Innendruck p_i im Behälter 1 erhöht werden, damit sich der rotationssymmetrische Körper gerade von der Ausflußöffnung abhebt?

3 c) Der Körper sei nun entfernt. Der Behälter 1 sei bis zur Höhe H gefüllt und es herrsche der Innendruck p_i. Behälter 2 ist bis zur Höhe h gefüllt. Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit v_a am Ende der Rohrleitung?

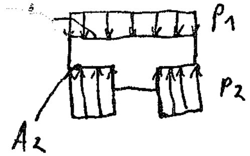
Gegeben: $\varrho, p_i, p_a, g, H, h, G_K, a, h = 7\cdot a, h_{Aus} = 3\cdot a, D = 4\cdot a, d = a$

Hinweis:

- die Wanddicke der Rohrleitung ist zu vernachlässigen.
- der rotationssymmetrische Körper soll plan auf der Ausflußöffnung aufliegen.
- es treten keine Verluste in der Rohrleitung auf; alle Reibungseinflüsse sind zu vernachlässigen.

1. Aufgabe

4P a) $\downarrow \vec{g}$ $\uparrow z$



$A_1 = \frac{\pi}{4}\cdot D^2 = 4\cdot\pi\cdot a^2$

$A_2 = \frac{\pi}{4}(D^2-d^2) = \frac{\pi}{4}(16\cdot a^2 - a^2) = \frac{15}{4}\cdot\pi\cdot a^2$

$p_1 = p_a + \rho\cdot g\cdot(h - h_{aus} - 2\cdot a)$ 1

$p_2 = p_a + \rho\cdot g\cdot(h - h_{aus} - a)$ 1

mit $h = 7\cdot a$ und $h_{aus} = 3\cdot a$ folgt

$p_1 = p_a + \rho\cdot g\cdot 2\cdot a$

$p_2 = p_a + \rho\cdot g\cdot 3\cdot a$

$F_A = -p_1\cdot A_1 + p_2\cdot A_2$ 1

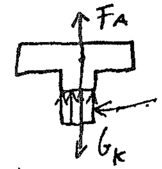
$= -(p_a + \rho\cdot g\cdot 2\cdot a)\cdot 4\cdot\pi\cdot a^2 + (p_a + \rho\cdot g\cdot 3\cdot a)\cdot\frac{15}{4}\cdot\pi\cdot a^2$

$\Rightarrow F_A = -p_a\cdot 4\cdot\pi\cdot a^2 - 8\cdot\rho\cdot g\cdot\pi\cdot a^3 + p_a\cdot\frac{15}{4}\pi\cdot a^2 + \frac{45}{4}\cdot\rho g\pi a^3$

$\Rightarrow F_A = -\frac{1}{4}p_a\cdot\pi\cdot a^2 + \frac{13}{4}\cdot\rho\cdot g\cdot\pi\cdot a^3$

$\Rightarrow \boxed{F_A = \frac{1}{4}\cdot\pi\cdot a^2\cdot(13\cdot\rho\cdot g\cdot a - p_a)}$ 1

3P b)

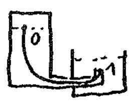


$(p_{i2} + \rho\cdot g\cdot H - \rho\cdot g\cdot 3\cdot a)$ 1

$\sum\vec{F} = 0 \Rightarrow F_A - G_K + (p_{i2} + \rho\cdot g\cdot H - \rho\cdot g\cdot 3\cdot a)\frac{\pi}{4}\cdot a^2$ 1

$\Rightarrow \boxed{p_{i2} = (G_K - F_A)\cdot\frac{4}{\pi\cdot a^2} + \rho\cdot g\cdot 3\cdot a - \rho\cdot g\cdot H}$ 1

3P c)



Bernoulli $0\to 1$: $p_i + \rho\cdot g\cdot H = \rho\cdot g\cdot h_{aus} + \frac{\rho}{2}v_a^2 + p_1$ 1

p_1 aus HGG: $p_1 = p_a + \rho\cdot g\cdot(h - h_{aus}) = p_a + \rho\cdot g\cdot 4\cdot a$ 1

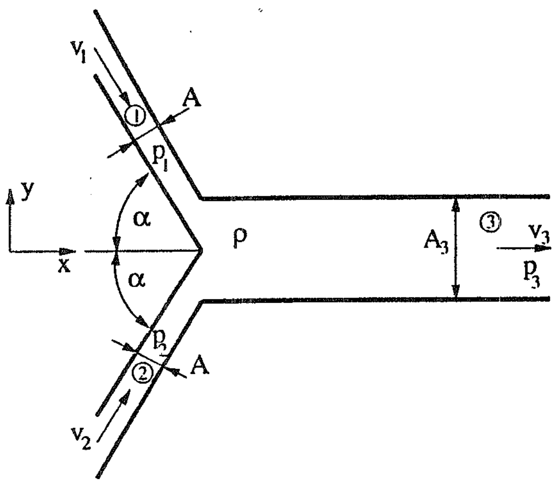
$\Rightarrow p_i + \rho\cdot g\cdot H = \rho\cdot g\cdot 3\cdot a + \frac{\rho}{2}v_a^2 + p_a + \rho\cdot g\cdot 4\cdot a$

$\Rightarrow \boxed{v_a = \sqrt{\frac{2\cdot(p_i - p_a)}{\rho} + 2\cdot g\cdot(H - 7a)}}$ 1

40

2. Aufgabe (9 Punkte)

Über zwei Rohre, in denen der gleiche Druck herrscht, werden Fluide mit der Dichte ϱ in einem Mischrohr zusammengeführt. Bei der Vermischung entstehen strömungsmechanische Verluste. Nach einer gewissen Strecke soll sich im Punkt 3 wieder eine über den Querschnitt A_3 konstante Geschwindigkeit v_3 ausgebildet haben. Ebenfalls sei in Rohr 1 und Rohr 2 die Geschwindigkeit über den Querschnitt konstant.



Bestimmen Sie

2 a) die Geschwindigkeit v_3,

7 b) den Druck p_3.

Gegeben: $A, A_3 = 4 \cdot A, v_1, v_2, p_1 = p_2, \varrho, \alpha = 60°$

Hinweis:

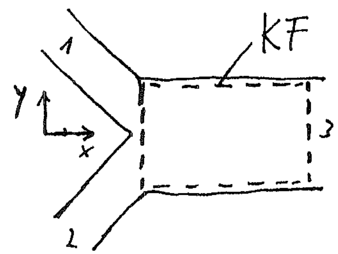
- der Einfluß der Erdbeschleunigung soll nicht berücksichtigt werden
- die Wandreibung ist zu vernachlässigen.
- $\cos(60°) = \frac{1}{2}$, $\sin(60°) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Aufgabe

2P. a) Konti.: $v_1 \cdot A + v_2 \cdot A = 4 \cdot A \cdot v_3$ 1

$\Rightarrow v_3 = \frac{1}{4}(v_1 + v_2)$ 1

7P. b)



1

Impulssatz in x-Richtung:

$$\frac{dI_x}{dt} = \underbrace{-\varrho \cdot v_1^2 \cdot \cos\alpha \cdot A - \varrho \cdot v_2^2 \cdot \cos\alpha \cdot A}_{1} + \underbrace{v_3^2 \cdot 4 \cdot A \cdot \varrho}_{1} = \Sigma \vec{F}_x$$

$$\Sigma \vec{F}_x = \underbrace{2 \cdot p_1 \cdot A + 2 \cdot p_2 \cdot A - p_3 \cdot 4 \cdot A}_{1}$$

$p_1 = p_2$; $\alpha = 60° \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}$ 1

$v_3 = \frac{1}{4}(v_1 + v_2)$ ersetzt 1

$$\Rightarrow -\frac{\varrho \cdot A}{2} \cdot (v_1^2 + v_2^2) + \frac{1}{16}(v_1 + v_2)^2 \cdot 4 \cdot A \cdot \varrho = 4 \cdot p_1 \cdot A - p_3 \cdot 4 \cdot A$$

$$\Rightarrow -\frac{\varrho \cdot A}{4}(v_1^2 + v_2^2 - 2 \cdot v_1 \cdot v_2) = 4 \cdot p_1 \cdot A - p_3 \cdot 4 \cdot A$$

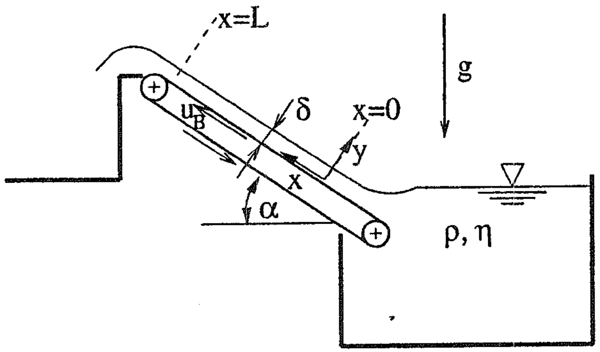
$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \varrho \cdot A \cdot (v_1 - v_2)^2 = 4 \cdot p_1 \cdot A - p_3 \cdot 4 \cdot A$$

$$\Rightarrow \boxed{p_3 = \frac{1}{16} \cdot \varrho \cdot (v_1 - v_2)^2 + p_1}$$ 1

41

3. Aufgabe (11 Punkte)

Öl mit der Zähigkeit η und der Dichte ϱ soll mit Hilfe eines Transportbandes, das um den Winkel α gegenüber der Horizontalen geneigt ist und sich mit der Geschwindigkeit u_B bewegt, auf ein höheres Niveau gefördert werden. Auf dem Transportband der Breite B soll im Bereich von $x = 0$ bis $x = L$ eine ebene, ausgebildete und laminare Strömung mit konstanter Ölfilmdicke δ vorliegen.



5 a) Bestimmen Sie die Schubspannungsverteilung im Ölfilm auf dem Transportband für den Bereich $0 < x < L$ und skizzieren Sie diese. Benutzen Sie dazu ein Fluidelement innerhalb des Ölfilms und tragen Sie alle angreifenden Kräfte ein.

4 b) Bestimmen und skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung im Ölfilm.

2 c) Wie groß ist der Volumenstrom $\dot{Q}$?

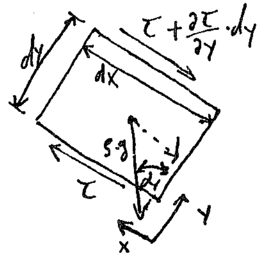
Gegeben: $u_B, \alpha, B, \delta, \eta, \varrho, g$

Hinweis:

- der Reibungseinfluß zwischen Ölfilm und umgebender Luft ist zu vernachlässigen.
- das Öl soll als Newtonsches Fluid betrachtet werden.

3. Aufgabe

5P. a)



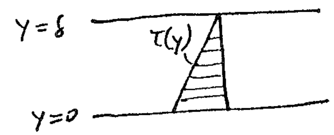
$\downarrow \vec{g}$ 1

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = -\varrho \cdot g \cdot \sin\alpha \quad 1$$

Integration: $\tau(y) = -\varrho \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot y + C_1$ 1

R.B.: $\tau(y=\delta) = 0 \Rightarrow C_1 = \varrho \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \delta$ 1

$$\Rightarrow \tau(y) = \varrho \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot (\delta - y)$$



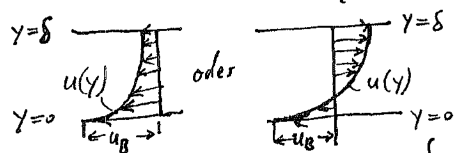
1

4P. b) $\tau = -\eta \frac{du}{dy}$ 1 $\Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{-\varrho \cdot g}{\eta} \cdot \sin\alpha \cdot (\delta - y)$

Integration: $u(y) = -\frac{\varrho \cdot g}{\eta} \cdot \sin\alpha \cdot \left(\delta \cdot y - \frac{y^2}{2}\right) + C_2$ 1

R.B.: $u(y=0) = u_B \Rightarrow C_2 = u_B$ 1

$$\Rightarrow u(y) = \frac{\varrho \cdot g}{\eta} \cdot \sin\alpha \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \delta \cdot y\right) + u_B$$



1

2P. c) $\dot{Q} = \int_0^\delta u(y) \cdot B \cdot dy$ 1 $= \int_0^\delta \left(\frac{\varrho \cdot g}{\eta} \cdot \sin\alpha \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \delta \cdot y\right) + u_B\right) \cdot B\, dy$

$$= B \cdot \left[\frac{\varrho \cdot g}{\eta} \cdot \sin\alpha \cdot \left(\frac{y^3}{6} - \delta \cdot \frac{y^2}{2}\right) + u_B \cdot y\right]_0^\delta$$

$$= B \cdot \left(u_B \cdot \delta - \frac{1}{3} \cdot \delta^3 \cdot \frac{\varrho \cdot g}{\eta} \cdot \sin\alpha\right) \quad 1$$

42

4. Aufgabe (9 Punkte)

Die erforderliche Leistung P einer Pumpe hängt von der Dichte ϱ und der Zähigkeit η des Fluids, dem zu fördernden Volumenstrom $\dot{Q}$ und der Pumphöhe H ab.

3 a) Geben Sie die Anzahl der Einflußgrößen und der Grunddimensionen, die diesem Problem zugrundeliegen, an. Wieviele Kennzahlen sind nach dem Π-Theorem zu erwarten?

4 b) Bestimmen Sie diese Kennzahl(en) mit Hilfe des Π-Theorems.

2 c) Welche bekannte(n) Kennzahl(en) ist(sind) darin enthalten?

Gegeben: $P, \varrho, \eta, \dot{Q}, H$

4. Aufgabe

3P. a) 5 Einflußgrößen : 1

$\varrho\left[\frac{kg}{m^3}\right]$; $\eta\left[\frac{kg}{m\cdot s}\right]$; $\dot{Q}\left[\frac{m^3}{s}\right]$; $H[m]$; $P=\left[\frac{kg\cdot m^2}{s^3}\right]$ $\left(P=\left[\frac{N\cdot m}{s}\right]\right)$

kg, m, s → 3 Grunddimensionen 1

5 Einflußgrößen − 3 Grunddimensionen

⇒ 2 Kennzahlen 1

4P. b) als Bezugsgrößen gewählt: $\varrho, H, \dot{Q}$

$$\Rightarrow K_1 = \eta\cdot\varrho^{\alpha_1}\cdot H^{\beta_1}\cdot\dot{Q}^{\gamma_1} \quad 1$$

$$[-] = \left[\frac{kg}{m\cdot s}\right]\cdot\left[\frac{kg}{m^3}\right]^{\alpha_1}\cdot[m]^{\beta_1}\cdot\left[\frac{m^3}{s}\right]^{\gamma_1}$$

kg: $0 = 1+\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = -1$

m: $0 = -1-3\cdot\alpha_1+\beta_1+3\cdot\gamma_1$

s: $0 = -1-\gamma_1 \Rightarrow \gamma_1 = -1$

$0 = -1+3+\beta_1-3 \Rightarrow \beta_1 = 1$

$$\Rightarrow K_1 = \frac{\eta\cdot H}{\varrho\cdot\dot{Q}} \quad 1$$

$$K_2 = P\cdot\varrho^{\alpha_2}\cdot H^{\beta_2}\cdot\dot{Q}^{\gamma_2} \quad 1$$

$$[-] = \left[\frac{kg\cdot m^2}{s^3}\right]\cdot\left[\frac{kg}{m^3}\right]^{\alpha_2}\cdot[m]^{\beta_2}\cdot\left[\frac{m^3}{s}\right]^{\gamma_2}$$

kg: $0 = 1+\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = -1$

m: $0 = 2-3\cdot\alpha_2+\beta_2+3\cdot\gamma_2$

s: $0 = -3-\gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 = -3$

$0 = 2+3+\beta_2-9 \Rightarrow \beta_2 = 4$

$$\Rightarrow K_2 = \frac{P\cdot H^4}{\varrho\cdot\dot{Q}^3} \quad 1$$

2P. c) $K_1 \hat{=} \frac{1}{Re}$ (1) ; $K_2 \hat{=} Eu$ (1)

43

....

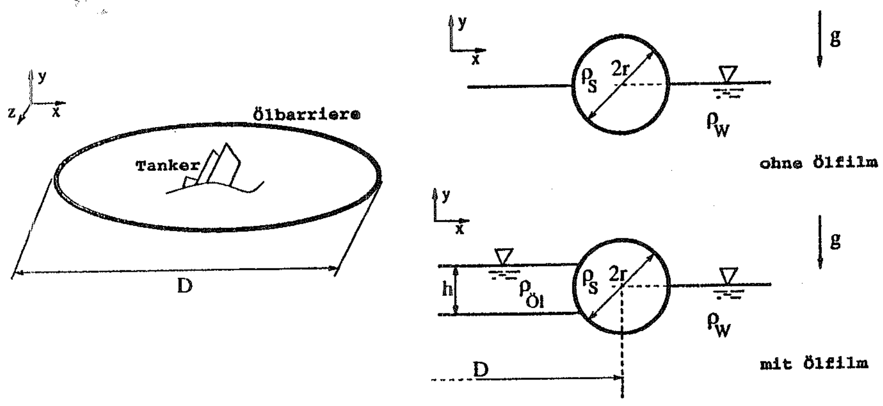
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

17. 3. 2000

1. Aufgabe (13 Punkte)

Eine Ölbarriere in Form eines ringförmigen Schlauches mit zylindrischem Querschnitt (Durchmesser $2r$) soll erstellt werden. Diese Ölbarriere soll auf dem Meer mit der Dichte ρ_W schwimmen und die Ausbreitung des auf der Wasseroberfläche befindlichen Öls der Masse $m_{Öl}$ und der Dichte $\rho_{Öl}$ verhindern. Ohne den Ölfilm taucht der Schlauch bis zur Hälfte in das Wasser ein. Diese Eintauchtiefe auf der ölabgewandten Seite bleibt konstant.



Schnitt durch den Schlauch

a) Bestimmen Sie eine mittlere Dichte ρ_S des Materials aus dem der Schlauch besteht.

b) Bestimmen Sie die maximale Ölfilmdicke h_{max}.

c) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung von $D \gg r$ den minimalen Durchmesser des Schlauchringes D.

Für die weiteren Teilaufgaben soll der Durchmesser D und die Ölfilmdicke $h = h_{max} = 2r$ als bekannt vorausgesetzt werden:

d) Bestimmen Sie die Auftriebskraft, die auf den Schlauch wirkt, sowie die Dichte $\rho_{Öl}$ in Abhängigkeit von den anderen Größen.

e) Bestimmen Sie die Radialkraft, die auf ein infinitisimal kleines Schlauchelement der Länge dl wirkt.

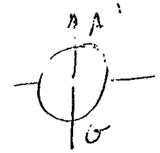
Gegeben: $r, g, \rho_W, \rho_{Öl}, m_{Öl}, dl$

Hinweis:

- $\rho_{Öl} < \rho_W \qquad D \gg r$
- Öl und Wasser mischen sich nicht
- Die Dichte der Luft ist zu vernachlässigen

1. Aufgabe

a) ohne Ölfilm



$G = A \quad A = 2\pi \frac{D}{2} r^2 \pi \rho_s = \pi^2 D r^2 \rho_s$

$A = \pi^2 D r^2 \rho_w \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \rho_s = \frac{1}{2}\rho_w$

b) 1) $0 < \rho_{öl} < \frac{1}{2}\rho_w$. Öl läuft über

$p_a + h_{max}\rho_{öl} g + (2r - h_{max})\rho_w g = p_a + r\rho_w g$

$\Rightarrow h_{max}(\rho_{öl} - \rho_w) g = r\rho_w g - 2r\rho_w g = -r\rho_w g$

$\Rightarrow h_{max} = \frac{r}{1 - \frac{\rho_{öl}}{\rho_w}}$

2) $\frac{1}{2}\rho_w < \rho_{öl} < \rho_w$; Öl läuft drunter

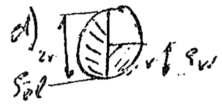
$p_a + h_{max}\rho_{öl} g = p_a + r\rho_w g \Rightarrow h_{max} = \frac{\rho_w}{\rho_{öl}} r$

3) $\rho_{öl} = \frac{1}{2}\rho_w \Rightarrow h_{max} = 2r$

c) $V_{öl} = \pi \frac{D^2}{4} h_{max} \underbrace{- 2\pi \frac{D}{2} \frac{\pi r^2}{2} a}_{\text{vernachlässigbar, da } D \gg r} \quad 0 < a < 1$ abhängig von h_{max}

$V_{öl} = \frac{m_{öl}}{\rho_{öl}} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{m_{öl}}{\rho_{öl}} \frac{4(1 - \frac{\rho_{öl}}{\rho_w})}{\pi r}}$

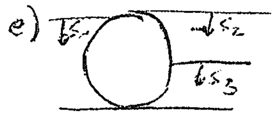
d)



$A = 2\pi \frac{D}{2} \frac{1}{2}\pi r^2 \rho_{öl} + 2\pi \frac{D}{2} \frac{1}{4}\pi r^2 \rho_w$

$A = G \Rightarrow \pi^2 D r^2 \rho_s = \pi^2 D r^2 \frac{\rho_w}{2} \Rightarrow \rho_{öl} = \frac{1}{2}\rho_w$

e)



$F_R = dl \cdot \left[\int_0^{2r} (p_a + \rho_{öl} g s_1) ds_1 - \int_0^{r} p_a ds_2 - \int_0^{r} (p_a + \rho_w g s_3) ds_3 \right] =$

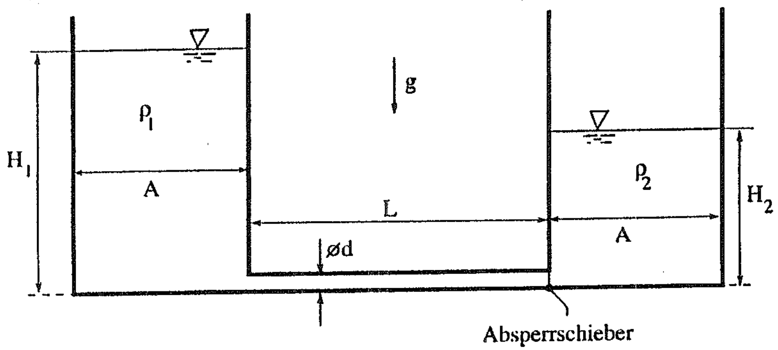
$= dl \left[\frac{1}{2}\rho_{öl} g (2r)^2 - \frac{1}{2}\rho_w g r^2 \right] = \frac{dl}{2} g r^2 \left[4\rho_{öl} - \rho_w \right]$

185

44

2. Aufgabe (14 Punkte)

Zwei offene Behälter mit der gleichen Querschnittsfläche A, die mit einem Rohr (Durchmesser d und Länge L) verbunden sind, enthalten zwei unterschiedliche Flüssigkeiten mit den Dichten ρ_1 und ρ_2 und den Flüssigkeitsspiegelhöhen H_1 und H_2. Es gilt $\rho_1 > \rho_2$ und $H_1 > H_2$. Im Rohr befindet sich ein Absperrschieber, der die beiden Flüssigkeiten voneinander trennt. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird der Absperrschieber plötzlich entfernt. Die Strömung verläuft ab diesem Zeitpunkt instationär und verlustfrei.



2 a) Bestimmen Sie die Kraft auf den geschlossenen Absperrschieber wirkende Kraft.

4 b) Bestimmen Sie die Flüssigkeitsspiegelhöhen h_1 und h_2 für den Gleichgewichtszustand.

5 c) Bestimmem Sie eine Differentialgleichung für die Höhe $h_1(t)$.

3 d) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\rho_1 = \rho_2$.

Gegeben: $\rho_1, H_1, \rho_2, H_2, A, g, L, d, t_0 = 0$

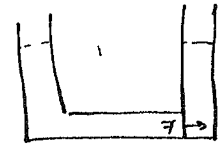
Hinweis:

- Die beiden Flüssigkeiten vermischen sich nicht
- Die lokale Beschleunigung ist nur im Rohr zu berücksichtigen $d << L$
- Lösungsansatz für die DGL $a \cdot \ddot{x} + b \cdot x + c = 0$:

$$x(t) = -\frac{c}{b} + C_1 \sin(\sqrt{b/a}\, t) + C_2 \cos(\sqrt{b/a}\, t)$$

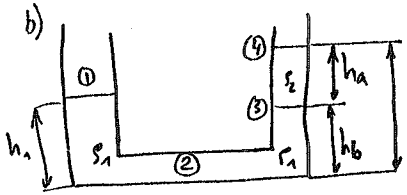
2. Aufgabe

a)



$$F = (p_a + \rho_1 g H_1 - p_a - \rho_2 g H_2) \cdot \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot d^2 g}{4}(\rho_1 H_1 - \rho_2 H_2)$$

b)



Druck in 2 ist gleich:

$$p_a + \rho_1 g h_1 = p_a + \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_b$$

$h_a + h_b = h_2$ gleiches Volumen: $\rho_1 A H_1 = \rho_1 A h_1 + \rho_1 A h_b$

$\Rightarrow h_b = H_1 - h_1$ $\rho_2 A H_2 = \rho_2 A h_a \Rightarrow h_a = H_2$

$\Rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho_2 g H_2 + \rho_1 g (H_1 - h_1) \Rightarrow h_1 = \frac{\rho_2 H_2 + \rho_1 H_1}{2 \rho_1}$ $h_2 = H_2 + H_1 - h_1$

c) Bernoulli: ③ → ④ $p_3 + \frac{1}{2}\rho_2 v_3^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho_2 v_4^2 + \rho_2 g h_a$

Kont.: $v_3 = v_4 = v_1$ $h_a = H_2$ $v_2 = v_1 \frac{4A}{\pi d^2}$ $v_1 = -\frac{dh_1}{dt}$

Bernoulli: ① → ③ $p_a + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho_1 g h_1 = p_3 + \frac{1}{2}\rho_1 v_3^2 + \rho_1 g h_b + \rho_1 \cdot L \cdot \frac{dv_2}{dt}$

$$\Rightarrow \rho_1 g h_1 + \rho_1 L \frac{4A}{\pi d^2} \frac{d^2 h_1}{dt^2} = \rho_2 g H_2 + \rho_1 g h_b$$

mit $h_b = H_1 - h_1 \Rightarrow$ die DGL lautet

$$\underbrace{\rho_1 \cdot L \cdot \frac{4A}{\pi d^2}}_{a} \frac{d^2 h_1}{dt^2} + \underbrace{2\rho_1 g}_{b} h_1 \underbrace{- (\rho_2 g H_2 + \rho_1 g H_1)}_{c<0} = 0$$

DGL: $a \ddot{h}_1 + b \cdot h_1 + c = 0$

d) Lösung $h(t) = \frac{-c}{b} + C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, t\right)$

R.B. $h_1(t=0) = H_1$ $\sin(0) = 0$ $\cos(0) = 1 \Rightarrow C_2 = H_1 + c/b$

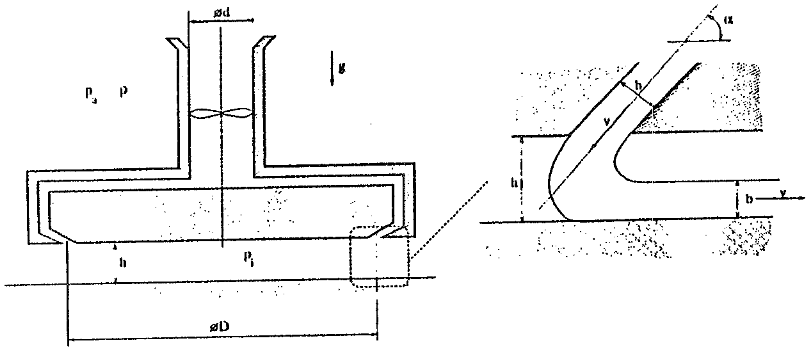
$v_1(t=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$\Rightarrow h_1(t) = \frac{-c}{b} + (H_1 + c/b)\cos\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, t\right)$ mit a, b, c aus c)

186

3. Aufgabe (11 Punkte)

Bei einem kreisförmigen Luftkissenfahrzeug (Masse m, Bodendurchmesser D) wird von einem Gebläse (Durchmesser d, Leistung P) aus der Umgebung mit dem Druck p_a Luft der Dichte ρ angesaugt und aus einem Ringspalt der Breite b unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit v radial nach innen geblasen. Der aus dem Spalt austretende, rund herum geschlossene Luftvorhang hält dabei im Raum unter dem Fahrzeug einen Überdruck p_i aufrecht, der den Strahl in die Horizontale umlenkt. Dabei schwebt das Fahrzeug stationär in einer Höhe h über dem Boden. Die Strömung ist inkompressibel und verlustfrei.



6 a) Bestimmen Sie die Strahlgeschwindigkeit v und den Überdruck $p_i - p_a$.

3 b) Bestimmen Sie die Gebläseleistung P.

2 c) Bestimmen Sie den optimalen Winkel α_{opt}, bei dem die Leistung minimal wird.

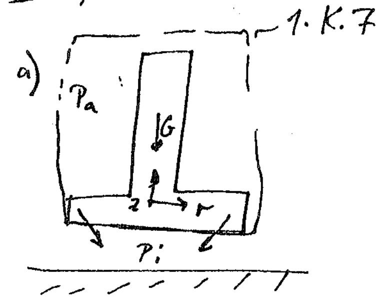
Gegeben: $g, m, D, d, \rho, b, \alpha, h$

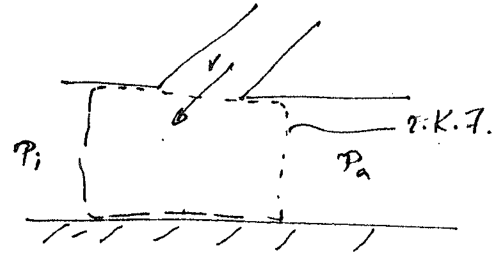
Hinweis:

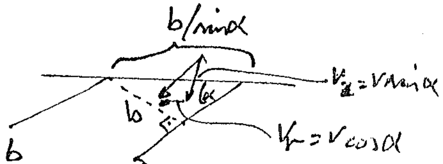
- $D \gg b$
- Vernachlässigen Sie die Gewichtskraft der Luft

3. Aufgabe

a)







1. K.7. Impulssatz in z-Richtung

$$(p_i - p_a)\cdot\pi\frac{D^2}{4} - mg = -\rho(v\sin\alpha)^2\cdot\frac{b}{\sin\alpha}\cdot 2\pi\cdot\frac{D}{2}$$

$$\Rightarrow (p_i-p_a)\cdot\pi\frac{D^2}{4} - mg = -\rho v^2\sin\alpha\cdot b\cdot\pi\cdot D$$

2. K.7. Impulssatz in radialer Richtung

$$(p_i-p_a)\pi\cdot D\cdot h = \rho v\sin\alpha\cdot v\cos\alpha\cdot\frac{b}{\sin\alpha}\cdot\pi\cdot D + \rho v^2 b\pi D$$

$$\Rightarrow (p_i-p_a)\cdot\pi Dh = \rho v^2 b\pi D(\cos\alpha+1)$$

Einsetzen ergibt: $v=\sqrt{\dfrac{mg}{\rho\cdot D\cdot\pi b\left(\sin\alpha+\frac{D}{4h}(1+\cos\alpha)\right)}}$

$$(p_i-p_a) = \frac{mg(\cos\alpha+1)}{h\cdot D\cdot\pi\left(\sin\alpha+\frac{D}{4h}(1+\cos\alpha)\right)}$$

b) Bernoulli $\infty \rightarrow$ Austritt $\quad p_a+\Delta p_G = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow \Delta p_G = \frac{1}{2}\rho v^2$

$$\dot{Q} = \pi D\cdot bv \Rightarrow P = \dot{Q}\,\Delta p_G = \frac{1}{2}\rho\pi D b v^3$$

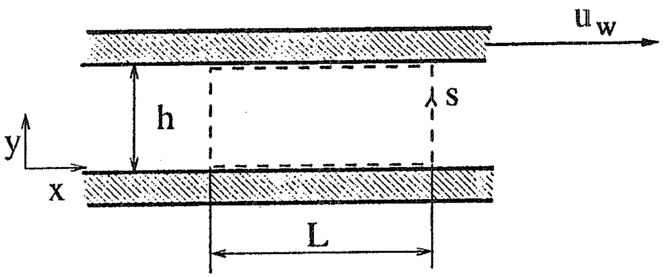
c) P minimal für v minimal: $\left(\sin\alpha+\frac{D}{4h}\cos\alpha\right) = g(\alpha) = \max!$

$$\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = \cos\alpha - \frac{D}{4h}\sin\alpha \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{D}{4h}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha_{opt} = \arctan\frac{4h}{D}$$

4. Aufgabe (12 Punkte)

Zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten mit dem Abstand h befindet sich eine Bingham Flüssigkeit der Dichte ρ. Die obere Platte bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_w und die untere Platte ist in Ruhe. Es stellt sich eine stationäre ausgebildete inkompressible Strömung ein.



4 a) Vereinfachen Sie die angegebenen Erhaltungsgleichungen für den betrachteten Fall.

3 b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$. (Setzen Sie dafür die Beziehungen der Bingham Flüssigkeit ein.)

1 c) Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x = const, y)$.

1 d) Bestimmen Sie die Drehung $\omega(x, y)$.

3 e) Bestimmen Sie die Zirkulation Γ entlang der in der Skizze angegebenen Kurve s und den Wirbelfluß Ω durch die von der Kurve s aufgespannte Fläche.

Gegeben: $u_w, h, L, \rho, \tau_0, \eta$

Hinweis:

- Die Strömung ist als eben zu betrachten
- Die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls lauten:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$$
$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau$$

- Für eine Bingham Flüssigkeit gilt
  - für $|\tau| \le \tau_0$ verhält sich das Fluid wie ein Festkörper
  - für $|\tau| > \tau_0$ gilt:

$$\tau_{xx} = 2\eta\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{yy} = 2\eta\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \tau_0$$

4. Aufgabe ①

a) stationär ⇒ $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ inkompr. ⇒ ρ = konst   2dimensional

⇒ Konti: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

X-Impuls: $\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$

Y-Impuls: $\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$

für ausgebildete Strömung gilt: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

Aus Konti folgt: $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ da $v = 0$ für $y = 0$ ⇒ $v \equiv 0$

⇒ X-Impuls: $0 = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$

Y-Impuls: $0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$

b) $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$ eingesetzt ergibt: für $|\tau| > \tau_0$: $\tau_{xx} = 0$ $\tau_{yy} = 0$

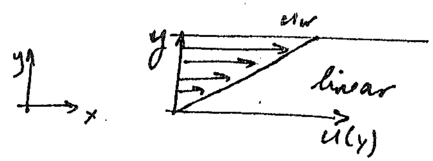
$\tau_{xy} = \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \tau_0$ ⇒ X-Impuls: $0 = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ Y-Impuls: $0 = \frac{\partial p}{\partial y}$

⇒ $u = \frac{C_1}{\eta}\cdot y + C_2$

R.B.: $u(y=0) = 0$ ⇒ $C_2 = 0$ $u(y=h) = u_w$ ⇒ $C_1 = \frac{u_w \cdot \eta}{h}$

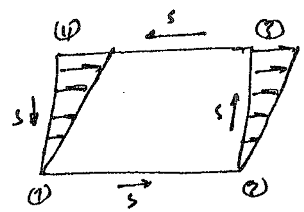
⇒ $u = \frac{u_w}{h}\cdot y$ „Couette Strömung"

c)



d) $\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\frac{u_w}{h}$

e)



$\Gamma = \int_{①}^{①} \vec{v}\,d\vec{s} = -u_w \cdot l$

$\Omega = \int_A \omega\,dA = h \cdot l \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{u_w}{h} = \frac{-u_w \cdot l}{2}$

oder $\Omega = \frac{1}{2}\Gamma = \frac{-u_w\, l}{2}$ Satz von Stokes

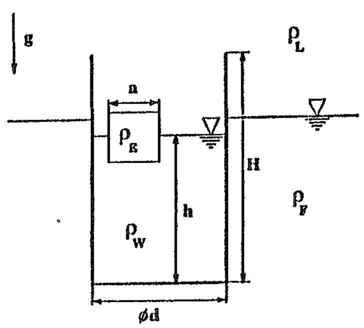
47

Klausur Strömungslehre

18. 3. 1999

1. Aufgabe (12 Punkte)

In einer Badewanne befindet sich eine Flüssigkeit mit der Dichte ρ_F. An der Oberfläche schwimmt ein Glas mit zylindrischem Querschnitt und Leergewicht G. Das Glas wird mit Wasser (Dichte ρ_W) gefüllt und später wird ein Eiswürfel mit der Dichte ρ_E und Würfelkantenlänge a ins Glas gelegt. Die Dichte der Luft beträgt ρ_L und wird berücksichtigt.



a) Bestimmen Sie die maximale Höhe des Wassers im Glas h_{max}, bei der das Glas nicht untertaucht. (ohne Eiswürfel)

b) Bestimmen Sie für den Eiswürfel das Verhältnis der Volumenanteile oberhalb und unterhalb der Wasseroberfläche im Glas.

c) Bestimmen Sie h_{max}, wenn der Eiswürfel sich im Glas befindet.

d) Nach einer gewissen Zeit schmilzt der Eiswürfel. Bestimmen Sie nun die Änderung der Höhe Δh der Wasseroberfläche im Glas.

Gegeben: $G, H, d, a, g, \rho_L, \rho_F, \rho_W, \rho_E$

Hinweis:

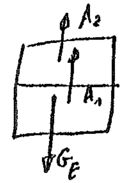
- $\rho_L < \rho_E < \rho_W$, $\rho_W > \rho_F$
- der Eiswürfel besteht aus Wasser mit der Dichte ρ_W im flüssigen Zustand

1. Aufgabe Kräftegleichgewicht (1) + eingesetzt (1)

a) $A = \rho_F \cdot g \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot H = G + \rho_W \cdot h_{max} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot g + (H - h_{max}) \cdot \rho_L \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot g$

$$\Rightarrow \boxed{h_{max} = \left(\frac{\rho_F - \rho_L}{\rho_W - \rho_L}\right) \cdot H - \frac{G}{(\rho_W - \rho_L) \cdot g \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \quad (1)$$

b)

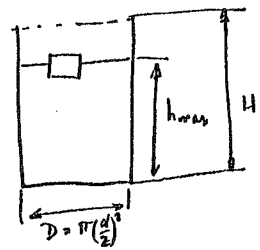


$A_1 + A_2 = G_E \quad V_1 + V_2 = V \quad A_1 = \rho_W \cdot g \cdot V_1 \quad A_2 = \rho_L \cdot g \cdot V_2$

$G_E = \rho_E \cdot g \cdot V \Rightarrow \rho_W \cdot g \cdot V_1 + \rho_L \cdot g \cdot V_2 = \rho_E \cdot g \cdot V = \rho_E \cdot g\,(V_1 + V_2)$ (1)

$$(\rho_W - \rho_E) \cdot V_1 + (\rho_L - \rho_E) \cdot V_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_E - \rho_L}{\rho_W - \rho_E}} \quad (1)$$

c)



$A = \rho_F \cdot g \cdot D \cdot H$ (1)

$\sum G = G + \rho_W \cdot g\,(h_{max} \cdot D - V_1) + \rho_L \cdot g\,[(H - h_{max}) \cdot D - V_2] +$

$+ \rho_E \cdot g \cdot (V_1 + V_2) =$ (1)

$= G + \rho_W \cdot g \cdot h_{max} + \rho_L \cdot g \cdot (H - h_{max}) \cdot D +$

$+ \underbrace{\rho_E \cdot g\,(V_1 + V_2) - \rho_W \cdot g \cdot V_1 - \rho_L \cdot g \cdot V_2}_{=0} =$ (1)

$= G + \rho_W \cdot g \cdot h_{max} + \rho_L \cdot g\,(H - h_{max}) \cdot D$

$$\Rightarrow \boxed{h_{max} = \left(\frac{\rho_F - \rho_L}{\rho_W - \rho_L}\right) \cdot H - \frac{G}{(\rho_W - \rho_L)\, g \cdot \pi \cdot (d/2)^2}} \quad (1)$$

wie in Teilaufgabe 1a) !

d) Masse bleibt gleich (1) $\Rightarrow \Delta V_{glas} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \Delta h = V \cdot \frac{\rho_E}{\rho_W} - V_1$ (1)

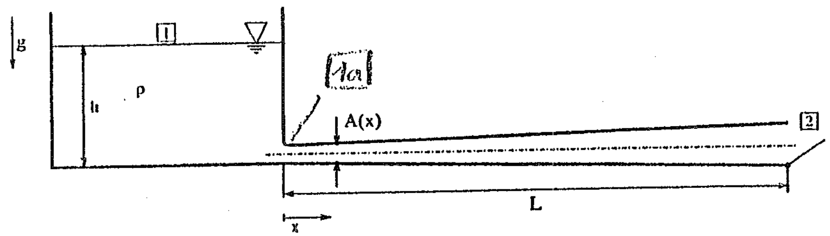
$= V \cdot \left(\frac{\rho_E}{\rho_W} - \frac{(\rho_E - \rho_L)}{(\rho_W - \rho_L)}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = \frac{a^3 \cdot \rho_L \cdot (\rho_W - \rho_E)}{\rho_W \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot (\rho_W - \rho_L)}} \quad (1)$$

167

2. Aufgabe (12 Punkte)

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird an der Stelle $\boxed{2}$ plötzlich eine Klappe geöffnet. Die Flüssigkeit mit der Dichte ρ strömt aus einem großen Behälter durch das Rohr mit der Querschnittsfläche A(x) ins Freie.



Bestimmen Sie

(1) a) die stationäre Austrittsgeschwindigkeit v_{stat}.

(1) b) die lokale Beschleunigung am Austritt $\boxed{2}$ zum Zeitpunkt $t = t_0$.

(1) c) die Zeit T, in der die Geschwindigkeit am Austritt $\boxed{2}$ den Wert $c \cdot v_{stat}$ erreicht.

(3) d) das Volumen Q der in dieser Zeit T ausgeströmten Flüssigkeit.

Gegeben: $\rho, g, L, h, t_0 = 0, c, A_0 = A(x = 0), A(x) = A_0(x/L + 1)$

Hinweis:

- alle Strömungsverluste sind zu vernachlässigen
- $0 < c < 1$
- $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$
- $\int \frac{x\,dx}{a^2 - b^2x^2} = -\frac{1}{2b^2} \ln(a^2 - b^2x^2)$

2. Aufgabe

a) Bernoulli: $\boxed{1} \rightarrow \boxed{2}$ $\quad p_a + \rho g h = p_a + \frac{1}{2}\rho V_{2stat}^2 \Rightarrow \boxed{V_{2stat} = \sqrt{2gh}}$ (1)

b) instat. Bernoulli: $p_a + \rho g h = p_a + \frac{1}{2}\rho V_2^2(t) + \rho \int_0^L \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\,dx$ (1)

Konti: $v(x,t) = \frac{V_2(t) \cdot 2A_0}{(x/L + 1)A_0} = \frac{2 \cdot L \cdot V_2(t)}{x + L}$ (1)

Zum Zeitpunkt $t = 0 \Rightarrow V_2(t) = 0 \Rightarrow g \cdot h = \int_0^L \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}\,dx = \frac{dV_2(t)}{dt} \int_0^L \frac{2L}{x+L}\,dx$

(1)

$= \frac{dV_2(t)}{dt} \cdot 2 \cdot L \cdot \ln(x+L)\Big|_0^L = 2 \cdot L \cdot \ln 2 \cdot \frac{dV_2(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dV_2(t)}{dt} = \frac{g \cdot h}{L \cdot \ln 4}}$ (1)

(1) Ansatz Bernoulli mit Integral

c) $g \cdot h = \frac{1}{2}V_2^2(t) + \frac{dV_2(t)}{dt} \cdot L \cdot \ln 4 \Rightarrow \frac{V_{2stat}^2}{2} - \frac{1}{2}V_2^2(t) = L \cdot \ln 4 \cdot \frac{dV_2(t)}{dt}$

$\frac{V_{2stat}^2 - V_2^2(t)}{L \cdot \ln 16} = \frac{dV_2(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^T \frac{dt}{L \ln 16} = \int_0^{c \cdot V_{2stat}} \frac{dV_2(t)}{V_{2stat}^2 - V_2^2(t)}$ (1)

$\Rightarrow \frac{T}{L \cdot \ln 16} = \frac{1}{2V_{stat}} \ln\left(\frac{V_{2stat} + V_2}{V_{2stat} - V_2}\right)\Bigg|_0^{c \cdot V_{2stat}}$ (1)

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{L \cdot \ln 4}{V_{2stat}} \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right)}$ (1) Lösung

d) $Q = \int_0^T V_2(t) \cdot 2A_0 \cdot dt$ (1) $\qquad dt = L \cdot \ln 16 \cdot \frac{dV_2(t)}{V_{2stat}^2 - V_2^2(t)}$

$Q = 2 \cdot L \cdot \ln 16 \cdot A_0 \cdot \int_0^{c \cdot V_{2stat}} \frac{V_2(t)\,dV_2(t)}{V_{2stat}^2 - V_2^2(t)} =$ (1)

$= \cancel{}\, 2 \cdot L \cdot A_0 \cdot \ln 16 \cdot \left(-\frac{1}{2} \ln\left(V_{2stat}^2 - V^2(t)\right)\right)\Bigg|_0^{c \cdot V_{2stat}}$

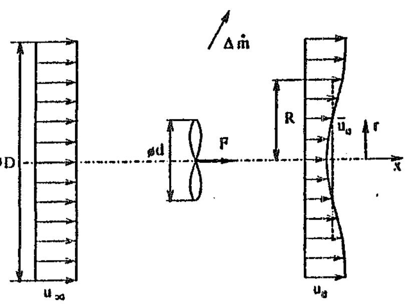
$\boxed{Q = L \cdot A_0 \cdot \ln 16 \cdot \ln\left(\frac{1}{1-c^2}\right)}$ (1) Lösung

49

3. Aufgabe (13 Punkte)

In einem Umlaufwindkanal mit offener Meßstrecke (Durchmesser D) wird die Luftumströmung (Dichte ρ) von einem Windrad (Durchmesser d) untersucht. Bei einer Anströmung mit der Geschwindigkeit u_∞ wird im Nachlauf in einer Schnittebene $x = const.$ das Geschwindigkeitsfeld $u_e(r,\varphi)$ gemessen:

$$u_e(r,\varphi) = \begin{cases} u_\infty\left((1-c) - c\cdot\cos(\pi\frac{r}{R})\right) & 0 \le r \le R \\ u_\infty & R < r \le D/2 \end{cases}$$



a) Bestimmen Sie den verdrängten Massenstrom $\Delta\dot{m}$ in der Meßstrecke.

b) Wie groß soll die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}_e$ gewählt werden, so daß der verdrängte Massenstrom $\Delta\dot{m}$ in der Meßstrecke gleich bleibt.

Für die weiteren Teilaufgaben setzen Sie $\bar{u}_e$ als bekannt voraus:

c) Bestimmen Sie die vom Windrad ausgeübte Kraft F aufgrund der angenäherten Geschwindigkeitsverteilung.

d) Bestimmen Sie d anhand der Rankineschen Strahltheorie.

e) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit u' in der Rotorebene in Abhängigkeit von u_∞ und $\bar{u}_e$.

Gegeben: $\rho, D, u_\infty, u_e(r,\varphi), R, c$

Hinweis:

- die Reibung ist zu vernachlässigen
- $d \ll D, \quad d/2 < R < D/2, \quad 0 < c < 1$
- $\int x\cos(ax)dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$

3. Aufgabe

a) $\rho u_\infty \pi R^2 = \Delta\dot{m} + \rho \int_0^{2\pi}\int_0^R u_e(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$

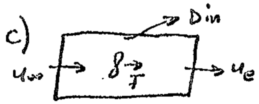
$\Rightarrow \Delta\dot{m} = \rho u_\infty \pi R^2 - \rho\cdot 2\pi\cdot u_\infty \int_0^R \left[(1-c)r - c\cdot r\cdot\cos(\pi\, r/R)\right] dr$

$= \rho u_\infty \pi R^2 - \rho\cdot 2\pi\cdot u_\infty \left[\left(\frac{1-c}{2}\right) r^2 - c\frac{\cos(\pi/R\cdot r)}{(\pi/R)^2} + c\frac{r\cdot\sin(\frac{\pi}{R}r)}{\pi/R}\right]$

$\boxed{\Delta\dot{m} = \rho u_\infty\cdot\pi R^2\cdot c(1 - 4/\pi^2)}$

b) $\Delta\dot{m} = \rho u_\infty\cdot\pi\cdot R^2 - \rho\bar{u}_e \pi R^2 \Rightarrow \boxed{\bar{u}_e = u_\infty\cdot\left(1 - c\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\right)}$

c)

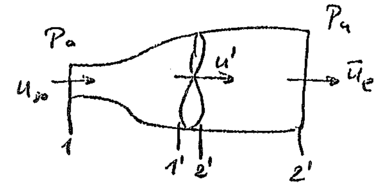


$\Delta\dot{m} = \rho(u_\infty - \bar{u}_e)\cdot\pi\cdot R^2$

Impulssatz: $-\rho u_\infty^2\cdot\pi R^2 + \Delta\dot{m}\, u_\infty + \rho\bar{u}_e^2\cdot\pi R^2 = F$

$\Rightarrow \boxed{F = (\bar{u}_e - u_\infty)\cdot\bar{u}_e\cdot\rho\cdot\pi\cdot R^2}$ negativ

d) Rankinesche Strahltheorie → eindimensional, Kraft ist gleichmäßig verteilt



Bernoulli $1\to 1'$: $\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 + p_a = \frac{1}{2}\rho u'^2 + p_1'$

$2'\to 2$: $\frac{1}{2}\rho u'^2 + p_2' = \frac{1}{2}\rho\bar{u}_e^2 + p_a$

$F = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot(p_2' - p_1')$

$(p_2' - p_1') = \frac{1}{2}\rho\bar{u}_e^2 + p_a - \frac{1}{2}\rho u'^2 - \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 - p_a + \frac{1}{2}\rho u'^2$

$\Rightarrow d^2 = \frac{8(\bar{u}_e - u_\infty)\cdot\bar{u}_e\cdot R^2}{(\bar{u}_e - u_\infty)(\bar{u}_e + u_\infty)} \Rightarrow \boxed{d = 2R\sqrt{\frac{2\bar{u}_e}{\bar{u}_e + u_\infty}}}$

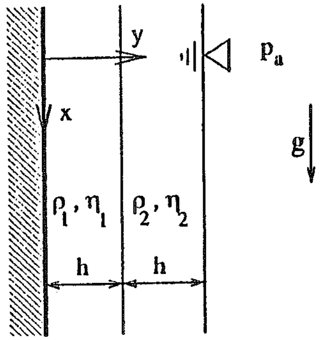
e) Konti: $\bar{u}_e\cdot\pi\cdot R^2 = u'\cdot\pi\cdot\left(d/2\right)^2$

$u' = \bar{u}_e\cdot R^2\cdot\frac{4(\bar{u}_e + u_\infty)}{8R^2\cdot\bar{u}_e} = \boxed{u' = \frac{\bar{u}_e + u_\infty}{2}}$

11/13

4. Aufgabe (12 Punkte)

Zwei Newtonsche Fluide der Dichte ρ_1, ρ_2 und der Zähigkeit η_1, η_2 strömen unter dem Einfluß der Erdschwere eine senkrecht stehende Wand der Breite B hinunter. Die Dicke jeder der beiden Fluidschicht beträgt jeweils h.



a) Leiten Sie für diese ausgebildete laminare Schichtenströmung die Differentialgleichung zur Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung her.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$ und skizzieren Sie Ihr Ergebnis für $\eta_2 < \eta_1$.

c) Bestimmen Sie die Schubspannung an der Wand.

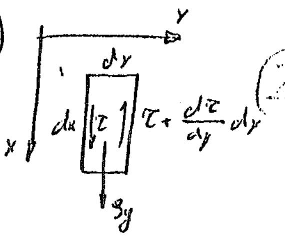
Gegeben: $B, g, h, \rho_1, \eta_1, \rho_2, \eta_2$

Hinweis:

- Die beiden Fluide mischen sich nicht
- Die von der Luft auf die Oberfläche der Fluidschicht übertragene Schubspannung wird vernachlässigt

4. Aufgabe

3 a)



$\sum F = 0$ ausgebildete Strömung ⇒ keine Druckänderung

2 $\tau \cdot B \cdot dx + \rho g \cdot dy\,dx \cdot B = \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy\right) dx \cdot B$

$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = \rho \cdot g$ Newton. Fluid: $\tau = \eta \frac{du}{dy}$

$\Rightarrow \boxed{\eta \frac{d^2u}{dy^2} = -\rho g}$ (1)

6 b) $\int \eta \frac{d^2u}{dy^2} = \int -\rho g \Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{\rho}{\eta} g y + C_1$; $u = \frac{-\rho g}{2\eta} y^2 + C_1 \cdot y + C_2$

Zwei Gebiete: $0 \le y \le h$: $u = u_1 = \frac{-\rho_1 g}{2\eta_1} y^2 + C_1 y + C_2$

$h < y \le h_2$: $u = u_2 = \frac{-\rho_2 g}{2\eta_2} y^2 + C_3 y + C_4$

R.B.: $y = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

$y = h \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 \Rightarrow \eta_1 \left(\frac{du_1}{dy}\right) = \eta_2 \left(\frac{du_2}{dy}\right) \Rightarrow -\rho_1 g h + \eta_1 C_1 = -\rho_2 g h + \eta_2$

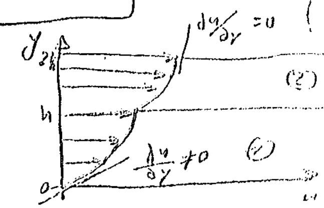
$y = 2h \Rightarrow \tau_2 = 0 \Rightarrow -\rho_2 \cdot g \cdot 2h + \eta_2 C_3 = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{\rho_2}{\eta_2} g \cdot 2h}$

$\eta_1 \cdot C_1 = -\rho_2 \cdot g \cdot h + \rho_1 \cdot g \cdot h + \rho_2 \cdot g \cdot 2h \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{g \cdot h}{\eta_1} \cdot (\rho_1 + \rho_2)}$

$y = h \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow \frac{-\rho_1 g}{2\eta_1} h^2 + C_1 h = \frac{-\rho_2 \cdot g}{2\eta_2} h^2 + C_3 h + C_4$

$\Rightarrow \boxed{C_4 = \frac{g \cdot h^2 \cdot \left(\eta_2 (\rho_1 + 2\rho_2) - 3\eta_1 \rho_2\right)}{2\eta_1 \eta_2}}$ (1)

$\eta_2 < \eta_1$



3 c) Schubspannung an der Wand:

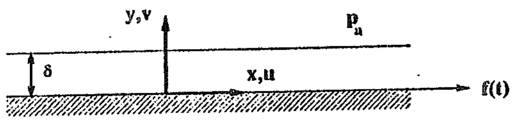
$\tau_w = \eta \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \eta_1 C_1 = \boxed{g \cdot h (\rho_1 + \rho_2) = \tau_w}$

170

5. Aufgabe (12 Punkte)

Eine unendlich ausgedehnte ebene Platte schwingt in x-Richtung mit der Geschwindigkeit $f(t) = U_0 \cos(\omega t)$. Dabei entsteht eine mitschwingende Schicht mit konstanter Dicke δ. Zur Untersuchung dieses Problems sollen die folgenden Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls vereinfacht werden:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$$
$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau$$



(4) a) Vereinfachen Sie die Erhaltungsgleichungen für 2-dimensionale, instationäre, inkompressible Strömungen. Setzen Sie für den Schubspannungstensor $\nabla \cdot \tau = \eta \nabla^2 \vec{v}$ ein.

(3) b) Im eingeschwungenen Zustand herrscht überall der Druck p_a und die vertikale Komponente der Geschwindigkeit verschwindet. Vereinfachen Sie die Gleichungen weiter und zeigen Sie, daß die konvektiven Terme verschwinden.

(3) c) Bestimmen Sie die Kennzahl(en) des Problems.

(2) d) Wie ändert sich qualitativ die Dicke der mitschwingenden Schicht in Abhängigkeit von der Frequenz ω und der Viskosität η.

Gegeben: $\eta, \rho, \delta, U_0, \omega, f(t)$

---

5. Aufgabe

a) Konti: $(\nabla \vec{v}) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$ (1) Konti

Impuls: $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}$

$$\rho \cdot \nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) = \rho \cdot \nabla \cdot \begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \\ \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \rho \begin{pmatrix} u\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ Konti (1)}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$\Rightarrow$ x-Impuls: $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

y-Impuls: $\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$

b) $v = 0$; $p = p_a \Rightarrow$ Konti: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

(1) $v = 0$ + [illegible]
(1) $p = p_a$ +
(1) $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$ +

x-Impuls: $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

y-Impuls: $0 = 0$

$u \neq f(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ x-Impuls: $\boxed{\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$

c) $\bar{t} = t \cdot \omega$ $\quad \bar{u} = u/U_0$ $\quad \bar{y} = y/\delta$ (1)

$\Rightarrow \rho U_0 \cdot \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \eta \frac{U_0}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \frac{\eta}{\rho\omega \cdot \delta^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$ (1)

$\Rightarrow \boxed{K_1 = \frac{\eta}{\rho \omega \delta^2}}$ (1) Kennzahl

d) $\omega \uparrow \rightarrow \delta \downarrow$ (1) $\quad \eta \uparrow \rightarrow \delta \uparrow$ (1)

52

....

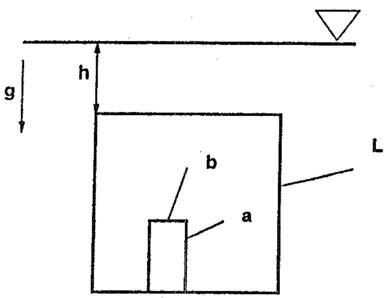
(Name, Matr.-Nr., Unterschrift)

Klausur Strömungslehre I/II

9. 7. 1999

1. Aufgabe (10 Punkte)

Eine Forschungsstation in Gestalt eines Würfels mit der Kantenlänge L wird mit der Tiefe h in ein Gewässer getaucht. Im Inneren der Station herrscht Umgebungsdruck p_a. Durch eine rechteckige Tür mit den Seitenlängen a und b kann die Station verlassen werden. Beim Öffnen dreht sich die Tür um die Kante a.



a) Welche Kraft F_A ist erforderlich, um die Türe zu öffnen, wenn F_A im Abstand $2/3b$ von der Drehachse der Tür angreift?

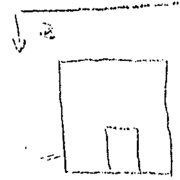
b) Ein Mann/eine Frau kann zum Öffnen der Türe die Kraft F_M aufbringen ($F_M < F_A$). Damit F_M ausreicht, muß die Station bis zur Höhe x geflutet werden, ohne daß Luft entweicht. Stellen Sie eine Beziehung zwischen F_M und x auf.

Gegeben: $L, h, a, b, p_a, \rho, g, F_M$

Hinweis:

- die Luft im Inneren der Station verhalte sich wie ein ideales Gas
- die Zustandsänderung der Luft ist isotherm

a) $p(z) = p_a + \rho g z$



$F_i = p_a \cdot ab$

$F_a = p_a \cdot ab + \frac{1}{2} \rho g ab (L + h + L + h - a)$

$F_{ges} = F_a - F_i = \rho g a b (L + h - \frac{a}{2})$

Momentengleichgewicht: $F_{ges} \cdot \frac{b}{2} = F_A \cdot \frac{2}{3} b$

$\rightarrow F_A = \frac{3}{4} \rho g a b (L + h - \frac{a}{2})$

b) Masse der Luft = konst, isotherm $\Big\}$ $\frac{p_i}{\rho_i} = const.$

$\frac{p_a L^3}{M_L} = \frac{p_{ib} L^2 (L-x)}{M_L} \rightarrow p_{ib} = p_a \frac{L}{L-x}$

$F_i = p_{ib} \cdot ab + \rho g b \frac{x^2}{2} = p_a \frac{L}{L-x} ab + \rho g b \frac{x^2}{2}$

$F_{ges} = p_a ab + \frac{1}{2} \rho g ab (2L + 2h - a) - p_a \frac{L}{L-x} ab - \rho g b \frac{x^2}{2}$

Momentengleichgewicht: $\frac{F_{ges} \cdot b}{2} = F_M \cdot \frac{2}{3} b$

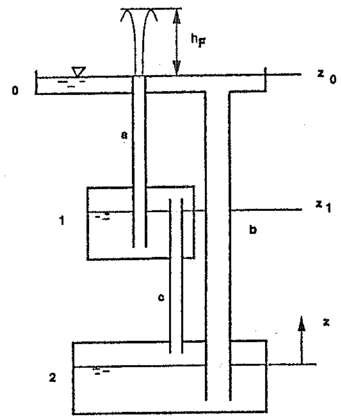
$\rightarrow \frac{4}{3} F_M = p_a ab \left(- \frac{x}{L-x}\right) + \rho g b \left(La + ha - \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} x^2\right)$

177

53?

2. Aufgabe (13 Punkte)

Im zweiten Jahrhundert vor Christus erfand Heron von Alexandrien die abgebildete Fontäne. Das Wasser aus der Düse wird im Becken 0 aufgefangen und fließt dann durch die Leitung b (Durchmesser $d_b = 40mm$) in den unteren Behälter 2. Dieser ist über die Leitung c mit dem mittleren Behälter 1 verbunden. Die Fontäne wird durch den mittleren Behälter über die Leitung a (Durchmesser $d_a = 10mm$)gespeist.
Das Wasser, das in den unteren Behälter zurückfließt, verwirbelt dort. Die gesamte Strömung kann als reibungsfrei und stationär betrachtet werden.



Zu einem bestimmten Zeitpunkt betragen die Spiegelhöhen $z_0 = 25m$ und $z_1 = 15m$.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Wasser die Düse verläßt.

b) Wie groß ist der Volumenstrom?

c) Wie groß ist die Steighöhe der Fontäne?

Im folgenden soll das Problem unter Berücksichtigung von Druckverlusten in den beiden Rohren a und b betrachtet werden.
In der Einlaufstrecke entsteht jeweils ein Druckverlust, der durch den Verlustbeiwert $\zeta = 1.16$ erfaßt wird. Die Rohrreibungsbeiwerte (für die Längen L_a und L_b) sind

$$\lambda_a = 0.0238$$
$$\lambda_b = 0.0337$$

bestimmt werden.

d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Wasser die Düse verläßt, unter Berücksichtigung von Druckverlusten.

e) Sind die Rohrströmungen laminar oder turbulent?

Gegeben: $\rho = 1kg/l, \eta = 10^{-3}Ns/m^2, p_a = 1bar, d_a = 10mm, d_b = 40mm,$
$L_a = 12m, L_b = 26m, g = 9.81m/s^2, z_0 = 25m, z_1 = 15m$

(2)

a) Bernoulli 0 → 2: $p_a + \rho g z_0 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_b$

1 → 0: $p_1 + \rho g z_1 = p_a + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho v_a^2$
$= p_a + \rho g (z_0 + h_F)$

$p_1 = p_2 = p_a + \rho g z_0 - \frac{1}{2}\rho v_b^2$

Konti (stationär): $v_b d_b^2 = v_a d_a^2$

$p_a + \rho g z_0 - \frac{1}{2}\rho v_b^2 + \rho g z_1 = p_a + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho v_a^2$

$\rightarrow \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho \left(1 + \left(\frac{d_a}{d_b}\right)^4\right) v_a^2$

$\rightarrow v_a = \sqrt{\frac{2 g z_1}{1 + \left(\frac{d_a}{d_b}\right)^4}} = 17.122 \frac{m}{s}$

b) $\dot{Q} = v_a \cdot \frac{\pi}{4} d_a^2 = 0.0013447 \frac{m^3}{s}$

c) $h_F = \frac{v_a^2}{2g} = 14.942 m$

d) Bernoulli mit Verlustterm

$p_a + \rho g z_0 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_b^2 \left(1 + \zeta + \lambda_b \frac{L_b}{d_b}\right)$

$p_1 + \rho g z_1 = p_a + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho v_a^2 \left(1 + \zeta + \lambda_a \frac{L_a}{d_a}\right)$

$\rightarrow v_a = \sqrt{\frac{2 g z_1}{1 + \zeta + \lambda_a \frac{L_a}{d_a} + \frac{d_a^4}{d_b^4}\left(1 + \zeta + \lambda_b \frac{L_b}{d_b}\right)}} = 3.08 \frac{m}{s}$

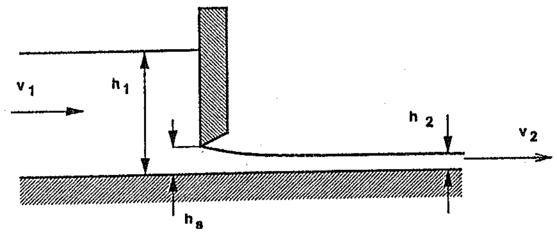
e) $v_b = v_a \cdot \frac{d_a^2}{d_b^2} = 0.193 \, m/s$

$Re_a = \frac{\rho v_a d_a}{\eta} = 30.800$ $\quad Re_b = \frac{\rho v_b d_b}{\eta} = 7720 > 2.300 \Rightarrow$ turb.

54

3. Aufgabe (13 Punkte)

Ein Fluß der Breite B wird durch ein Hubschütz auf die Höhe h_1 aufgestaut. Das abfließende Wasser hat die Geschwindigkeit v_2 hinter dem Hubschütz. Das Wasser fließt schießend aus der Öffnung. Die Reibung kann vernachlässigt werden.



a) Bestimmen Sie die Wasserhöhe h_2 des schießenden Wassers.

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit v_1 des ankommenden Wassers?

c) Welche Kraft wirkt auf das Schütz? Gehen Sie davon aus, daß die vertikale Druckverteilung linear ist.

d) Wie groß ist der Spalt der Öffnung h_s?

Gegeben: $h_1 = 1.5m, b = 20m, v_2 = 5.3m/s, \rho = 1000kg/m^3, g = 9.81m/s^2$

(3)

a) Energiegl.: $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$

konti: $v_1 h_1 = v_2 h_2 \rightarrow v_2 = v_1 \frac{h_1}{h_2}$; $v_1 = v_2 \frac{h_2}{h_1}$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 \frac{h_1^2}{h_2^2} + \rho g h_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2$$

$$\rightarrow h_2^2 - \frac{2g}{v_2^2} h_1^2 h_2 + \frac{2g}{v_2^2} h_1^3 - h_1^2 = 0$$

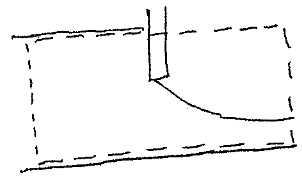
$$h_2 = \frac{g}{v_2^2} h_1^2 \pm \sqrt{\frac{g^2 h_1^4}{v_2^4} - \frac{2g h_1^3}{v_2^2} + h_1^2} = \frac{g h_1^2}{v_2^2} \pm \frac{g h_1^2}{v_2^2} \mp h_1$$

$h_2 = h_1$: triviale Lösung → strömendes Wasser

$$\rightarrow h_2 = \frac{2g}{v_2^2} h_1^2 - h_1 = 0.0715 \text{ m}$$

b) $v_1 = v_2 \frac{h_2}{h_1} = \frac{2g}{v_2} h_1 - v_2 = 0.2528 \text{ m/s}$

c)

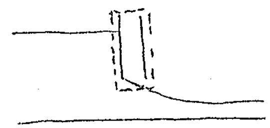


Impuls: $-\rho v_1^2 h_1 b + \rho v_2^2 h_2 b$
$- \frac{1}{2}\rho g h_1^2 b + \frac{1}{2}\rho g h_2^2 b = F_S$

$$F_S = \rho b (v_2^2 h_2 - v_1^2 h_1) + \frac{1}{2}\rho g b (h_2^2 - h_1^2) = -F_{Schütz}$$

$$F_{Schütz} = -\rho b h_1 \left(6 g h_1 - 6 \frac{g^2 h_1^2}{v_2^2} - 2 v_2^2 + \frac{2 g^3 h_1^3}{v_2^4}\right) = 181.9 \text{ kN}$$

d)



Impuls:
$F_S = \frac{1}{2}\rho g (h_1 - h_s)^2 b$

$$h_1 - h_s = \sqrt{\frac{2 F_S}{\rho g b}} = \sqrt{-2 h_1 \left(6 h_1 - 6 \frac{g h_1^2}{v_2^2} - 2 \frac{v_2^2}{g} + 2 \frac{g^2 h_1^3}{v_2^4}\right)}$$

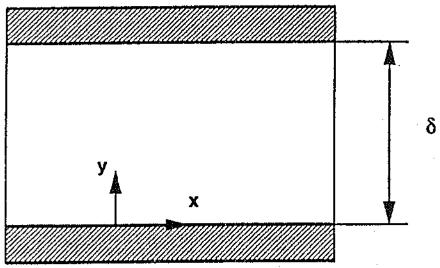
$$h_s = h_1 - \sqrt{-2h_1 \left(6 h_1 - 6 \frac{g h_1^2}{v_2^2} - 2 \frac{v_2^2}{g} + 2 \frac{g^2 h_1^3}{v_2^4}\right)} = 0.138 \text{ m}$$

179

55

4. Aufgabe (13 Punkte)

Zwischen zwei ebenen, unendlich ausgedehnten horizontal angeordneten Platten mit dem Abstand δ befindet sich eine Flüssigkeit. Durch einen Druckgradienten in x-Richtung wird eine Strömung induziert.



a) Leiten Sie für diese ausgebildete laminare Schichtenströmung die Differentialgleichung zur Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung in einem Newton'schen Fluid her.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$ und skizzieren Sie sorgfältig Ihr Ergebnis für $\eta = konst.$

c) Bestimmen Sie die Schubspannungen an den Wänden und den auf die Breite bezogenen Volumenstrom

Gegeben: $\delta, \frac{\partial p}{\partial x}, \eta$

Im zweiten Teil der Aufgabe sei die obere Platte geheizt, sodaß sich eine linearer Temperaturverteilung im Spalt einstellt.

$$T(y) = T_u + \Delta T \frac{y}{\delta}$$

Der Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Zähigkeit lautet:

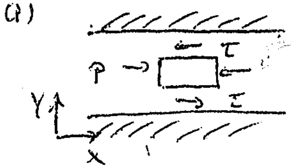
$$\eta = K/T$$

d) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$

Gegeben: $\delta, \frac{\partial p}{\partial x}, T_u, T_o, K$

(4)

a)



$$(p(x) - p(x+dx))\,dy + (\tau(y) - \tau(y+dy))\,dx = 0$$

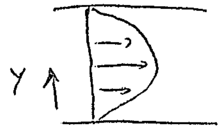
$$\rightarrow \frac{dp}{dx} + \frac{d\tau}{dy} = 0$$

$$\tau = -\eta \frac{du}{dy} \rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}$$

b) 1. Integration $\frac{du}{dy} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx} y + C_1$ 2. Integration: $u(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$

RB: $y = 0, \delta \rightarrow u = 0$

$$u(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\delta^2\left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{y}{\delta}\right]$$



$\frac{dp}{dx} < 0$

c) $y = 0$: $\tau_w = -\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\delta$; $y = \delta$: $\tau_w = \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\delta$

$$\frac{\dot{Q}}{b} = \int_0^\delta u(y)\,dy = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\delta^2\left[\frac{1}{3}\frac{y^3}{\delta^2} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{\delta}\right]_0^\delta = -\frac{1}{12\eta}\frac{dp}{dx}\delta^3$$

d) $\eta = \frac{k}{T_u + \Delta T \frac{y}{\delta}}$; $\tau = -\frac{dp}{dx}y + C_1 = -\frac{k}{T_u + \Delta T\frac{y}{\delta}}\frac{du}{dy}$

$$\frac{du}{dy} = \frac{T_u + \Delta T\, y/\delta}{k}\frac{dp}{dx}y - \frac{T_u + \Delta T\, y/\delta}{k}C_1$$

$$u(y) = \frac{1}{2}\frac{T_u}{k}\frac{dp}{dx}y^2 + \frac{1}{3}\frac{\Delta T}{k\delta}\frac{dp}{dx}y^3 - \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{k\delta}C_1 y^2 - \frac{T_u}{k}C_1 y + C_2$$

RB: $y = 0, \delta$: $u = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$$C_1 = \frac{1/2\, T_u + 1/3\,\Delta T}{1/2\,\Delta T + T_u}\,\delta\,\frac{dp}{dx}$$

$$u(y) = \frac{1}{2}\frac{T_u}{k}\frac{dp}{dx}y^2 + \frac{1}{3}\frac{\Delta T}{k\delta}\frac{dp}{dx}y^3 - \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{k\delta}y^2 + \frac{T_u}{k}y\right)\frac{1/2\,T_u + 1/3\,\Delta T}{1/2\,\Delta T + T_u}$$

180

.56

5. Aufgabe (12 Punkte)

Eine Reihe Zylinder wird in eine Strömung getaucht. Die Frequenz f, mit der Wirbel von den Zylindern abschwimmen hängt von der Fluidgeschwindigkeit v, dem Zylinderdurchmesser D, dem Abstand der Zylinder y sowie der dynamischen Viskosität η und der Dichte ρ des Fluids ab.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe des Π-Theorems die Kennzahlen des Problems

In einem Wärmetauscher wird Wasserstoff bei $400K$ und $10bar$ als Kühlflüssigkeit eingesetzt. Die Strömungsgeschwindigkeit des Wasserstoffs ist $15m/s$, der Durchmesser der Zylinder beläuft sich auf $50mm$.
Zur Bestimmung der Wirbelfrequenz wird ein Experiment für eine geometrisch ähnliche Zylinderanordnung durchgeführt. Es wird Luft bei $300K$ und $1bar$ als Fluid verwendet, der Zylinderdurchmesser beträgt $25mm$. Für Geschwindigkeiten bis zu $30m/s$ wird der Zusammenhang

$$f_L = C_L \cdot v_L \quad \text{mit} \quad C_L = 4.25 \frac{1}{m} \tag{1}$$

aufgestellt.

b) Berechnen Sie die Wirbelfrequenz für den Wasserstoffwärmetauscher.

Gegeben $p_L = 1bar, T_L = 300K, D_L = 25mm, R_L = 287J/kgK, \eta_L = 1.846 \cdot 10^{-5} Ns/m^2$,

$p_W = 10bar, T_W = 400K, D_W = 50mm, v_W = 15m/s, R_W = 4124J/kgK$,

$\eta_W = 10.87 \cdot 10^{-6} Ns/m^2$

(5)

a) 6 Einflußgrößen f, v, D, y, η, ρ

3 Grunddimensionen $(M, L, T) \rightarrow$ 3 Kennzahlen

$\Pi_1 = f \rho^\alpha v^\beta D^\gamma \rightarrow M^0 L^0 T^0 = T^{-1} (ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma$

$M: 0 = \alpha$

$L: 0 = -3\alpha + \beta + \gamma \rightarrow \alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 1 : \Pi_1 = \frac{fD}{v}$

$T: 0 = -1 - \beta$

$\Pi_2 = \eta \rho^\alpha v^\beta D^\gamma \rightarrow M^0 L^0 T^0 = M L^{-1} T^{-1} (ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma$

$M: 0 = 1 + \alpha$

$L: 0 = -1 - 3\alpha + \beta + \gamma \rightarrow \alpha = -1 ; \beta = -1 ; \gamma = -1 . \ \Pi_2 = \frac{\eta}{\rho v D}$

$T: 0 = -1 - \beta$

$\Pi_3 = y \rho^\alpha v^\beta D^\gamma \rightarrow M^0 L^0 T^0 = L (ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma$

$M: 0 = \alpha$

$L: 0 = 1 - 3\alpha + \beta + \gamma \rightarrow \alpha = \beta = 0 ; \gamma = -1 \rightarrow \Pi_3 = \frac{y}{D}$

$T: 0 = -\beta$

b) $\rho_L = \frac{p_L}{R_L T_L} = 1{,}16 \ kg/m^3 ; \quad \rho_W = \frac{p_W}{R_W T_W} = 0{,}606 \ kg/m^3$

$y/D|_L = y/D|_W$ ist erfüllt, da geometrisch ähnlich (A.S.)

$\frac{\eta}{\rho v D}\Big|_L = \frac{\eta}{\rho v D}\Big|_W \rightarrow v_L = \frac{\rho_W}{\rho_L} \frac{D_W}{D_L} \frac{\eta_L}{\eta_W} v_W = 26.6 \ m/s < 30 \ m/s$

$f_L = 4.25 \frac{1}{m} v_L = 113.02 \ Hz : \quad \frac{fD}{v}\Big|_W = \frac{fD}{v}\Big|_L$

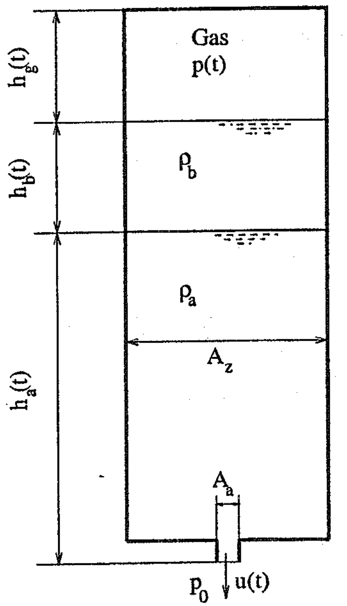
$f_W = \frac{D_L}{D_W} \cdot \frac{v_W}{v_L} f_L = \frac{D_L}{D_W} v_W \cdot 4.25 \frac{1}{m} = 31.9 \ Hz$

Wärme + Stoffübertragung + Teil Strömungslehre

57

1. Aufgabe (11 Punkte)

Ein oben geschlossener Behälter besteht aus einem zylindrischen Körper, der in ein kurzes Ausflußrohr ins Freie (Druck p_0) mündet. In diesem Behälter sind Flüssigkeiten der Dichten ρ_a und ρ_b sowie ein ideales Gas unter dem anfänglichen Druck $p(t=0) = p_0 + \Delta p$ und einer konstanten Temperatur übereinandergeschichtet. Die Fluide vermischen sich nicht.



a) Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit u(t=0) für den skizzierten Flüssigkeitsstand?

b) Bestimmen Sie für einen quasistationären Ausfluß der Flüssigkeit "a" eine Differentialgleichung zur Berechnung der Höhe $h_g(t)$. Lösen Sie diese Differentialgleichung nicht.

c) Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit, unmittelbar bevor die gesamte Flüssigkeit "a" ausgeflossen ist?

d) Wie groß muß Δp im Ausgangszustand mindestens sein, damit die Flüssigkeit "a" völlig ausfließen kann?

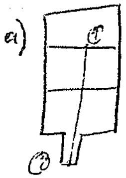
Gegeben: $\rho_a, \rho_b, p_0, \Delta p, h, h_g(t=0) = h, h_b(t=0) = h, h_a(t=0) = 3h, A_z, A_a$, g

Hinweis:

- alle Strömungsverluste sind zu vernachlässigen
- die Querschnittsfläche des Ausflußrohres A_a ist gegenüber derjenigen des zylindrischen Teils A_z vernachlässigbar $A_a << A_z$

1. Aufgabe

a)



Aus Konti: $v_1 = \underbrace{\frac{A_a}{A_z}}_{\ll 1} \cdot u \Rightarrow v_1$ vernachlässigbar

Bernoulli 1–2: $p_0 + \Delta p + \frac{1}{2}\cancel{\rho_b v_1^2} + \rho_a \cdot g \cdot h_a + \rho_b \cdot g \cdot h_b = p_0 + \frac{1}{2}\rho_a u^2$

$$\Rightarrow u = \sqrt{\frac{2}{\rho_a}\left[\Delta p + g h (3\rho_a + \rho_b)\right]}$$

b) Bernoulli 1→2 quasistationär $h_b(t) = h = \text{const.}$ für den betrachteten Ablauf

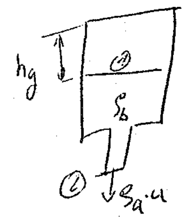
$p(t) = \rho(t) \cdot R \cdot T$ $\quad p/\rho = p \cdot \frac{V}{m} = R \cdot T = \text{const.}$

$p(t) = p(t=0) \cdot \frac{V(t=0)}{V(t)} = (p_0 + \Delta p)\frac{h \cdot A_z}{h_g(t) \cdot A_z} = (p_0 + \Delta p) \cdot \frac{h}{h_g(t)}$

$h_a(t) = 3h - h_g(t) + h = 4h - h_g(t)$ $\quad$ Konti: $A_a \cdot u(t) = A_z \frac{dh_g(t)}{dt} \Rightarrow u(t) = \frac{A_z}{A_a}\frac{dh}{dt}$

Einsetzen ergibt: $(p_0 + \Delta p)\frac{h}{h_g(t)} + \rho_a \cdot g(4h - h_g(t)) + \rho_b \cdot g \cdot h = p_0 + \frac{1}{2}\rho_a\left[\frac{A_z}{A_a}\frac{dh}{dt}\right]$

c) Bern. 1→2 $\quad h_g(t) = 3h + h = 4h$



$\cancel{p_0 + \Delta p}\ \frac{(p_0 + \Delta p) \cdot h}{4h} + \rho_b \cdot g \cdot h = p_0 + \frac{1}{2}\rho_a u^2$

$$\Rightarrow u^* = \sqrt{\frac{2}{\rho_a}\left(\frac{p_0 + \Delta p}{4} - p_0 + \rho_b g h\right)}$$

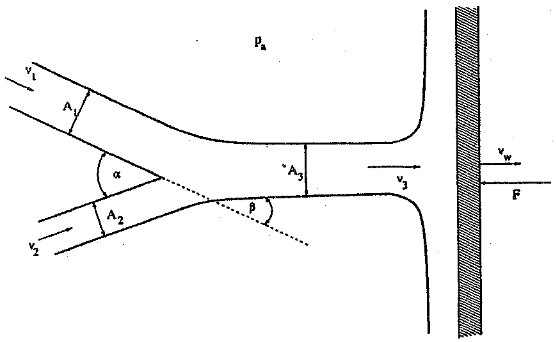
d) Grenzwert $u^* = 0$

$$\frac{p_0 + \Delta p}{4} - p_0 + \rho_b g h = 0 \Rightarrow \Delta p = 3p_0 - 4\rho_b g h$$

58

2. Aufgabe (12 Punkte)

Zwei Wasserstrahlen treffen sich unter dem Winkel α. Nach einer Vermischung bildet sich ein horizontaler Strahl, der auf eine vertikale mit der Geschwindigkeit v_w bewegte Platte auftrifft. Dort wird der Strahl parallel zur Platte reibungslos in zwei gleich große Strahlen umgelenkt.



Bestimmen Sie

a) den Winkel β,

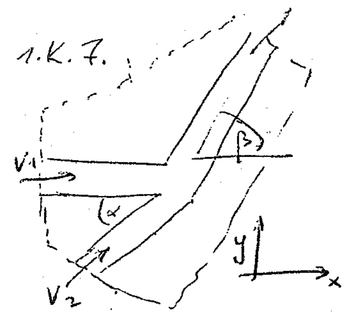
b) den Querschnitt A_3 und die Geschwindigkeit v_3,

c) die Kraft F, damit sich die Platte mit der konstanten Geschwindigkeit v_w in horizontaler Richtung bewegt.

Gegeben: $A_1, A_2, v_1, v_2, \alpha, v_w, \rho$

2. Aufgabe

1.K.F.



Impulssatz: x-Richtung

$$-\rho v_1^2 A_1 - \rho v_2^2 \cos\alpha A_2 + \rho v_3^2 \cos\beta A_3 = 0$$

y-Richtung:

$$-\rho v_2^2 \sin\alpha A_2 + \rho v_3^2 \sin\beta A_3 = 0$$

Konti: $v_1 A_1 + v_2 A_2 = v_3 A_3$

a) Winkel β

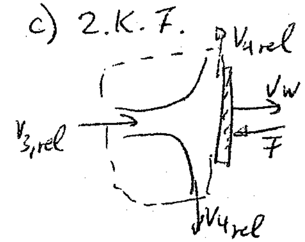
$$v_3^2 A_3 \sin\beta = v_2^2 A_2 \sin\alpha$$
$$v_3^2 A_3 \cos\beta = v_1^2 A_1 + v_2^2 A_2 \cos\alpha \Rightarrow \tan\beta = \frac{v_2^2 A_2 \sin\alpha}{v_1^2 A_1 + v_2^2 A_2 \cos\alpha}$$

b) $v_3^2 A_3^2 = (v_1 A_1 + v_2 A_2)^2$ $\qquad \frac{v_3^2 A_3^2}{A_3} \sin\beta = v_2^2 A_2 \sin\alpha = \frac{\sin\beta}{A_3}(v_1 A_1 + v_2 A_2)^2$

$$\Rightarrow A_3 = \frac{\sin\beta \, (v_1 A_1 + v_2 A_2)^2}{\sin\alpha \, v_2^2 A_2} \qquad (\beta \text{ aus a)})$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{1}{A_3}(v_1 A_1 + v_2 A_2)$$

c) 2.K.F.



Aus Symm $A_4 = \frac{1}{2} A_3$ (Konti)

$v_4 = v_3$ (Bernoulli)

$v_{3rel} = v_3 - v_w$ $\qquad v_{4rel} = v_{3rel}$

Impulssatz in x-Richtung für bewegtes System:

$$\int \rho \vec{v}_{rel} (\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n}) \, dA = -F$$

$$-\rho (v_3 - v_w)^2 A_3 = -F \quad \Rightarrow \quad F = \rho (v_3 - v_w)^2 A_3$$

59

3. Aufgabe (9 Punkte)

In einem Modellversuch soll die pulsierende Strömung in den Arterien des menschlichen Blutkreislaufes studiert werden. Der Innendurchmesser der Arterien sei d, das Blut pulsiert mit der Frequenz f des Herzschlages, wobei die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit u beträgt. Blut hat die gleiche Dichte wie Wasser, aber die vierfache dynamische Zähigkeit von Wasser.

a) Welche bekannte(n) Kennzahl(en) kennzeichnen das Problem. Was haben diese Kennzahlen für eine Bedeutung.

b) Wie groß müssen im Modellversuch die mittlere Geschwindigkeit u_M und die Frequenz f_M gewählt werden, wenn der Modelldurchmesser d_M beträgt und Blut als Modellflüssigkeit dient.

c) Wie in b) aber mit Wasser als Modellflüssigkleit.

Gegeben: d, f, u, d_M

3. Aufgabe

a) Reynoldszahl $Re = \frac{u \cdot d}{\nu} = \frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}}$

Strouhalzahl $Sr = \frac{l}{\tau \cdot u} = \frac{\Delta t}{\Delta t_{char}}$ Δt: Zeit für ein Fluidteilchen, um mit Geschw. u die Strecke l zurückzulegen

Δt_{char}: für die Strömung charakt. Zeit $\Rightarrow \Delta t_{char} = \frac{1}{f}$ für period. Vorgänge

b) $Re = Re_{Modell} \Rightarrow \frac{u \cdot d}{\nu} = \frac{u_M d_M}{\nu_M}$ mit $\nu = \nu_M$

$\Rightarrow u_M = u \cdot \frac{d}{d_M}$

$Sr = Sr_{Modell}$ $\frac{d \cdot f}{u} = \frac{d_M \cdot f_M}{u_M} = \frac{d_M^2 \cdot f_M}{u \cdot d} \Rightarrow f_M = \frac{d^2 \cdot f}{d_M^2}$

c) $Re = Re_{Modell}$ $\nu = 4\nu_M \Rightarrow u_M = u \frac{d}{4 d_M}$

$Sr = Sr_{Modell}$ $f_M = \frac{d}{d_M} \frac{u_M}{u} \cdot f = \frac{d^2}{4 d_M^2} \cdot f$

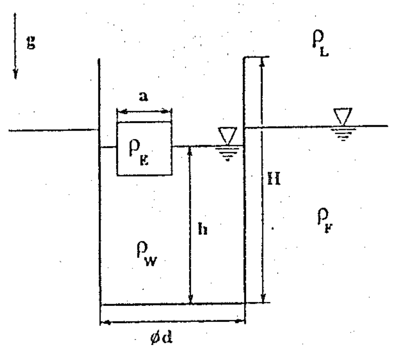
60

Klausur Strömungslehre

18. 3. 1999

1. Aufgabe (12 Punkte)

In einer Badewanne befindet sich eine Flüssigkeit mit der Dichte ρ_F. An der Oberfläche schwimmt ein Glas mit zylindrischem Querschnitt und Leergewicht G. Das Glas wird mit Wasser (Dichte ρ_W) gefüllt und später wird ein Eiswürfel mit der Dichte ρ_E und Würfelkantenlänge a ins Glas gelegt. Die Dichte der Luft beträgt ρ_L und wird berücksichtigt.



a) Bestimmen Sie die maximale Höhe des Wassers im Glas h_{max}, bei der das Glas nicht untertaucht. (ohne Eiswürfel)

b) Bestimmen Sie für den Eiswürfel das Verhältnis der Volumenanteile oberhalb und unterhalb der Wasseroberfläche im Glas.

c) Bestimmen Sie h_{max}, wenn der Eiswürfel sich im Glas befindet.

d) Nach einer gewissen Zeit schmilzt der Eiswürfel. Bestimmen Sie nun die Änderung der Höhe Δh der Wasseroberfläche im Glas.

Gegeben: $G, H, d, a, g, \rho_L, \rho_F, \rho_W, \rho_E$

Hinweis:

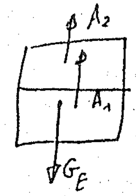
- $\rho_L < \rho_E < \rho_W$, $\rho_W > \rho_F$
- der Eiswürfel besteht aus Wasser mit der Dichte ρ_W im flüssigen Zustand

1. Aufgabe Kräftegleichgewicht + eingesetzt

a) $A = \rho_F \cdot g \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot H = G + \rho_W \cdot h_{max} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot g + (H - h_{max}) \cdot \rho_L \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot g$

$$\Rightarrow \boxed{h_{max} = \left(\frac{\rho_F - \rho_L}{\rho_W - \rho_L}\right) \cdot H - \frac{G}{(\rho_W - \rho_L) \cdot g \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \quad (1)$$

b)

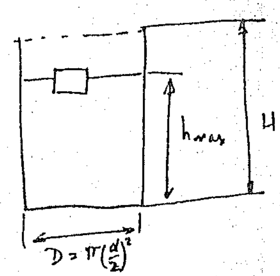


$A_1 + A_2 = G_E \qquad V_1 + V_2 = V \qquad A_1 = \rho_W \cdot g \cdot V_1 \qquad A_2 = \rho_L \cdot g \cdot V_2$

$G_E = \rho_E \cdot g \cdot V \Rightarrow \rho_W \cdot g \cdot V_1 + \rho_L \cdot g \cdot V_2 = \rho_E \cdot g \cdot V = \rho_E \cdot g \, (V_1 + V_2) \quad (1)$

$$(\rho_W - \rho_E) \cdot V_1 + (\rho_L - \rho_E) \cdot V_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_E - \rho_L}{\rho_W - \rho_E}} \quad (1)$$

c)



$A = \rho_F \cdot g \cdot D \cdot H \quad (1)$

$\sum G = G + \rho_W \cdot g \, (h_{max} \cdot D - V_1) + \rho_L \cdot g \left[(H - h_{max}) \cdot D - V_2\right] +$

$+ \rho_E \cdot g \cdot (V_1 + V_2) = \quad (1)$

$= G + \rho_W \cdot g \cdot h_{max} + \rho_L \cdot g \, (H - h_{max}) \cdot D +$

$+ \underbrace{\rho_E \cdot g \, (V_1 + V_2) - \rho_W \cdot g \cdot V_1 - \rho_L \cdot g \cdot V_2}_{=0 \quad (1)} =$

$= G + \rho_W \cdot g \cdot h_{max} + \rho_L \cdot g \, (H - h_{max}) \cdot D$

$$\Rightarrow \boxed{h_{max} = \left(\frac{\rho_F - \rho_L}{\rho_W - \rho_L}\right) \cdot H - \frac{G}{(\rho_W - \rho_L) \, g \, \pi \cdot (d/2)^2}} \quad (1)$$

wie in Teilaufgabe 1a) !

d) Masse bleibt gleich (1) $\rightarrow \Delta V_{glas} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \Delta h = V \cdot \frac{\rho_E}{\rho_W} - V_1 \quad (1)$

$= V \cdot \left(\frac{\rho_E}{\rho_W} - \frac{(\rho_E - \rho_L)}{(\rho_W - \rho_L)}\right)$

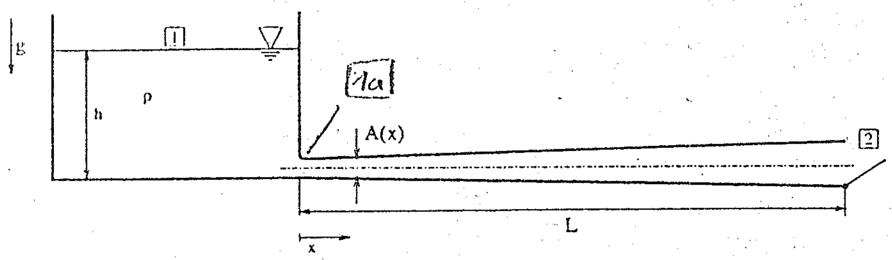
$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = \frac{a^3 \cdot \rho_L \cdot (\rho_W - \rho_E)}{\rho_W \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot (\rho_W - \rho_L)}} \quad (1)$$

61

18. 3. 98

2. Aufgabe (12 Punkte)

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird an der Stelle $\boxed{2}$ plötzlich eine Klappe geöffnet. Die Flüssigkeit mit der Dichte ρ strömt aus einem großen Behälter durch das Rohr mit der Querschnittsfläche A(x) ins Freie.



Bestimmen Sie

(1) a) die stationäre Austrittsgeschwindigkeit v_{stat}.

(1) b) die lokale Beschleunigung am Austritt $\boxed{2}$ zum Zeitpunkt $t = t_0$.

(1) c) die Zeit T, in der die Geschwindigkeit am Austritt $\boxed{2}$ den Wert $c \cdot v_{stat}$ erreicht.

(3) d) das Volumen Q der in dieser Zeit T ausgeströmten Flüssigkeit.

Gegeben: $\rho, g, L, h, t_0 = 0, c, A_0 = A(x=0), A(x) = A_0(x/L + 1)$

Hinweis:

- alle Strömungsverluste sind zu vernachlässigen
- $0 < c < 1$
- $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln(\frac{a+x}{a-x})$
- $\int \frac{x dx}{a^2 - b^2 x^2} = -\frac{1}{2b^2} \ln(a^2 - b^2 x^2)$

2. Aufgabe

a) Bernoulli: 1 → 2 $\quad p_a + \rho g h = p_a + \frac{1}{2} \rho v_{2stat}^2 \Rightarrow \boxed{v_{2stat} = \sqrt{2gh}}$ (1)

b) instat. Bernoulli: $p_a + \rho g h = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2(t) + \rho \int_0^L \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} dx$ (1) Bernoulli

Konti: $v(x,t) = \frac{v_2(t) \cdot 2A_0}{(x/L + 1)A_0} = \frac{2 \cdot L \cdot v_2(t)}{x + L}$ (1) Konti zw. x 0 (1) oder [illegible]

Zum Zeitpunkt $t = 0 \rightarrow v_2(t) = 0 \Rightarrow g \cdot h = \int_0^L \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} dx = \frac{dv_2(t)}{dt} \int_0^L \frac{2L}{x+L} dx$

(1) Berecht. Integral

$= \frac{dv_2(t)}{dt} \cdot 2 \cdot L \cdot \ln(x+L) \Big|_0^L = 2 \cdot L \cdot \ln 2 \cdot \frac{dv_2(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dv_2(t)}{dt} = \frac{g \cdot h}{L \cdot \ln 4}}$ (1) Lösung

(1) Ansatz Bernoulli mit Integral$_2$

c) $g \cdot h = \frac{1}{2} v_2^2(t) + \frac{dv_2(t)}{dt} \cdot L \cdot \ln 4 \Rightarrow \frac{v_{2stat}^2}{2} - \frac{1}{2} v_2^2(t) = \frac{L}{2} \ln 4 \cdot \frac{dv_2(t)}{dt}$

$\frac{v_{2stat}^2 - v_2^2(t)}{L \cdot \ln 16} = \frac{dv_2(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^T \frac{dt}{L \ln 16} = \int_0^{c \cdot v_{2stat}} \frac{dv_2(t)}{v_{2stat}^2 - v_2^2(t)}$ (1) Trennung

$\Rightarrow \frac{T}{L \cdot \ln 16} = \frac{1}{2 v_{stat}} \ln\left(\frac{v_{2stat} + v_2}{v_{2stat} - v_2}\right) \Bigg|_0^{c \cdot v_{2stat}}$ (1) Integral

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{L \cdot \ln 4}{v_{2stat}} \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right)}$ (1) Lösung

d) $Q = \int_0^T v_2(t) \cdot 2A_0 \cdot dt$ (1) $\qquad dt = L \cdot \ln 16 \cdot \frac{dv_2(t)}{v_{2stat}^2 - v_2^2(t)}$

$Q = 2 \cdot L \cdot \ln 16 \cdot A_0 \cdot \int_0^{c \cdot v_{2stat}} \frac{v_2(t)\, dv_2(t)}{v_{2stat}^2 - v_2^2(t)} =$ (1) integrierbare Form

$= 2 \cdot L \cdot A_0 \cdot \ln 16 \cdot \left(-\frac{1}{2} \ln\left(v_{2stat}^2 - v^2(t)\right)\right) \Bigg|_0^{c \cdot v_{2stat}}$

$\boxed{Q = L \cdot A_0 \cdot \ln 16 \cdot \ln\left(\frac{1}{1-c^2}\right)}$ (1) Lösung

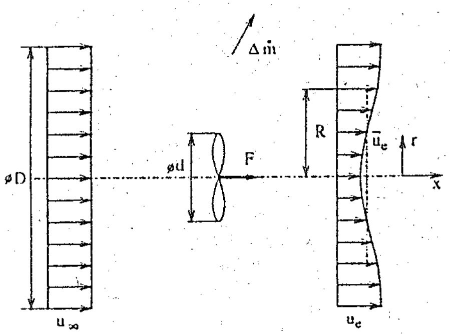
62

18. 3. 98

3. Aufgabe (13 Punkte)

In einem Umlaufwindkanal mit offener Meßstrecke (Durchmesser D) wird die Luftumströmung (Dichte ρ) von einem Windrad (Durchmesser d) untersucht. Bei einer Anströmung mit der Geschwindigkeit u_∞ wird im Nachlauf in einer Schnittebene $x = const.$ das Geschwindigkeitsfeld $u_e(r,\varphi)$ gemessen:

$$u_e(r,\varphi) = \begin{cases} u_\infty\left((1-c) - c\cdot\cos(\pi\frac{r}{R})\right) & 0 \le r \le R \\ u_\infty & R < r \le D/2 \end{cases}$$



a) Bestimmen Sie den verdrängten Massenstrom $\Delta\dot m$ in der Meßstrecke.

b) Wie groß soll die mittlere Geschwindigkeit $\bar u_e$ gewählt werden, so daß der verdrängte Massenstrom $\Delta\dot m$ in der Meßstrecke gleich bleibt.

Für die weiteren Teilaufgaben setzen Sie $\bar u_e$ als bekannt voraus:

c) Bestimmen Sie die vom Windrad ausgeübte Kraft F aufgrund der angenäherten Geschwindigkeitsverteilung.

d) Bestimmen Sie d anhand der Rankineschen Strahltheorie.

e) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit u' in der Rotorebene in Abhängigkeit von u_∞ und $\bar u_e$.

Gegeben: $\rho, D, u_\infty, u_e(r,\varphi), R, c$

Hinweis:

- die Reibung ist zu vernachlässigen
- $d \ll D,\quad d/2 < R < D/2,\quad 0 < c < 1$
- $\int x\cos(ax)dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$

3. Aufgabe

a) $\rho u_\infty \pi R^2 = \Delta\dot m + \rho\int_0^{2\pi}\int_0^R u_e(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$ (1)

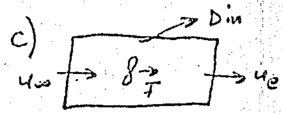
$\Rightarrow \Delta\dot m = \rho u_\infty \pi R^2 - \rho\cdot 2\pi\cdot u_\infty \int_0^R \left[(1-c)r - c\cdot r\cdot\cos(\pi\, r/R)\right] dr$

$= \rho u_\infty \pi R^2 - \rho\cdot 2\pi\cdot u_\infty \left[\left(\frac{1-c}{2}\right) r^2 - c\,\frac{\cos(\pi/R\, r)}{(\pi/R)^2} + c\,\frac{r\sin(\frac{\pi}{R}r)}{\pi/R}\right]_0^R$

$\boxed{\Delta\dot m = \rho u_\infty\cdot\pi R^2\cdot c\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)}$ (1) (3)

b) $\Delta\dot m = \rho u_\infty\cdot\pi\cdot R^2 - \rho\bar u_e \pi R^2$ (1) $\Rightarrow$ $\boxed{\bar u_e = u_\infty\cdot\left(1-c\left(1-\frac{4}{\pi^2}\right)\right)}$ ( ) (1)

c)

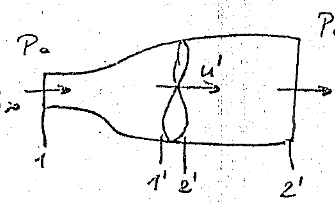


$\Delta\dot m = \rho(u_\infty - \bar u_e)\cdot\pi\cdot R^2$ (1)

Impulssatz: $-\rho u_\infty^2\cdot\pi R^2 + \Delta\dot m\, u_\infty + \rho\bar u_e^2\cdot\pi R^2 = F$

$\Rightarrow$ $\boxed{F = (\bar u_e - u_\infty)\cdot\bar u_e\cdot\rho\cdot\pi\cdot R^2}$ (1) negativ ( )

d) Rankinesche Strahltheorie → eindimensional, Kraft ist gleichmäßig verteilt



Bernoulli 1→1': $\frac12\rho u_\infty^2 + p_a = \frac12\rho u'^2 + p_1'$

2'→2: $\frac12\rho u'^2 + p_2' = \frac12\rho\bar u_e^2 + p_a$

$F = \pi\left(\frac d2\right)^2\cdot(p_2' - p_1')$ (1)

$(p_2' - p_1') = \frac12\rho\bar u_e^2 + p_a - \frac12\rho u'^2 - \frac12\rho u_\infty^2 - p_a + \frac12\rho u'^2$

$\Rightarrow d^2 = \frac{8(\bar u_e - u_\infty)\cdot\bar u_e\cdot R^2}{(\bar u_e - u_\infty)(\bar u_e + u_\infty)} \Rightarrow \boxed{d = 2R\sqrt{\frac{2\bar u_e}{\bar u_e + u_\infty}}}$ ( )

e) Konti: $\bar u_e\cdot\pi\cdot R^2 = u'\cdot\pi\cdot\left(\frac d2\right)^2$ (1)

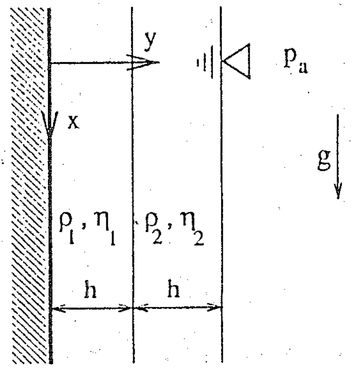
$u' = \bar u_e\cdot R^2\cdot\frac{4(\bar u_e + u_\infty)}{8R^2\cdot\bar u_e} = \boxed{u' = \frac{\bar u_e + u_\infty}{2}}$

63

18. 3. 98.

4. Aufgabe (12 Punkte)

Zwei Newtonsche Fluide der Dichte ρ_1, ρ_2 und der Zähigkeit η_1, η_2 strömen unter dem Einfluß der Erdschwere eine senkrecht stehende Wand der Breite B hinunter. Die Dicke jeder der beiden Fluidschicht beträgt jeweils h.



a) Leiten Sie für diese ausgebildete laminare Schichtenströmung die Differentialgleichung zur Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung her.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$ und skizzieren Sie Ihr Ergebnis für $\eta_2 < \eta_1$.

c) Bestimmen Sie die Schubspannung an der Wand.

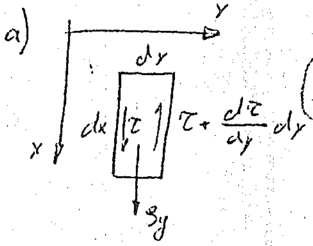
Gegeben: $B, g, h, \rho_1, \eta_1, \rho_2, \eta_2$

Hinweis:

- Die beiden Fluide mischen sich nicht
- Die von der Luft auf die Oberfläche der Fluidschicht übertragene Schubspannung wird vernachlässigt

4. Aufgabe

3 a)



$\sum F = 0$ ausgebildete Strömung ⇒ keine Druckkräfte

2

$\tau \cdot B \cdot dx + \rho \cdot g \cdot dy\,dx \cdot B = \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy\right) dx \cdot B$

$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = \rho \cdot g$. Newton. Fluid: $\tau = -\eta \frac{du}{dy}$

$\Rightarrow \boxed{\eta \frac{d^2u}{dy^2} = -\rho g}$ 1 $\int \dots$

6 b) $\int \eta \frac{d^2u}{dy^2} = \int -\rho g \Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{\rho}{\eta} g y + C_1$; $u = \frac{-\rho g}{2\eta} y^2 + C_1 \cdot y + C_2$

Zwei Gebiete: $0 \leq y \leq h: \; u = u_1 = \frac{-\rho_1 g}{2\eta_1} y^2 + C_1 y + C_2$

$h < y \leq h_2: \; u = u_2 = \frac{-\rho_2 g}{2\eta_2} y^2 + C_3 y + C_4$ 1

R.B.: $y = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

$y = h \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 \Rightarrow \eta_1 \left(\frac{du_1}{dy}\right) = \eta_2 \left(\frac{du_2}{dy}\right) \Rightarrow -\rho_1 g h + \eta_1 C_1 = -\rho_2 g h + \eta_2$

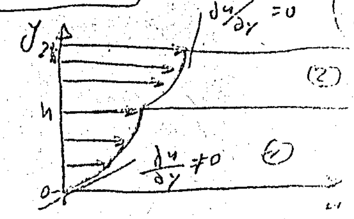
$y = 2h \Rightarrow \tau_2 = 0 \Rightarrow -\rho_2 \cdot g \cdot 2h + \eta_2 C_3 = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{\rho_2}{\eta_2} g \cdot 2h}$

$\eta_1 \cdot C_1 = -\rho_2 \cdot g \cdot h + \rho_1 \cdot g \cdot h + \rho_2 \cdot g \cdot 2h \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{g \cdot h}{\eta_1} \cdot (\rho_1 + \rho_2)}$ 1

$y = h \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow \frac{-\rho_1 g}{2\eta_1} h^2 + C_1 h = \frac{-\rho_2 \cdot g}{2\eta_2} h^2 + C_3 h + C_4$

$\Rightarrow \boxed{C_4 = \frac{g \cdot h^2 \cdot (\eta_2(\rho_1 + 2\rho_2) - 3\eta_1 \rho_2)}{2\eta_1 \eta_2}}$ 1

$\eta_2 < \eta_1$



3 c) Schubspannung an der Wand:

$\tau_w = \eta \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \eta_1 C_1 = \boxed{g \cdot h (\rho_1 + \rho_2) = \tau_w}$

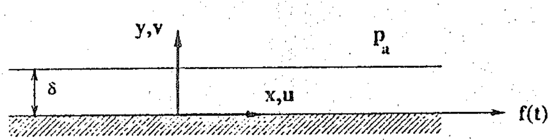
64

18. 3. 98.

5. Aufgabe (12 Punkte)

Eine unendlich ausgedehnte ebene Platte schwingt in x-Richtung mit der Geschwindigkeit $f(t) = U_0\cos(\omega t)$. Dabei entsteht eine mitschwingende Schicht mit konstanter Dicke δ. Zur Untersuchung dieses Problems sollen die folgenden Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls vereinfacht werden:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla\cdot\vec{v}) = 0$$
$$\frac{\partial\rho\vec{v}}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla\cdot\tau$$



(1) a) Vereinfachen Sie die Erhaltungsgleichungen für 2-dimensionale, instationäre, inkompressible Strömungen. Setzen Sie für den Schubspannungstensor $\nabla\cdot\tau = \eta\nabla^2\vec{v}$ ein.

(3) b) Im eingeschwungenen Zustand herrscht überall der Druck p_a und die vertikale Komponente der Geschwindigkeit verschwindet. Vereinfachen Sie die Gleichungen weiter und zeigen Sie, daß die konvektiven Terme verschwinden.

(2) c) Bestimmen Sie die Kennzahl(en) des Problems.

(2) d) Wie ändert sich qualitativ die Dicke der mitschwingenden Schicht in Abhängigkeit von der Frequenz ω und der Viskosität η.

Gegeben: $\eta, \rho, \delta, U_0, \omega, f(t)$

5. Aufgabe

a) Konti: $(\ldots)=0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$ (1) Konti

Impuls: $\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho\nabla\cdot(\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \eta\nabla^2\vec{v}$

$$\rho\cdot\nabla\cdot(\vec{v}\vec{v}) = \rho\cdot\nabla\cdot\begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2\end{pmatrix} = \rho\begin{pmatrix}\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \\ \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y}\end{pmatrix}$$

$$= \rho\begin{pmatrix} u\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\equiv 0 \text{ Konti (1)}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\end{pmatrix} \quad (1)$$

(1)

$$\Rightarrow x\text{-Impuls: } \rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$y\text{-Impuls: } \rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

b) $v = 0$; $p = p_a \Rightarrow$ Konti: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

(1) $v=0$ + Vereinfachung

(1) $p = p_a$ + "

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ + "

x-Impuls: $\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho u\frac{\partial u}{\partial x} = \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

y-Impuls: $0 = 0$

$u \neq f(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow x$-Impuls: $\boxed{\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$

c) $\bar{t} = t\cdot\omega$ $\quad \bar{u} = u/U_0$ $\quad \bar{y} = y/\delta$ (1)

$$\Rightarrow \rho U_0\cdot\omega\frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} = \eta\frac{U_0}{\delta^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} \Rightarrow \frac{\partial\bar{u}}{\partial\bar{t}} = \frac{\eta}{\rho\omega\cdot\delta^2}\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial\bar{y}^2} \quad (1)$$

Einsetzen

$$\Rightarrow \boxed{K_1 = \frac{\eta}{\rho\omega\delta^2}} \quad (1) \text{ Kennzahl}$$

d) $\omega\uparrow \rightarrow \delta\downarrow$ (1) $\qquad \eta\uparrow \rightarrow \delta\uparrow$ (1)

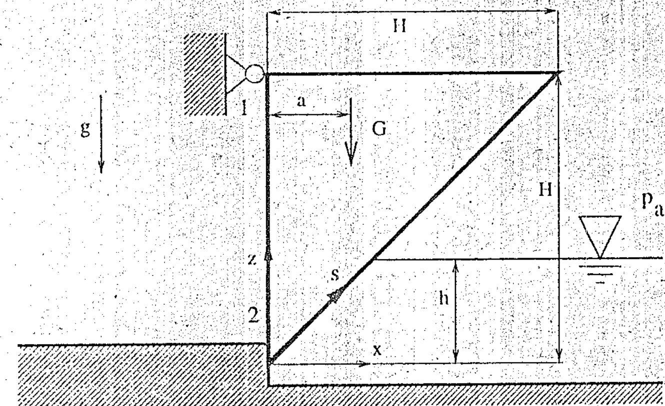
65

Klausur Strömungslehre I + II

10. Juli 1998

1. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Wehr mit dem Gewicht G und der Breite B hat den Querschnitt eines gleichschenkligen Dreieckes mit den skizzierten Abmaßen. Das Wehr ist im Punkt 1 gelenkig gelagert und liegt in 2 an einer Stufe an. Der Schwerpunkt des Wehres hat den seitlichen Abstand a vom Gelenk 1. An der schrägen Seite des Wehres steht Wasser mit der Dichte ρ bis zur Tiefe h.



a) Ermitteln und skizzieren Sie die Druckverteilung entlang der schrägen Wehrseite

b) Bestimmen Sie die Kraft im Lager 2

c) Bestimmen Sie die Kraft in 1

Gegeben: $B, H, G, a, \rho, g, p_a, h$

1. Aufgabe a) $z = s \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, s$

$dp = -\rho g\, dz \rightarrow \int_{p(z)}^{p_a} dp = -\int_z^{h} \rho g\, dz$ (1)

$\rightarrow p_a - p(z) = -\rho g (h - z) \rightarrow p(z) = p_a + \rho g (h - z)$ (1)

(1) $p(s) = p_a + \rho g (h - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, s)$ $\quad 0 \le s \le \sqrt{2}\, h$

b) $F_{2z} = 0$; $\sum M_1 = 0$ [illegible] (1)

Hebelarm $l_s = \frac{\sqrt{2H^2}}{2} - s = \frac{1}{2}\sqrt{2} H - s$ (1)

$F_{2x} H - G a - \int_0^{\sqrt{2}h} \rho g (h - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, s)(\frac{1}{2}\sqrt{2} H - s) B\, ds = 0$ (1) + (1)

$\rightarrow F_{2x} H - G a - \rho g B \int_0^{\sqrt{2}h} [\frac{1}{2}\sqrt{2} H h - (h + \frac{1}{2} H) s + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, s^2]\, ds$

$F_{2x} H - G a - \rho g B [\frac{1}{2}\sqrt{2} H h s - \frac{1}{2}(h + \frac{1}{2} H) s^2 + \frac{1}{6}\sqrt{2}\, s^3]_0^{\sqrt{2}h}$

$F_{2x} H - G a - \rho g B [H h^2 - (h + \frac{1}{2} H) h^2 + \frac{2}{3} h^3]$

$\rightarrow F_{2x} = \frac{G a + \rho g B [-\frac{1}{3} h^3 + \frac{1}{2} H h^2]}{H}$ (1)

c) $\sum F_x = 0$: $F_{1x} + F_{2x} - \frac{1}{2}\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}h} (p(s) - p_a) B g\, ds$ (1)

$F_{1x} = -F_{2x} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, \rho g B \int_0^{\sqrt{2}h} (h - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, s)\, ds = -F_{2x} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\, \rho g B [hs - \frac{1}{4}\sqrt{2}\, s^2]$

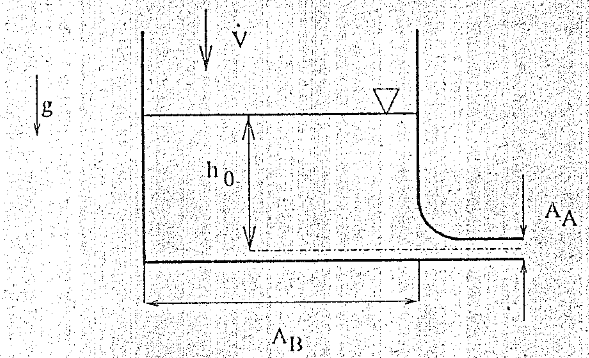
$F_{1x} = -\frac{G a + \rho g B [-\frac{1}{3} h^3 + (\frac{1}{2}) H h^2]}{H} + \frac{1}{2} \rho g B h^2$ (1)

$\sum F_z = 0$ $\; + F_{1z} - G + \frac{1}{2}\sqrt{2} \int_0^{\sqrt{2}h} (p(s) - p_a) \rho g B\, ds = 0$ (1)

$\rightarrow F_{1z} = G - \frac{1}{2} \rho g B h^2$ (1) $\qquad \frac{1}{2} B h^2 =$ verdr. Volumen

2. Aufgabe (14 Punkte)

In ein Becken fließt ein Fluid mit dem Volumenstrom $\dot V$. Am Boden des Beckens befindet sich ein Ablauf.



a) Wie groß muß der Querschnitt des Ablaufs sein, damit bei verlustfreier Strömung die stationäre Wasserhöhe im Becken h_0 beträgt?

b) Aufgrund eines Defektes versiegt der Volumenstrom zum Zeitpunkt $t = 0$, so daß das Becken langsam leerläuft. Nach welcher Zeitdauer ist das Becken bei quasistationärer Zustandsänderung bis zur Höhe $h_0/2$ ausgelaufen?

c) Aufgrund eines anderen Defektes versiegt nicht der Zustrom, sondern die Abflußöffnung verstopft teilweise und hat nur noch den Querschnitt A_{def}. Stellen Sie die Differentialgleichung der quasistationären Bewegung des Wasserspiegels auf:

$$\dot h = \dot h(h)$$

Gegeben: $\dot V, A_B, A_{def}, g, h_0$

Hinweis:

- Bei quasistationärer Zustandsänderung kann die kinetische Energie des Wasserspiegels nicht vernachlässigt werden

2. Aufgabe a) Stromlinie 0 → 1

$p_0 + \rho g h_0 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 \to v_1 = \sqrt{2gh_0}$ (1)

$\dot V = v_1 A_A \to A_A = \frac{\dot V}{\sqrt{2gh_0}}$ (1)

(1)

b) quasistationärer Bernoulli: $p_0 + \rho g h(t) + \frac{1}{2}\rho \dot h^2(t) = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2(t)$

Konti: $-\dot h A_B = v_1 A_A \to v_1 = -\dot h\, A_B/A_A$ (1)

$\to g h + \frac{1}{2}\dot h^2 = \frac{1}{2}(A_B/A_A)^2 \dot h^2 \to \left[(A_B/A_A)^2 - 1\right]\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 = 2gh$ (1)

$\to dh = -\sqrt{\frac{2gh}{(A_B/A_A)^2 - 1}}\, dt \to \int_{h_0}^{h_0/2} \frac{dh}{\sqrt h} = -\sqrt{\frac{2g}{(A_B/A_A)^2 - 1}} \int_0^T dt$ (1)

$\to 2\sqrt h \Big|_{h_0}^{h_0/2} = 2\left(\sqrt{h_0/2} - \sqrt{h_0}\right) = (\sqrt 2 - 2)\sqrt{h_0} = -\sqrt{\frac{2g}{(A_B/A_A)^2 - 1}}\, T$ (1)

$\to T = (2 - \sqrt 2)\sqrt{\frac{(A_B/A_A)^2 - 1}{2g}\, h_0}$ (1)

c) quasistationärer Bernoulli: $p_0 + \rho g h + \frac{1}{2}\rho \dot h^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v_1^2$

Konti: $\dot V = v_1 A_{def} + \dot h A_B \to v_1 = \frac{\dot V - \dot h A_B}{A_{def}}$ (1)

$\to g h + \frac{1}{2}\dot h^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot V - \dot h A_B}{A_{def}}\right)^2 \to 2A_{def}^2 g h + A_{def}^2 \dot h^2 = \dot V^2 - 2\dot V A_B \dot h + A_B^2 \dot h^2$ (1)

$\to (A_B^2 - A_{def}^2)\dot h^2 - 2\dot V A_B \dot h + \dot V^2 - 2A_{def}^2 g h = 0$

$\to \dot h^2 - \frac{2\dot V A_B}{A_B^2 - A_{def}^2}\dot h + \frac{\dot V^2 - 2A_{def}^2 g h}{A_B^2 - A_{def}^2} = 0$ (1)

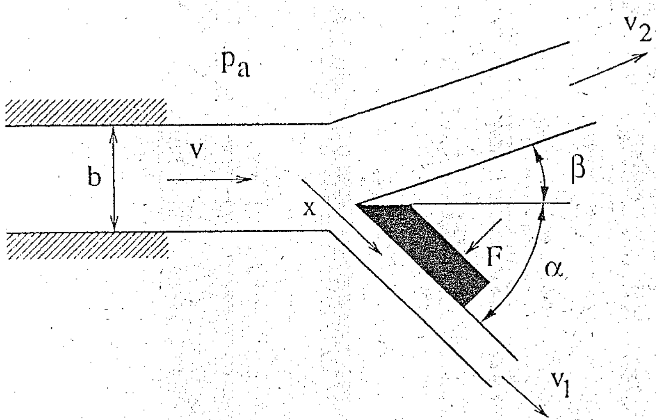
$\dot h = \frac{\dot V A_B}{A_B^2 - A_{def}^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot V A_B}{A_B^2 - A_{def}^2}\right)^2 - \frac{\dot V^2 - 2A_{def}^2 g h}{A_B^2 - A_{def}^2}}$ (1)

Spezialfall: $A_B = A_{def} \to \dot h = 0 \to$ Wasserstand (1)

67

3. Aufgabe (11 Punkte)

Aus einem ebenen Kanal der Breite b und der Tiefe t tritt ein Flüssigkeitsstrahl stationär ins Freie. Die Strahlgeschwindigkeit ist v. Ein Viertel des Massenstromes wird mit Hilfe einer Schneide unter dem Winkel α abgetrennt.



a) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2?

b) Unter welchem Winkel β wird der restliche Strahl abgelenkt?

c) Man berechne die Kraft, die von der Flüssigkeit auf die Schneide ausgeübt wird.

Gegeben: b, t, v, α, p

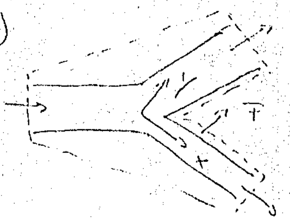
Hinweis:

- Die Wandreibung ist zu vernachlässigen.
- Legen Sie Ihr Koordinatensystem, so daß eine Achse in Richtung von Strahl 1 zeigt

3. Aufgabe (1) (2)

a) $p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow v_1 = v_2 = v$

b)



$b_1 = \frac{1}{4} b \; ; \; b_2 = \frac{3}{4} b$ (1)

$I_x: -\rho v^2 b t \cos\alpha + \frac{1}{4}\rho v^2 b t + \frac{3}{4}\rho v^2 b t \ldots$ (1)

$\Rightarrow -\cos\alpha + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(\alpha+\beta) = 0$

$\Rightarrow \beta = \arccos\left[\frac{4}{3}\left(\cos\alpha - \frac{1}{4}\right)\right] - \alpha$ (1)

c) $F_x = 0$ (3)

$I_y: -\rho v^2 b t \sin\alpha + \frac{3}{4}\rho v^2 b t \sin(\alpha+\beta) = F_y$

$\sin(\alpha+\beta) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)} = \sqrt{1-\frac{16}{9}\left(\cos\alpha - \frac{1}{4}\right)^2}$

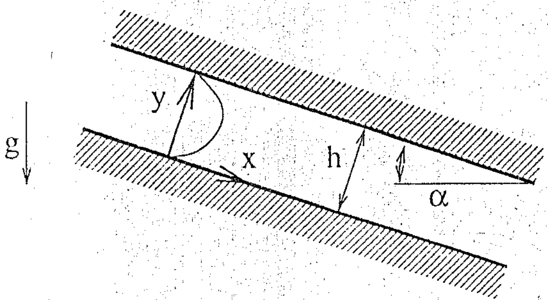
$\Rightarrow F_y = \rho v^2 b t \left(-\sin\alpha + \frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{16}{9}\left(\cos\alpha-\frac{1}{4}\right)^2}\right)$ (1)

$F_{Fl \to S} = -F_y$

68

4. Aufgabe (13 Punkte)

Ein um einen Winkel α geneigter ebener Kanal der Breite B wird von einem Ostwald-de Waele-Fluid durchströmt. In der Strömung wird der konstante Druckgradient dp/dx gemessen.



Bestimmen Sie für eine ausgebildete laminare Schichtenströmung

a) die Geschwindigkeitsverteilung. (Skizzieren Sie das Ergebnis)

b) die Schubspannungen an den Wänden

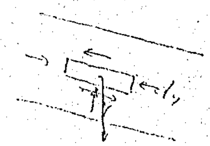
c) den Volumenstrom

Gegeben: $h, \alpha, dp/dx < 0, \rho, g, \eta, n = 3, B$

Hinweis:

- Ostwald-de Waele Fließgesetz: $\tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial y} \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}$

4. Aufgabe a) $\sum F_x = 0 = -\frac{dp}{dx}\,dx\,dy\,B - \frac{d\tau}{dy}\,dy\,dx\,B + \ldots$ (1)



$\rightarrow \frac{d\tau}{dy} = \rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dx} = A \rightarrow \tau(y) = Ay + C_1$ (1)

$\tau = -\eta \left(\frac{du}{dy}\right)^3 \rightarrow \frac{du}{dy} = \left(\frac{-Ay - C_1}{\eta}\right)^{1/3}$

$\rightarrow u(y) = -\frac{\eta}{A}\,\frac{3}{4}\left(\frac{-Ay - C_1}{\eta}\right)^{4/3} + C_2$ (1), RB: $y = 0 \ldots u = 0$; $y = h \ldots u = 0$ (1)

$-\frac{3}{4}\frac{\eta}{A}\left(\frac{-C_1}{\eta}\right)^{4/3} + C_2 = 0$ Vorsicht! (1)

$-\frac{3}{4}\frac{\eta}{A}\left(\frac{-Ah - C_1}{\eta}\right)^{4/3} + C_2 = 0 \longrightarrow -Ah - C_1 = C_1 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}Ah$

$C_2 = \frac{3}{4}\frac{\eta}{A}\left(\frac{Ah}{2\eta}\right)^{4/3} \rightarrow u(y) = \frac{3}{4}\frac{\eta}{A}\left[\left(\frac{Ah}{2\eta}\right)^{4/3} - \left(\frac{-Ay + \frac{1}{2}Ah}{\eta}\right)^{4/3}\right]$

$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{\rho g \sin\alpha - dp/dx}{\eta}}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{4/3} - \left(\frac{h}{2} - y\right)^{4/3}\right]$ (1)

(1)

b) $\tau(y=0) = C_1 = -\frac{1}{2}h\left(\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dx}\right)$ (1)

$\tau(y=h) = Ah + C_1 = \frac{1}{2}h\left(\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dx}\right)$ (1)

c) $\dot{Q} = B\int_0^h u(y)\,dy = B\,\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{A}{\eta}}\int_0^h \left(\frac{h}{2}\right)^{4/3} - \left(\frac{h}{2} - y\right)^{4/3} dy$ (1)

$= \frac{3}{4}B\sqrt[3]{\frac{A}{\eta}}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{4/3} y - \frac{3}{7}\left(h/2 - y\right)^{7/3}\right]_0^h$ (2)

$= \frac{3}{4}B\sqrt[3]{A/\eta}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{4/3} 2\,\frac{h}{2} - \frac{3}{7}\left(-\frac{h}{2}^{7/3} - \frac{h}{2}^{7/3}\right)\right]$

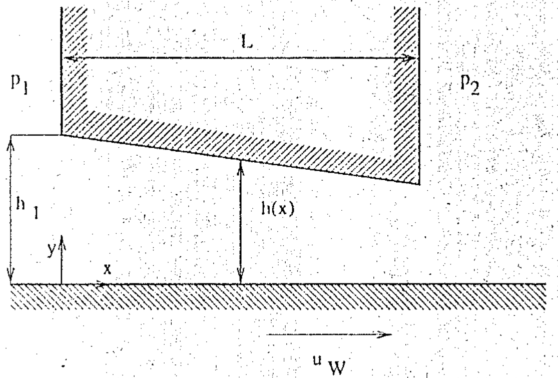
$= \frac{6}{7}B\left(h/2\right)^{7/3}\sqrt[3]{\frac{\rho g \sin\alpha - dp/dx}{\eta}}$ (1)

69

5. Aufgabe (11 Punkte)

Zur Berechnung der Temperaturverteilung in ebenen, stationären kompressiblen Luftströmungen unter Vernachlässigung der Gravitation wird die Energiegleichung in kartesischen Koordinaten benötigt.

$$\rho c_p \vec{v}\cdot(\nabla T) = \lambda\nabla^2 T + \vec{v}\cdot(\nabla p) + \eta\left[2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$



a) Welche Vereinfachungen gelten für schleichende Strömungen?

b) Vereinfachen Sie die Energiegleichung unter der Annahme, daß die Spalthöhe in der Skizze wesentlich kleiner ist als die Länge L

c) Vereinfachen Sie das Ergebnis aus b) für schleichende Strömungen und geben Sie die vereinfachte Gleichung dimensionsbehaftet an.

Gegeben: κ und alle nötigen Referenzwerte

Hinweis: $Pr = 0.7$, $\kappa = 1.4$, $a = \sqrt{\kappa R T}$, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})^T$, $\vec{v} = (u, v)^T$

5. Aufgabe a) $h_1/L \ll 1$; $Re_L\,(h_1/L)^2 \ll 1$ (1)

b) $\bar x = \frac{x}{L}$; $\bar y = \frac{y}{h_1}$, $\bar u = \frac{u}{u_w}$; $\bar v = \frac{v}{u_w}\frac{L}{h_1}$; $\bar T = \frac{T}{T_w}$; $\bar\rho = \frac{\rho}{\rho_1}$; $\bar p = \frac{p}{p_1}$

$\bar\eta = \eta/\eta_{ref}$; $\bar c_p = c_p/c_{p,ref}$; $\bar\lambda = \lambda/\lambda_{ref}$ (2)

$\rightarrow \rho_1 c_{p,ref}\,\bar\rho\,\bar c_p\left[u_w\frac{T_w}{L}\bar u\frac{\partial\bar T}{\partial\bar x} + u_w\frac{h_1}{L}\frac{T_w}{h_1}\bar v\frac{\partial\bar T}{\partial\bar y}\right] = \lambda_{ref}T_w\bar\lambda\left(\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar x^2} + \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar y^2}\right)$

(1) $+\,u_w p_1\left(\frac{1}{L}\bar u\frac{\partial\bar p}{\partial\bar x} + \frac{1}{h_1}\frac{h_1}{L}\bar v\frac{\partial\bar p}{\partial\bar y}\right) + \eta_{ref}\bar\eta\left[2\left(\frac{u_w h_1}{L h_1}\frac{\partial\bar v}{\partial\bar y}\right)^2 + \left(\frac{u_w}{h_1}\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}\right)^2\right]$

$\left(\cdot\frac{L}{\rho_1 u_w^3}\right)$: $\frac{c_{p,ref}T_w}{u_w^2}\bar\rho\bar c_p\left[\bar u\frac{\partial\bar T}{\partial\bar x} + \bar v\frac{\partial\bar T}{\partial\bar y}\right] = \frac{\lambda_{ref}T_w}{\rho_1 u_w^3 L}\bar\lambda\left(\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar x^2} + \frac{L^2}{h_1^2}\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar y^2}\right)$

$+\,\frac{p_1}{\rho_1 u_w^2}\left(\bar u\frac{\partial\bar p}{\partial\bar x} + \bar v\frac{\partial\bar p}{\partial\bar y}\right) + \frac{\eta_{ref}}{\rho_1 u_w L}\bar\eta\left[2\left(\frac{\partial\bar v}{\partial\bar y}\right)^2 + \frac{L^2}{h_1^2}\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}\right)^2\right]$

$\rightarrow \frac{c_{p,ref}T_w}{u_w^2}\bar\rho\bar c_p\left(\bar u\frac{\partial\bar T}{\partial\bar x} + \bar v\frac{\partial\bar T}{\partial\bar y}\right) = \frac{\lambda_{ref}T_w}{\rho_1 u_w^3 L}\frac{L^2}{h_1^2}\bar\lambda\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar y^2} + \frac{p_1}{\rho_1 u_w^2}\left(\bar u\frac{\partial\bar p}{\partial\bar x} + \bar v\frac{\partial\bar p}{\partial\bar y}\right)$

$+\,\frac{\eta_{ref}}{\rho_1 u_w L}\frac{L^2}{h_1^2}\bar\eta\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}\right)^2$ (2)

c) $\frac{1}{\kappa-1}\frac{1}{Ma^2}\bar\rho\bar c_p\left(\bar u\frac{\partial\bar T}{\partial\bar x} + \bar v\frac{\partial\bar T}{\partial\bar y}\right) = \frac{1}{Pr}\frac{1}{\kappa-1}\frac{1}{Ma^2}\underbrace{\frac{1}{Re}\left(\frac{L}{h_1}\right)^2}_{\gg 1}\bar\lambda\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar y^2} + \frac{1}{\kappa}\frac{1}{Ma^2}\left(\bar u\frac{\partial\bar p}{\partial\bar x} + \bar v\frac{\partial\bar p}{\partial\bar y}\right)$ (2)

$+\,\frac{1}{Re}\frac{L^2}{h_1^2}\bar\eta\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}\right)^2$

$Pr \approx 1$; $\frac{1}{\kappa} \approx 1$; $\frac{1}{\kappa-1} \approx 1$ (1)

$\rightarrow \frac{1}{Pr}\frac{1}{\kappa-1}\frac{1}{Ma^2}\frac{1}{Re}\left(\frac{L}{h_1}\right)^2\bar\lambda\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar y^2} + \frac{1}{Re}\frac{L^2}{h_1^2}\bar\eta\left(\frac{\partial\bar u}{\partial\bar y}\right)^2 = 0$

$\rightarrow \lambda\frac{d^2 T}{dy^2} + \eta\left(\frac{du}{dy}\right)^2 = 0$ (1)

Frühjahr '98 / ~~8~~ 9 Blätter

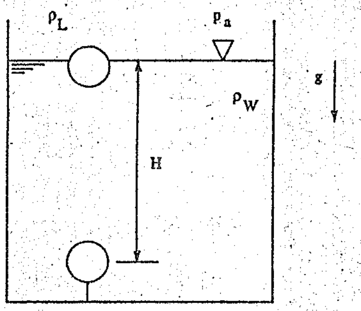
70

Klausur Strömungslehre I + II

19. März 1998

1. Aufgabe (12 Punkte)

Eine mit Luft im Umgebungszustand gefüllte starre Kugel (Volumen V_0, Masse m) wird in einem mit Wasser gefüllten Behälter durch ein Seil in der Tiefe H festgehalten. Der Kugelradius sei klein gegenüber H.



a) Wie groß ist die Seilkraft?

b) Welcher Anteil des Kugelvolumens bleibt nach Lösen des Seils noch im Wasser? Wie ändert sich die Eintauchtiefe qualitativ, wenn anstelle einer Kugel ein Würfel mit der gleichen Masse und dem gleichen Volumen verwendet wird? Begründen Sie ihre Antwort.

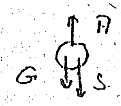
c) Wie groß ist die Seilkraft, wenn die Kugel ein Leck an der Unterseite hat?

Gegeben: $g, m, V_0, \rho_L, \rho_W, H, p_a$

Hinweis zu c):

- Nehmen Sie an, daß die Zustandsänderung im Inneren der Kugel isotherm verläuft
- Das Luftvolumen in der Kugel sei gleich dem Kugelvolumen V_0

1. Aufgabe

a) 

$\sum F = 0: A - G - S = 0 \rightarrow S = A - G$

$G = mg \qquad A = \rho_W g V_0$

$S = (\rho_W V_0 - m) g$

b) $S = 0 \rightarrow A = G$

$A = \rho_W g V + \rho_L g (V_0 - V) = mg$

$\rightarrow V = \dfrac{m - \rho_L V_0}{\rho_W - \rho_L} \rightarrow \dfrac{V}{V_0} = \dfrac{m/V_0 - \rho_L}{\rho_W - \rho_L}$

$V > \frac{1}{2} V_0$ Würfel sinkt tiefer | Die Würfelmasse ist gleichmäßig verteilt. Die Kugel

$V < \frac{1}{2} V_0$ Kugel sinkt tiefer | ist in der Mitte am dicksten

c) $p_a V_0 = p V = (p_a + \rho_W g H) V \rightarrow V = \dfrac{p_a}{p_a + \rho_W g H} V_0$

$A = \rho_W g V \rightarrow S = A - G = \left(\dfrac{p_a}{p_a + \rho_W g H} \rho_W V_0 - m \right) g$

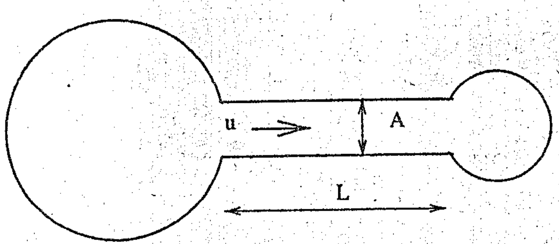
71

2. Aufgabe (11 Punkte)

Zwei Ballons sind durch eine Rohrleitung der Länge L mit dem Querschnitt A verbunden. Der Druck in den Ballons hängt linear vom Ballonvolumen ab. V_0 ist das Ballonvolumen bei Umgebungsdruck.

$$p = p_a + C(V - V_0)$$

Zum Zeitpunkt 0 wird ein Ballon kurz zusammengedrückt und dabei um das Volumen ΔV verkleinert.



a) Zeigen Sie, daß die verlustfreie Strömung im Verbindungsrohr durch die Schwingungsgleichung

$$\ddot{u} + K^2 u = 0$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie die Eigenfrequenz K des Systems.

b) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit im Rohr.

c) Bestimmen Sie die maximale Druckdifferenz zwischen den Ballons.

Gegeben: $\Delta V, L, A, \rho, C$

Hinweis:

- Allgemeiner Lösungsansatz der Schwingungsgleichung $\ddot{x} + a^2 x = 0$:

$$x = C_1 \sin(at) + C_2 \cos(at)$$

2. Aufgabe

a) Konti $\dot{V}_1 = -uA$ $\qquad \dot{V}_2 = uA$

Bernoulli $\rho L \dot{u} + p_2 - p_1 = 0 \quad (\partial/\partial t)$

$\rho L \ddot{u} + \dot{p}_2 - \dot{p}_1 = 0$ $\qquad p = p_a + C(V - V_0)$

$\dot{p} = C\dot{V}$

$\rightarrow \rho L \ddot{u} + 2CAu = 0$

$\ddot{u} + \frac{2CA}{\rho L} u = 0$ $\qquad k = \sqrt{\frac{2CA}{\rho L}}$

b) $V_2(t) = V_0 - \Delta V \cos(kt)$

$\dot{V}_2 = \Delta V k \sin(kt) = uA$

$\rightarrow u(t) = \frac{\Delta V k}{A} \sin(kt)$ $\qquad u_{max} = \frac{\Delta V k}{A} = \Delta V \sqrt{\frac{2C}{\rho A L}}$

c) $(p_2 - p_1)_{max} = (\rho L \dot{u})_{max}$

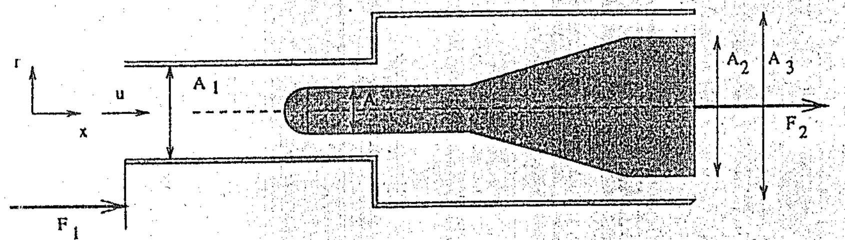
$\dot{u} = \frac{\Delta V k^2}{A} \cos(kt) \rightarrow (p_2 - p_1)_{max} = \frac{\rho L \Delta V}{A} k^2$

$(p_2 - p_1)_{max} = 2C\Delta V$

72

3. Aufgabe (13 Punkte)

Aus einem langen Rohr strömt Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit u durch das skizzierte Ventil ins Freie.



a) Leiten Sie die folgende Beziehung für den Totaldruckverlust an der unstetigen Rohrerweiterung her.

$$\zeta = \frac{\Delta p_v}{\frac{1}{2}\rho u^2} = \left(1 - \frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)^2 \left(\frac{A_1}{A_1 - A}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

b) Berechnen Sie die Kraft F_1, die vom Ventilgehäuse auf die Rohrleitung wirkt.

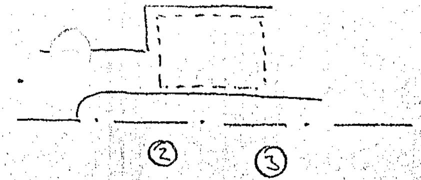
c) Berechnen Sie die Kraft F_2, mit der der Absperrkörper gehalten werden muß.

Gegeben: $\rho, u, A, A_1 = 2A, A_2 = 3A, A_3 = 4A$

Hinweis: Die Wandreibung ist zu vernachlässigen.

3. Aufgabe

a)



$$\Delta p_v = p_{02} - p_{03} = p_2 - p_3 + \frac{1}{2}\rho(u_2^2 - u_3^2)$$

Konti: $u A_1 = u_2(A_1 - A) = u_3(A_3 - A)$

Impuls: $\rho u_3^2 (A_3 - A) - \rho u_2^2 (A_1 - A) = (p_2 - p_3)(A_3 - A)$

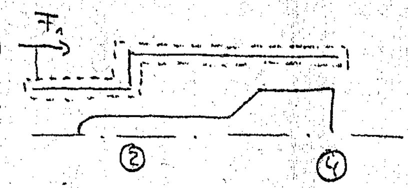
$$u_3 = u_2 \frac{A_1 - A}{A_3 - A} \qquad p_2 - p_3 = \rho u_2^2 \left(\frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)^2 - \rho u_2^2 \frac{A_1 - A}{A_3 - A}$$

$$\Delta p_v = \frac{1}{2}\rho u_2^2 \left[2\left(\frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)^2 - 2\frac{A_1 - A}{A_3 - A} + 1 - \left(\frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\rho u_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)\right]^2$$

$$\zeta = \frac{\Delta p_v}{\frac{1}{2}\rho u^2} = \frac{\Delta p_v}{\frac{1}{2}\rho u_2^2}\frac{u_2^2}{u^2} = \left[1 - \left(\frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)\right]^2 \left(\frac{A_1}{A_1 - A}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

b)



Impuls: $0 = (p_a - p_2)(A_3 - A_1) + F_1$

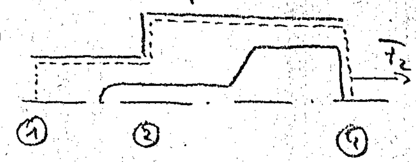
Bernoulli ② → ④: $p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 + \Delta p_v = p_a + \frac{1}{2}\rho u_4^2$

$u_2 = u_4$ (Konti)

$\rightarrow p_a - p_2 = \Delta p_v$

$$\rightarrow F_1 = -\frac{8}{9}\rho u^2 (4A - 2A) = -\frac{16}{9}\rho u^2 A$$

c)



Impuls

$$\rho u_4^2 (A_3 - A_2) - \rho u^2 A_1 = p_1 A_1 + p_2 (A_3 - A_1) - p_a A_3 + F_2$$

$$\rightarrow F_2 = -\rho u^2 2A + \rho 4 u^2 A + (p_a - p_2) A_3 + (p_2 - p_1) A_1$$

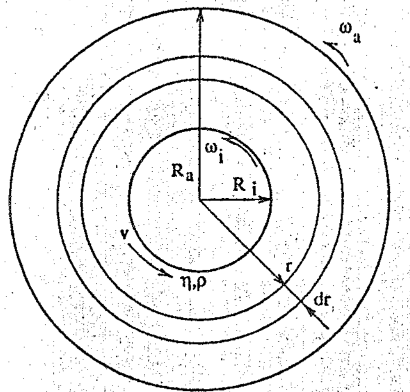
$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho u^2 - \frac{1}{2}\rho u_2^2 = -\frac{3}{2}\rho u^2$$

$$\rightarrow F_2 = \rho u^2 A \left(-2 + 4 - \frac{8}{9}4 - \frac{3}{2}\cdot 2\right) = -\frac{41}{9}\rho u^2 A$$

73

4. Aufgabe (13 Punkte)

Zum Fadentransport bei der Garnerzeugung wird ein antreibender Vollzylinder mit dem Radius R_i und ein äußerer Zylinder mit dem Radius R_a verwendet. Beide Zylinder haben die Länge L. Zwischen den Zylindern befindet sich ein Fluid mit der Zähigkeit η und der Dichte ρ. Der innere Zylinder dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_i und der äußere mit der Winkelgeschwindigkeit ω_a.



a) Setzen Sie das Momentengleichgewicht für ein Ringelement an und bestimmen Sie die Umfangsgeschwindigkeitsverteilung $v(r)$ zwischen den Zylindern.

b) Der Druck am inneren Zylinder sei p_i. Bestimmen Sie die Druckverteilung $p(r)$ zwischen den Zylindern, wenn

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

ist.

c) Berechnen Sie das Drehmoment am inneren Zylinder, wenn

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

ist.

Gegeben: $R_i, R_a, \omega_i, \omega_a\, \eta, \rho, L, p_i, A, B$

Hinweis:

- Es gilt:

$$\rho\frac{v^2}{r} = \frac{dp}{dr} \quad ; \quad \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2\tau)}{dr} = -\eta\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr}\right)$$

- Die Schubspannung berechnet sich aus

$$\tau = -\eta r\frac{d(v/r)}{dr}$$

4. Aufgabe

a) Momentengleichgewicht

$$2\pi r^2 L\tau - 2\pi(r+dr)^2 L(\tau + d\tau) = 0$$

$$r^2\tau - (r^2 + 2r\,dr + d^2r)(\tau + d\tau) = 0$$

$$2\tau r\,dr + \underbrace{\tau d^2r}_{\sim 0} + r^2 d\tau + \underbrace{2r\,dr\,d\tau}_{\sim 0} + \underbrace{d\tau\, d^2r}_{\sim 0} = 0$$

$$2\tau r\,dr + r^2 d\tau = \tau\, d(r^2) + r^2 d\tau = 0$$

$$\rightarrow d(r^2\tau) = 0 \rightarrow \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr}\right) = 0 \quad \text{H.S.}$$

1. Integration: $\frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr} = C_1 \rightarrow d(rv) = C_1 r\,dr$

2. Integration: $rv = \frac{1}{2}C_1 r^2 + C_2$

R.B.: $v(R_i) = \omega_i R_i$, $v(R_a) = \omega_a R_a$ $\Rightarrow$ $\omega_i R_i^2 = \frac{1}{2}C_1 R_i^2 + C_2$, $\omega_a R_a^2 = \frac{1}{2}C_1 R_a^2 + C_2$

$$C_1 = 2\frac{\omega_i R_i^2 - \omega_a R_a^2}{R_i^2 - R_a^2} \qquad C_2 = \frac{R_i^2 R_a^2(\omega_a - \omega_i)}{R_i^2 - R_a^2}$$

$$v(r) = 2\frac{\omega_i R_i^2 - \omega_a R_a^2}{R_i^2 - R_a^2}\, r + \frac{R_i^2 R_a^2(\omega_a - \omega_i)}{R_i^2 - R_a^2}\cdot\frac{1}{r}$$

b) $dp = \rho\frac{v^2}{r}dr = \rho\frac{Ar^2 + 2AB + B^2/r^2}{r}dr$

$$\int_{p_i}^{p} dp^* = \int_{R_i}^{r}\rho\left(A^2 r^* + \frac{2AB}{r^*} + \frac{B^2}{r^{*3}}\right)dr^*$$

$$\rightarrow p = p_i + \rho\left[\frac{1}{2}A^2 r^{*2} + 2AB\ln r^* - \frac{B^2}{2}\frac{1}{r^{*2}}\right]_{R_i}^{r}$$

$$= p_i + \rho\left[\frac{1}{2}A^2(r^2 - R_i^2) + 2AB\ln\frac{r}{R_i} - \frac{B^2}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_i^2}\right)\right]$$

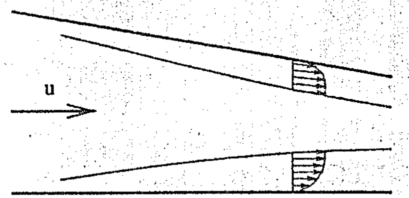
c) $M = -2\pi R_i^2 L\eta R_i\frac{d}{dr}\left(A + B/r^2\right)\Big|_{R_i}$

$$= -2\pi R_i^3 L\eta\left(-\frac{2B}{R_i^3}\right) = -4\pi L B\eta$$

74

5. Aufgabe (12 Punkte)

Ein konvergenter Kanal wird mit einem inkompressiblen Fluid mit der Dichte ρ und der Viskosität η durchströmt. In der Nähe der Kanalwände kann die Strömung mit der Grenzschichttheorie beschrieben werden.



a) Welche Kräfte wirken auf ein Fluidelement?

b) Geben Sie die charakteristische(n) Kennzahl(en) des Problems an. Welche Bedingungen müssen gelten, wenn die Grenzschichttheorie angewendet werden soll.

c) Vereinfachen Sie die Impulsgleichungen für Grenzschichtströmungen, indem Sie dimensionslose Größen einführen und eine Größenordnungsabschätzung durchführen.

Gegeben: alle nötigen Referenzwerte

Hinweis: Erhaltungsgleichungen für inkompressible, zweidimensionale und stationäre Strömungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

5. Aufgabe

a) Druck; Trägheit; Reibung

b) $Re = \frac{\rho u_{ref} L}{\eta}$; $Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho u_{ref}^2}$

$Re >> 1$; kleine Wandkrümmung

c) $\bar{u} = \frac{u}{u_{ref}}$; $\bar{x} = \frac{x}{L}$; $\bar{p} = \frac{p}{\rho u_{ref}^2}$ Grenzschichttheorie $\frac{\delta}{L} \sim \sqrt{Re_L}$

$\rightarrow \bar{y} = \frac{y}{L}\sqrt{Re_L}$ kont: $\bar{v} = \frac{v}{u_{ref}}\sqrt{Re_L}$

$$\rho\left(\frac{u_{ref}^2}{L}\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{u_{ref}^2}{L}\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\rho\frac{u_{ref}^2}{L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \eta\left(\frac{u_{ref}}{L^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{u_{ref}}{L^2}Re_L\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rightarrow \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{Re_L}\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$o(1)$ $o(1)$ $o(?)$ $o(1/Re)$ $o(1)$

$<< 1$

$$\rho\left(\frac{u_{ref}^2}{L}\frac{1}{\sqrt{Re_L}}\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{u_{ref}^2}{L}\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\rho\frac{u_{ref}^2}{L}\sqrt{Re_L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$$
$$+ \eta\left(\frac{u_{ref}}{L^2}\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{u_{ref}}{L^2}\sqrt{Re}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -Re\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{1}{Re_L}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \sim \frac{1}{Re_L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \rightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$<< \frac{\partial p}{\partial x}$

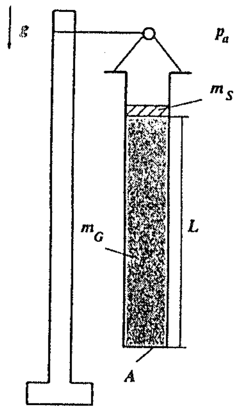
75

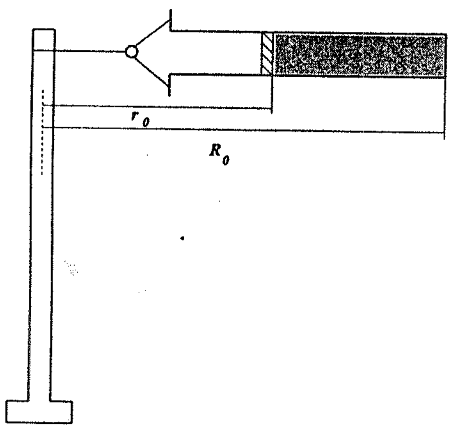
Klausur Strömungslehre I + II

21. März 1994

1. Aufgabe (13 Punkte)

Der zylindrische Behälter einer Zentrifuge ist mit einem idealen Gas der Masse m_G gefüllt und durch eine reibungsfrei gleitende dünne Scheibe der Masse m_S verschlossen (siehe Skizze). Der Behälter ist drehbar gelagert und richtet sich bei Betrieb der Zentrifuge mit der Winkelgeschwindigkeit ω horizontal aus. Außerhalb des Behälters herrsche der Umgebungsdruck p_a.





a) Bestimmen Sie die Länge L der Gassäule vor Betrieb der Zentrifuge.

b) Bestimmen Sie den maximalen Druck im Behälter bei Betrieb der Zentrifuge.

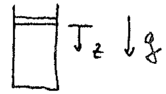
c) Bestimmen Sie den maximalen Druck im Behälter bei Betrieb der Zentrifuge für konstante Dichte ρ^* (Abmessung der Gassäule $R_0 - r_0^*$).

Gegeben: m_G, m_S, p_a, allgemeine Gaskonstante $R, T_0, g, \omega, A, r_0, R_0, \rho^*, r_0*$

Hinweis: Die Volumenkraft der Luft im Behälter sei vernachlässigbar, die Temperatur sei konstant $T = T_0$. Für den Druck $p(r, z)$ gilt mit $\rho(r, z)$ allgemein:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r} dr + \frac{\partial p}{\partial z} dz \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \text{für } \uparrow z \downarrow g$$

Aufg 1 a) Massenerh., ideales Gas, HGG



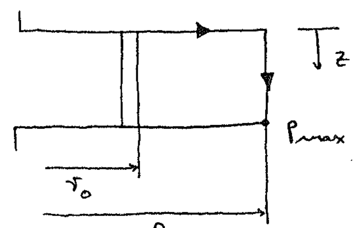
$$m_G = \int_0^L \rho(z) A\, dz \quad , \quad p(z) = \rho(z) R T_0 \quad , \quad \frac{dp(z)}{dz} = \rho(z) g$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{g}{RT_0} dz \; , \quad \frac{p(z)}{p_0} = e^{\left(\frac{gz}{RT_0}\right)} \; , \quad \frac{\rho(z)}{\rho_0} = e^{\left(\frac{gz}{RT_0}\right)} \; ; \quad \rho_0 = \frac{p_a + \frac{m_S g}{A}}{RT_0}$$

$$m_G = \rho_0 \frac{RT_0}{g} \left(e^{\left(\frac{gL}{RT_0}\right)} - 1 \right) A \Rightarrow \underline{L = \frac{RT_0}{g} \ln\left(\frac{m_G}{\frac{p_a A}{g} + m_s} + 1 \right)}$$

b)

$$\frac{dp}{\rho} = \omega^2 r\, dr + g\, dz \; , \quad \rho = \frac{p}{RT_0}$$



$$\int_{p_0}^{p_{max}} \frac{dp}{p} = \int_{r_0}^{R_0} \frac{\omega^2}{RT_0} r\, dr + \int_0^{\sqrt{\frac{4A}{\pi}}} \frac{g}{RT_0} dz \; ,$$

$$p_0 = p_a + \frac{m_s \omega^2 r_0}{A} \; , \quad \ln \frac{p_{max}}{p_0} = \frac{\omega^2}{2RT_0}(R_0^2 - r_0^2) + \frac{g\sqrt{\frac{4A}{\pi}}}{RT_0}$$

$$\underline{p_{max} = \left(p_a + \frac{m_s \omega^2 r_0}{A} \right) e^{\left(\frac{\omega^2}{2RT_0}(R_0^2 - r_0^2) \right)} e^{\left(\frac{g\sqrt{\frac{4A}{\pi}}}{RT_0} \right)}}$$

c)

$$dp = \rho^* \omega^2 r\, dr + \rho^* g\, dz$$

$$\underline{p_{max} = p_a + \frac{m_S \omega^2 r_0}{A} + \frac{\rho^*}{2}\omega^2 (R_0^2 - r_0^{*2}) + \rho^* g \sqrt{\frac{4A}{\pi}}}$$

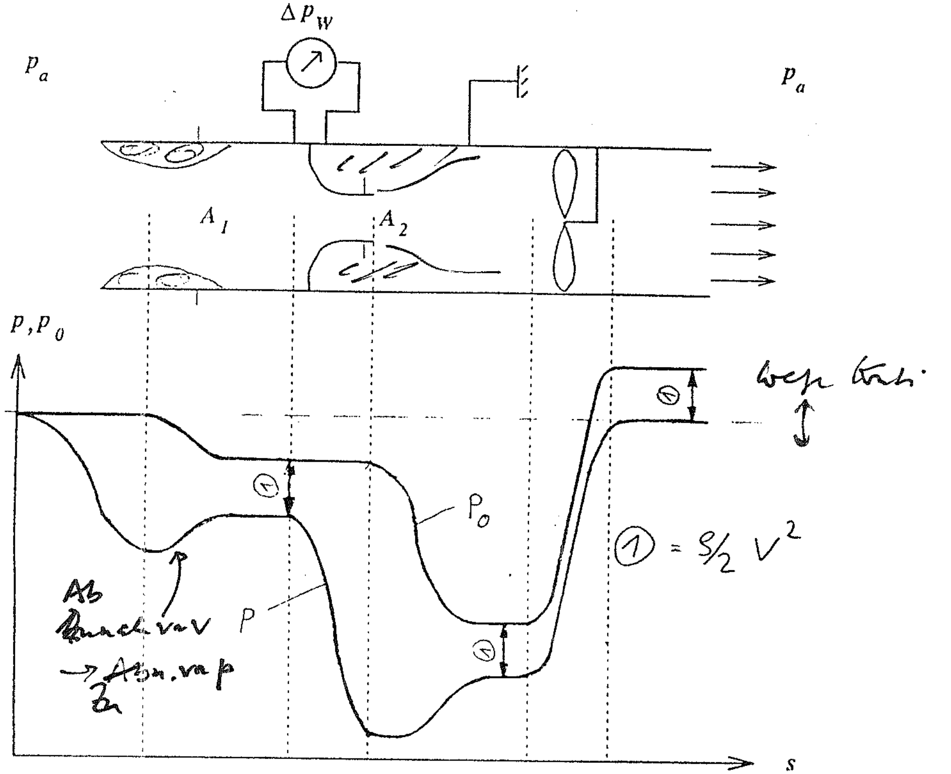
- April 1994

76

3. Aufgabe (13 Punkte)

$p_0 = p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g z + \Delta p_V$

Der Volumenstrom eines Lüftungsgebläses wird mit einer Düse gemessen.



a) Skizzieren Sie den Verlauf des statischen und des Gesamtdrucks längs der Rohrachse in das vorgegebene Diagramm.

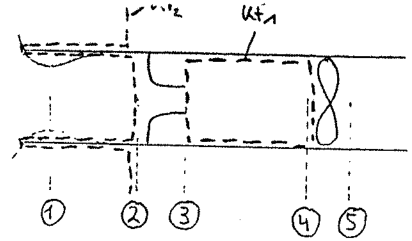
b) Bestimmen Sie den Volumenstrom $\dot{Q}$.

c) Bestimmen Sie den statischen Druck p_4 vor dem Gebläse.

d) Bestimmen Sie die Haltekraft und die Gebläseleistung.

Gegeben: $\rho, p_a, \Delta p_W > 0, A_1, A_2$.

Aufg 3 b) Kont., vollk. ① → ③



$$\dot{Q} = u_2 A_1 = u_3 A_2 \; ; \; p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2 = p_3 + \frac{\rho}{2} u_3^2$$

$$\Delta p_W = p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} u_3^2 \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)$$

$$u_3 = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)} \frac{2 \Delta p_W}{\rho}} \; , \quad \dot{Q} = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)} \frac{2 \Delta p_W}{\rho}} \, A_2$$

c) Impulssatz für das Totwassergebiet ③ → ④ KF_1

$$-\rho u_3^2 A_2 + \rho u_4^2 A_1 = (p_3 - p_4) A_1$$

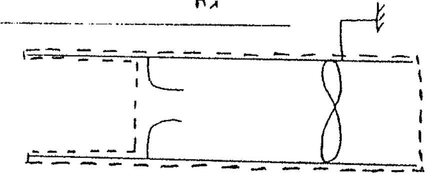
Impulssatz für Einströmseite ⓪ → ② unendlich große KF_2

$$\rho u_2^2 A_1 = (p_a - p_2) A_1 \Rightarrow p_2 = p_a - \rho u_2^2 \; , \; p_3 = p_2 - \Delta p_W$$

$$\Rightarrow p_4 = p_a - \rho u_2^2 - \Delta p_W + \rho u_3^2 \frac{A_2}{A_1} - \rho u_4^2$$

$$p_4 = p_a - \Delta p_W - \left(2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\right) \frac{2 \Delta p_W}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}$$

d) Impulssatz f. Haltekraft KF_3



$$-\rho u_2^2 A_1 + \rho u_5^2 A_1 = (p_2 - p_a) A_1 + F_s$$

$$\Rightarrow F_s = \rho u_2^2 A_1 = \frac{2 \Delta p_W}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)} \frac{A_2^2}{A_1}$$

$$P = \dot{Q} (p_{05} - p_{04}) = \dot{Q} \left(p_a + \frac{\rho}{2} u_5^2 - p_4 - \frac{\rho}{2} u_4^2\right)$$

$$P = \Delta p_W \left(1 + \left(2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\right) \frac{2}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}\right) \sqrt{\frac{2 \Delta p_W}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) \rho}} \, A_2$$

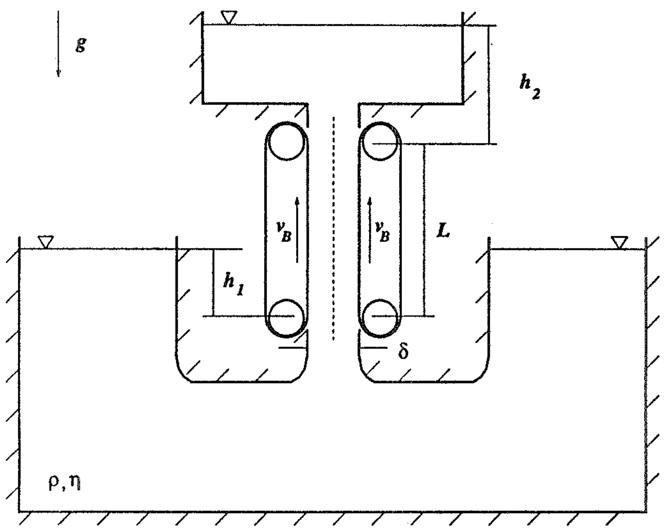
- April 1994

4

77

4. Aufgabe (10 Punkte)

In einem Spalt soll Öl durch Förderbänder von einem niedrigeren auf ein höheres Niveau transportiert werden. Der Spalt habe die Höhe δ und die Breite B. Die Spaltströmung kann auf der Länge L zwischen den Förderbändern als ausgebildet betrachtet werden. Die Zähigkeit des Öls sei η, die Dichte ρ.



a) Leiten Sie das Geschwindigkeitsprofil der Spaltströmung her. Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsprofil und die Schubspannungsverteilung.

b) Bestimmen Sie die nötige Antriebsleistung.

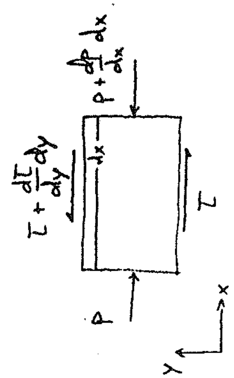
c) Wie ändert sich qualitativ das Aussehen des Geschwindigkeitsprofils bei verschwindendem Druckgradienten (Begründung).

Gegeben: $L, B, h_1, h_2 > h_1, \delta, v_B, \rho, \eta, g$

Hinweis: Die Verluste der Strömung in den Behältern bis zum Eintrittsquerschnitt bzw. ab dem Austrittsquerschnitt der Spaltströmung können vernachlässigt werden.

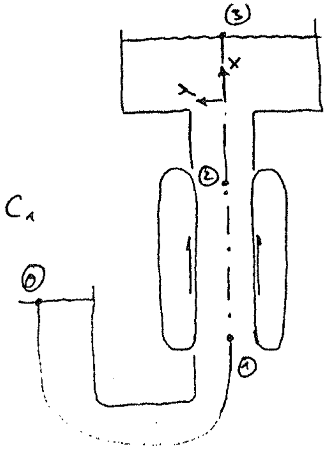
Es sei $\rho \frac{v_{Sp}^2}{2} \ll \rho g h_1$

Aufg 4 a) Kräftebilanz am Volumenelement



$$-\frac{dp}{dx} - \frac{d\tau}{dy} - \rho g = 0$$

$$\tau = -\left(\rho g + \frac{dp}{dx}\right) y + C_1$$



Bernoulli von ⓪ – ① verlustbehaftet

$$p_a + \rho g h_1 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 (1 + \underbrace{\zeta_e}_{\approx 0}) \,, \quad v_1 = O(v_B) \Rightarrow p_1 \approx p_a + \rho g h_1$$

Bernoulli von ② – ③ verlustbehaftet

$$p_a + \rho g h_2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 (1 + \zeta_a) \,, \quad v_2 = O(v_B) \Rightarrow p_2 \approx p_a + \rho g h_2$$

mit Hinweis

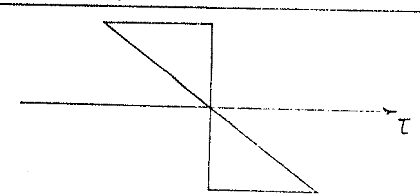
$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{L} = \frac{\rho g (h_2 - h_1)}{L} \,; \quad \tau = -\left[\rho g \left(1 + \frac{(h_2 - h_1)}{L}\right)\right] y + C_1 = -\eta \frac{du}{dy}$$

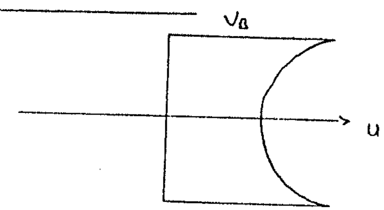
$$\Rightarrow u = \frac{1}{\eta}\left[\rho g \left(1 + \frac{(h_2 - h_1)}{L}\right) \frac{y^2}{2} - C_1 y\right] + C_2$$

Randbedingungen: $y = 0$: $\tau = 0$ (Symmetrie) $\Rightarrow C_1 = 0$

$y = \frac{\delta}{2}$: $u = v_B \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{\eta}\left[\rho g \left(1 + \frac{(h_2 - h_1)}{L}\right) \frac{\delta^2}{8}\right] + v_B$

$$u(y) = \frac{\rho g \delta^2}{2\eta} \left(1 + \frac{(h_2 - h_1)}{L}\right)\left(\frac{y^2}{\delta^2} - \frac{1}{4}\right) + v_B \quad \text{für } |y| \leq \frac{\delta}{2}$$





b) $P = v_B (-\tau_w) B L = \underline{v_B \rho g \left(1 + \frac{(h_2 - h_1)}{L}\right) \frac{\delta}{2} B L}$

c) qualitativ keine Änderung; das Maximum der Parabel relativ zum Wert der Bandgeschwindigkeit wird kleiner. Begründung:

[illegible]

5 - April 1994

Mai 1993

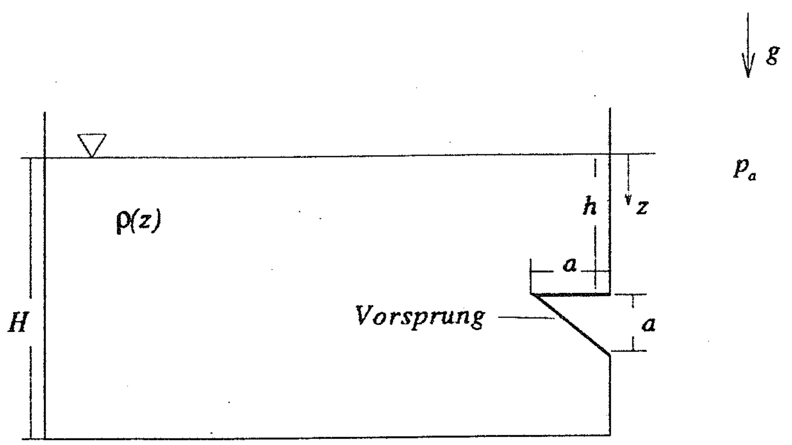
Klausur Strömungslehre I + II

29. März 1993

1. Aufgabe (12 Punkte)

In einem Behälter entsteht durch Auflösen von Salz näherungsweise ein Dichtegradient der Form:

$$\rho(z) = \rho_0 + \Delta\rho \frac{z}{H}$$



a) Berechnen Sie den Druck p als Funktion von z.

b) Berechnen Sie die Horizontal- und Vertikalkraft des Wassers auf den in der Höhe h auftretenden Vorsprung der Breite B (siehe Abbildung).

c) Wie ändern sich qualitativ die Kräfte, wenn der Vorsprung umgedreht wird?

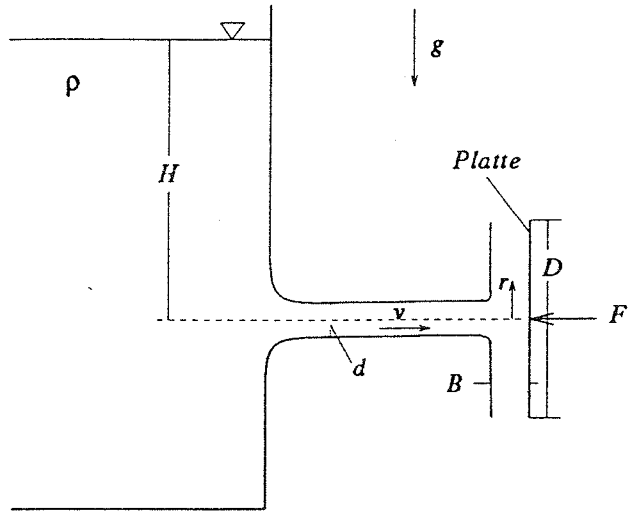
Begründen Sie Ihre Antwort.

Gegeben: $H, h, g, a, \rho_0, \Delta\rho, B, p_a$

78

2. Aufgabe (12 Punkte)

Aus einem großen Reservoir strömt Wasser verlustfrei durch eine Rohrleitung mit dem Durchmesser d. Am Ende der Rohrleitung befindet sich eine gut gerundete Austrittsöffnung, die durch eine kreisförmige Platte (Durchmesser D) verschlossen werden kann.



a) Skizzieren Sie den Druckverlauf längs einer Stromlinie vom Wasserspiegel im Reservoir bis zum Austritt.

b) Bestimmen Sie Betrag und Richtung der Kraft F auf die Platte. Nehmen Sie dazu folgenden Druckverlauf über den Innenteil der Platte an:

$$p(r) = p_0 - \frac{r}{d}\rho v^2_{(r=\frac{d}{2})}\,, \quad 0 \le r \le \frac{d}{2}$$

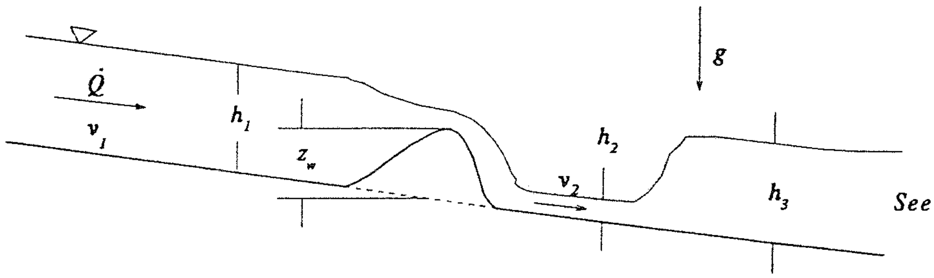
wobei p_0 der Gesamtdruck am Ende der Rohrleitung ist.

c) Skizzieren Sie für 2 unterschiedliche Breiten B den Druckverlauf längs einer Stromlinie vom Wasserspiegel im Reservoir bis zum Austritt für eine reibungsbehaftete Strömung in der Rohrleitung.

Gegeben: $H, d, D, H \gg D, g, \rho$

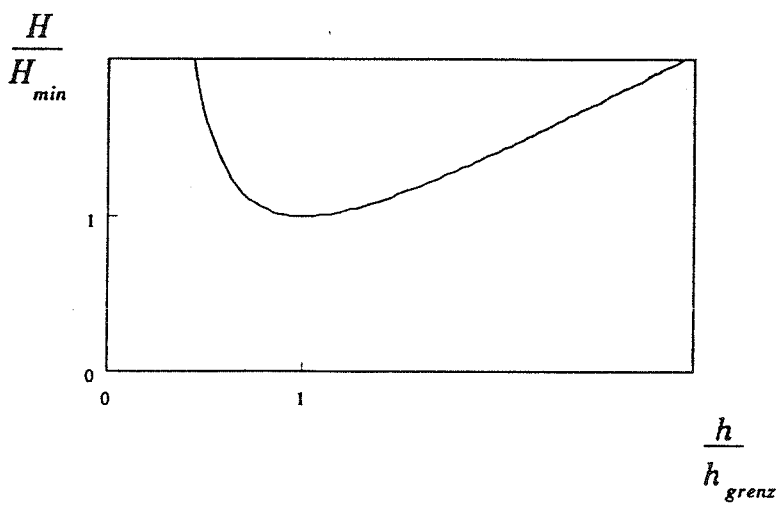
3. Aufgabe (12 Punkte)

In einem flachen Gerinne der Breite B strömt Wasser. Der Volumenstrom beträgt $\dot{Q}$. Hinter einer Bodenwelle der Höhe z_w stellt sich ein schießender Zustand ein. Danach folgt ein Wassersprung bevor das Gerinne in einen See mit konstanter Spiegelhöhe mündet.



Die Spiegelhöhe des Gerinnes vor der Bodenwelle sei h_1, die Froude-Zahl dieses Zustandes sei Fr_1.

a) Zeichnen Sie in das angegebene Diagramm alle hier auftretenden Zustandsänderungen qualitativ ein.



b) Berechnen Sie die Größen Fr_2, h_2, H_2.

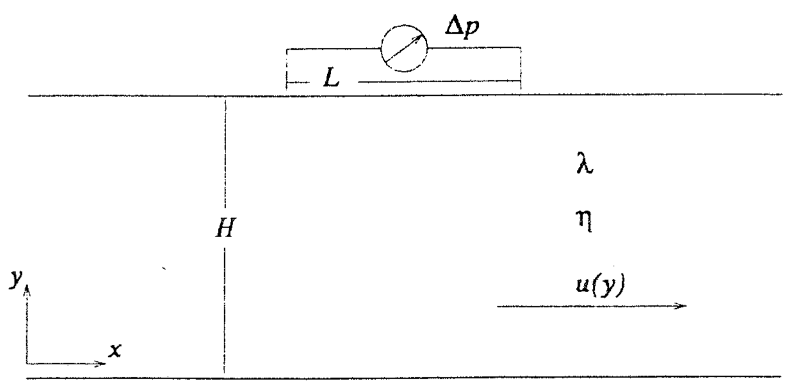
c) Wie groß wird h_1, wenn die Bodenwellenhöhe z_w so verringert wird, daß kein Übergang zum schießenden Zustand eintritt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gegeben: $\dot{Q}, B, Fr_1, h_1, g$

Mai 1993

4. Aufgabe (13 Punkte)

Zwischen zwei ebenen Platten strömt ein inkompressibles Newton'sches Fluid mit konstanter Zähigkeit (η) und Temperaturleitfähigkeit (λ). Über der Länge L wird eine Druckdifferenz Δp gemessen. Die Strömung sei stationär, ausgebildet und laminar.



Die Temperaturverteilung $T(x, y)$ in Strömungsrichtung x sei bekannt:

$$T(x, y) = T_0(f(y) + e^{-\alpha x})$$

a) Bestimmen Sie die Kennzahlen des Problems mit Hilfe der Dimensionsanalyse.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$.

c) Bestimmen Sie die Funktion $f(y)$ unter der Voraussetzung, daß die durch Reibung erzeugte Wärme durch Wärmeleitung abgeführt wird, d. h.:

$$\frac{\tau^2}{\eta} + \frac{\partial}{\partial y}(-\lambda \frac{\partial T}{\partial y}) = 0$$

Gegeben: $\alpha, \Delta p, L, \eta, H, T_0, \lambda, f(y = 0) = f(y = H) = 1.$

81

5. Aufgabe (13 Punkte)

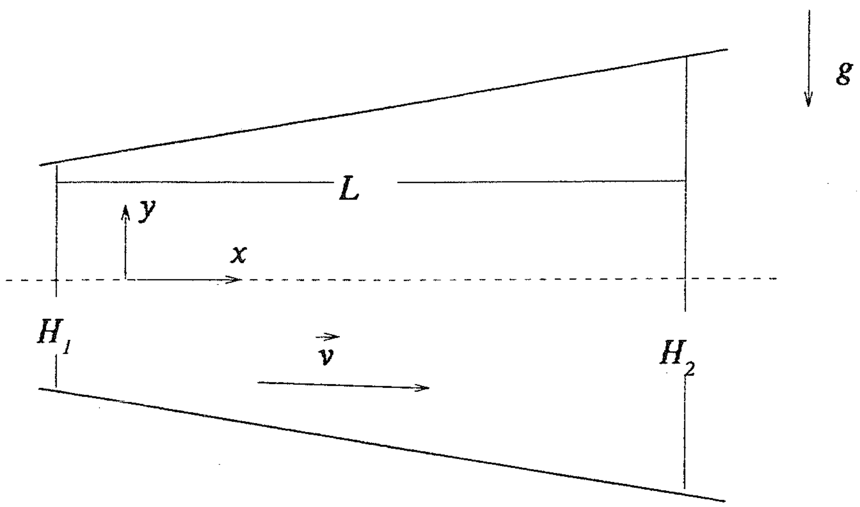
Gegeben sind die Navier-Stokes Gleichungen für instationäre, inkompressible Strömungen in einem Schwerefeld $\vec{g}$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} + \rho \vec{g}$$

a) Formulieren Sie die Gleichungen für eine stationäre, reibungsfreie zweidimensionale Strömung in den kartesischen Koordinatenrichtungen (x, y).

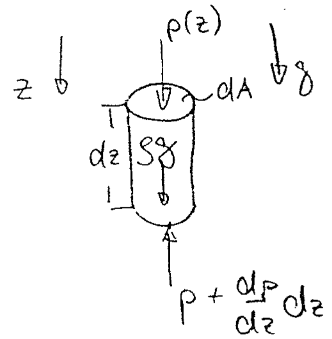
b) Vereinfachen Sie die oben angegebenen Gleichungen für eine Strömung durch einen schwach divergenten Kanal $\frac{H_2 - H_1}{L} \ll 1$, $\frac{H_2 + H_1}{L} \approx 1$ und ermitteln Sie die Kennzahlen für dieses Problem:



Gegeben: Alle nötigen Referenzgrößen.

1. Aufgabe

a)



Kräftegleichgewicht: $\rho g \, dA \, dz + p(z) \, dA - \left(p + \frac{dp}{dz} dz\right) dA = 0$

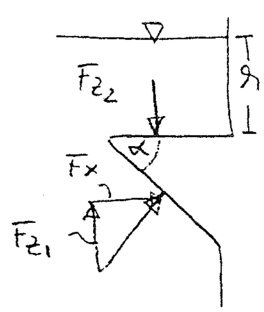
$\Rightarrow \frac{dp}{dz} = \rho g \quad$ mit $\rho(z) = \rho_0 + \Delta\rho \frac{z}{H}$

$\Rightarrow p(z) = \left(\rho_0 + \Delta\rho \frac{z}{2H}\right) z g + C$

Randbedingung: $p(z=0) = p_a \Rightarrow C = p_a$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{p(z) = p_a + \left(\rho_0 + \Delta\rho \frac{z}{2H}\right) z g}}$$

b)



da $\alpha = 45° \Rightarrow |F_x| = |F_{z_1}|$

$$F_x = \int_h^{h+a} p(z) B \, dz = \int_h^{h+a} \left[p_a + \left(\rho_0 + \Delta\rho \frac{z}{2H}\right) z g\right] B \, dz$$

$$= p_a B z \Big|_h^{h+a} + \rho_0 g B \frac{z^2}{2} \Big|_h^{h+a} + \Delta\rho g \frac{B}{H} \frac{z^3}{6} \Big|_h^{h+a}$$

$$\Rightarrow F_x = p_a B a + \rho_0 g \frac{B}{2} (h^2 + 2ha + a^2 - h^2) + \Delta\rho g \frac{B}{6H} ((h+a)^3 - h^3)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{F_x = B a \left(p_a + \rho_0 g \left(h + \frac{a}{2}\right) + \frac{\Delta\rho g}{2H} \left(h^2 + ha + \frac{a^2}{3}\right)\right)}}$$

$$F_z = p(h) B a - |F_x| = \left(p_a + \rho_0 g h + \Delta\rho g \frac{h^2}{2H}\right) B a - |F_x|$$

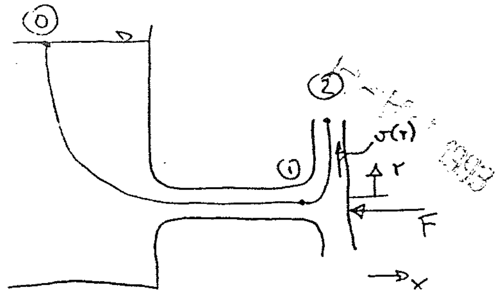
$$\Rightarrow \underline{\underline{F_z = B a \left(-\rho_0 g \frac{a}{2} - \frac{\Delta\rho g}{2H} \left(ha + \frac{a^2}{3}\right)\right)}}$$

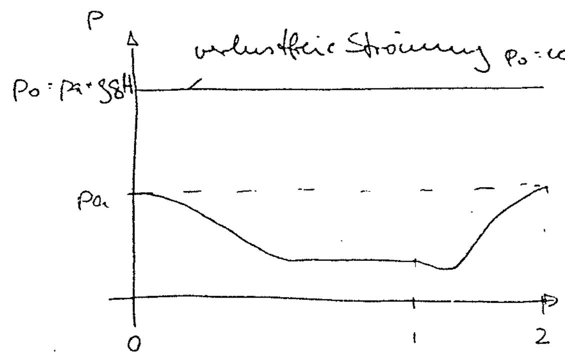
c) Für den umgedrehten Vorsprung bleibt F_x gleich, da die Projektion auf die z-Achse und damit das Druckintegral gleich bleibt. F_z wird bei gleicher Richtung vom Betrag her größer, da der Schwerpunkt des Volumens des Vorsprungs in einen Bereich höherer Dichte verlagert wird und damit die verdrängte Wassermasse größer wird.

84

2. Aufgabe

a) Druckverlauf:





b) Bernoulli von ⓪ → ② $(D \ll H)$

$$p_a + \rho g H = p_a + \frac{\rho}{2} u_2^2 \Rightarrow u_2 = \sqrt{2gH}$$

Konti:

$$v(r)\, 2\pi r B = u_2\, 2\pi \frac{D}{2} B \Rightarrow v(r) = \sqrt{2gH}\, \frac{D}{2r}$$

Bernoulli von 'r' → ②: $\left(r \geq \frac{d}{2}\right)$

$$p(r) + \frac{\rho}{2} v^2(r) = p_a + \frac{\rho}{2} u_2^2 \Rightarrow p(r) = p_a + \rho g H\left(1 - \frac{D^2}{4r^2}\right) \qquad \frac{d}{2} \leq r \leq \frac{D}{2}$$

aus der Aufgabenstellung:

$$p(r) = p_a + \rho g H\left(1 - \frac{2r}{d}\frac{D^2}{d^2}\right) \qquad 0 \leq r \leq \frac{d}{2}$$

Impulssatz um die Platte (x-Richtung):

$$\int_0^{d/2} (p(r) - p_a)\, 2\pi r\, dr + \int_{d/2}^{D/2} (p(r) - p_a)\, 2\pi r\, dr = -F$$

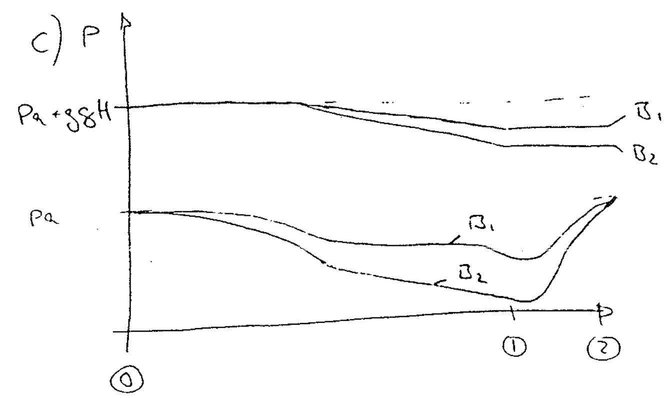
$$\Rightarrow \int_0^{d/2} 2\pi \rho g H\left(1 - \frac{2r D^2}{d\, d^2}\right) r\, dr + \int_{d/2}^{D/2} 2\pi \rho g H\left(1 - \frac{D^2}{4r}\right) r\, dr = -F$$

$$\Leftrightarrow -F = \frac{\pi}{2}\rho g H\left(\frac{d^2}{2} - \frac{D^2}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\rho g H\left(\frac{D^2}{2} - \frac{d^2}{2} - D^2 \ln\frac{D}{d}\right) = \frac{\pi D^2}{2}\rho g H\left(\frac{1}{6} - \ln\frac{D}{d}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{F = \frac{\pi D^2}{2}\rho g H\left(\ln\frac{D}{d} - \frac{1}{6}\right)}}$$

d.h. für $\ln\frac{D}{d} > \frac{1}{6}$ wird die Platte angesaugt.

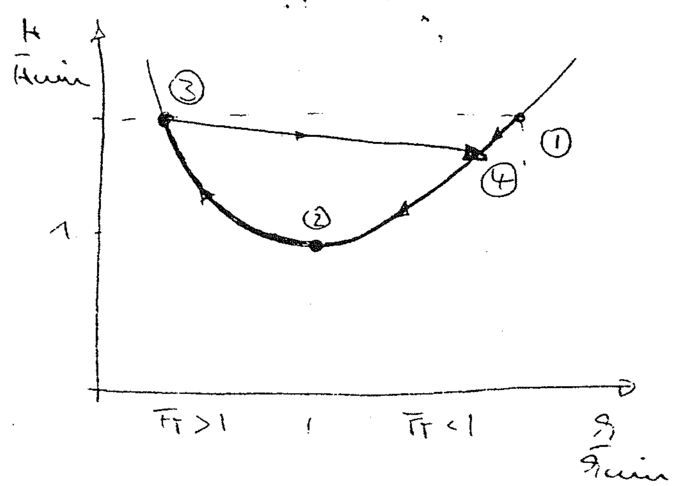
c)

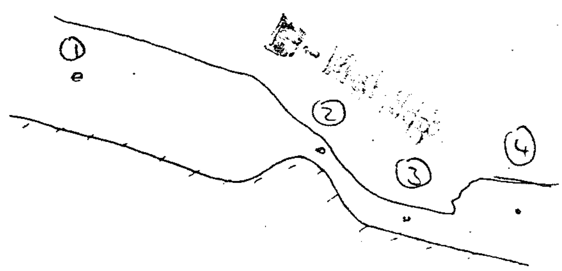


$B_2 > B_1$

3. Aufgabe

a)





b) Es gilt $H_1 = H_2$, da keine Energiehöhenverluste auftreten

$$H = h + \frac{v^2}{2g} \quad \text{mit} \quad v = \frac{\dot{Q}}{Bh} \Rightarrow \underline{\underline{H_2 = h_1 + \frac{\dot{Q}^2}{2B^2h_1^2g}}}$$

$$H_1 = H_2 \Leftrightarrow h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{v_2^2}{2g} \Leftrightarrow h_1 + \frac{\dot{Q}^2}{2B^2h_1^2g} = h_2 + \frac{\dot{Q}^2}{2B^2h_2^2g}$$

$$\Leftrightarrow h_1 - h_2 = \frac{\dot{Q}^2}{2B^2g}\left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right) \Leftrightarrow h_1 - h_2 = \frac{\dot{Q}^2}{2B^2g}\left(\frac{(h_1+h_2)(h_1-h_2)}{h_1^2h_2^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow h_1^2h_2^2 = \frac{\dot{Q}^2}{2B^2g}(h_1+h_2) \Leftrightarrow h_2^2 - \frac{\dot{Q}^2}{2B^2h_1^2g}h_2 - \frac{\dot{Q}^2}{2B^2h_1g} = 0$$

nur positive Höhen sind sinnvoll

$$\Rightarrow \underline{\underline{h_2 = \frac{\dot{Q}^2}{4B^2h_1^2g} \oplus \sqrt{\left(\frac{\dot{Q}^2}{4B^2h_1^2g}\right)^2 + \frac{\dot{Q}^2}{2B^2h_1g}}}}$$

$$Fr_2 = \frac{v_2}{\sqrt{gh_2}} \quad \text{mit} \quad v_2 = \frac{\dot{Q}}{Bh_2} \Rightarrow \underline{\underline{Fr_2 = \frac{\dot{Q}}{B\sqrt{gh_2^3}}}}$$

c) Wenn kein Wassersprung auftritt, muß die Energiehöhe konstant bleiben, mit Kontt. folgt $\Rightarrow \underline{\underline{h_1 = h_3}}$

4. Aufgabe

a) Einflussgrößen: $\Delta p, L, H, \eta, u_m, T_0, \alpha, \lambda$ (u_m = mittlere Geschwindigkeit, H = Höhe)

Grunddimensionen: $[L], [M], [Z], [T]$

8 Einflussgrößen − 4 Grunddimensionen → 4 Kennzahlen

Bezugsgrößen: L, u_m, η, T_0

$L: [L]$, $u_m: [\frac{L}{Z}]$, $\eta: [\frac{M}{LZ}]$, $T_0: [T]$

$\Rightarrow [L] \to L$, $[Z] \to \frac{L}{u_m}$, $[M] \to \frac{\eta L^2}{u_m}$, $[T] \to T_0$

Kennzahlen für $\Delta p, H, \alpha, \lambda$

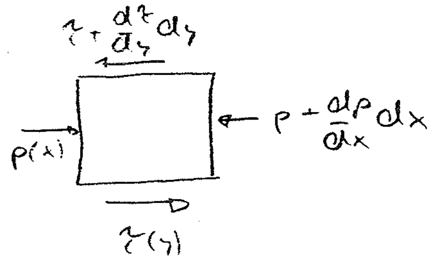
$\Delta p: \left[\frac{M}{Z^2 L}\right] \to \frac{\eta L^2 u_m^2}{u_m L^2 L} \Rightarrow \underline{\underline{K_1 = \frac{\Delta p L}{\eta u_m}}}$

$H: [L] \to L \Rightarrow \underline{\underline{K_2 = \frac{H}{L}}}$

$\alpha: \left[\frac{1}{L}\right] \to \frac{1}{L} \Rightarrow \underline{\underline{K_3 = \alpha L}}$

$\lambda: \left[\frac{ML}{TZ^3}\right] \to \frac{\eta L^2 L u_m^3}{u_m L^3 T_0} \Rightarrow \underline{\underline{K_4 = \frac{\lambda T_0}{\eta u_m^2}}}$

b) ausgebildete Strömung:



Kräftegleichgewicht:

$$\frac{d\tau}{dy} = -\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{L}$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{\Delta p}{L} y + C_1 \Rightarrow u(y) = \frac{\Delta p}{2\eta L} y^2 - \frac{C_1}{\eta} y + C_2$$

Randbedingungen: $u(y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$u(y=H) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\Delta p H}{2L}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{u(y) = \frac{\Delta p}{2\eta L}(y^2 - Hy)}}$$

Mai 1993

c) $\dfrac{\tau^2}{\eta} - \lambda \dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$ mit $\tau = \dfrac{\Delta p}{L}\left(\dfrac{H}{2} - y\right)$

und $\dfrac{\partial T}{\partial y} = T_0 \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2} = T_0 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p^2}{L^2 \eta}\left(\frac{H}{2} - y\right)^2 - \lambda T_0 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\Delta p^2}{L^2 \eta \lambda T_0}\left(\frac{H}{2} - y\right)^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\Delta p^2}{3 L^2 \eta \lambda T_0}\left(\frac{H}{2} - y\right)^3 + C_1$$

$$\Rightarrow f(y) = +\frac{\Delta p^2}{12 L^2 \eta \lambda T_0}\left(\frac{H}{2} - y\right)^4 + C_1 y + C_2$$

Randbedingungen: $f(y=0) = 1 \Rightarrow C_2 = 1 - \dfrac{\Delta p^2 H^4}{196 L^2 \eta \lambda T_0}$

$f(y = H) = 1 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\Rightarrow f(y) = \frac{\Delta p^2}{12 L^2 \eta \lambda T_0}\left[\left(\frac{H}{2} - y\right)^4 - \frac{H^4}{16}\right] + 1$$

17- Mai 1993

5. Aufgabe

a) stationär: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, reibungsfrei: $\eta \nabla^2 \vec{v} = 0$

→ Navier-Stokes Gleichungen für inkompressible, stationäre reibungsfreie Strömungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

$$\rho\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y$$

) Dimensionslose Größen: $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\bar{y} = \frac{y}{H_\infty}$, $\bar{p} = \frac{p}{\Delta p}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}$, $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_\infty}$, $\bar{g} = \frac{g}{g_\infty}$

Geschwindigkeiten: $\bar{u} = \frac{u}{u_\infty}$, aus Stromlinienneigung: $\bar{v} = \frac{v L}{u_\infty \Delta H}$

mit $\Delta H = H_2 - H_1$, $H_\infty = \frac{H_2 + H_1}{2}$

⇒ Konti-Gl.: $\frac{u_\infty}{L} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{u_\infty}{L} \frac{\Delta H}{H_\infty} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \underbrace{\frac{\Delta H}{L}}_{\ll 1} \underbrace{\frac{L}{H_\infty}}_{O(1)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$

⇒ $$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = 0$$

Impuls-Gl.:

$$\rho_\infty \bar{\rho}\left(\frac{u_\infty^2}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{u_\infty^2 \Delta H}{L H_\infty} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\Delta p}{L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \eta_\infty \bar{\eta}\left(\frac{u_\infty}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{u_\infty}{H_\infty^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) + \rho_\infty g_\infty \bar{\rho} \bar{g}_x$$

$$\rho_\infty \bar{\rho}\left(\frac{u_\infty^2 \Delta H}{L^2} \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \frac{u_\infty^2 \Delta H^2}{L^2 H_\infty} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\Delta p}{H_\infty} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \eta_\infty \bar{\eta}\left(\frac{u_\infty \Delta H}{L L^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{u_\infty \Delta H}{L H_\infty^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) + \rho_\infty g_\infty \bar{\rho} \bar{g}_y$$

$$\Leftrightarrow \bar{\rho}\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \underbrace{\underbrace{\frac{\Delta H}{L}}_{\ll 1} \underbrace{\frac{L}{H_\infty}}_{O(1)}}_{\approx 0} \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\Delta p}{\rho_\infty u_\infty^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\eta_\infty}{\rho_\infty u_\infty L}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{H_\infty^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) + \frac{g_\infty L}{u_\infty^2} \bar{\rho} \bar{g}_x$$

$$\bar{\rho}\left(\bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \underbrace{\underbrace{\frac{\Delta H}{L}}_{\ll 1} \underbrace{\frac{L}{H_\infty}}_{O(1)}}_{\approx 0} \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\Delta p}{\rho_\infty u_\infty^2} \frac{L}{H_\infty} \frac{L}{\Delta H} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\eta_\infty}{\rho_\infty u_\infty L}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{H_\infty^2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) + \frac{g_\infty L}{u_\infty^2} \frac{L}{\Delta H} \bar{\rho} \bar{g}_y$$

⇒ Kennzahlen: $\frac{\Delta H}{L}$, $\frac{L}{H_\infty}$, $\frac{\Delta p}{\rho_\infty u_\infty^2}$, $\frac{\eta_\infty}{\rho_\infty u_\infty L}$, $\frac{g_\infty L}{u_\infty^2}$

89

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen

Direktor: Univ.-Prof. E. Krause, Ph.D.

Klausur
Strömungslehre
I + II

7. 8. 1992

Name: ....

Matr.-Nr.: ....

Unterschrift: ....

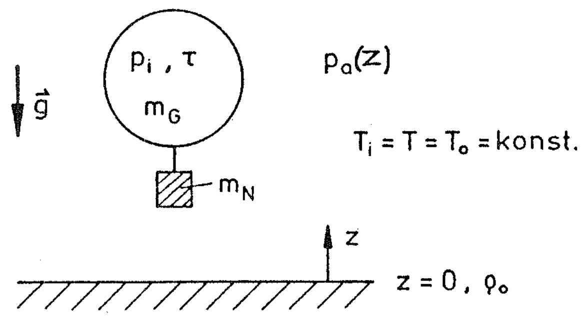
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Σ	

Klausur Strömungslehre I+II

7. August 1992

1. Aufgabe (8 Punkte)

Ein starrer, geschlossener Ballon mit der Masse m_N (einschließlich der Nutzmasse) enthält die Gasmasse m_G. Das Gasvolumen sei τ und der Innendruck im Ballon ist p_i. Das Volumen der Nutzlast τ_N sei gegenüber τ vernachlässigbar. Der Ballon befindet sich in einer isothermen Atmospäre mit der Temperatur T_0. Die Temperatur des Gases(R_G) ist gleich der Temperatur in der umgebenden Luft (R_L).



Gegeben: $g, \tau, \tau_N << \tau, m_G, m_N, \varrho_0, T_i = T = T_0 = konst., R_L, R_G$

a) Wie groß ist die maximale Steighöhe des Ballons, wenn der Ballon am Boden festgehalten werden muß?

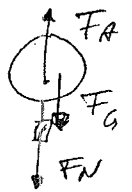
b) Nach einer Kollision mit einem Vogel hat die Ballonhülle ein Loch. Wird der Ballon nun steigen oder sinken? (Begründung)

c) Bestimmen Sie die neue maximale Steighöhe h_{max} für $p_i > p_a(h_{max})$.

Sep. 1992

Aufgabe 1 (90):

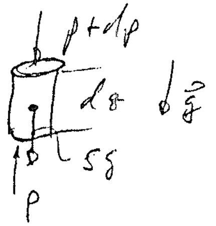
a)



$$F_A - F_G - F_N = 0$$

$$F_A = \rho_L\, g\, \tau \qquad (\tau_N \ll \tau)$$

$$F_G + F_N = (m_G + m_N)\, g \qquad (*)$$



$$-\rho g\, A\, dz - (p+dp)A + pA = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad \overset{T = \text{konst}}{\Rightarrow} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}$$

$$\Rightarrow \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\int_{z=0}^{z} \frac{g}{RT}\, dz \quad \Rightarrow \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT_0}\right)$$

$$(*) \Rightarrow \rho_L = \frac{m_G + m_N}{\tau} = \rho(z = z_{max})$$

$$\Rightarrow \underline{z_{max} = \frac{R_L T_0}{g} \ln\left(\frac{\rho_0\, \tau}{m_G + m_N}\right)}$$

b) 2 Fälle:

$p_i > p_a \Rightarrow m_G$ sinkt $\Rightarrow z_{max}$ steigt

$p_i < p_a \Rightarrow m_G$ steigt $\Rightarrow z_{max}$ sinkt

c) $F_A \quad F_{G_{Loch}} - F_N = 0 \quad$ für $p_i = p_a$

$$F_G = m_G\, g \qquad m_G = \rho_G\, \tau$$

$$\rho_G = \frac{p_i}{R_G T_0} = \frac{m_G}{\tau}$$

$$\rho_{G_{Loch}} = \frac{p_a}{R_G T_0} \qquad p_a = R_L T_0\, \rho_L$$

$$\Rightarrow \rho_L\, g\, \tau - \rho_{G_{Loch}}\, g\, \tau - m_N\, g = 0$$

$$\Rightarrow \rho_L \left(1 - \frac{R_L}{R_G}\right) = \frac{m_N}{\tau}$$

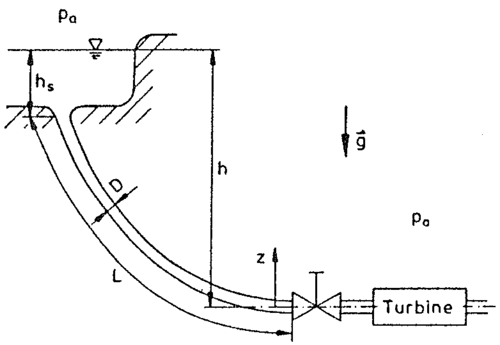
$$\Rightarrow \underline{h_{max\,Loch} = \frac{R_L T_0}{g} \ln\left(\frac{\tau \rho_0}{m_N}\, \frac{R_G - R_L}{R_G}\right)}$$

2 Sep. [illegible]

91

2. Aufgabe (11 Punkte)

Eine Turbine wird aus einem großen See gespeist, dessen Spiegel in der Höhe h über ihr liegt. Die Zuleitung hat die Länge L, den Durchmesser D und den Rohrreibungskoeffizienten λ. Die Strömung im See und im Einlauf wird bis zur Tiefe h_S als verlustfrei betrachtet. Vor der Turbine liegt ein Ventil mit dem Verlustkoeffizienten ζ_V. Der Druckverlust der Turbine beim Betrieb wird durch den konstanten Verlustkoeffizienten ζ_T ausgedrückt. Die kurzen Rohrleitungen hinter dem Ventil und hinter der Turbine werden ebenfalls als verlustfrei betrachtet. Hinter der Turbine strömt das Wasser ins Freie. Der Dampfdruck des Wassers sei p_D.



Gegeben: $h, g, D, L, \lambda, \zeta_V, \zeta_T, \varrho, p_a, p_D$

a) Welche maximale Leistung gibt die Turbine ab?

b) Die Zuleitung wird plötzlich geöffnet. Wie lange dauert es, bis die Turbine 72.9% ihrer maximalen Leistungsabgabe erreicht hat?

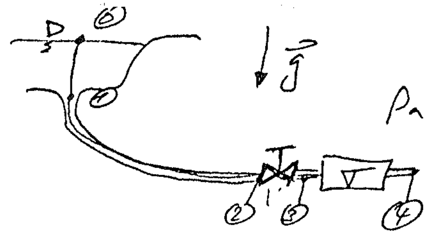
c) Wie groß ist die minimale Stauseehöhe h_S, damit sich keine Dampfblasen bilden? Geben Sie die Nebenbedingung für die Höhe h an.

d) Skizzieren Sie den Verlauf des Gesamt-, des statischen und des Staudruckes über einer Stromlinie vom Spiegel des Sees zum Ausfluß.

Hinweis:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} \qquad \text{für} \qquad |x| < a$$

2. Aufgabe:



a) $\mathbb{P}_T = \dot{Q}\,\Delta p_T$

$\dot{Q} = u_m \frac{\pi}{4} D^2$

$\Delta p_T = p_4 - p_3$

Bernoulli von 0 – 4

$p_a + \rho g h = p_4 + \frac{\rho}{2} u_m^2 + \Delta p_V$

$p_4 = p_a \qquad \Delta p_V = \frac{\rho}{2} u_m^2 \left(\lambda \frac{L}{D} + \zeta_V + \zeta_T\right)$

$\Rightarrow u_m = \sqrt{\dfrac{2gh}{1 + \lambda\frac{L}{D} + \zeta_V + \zeta_T}}$

$\Delta p_T = \zeta_T \frac{\rho}{2} u_m^2$ aus Bernoulli 3 – 4

$$\Rightarrow \mathbb{P}_T = \frac{\pi}{8}\rho D^2 \zeta_T \left[\frac{2gh}{1 + \lambda\frac{L}{D} + \zeta_V + \zeta_T}\right]^{\frac{3}{2}}$$

b) $\mathbb{P}_{T\,max} = \mathbb{P}_{T\,a)} = \frac{\pi}{8}\rho D^2 \zeta_T \left[\frac{2gh}{K}\right]^{\frac{3}{2}}$

mit $K = 1 + \lambda\frac{L}{D} + \zeta_V + \zeta_T$

$\mathbb{P}_{T\,b)} = 0.729\, \mathbb{P}_{T\,a)} = \frac{\pi}{8}\rho D^2 \zeta_T u_{m\,b)}^3$

$\Rightarrow u_{m\,b)} = \sqrt[3]{0.729}\sqrt{\dfrac{2gh}{K}} = 0.9\sqrt{\dfrac{2gh}{K}}$

92 Bernoulli 0 – 4

$$p_a + \rho g h = p_a + \frac{\rho}{2} u_m^2 \left(1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_v + \zeta_T\right) + \rho \int_0^L \frac{\partial u_m}{\partial t} ds$$

$$\int_0^L \frac{\partial u_m}{\partial t} ds = L \frac{du_m}{dt} = gh - \frac{u_m^2}{2} K$$

$$\Rightarrow \int_0^{u_m(t)} \frac{du_m}{\frac{2gh}{K} - u_m^2} = \int_0^T \frac{K}{2L} dt$$

$$\Rightarrow \underline{T = \frac{L}{\sqrt{2ghK}} \ln\left(\frac{1+0.9}{1-0.9}\right) = 2.94 \frac{L}{\sqrt{2ghK}}}$$

c) Druckminimum an der Stelle 1:

$\Rightarrow$ Bernoulli 0 – 1

$$p_a + \rho g h = p_1 + \rho g (h - h_s) + \frac{\rho}{2} u_m^2$$

$$\Rightarrow p_1 = p_a + \rho g h_s - \frac{\rho}{2} u_m^2 \geq p_D$$

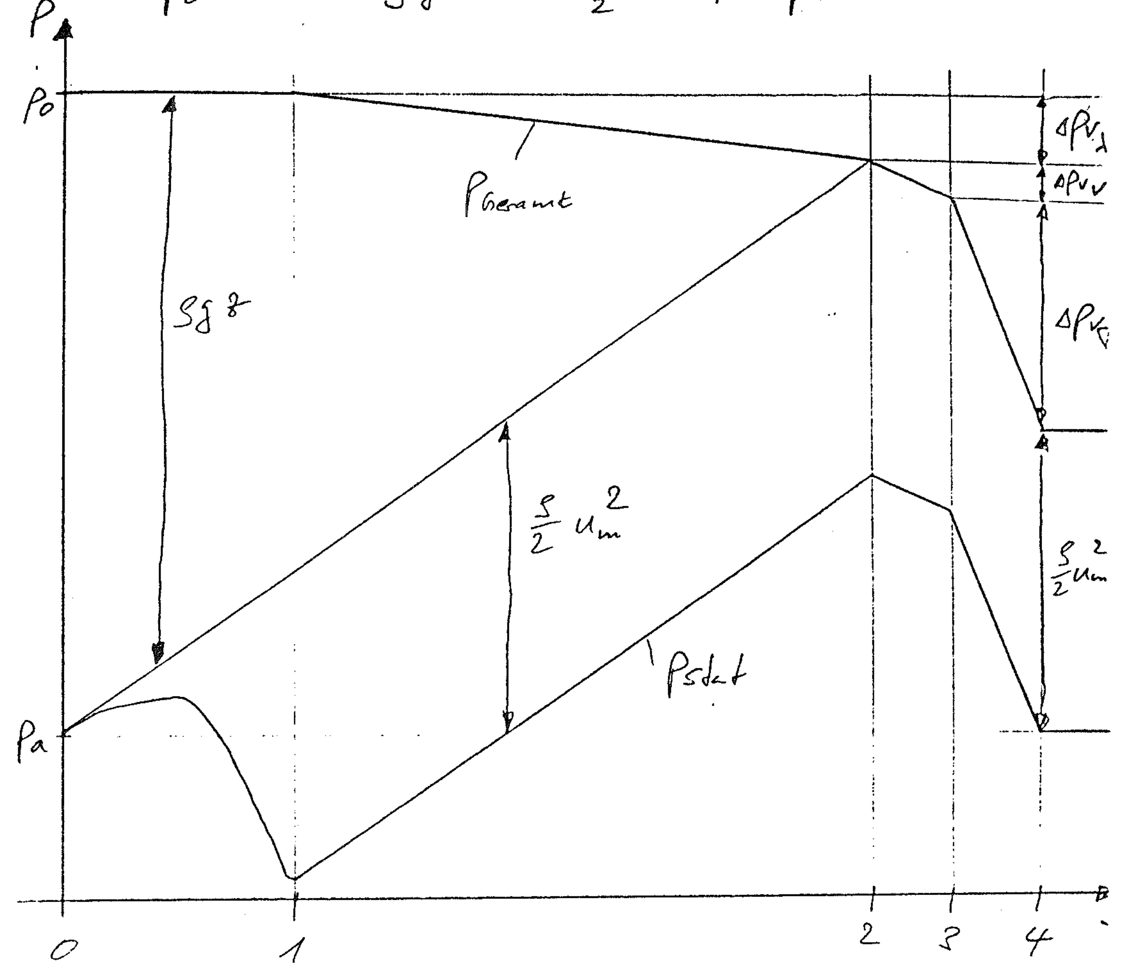
$$\Rightarrow \underline{h_s \geq \frac{p_D - p_a}{\rho g} + \frac{h}{1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_v + \zeta_T}}$$

Lösung nur sinnvoll für $h_s > 0$

$\Rightarrow$ Nebenbedingung für h:

$$\underline{h > \frac{p_a - p_D}{\rho g} \left(1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_v + \zeta_T\right)}$$

d) $p_0 = \quad + \rho g z + \frac{\rho}{2} v^2 + \Delta p_v$

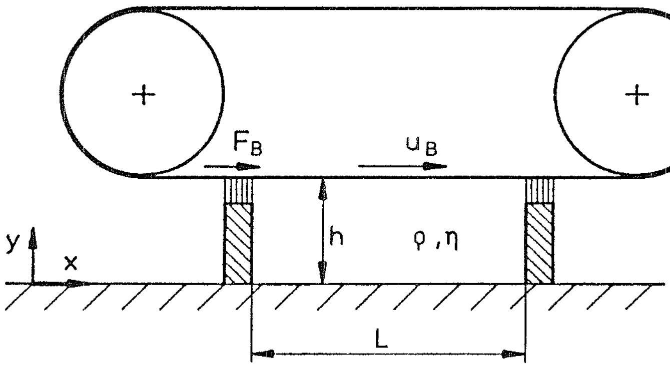


1992

93

4. Aufgabe (12 Punkte)

Zur Reinigung eines Fließbandes befindet sich in einem Spalt der Höhe h eine zähe Newtonsche Flüssigkeit, die durch zwei Bürsten an den Rändern am Auslaufen gehindert wird. An den Bürsten, die im Abstand L angeordnet sind, entsteht jeweils eine Reibkraft F_B. Das Band bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_B und hat die Breite B.



Gegeben: $\varrho, \eta, u_B, h, L, B, F_B$

a) Bestimmen Sie die Schubspannungs- $\tau(y)$ und die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$ im Spalt.

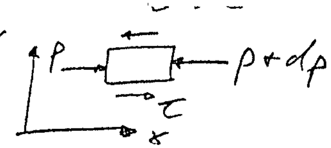
b) Skizzieren Sie die Schubspannungs- und die Geschwindigkeitsverteilung und bestimmen Sie deren Extremwerte.

c) Bestimmen Sie die Leistung P_S, die an die Strömung abgegeben wird, sowie die Antriebsleistung des Bandes P_A. Skizzieren Sie diese in Abhängigkeit von der Höhe h.

d) Bestimmen Sie die Kennzahl(en) dieses Strömungsproblems.

Hinweis: Die Strömung sei ausgebildet und über der Fließbandbreite konstant. Die Geschwindigkeiten quer zur Bandgeschwindigkeit seien vernachlässigbar.

4. Aufgabe:



a)

Kräftebilanz am Element:

$$\tau\, dx - \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy\right) dx + p\, dy - \left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = -\frac{dp}{dx} \qquad \tau = -\eta \frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{dp}{dx} y + C_1' = -\eta \frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} - C_1 y + C_2$$

R.B.: 1) $u(y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

2) $u(y=h) = u_B \Rightarrow u_B = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2} - C_1 h$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{u_B}{h} + \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow u(y) = u_B \frac{y}{h} + \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy)$$

3. R.B.: $\frac{\dot{Q}}{B} = 0 = \int_0^h u(y)\, dy$

$$\Rightarrow 0 = \left[u_B \frac{y^2}{2h} + \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{hy^2}{2}\right)\right]_0^h$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{6 \eta u_B}{h^2}$$

Sep. 1992

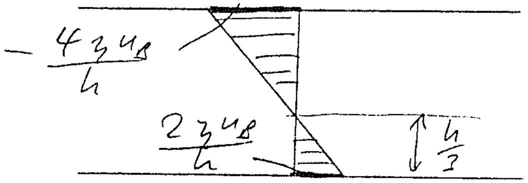
94

$$\Rightarrow u(y) = u_B \left(3\frac{y^2}{h^2} - 2\frac{y}{h}\right)$$

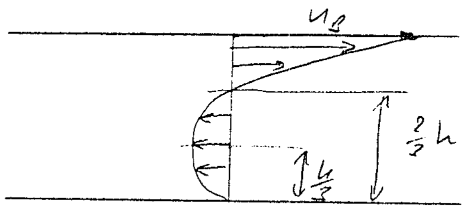
$$\Rightarrow \tau(y) = \eta u_B \left(\frac{2}{h} - \frac{6y}{h^2}\right)$$

b)

$\tau(y)$



$u(y)$



$u_{max} = u(y=h) = u_B$

$u(y=0) = u(y=\frac{2}{3}h) = 0$

$u_{min} = u(y=\frac{h}{3}) = -\frac{u_B}{3}$

$\tau_{max} = \tau(y=0) = 2\frac{\eta u_B}{h}$

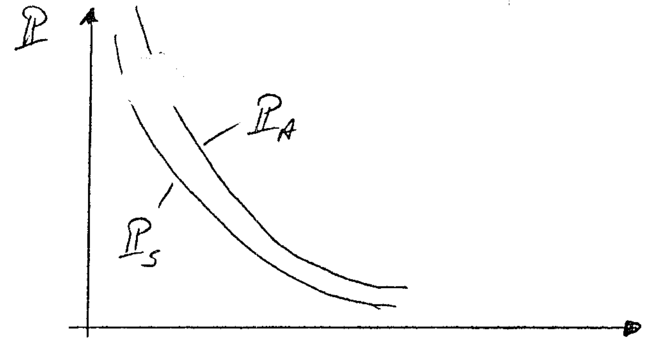
$\tau_{min} = \tau(y=h) = -4\frac{\eta u_B}{h}$

$\tau(y=\frac{h}{3}) = 0 \Rightarrow u_{min}$

c) $P_S = F_W \cdot u_B \qquad F_W = \tau_W B L$

$$\Rightarrow P_S = 4\eta\frac{u_B}{h}BL\,u_B = 4\eta\frac{BL}{h}u_B^2$$

$$P_A = P_S + 2F_e u_B = \left(4\eta BL\frac{u_B}{h} + 2F_e\right)u_B$$



Asympdoten:

P_A: $h \to \infty$: $2F_e u$

P_S: $h \to \infty$: 0

d) $f(P_S, \rho, \eta, h, L, B, u_B) = 0$

$\Rightarrow 7 - 3 = 4$ Kennzahlen

Bezugsgrößen: ρ, u_B, h $\hat{=}$ 3 Grunddimensionen

$$\Rightarrow K_i = i^{\alpha_i}\rho^{\beta_i}u_B^{\gamma_i}h^{\delta_i}$$

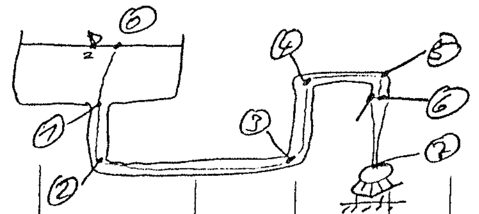
wähle: $\alpha_i = 1$

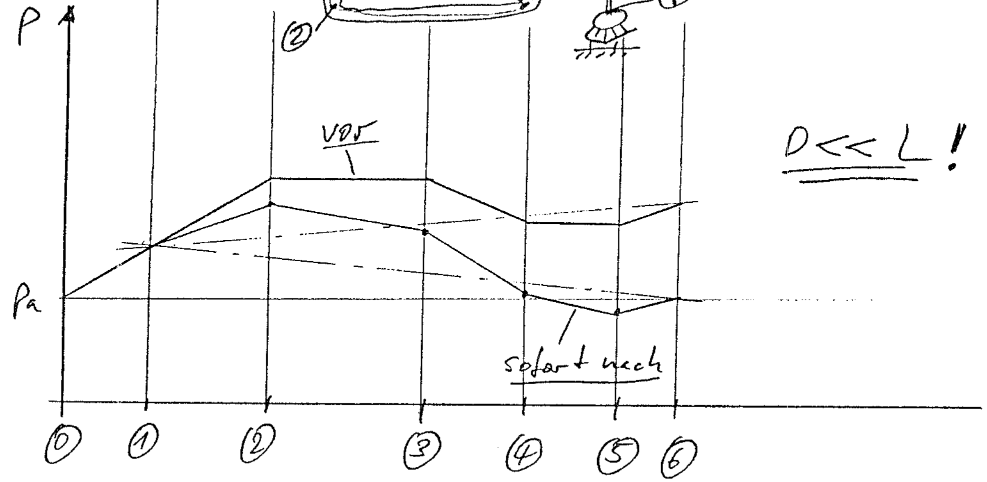
$$\Rightarrow K_1 = \frac{L}{h}, \quad K_2 = \frac{B}{h}, \quad K_3 = \frac{\eta}{\rho u_B h},$$

$$K_4 = \frac{P_S}{\rho u_B^3 h^2}$$

Aufgabe 2:

a) 95





b) instationärer Bernoulli: ⓪–⑥

$$p_a = p_a + \frac{\rho}{2} v_{stationär}^2 + \rho g(-h_1 + h_2 - h_3)$$

$$\Rightarrow v_{stat.} = \sqrt{2g(h_1 - h_2 + h_3)}$$

instationärer Bernoulli: ⓪–⑥

$$p_a = p_a + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g(-h_1 + h_2 - h_3) + \rho \int \frac{\partial v}{\partial t}\, ds$$

mit: $\int \frac{\partial v}{\partial t}\, ds = \frac{dv}{dt} L$ wegen $D \ll L$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{2g(h_1 - h_2 + h_3) - v^2}{2L} = \frac{v_{stat}^2 - v^2}{2L}$$

$$\Rightarrow \int_0^{0.99 v_{stat}} \frac{dv}{v_{stat}^2 - v^2} = \int_0^{\Delta T} \frac{dt}{2L}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{L}{v_{stat}} \ln\left(\frac{1 + \frac{v}{v_{stat}}}{1 - \frac{v}{v_{stat}}}\right)\Bigg|_0^{0.99}$$

$$\underline{\Delta T = \frac{L}{v_{stat}} \ln\left(\frac{1.99}{0.01}\right) = 5.293\,\frac{L}{v_{stat}}}$$

c) $v_{stat} = v_{max}$ ⇒ stationärer Bernoulli:

⑥–⑦: $p_a + \rho g \Delta h + \frac{\rho}{2} v_{stat}^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_7^2$

Konti: $\frac{\pi D^2}{4} v_{stat} = \frac{\pi d^2}{4} v_7 \Rightarrow v_7 = \frac{D^2}{d^2} v_{stat}$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{v_7^2 - v_{stat}^2}{2g} = \frac{v_{stat}^2}{2g}\left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta h = (h_1 - h_2 + h_3)\left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)}$$

d) p_{min} wird bei stationärer Strömung zwischen ④ und ⑤ erreicht!

Bernoulli: ⓪–④

$$p_a + \rho g h_1 = p_4 + \frac{\rho}{2} v_{stat}^2 + \rho g h_2$$

$p_{4min} = p_D$, $v_{stat}^2 = 2g(h_1 - h_2 + h_3)$

$$\Rightarrow \frac{p_a - p_D}{\rho g} = h_3$$

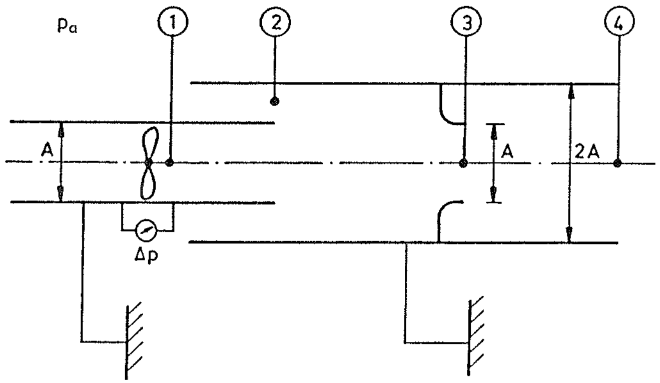
⇒ h_2 ist beliebig wählbar

$$h_{3max} = \frac{p_a - p_D}{\rho g}$$

96

3. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Strahlapparat wird mit einem Gebläse angetrieben und saugt den Volumenstrom $\dot{Q}_2$ durch einen ringförmigen, scharfkantigen Einlauf an. Im hinteren Teil des Strahlapparates befindet sich eine Blende. Am Austritt beträgt der Volumenstrom $\dot{Q}_4$.



Gegeben: $\dot{Q}_2, \dot{Q}_4, A, \varrho, p_a$

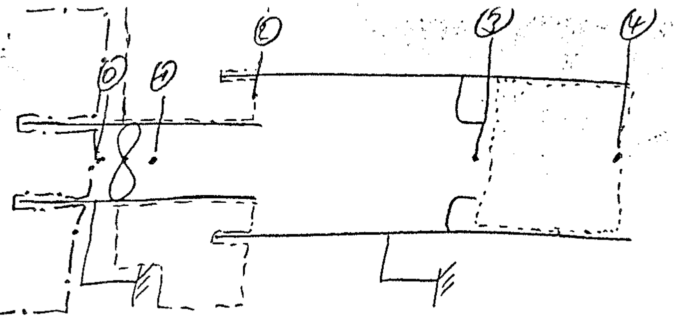
a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_2 und den Druck p_2.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten v_1 und v_3 und den Druck p_3.

c) Wie groß ist die Druckdifferenz Δp und die Gebläseleistung P?

d) Bestimmen Sie die Haltekräfte des Gebläses F_G und des Strahlapparates F_S.

Aufgabe 3:



a) $\dot{Q}_2 = A v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{\dot{Q}_2}{A}$

Impuls: (- - - - -) $\rho v_2^2 A = (p_a - p_2) A$

$$\Rightarrow p_2 = p_a - \rho \left(\frac{\dot{Q}_2}{A}\right)^2$$

b) $\dot{Q}_4 = v_1 A + v_2 A \Rightarrow v_1 = \frac{\dot{Q}_4 - \dot{Q}_2}{A}$

Konti: $v_3 A = v_4 2A$ $\dot{Q}_4 = v_4 2A$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{\dot{Q}_4}{A}$$

Impuls: (……) $-\rho v_3^2 A + \rho v_4^2 2A = (p_3 - p_a) 2A$

$$\Rightarrow p_3 = p_a - \frac{\rho}{4} \frac{\dot{Q}_4^2}{A^2}$$

c) Impuls: (—·—·—) $\rho v_0^2 A = (p_a - p_0) A$

Konti: $v_0 = v_1$ Bernoulli: $p_1 = p_2$

$$p_0 = p_1 - \Delta p$$

$$\Rightarrow \rho \left(\frac{\dot{Q}_4 - \dot{Q}_2}{A}\right)^2 = \cancel{p_a} - \left(\cancel{p_a} - \rho \left(\frac{\dot{Q}_2}{A}\right)^2 - \Delta p\right)$$

$$\Rightarrow \Delta = \rho \frac{(\dot{Q}_4 - \dot{Q}_2)^2 - \dot{Q}_2^2}{A^2}$$

März 1992

6

Sep. 1991

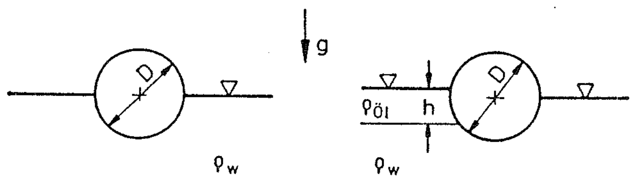
97

Klausur Strömungslehre I+II

2. August 1991

1. Aufgabe (12 Punkte)

Eine Ölbarriere in der Form eines Zylinders mit dem Durchmesser D schwimmt im Meer. Sie taucht in dem Wasser der Dichte ρ_w bis zur Hälfte ein und soll Öl der Dichte $\rho_{\ddot{O}l}$ aufhalten.

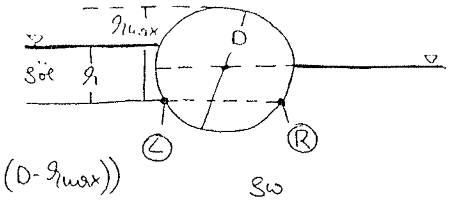


a) Berechnen Sie die maximale Ölfilmdicke h, die von der Barriere aufgehalten werden kann. Begründen Sie, warum die Eintauchtiefe auf der ölabgewandten Seite konstant bleibt.

b) Stellen Sie die auftretenden horizontalen Kräfte graphisch als Flächen dar. Berechnen Sie die horizontale Kraft auf die Barriere der Länge L als Funktion der Ölfilmdicke h.

Gegeben: $D, L, g, \frac{\rho_{\ddot{O}l}}{\rho_w} = \frac{1}{2}$, ρ_w

1. Aufgabe

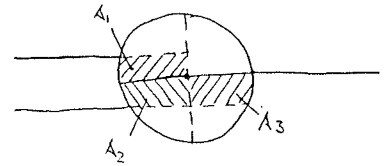


a) Druckgleichheit in den Punkten (L) und (R):

$\Rightarrow p_a + \rho_{\ddot{o}l}\, g\, h_{max} = p_a + \rho_w\, g \left(\frac{D}{2} - (D - h_{max})\right)$

$\Leftrightarrow \rho_{\ddot{o}l}\, h_{max} = \rho_w \left(h_{max} - \frac{D}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\rho_{\ddot{o}l}}{\rho_w} = 1 - \frac{D}{2 h_{max}}$

(3) $\Leftrightarrow h_{max} = \dfrac{D}{2\left(1 - \frac{\rho_{\ddot{o}l}}{\rho_w}\right)} = D$



Da das Dichteverhältnis $\frac{\rho_{\ddot{o}l}}{\rho_w} = \frac{1}{2}$ ist, sind die Flächen A_1, A_2 und A_3 gleich groß

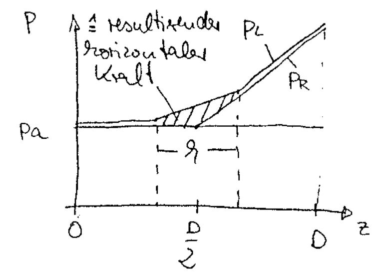
$\Rightarrow$ Auftriebskraft links $= \rho_{\ddot{o}l}\, g\, (A_1 + A_2) L$

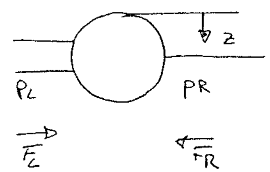
$=$ Auftriebskraft rechts $= \rho_w\, g\, (A_3) L$

(3) d.h. insgesamt ändert sich die Auftriebskraft nicht und der Wasserstand bleibt auf der ölabgewandten Seite gleich.

b) graphische Darstellung der Druckverläufe:

(3)





$F_L = \rho_{\ddot{o}l}\, g\, \frac{h^2}{2} L + \rho_w\, g\, \frac{D^2}{8} L - \rho_w\, g \left(\frac{\rho_{\ddot{o}l}}{\rho_w} h\right)^2 \frac{L}{2} + p_a L D$

$F_R = \rho_w\, g\, \frac{D^2}{8} L + p_a L D$

$\Rightarrow F = F_L - F_R = \rho_{\ddot{o}l}\, g\, \frac{h^2}{2} L - \rho_w\, g \left(\frac{\rho_{\ddot{o}l}}{\rho_w}\right)^2 \frac{h^2}{2} L$

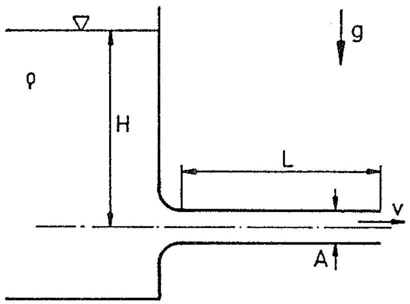
(3) $\Leftrightarrow F = \rho_w \ldots \frac{h^2}{2} \frac{\rho_{\ddot{o}l}}{\rho_w} \left(1 - \frac{\rho_{\ddot{o}l}}{\rho_w}\right) = \rho_w L h^2 g \ldots$

2 SS 1991

98

2. Aufgabe (10 Punkte)

Aus einem großen Behälter strömt ein Fluid der Dichte ρ und Zähigkeit η durch ein Rohr mit einem kreisförmigen Querschnitt ins Freie. Bis zum Rohr sei die Strömung verlustfrei, in dem Rohr sei die Strömung laminar.



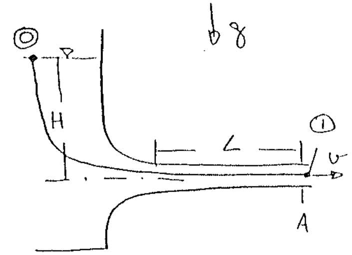
a) Berechnen Sie die mittlere Ausströmgeschwindigkeit v.

b) Wie verändert sich qualitativ die Ausströmgeschwindigkeit v bei Veränderung der Dichte des Fluids und bei Veränderung des Querschnittes des Rohres (Begründung)?

Gegeben: H, A, L, ρ, g, η

Hinweis: Der Rohrreibungsbeiwert λ für laminare Strömungen ist: $\lambda = \frac{64}{Re_D}$

2. Aufgabe



a) Bernoulli mit Verlusten von ⓪ → ①:

(3) $p_a + \rho g H = p_a + \frac{\rho}{2} v^2 + \Delta p_v$

(1) $\Delta p_v = \frac{\rho v^2}{2} \lambda \frac{L}{D} = \frac{\rho v^2}{2} \frac{64\eta}{\rho v D} \frac{L}{D} = \frac{32 v \eta L}{D^2}$ 1(Re)

$A = \frac{\pi D^2}{4} \Leftrightarrow D^2 = \frac{4A}{\pi}$

$\Rightarrow \rho g H = \frac{\rho}{2} v^2 + \frac{32 \eta L}{D^2} v = \frac{\rho}{2} v^2 + \frac{8 \eta L \pi}{A} v$

$\Leftrightarrow v^2 + \frac{16 \eta L \pi}{\rho A} v - 2 g H = 0$

(1) $\Leftrightarrow v = -\frac{8 \eta L \pi}{\rho A} \oplus \sqrt{\left(\frac{8 \eta L \pi}{\rho A}\right)^2 + 2 g H}$ $(v > 0 \,!)$

b) Mit zunehmender Dichte und Querschnittsfläche wird

(1) die Reynoldszahl der Strömung im Rohr größer

(1) → Rohrreibungsbeiwert nimmt ab

→ Verhältnis potentielle Energie zu Druckverlust wird größer

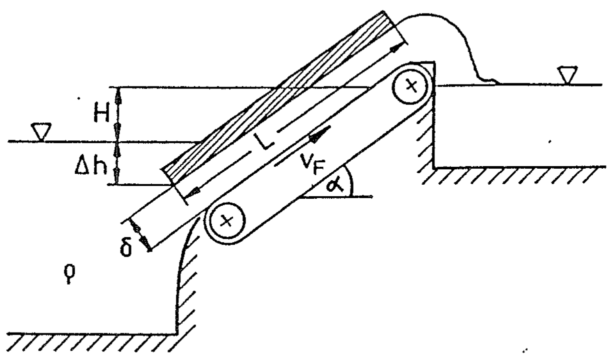
(1) (1) → Geschwindigkeit v wird größer.

4. Sep. 1991

95

4. Aufgabe (15 Punkte)

Ein Fließband mit der Breite B und Länge L soll, wie in der Skizze dargestellt, Öl von einem niedrigen auf ein höheres Niveau fördern. Die Zähigkeit des Öls sei η, die Dichte sei ρ. Das Fließband ist unter dem Winkel α gegenüber der Horizontalen geneigt.



a) Berechnen Sie das Geschwindigkeitsprofil in dem Spalt. Die Strömung sei ausgebildet.

b) Durch Erhöhung der beiden Ölstände (H bleibt konstant) kann die Höhe Δh verändert werden. Wie verändert sich die Antriebsleistung des Fließbandes bei sonst gleichen Parametern (Begründung)?

c) Geben Sie alle unabhängigen Größen an, die die Leistung beeinflußen und ermitteln Sie mit Hilfe des π-Theorems die Anzahl der Kennzahlen, die dieses Problem beschreiben.

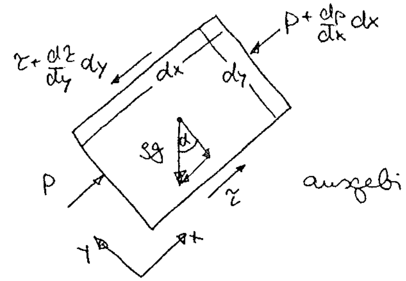
Gegeben: $H, L, B, \Delta h, \delta, \alpha, \rho, g, v_F, \eta$

Hinweis: Es sei $\frac{\rho v_F^2}{2} \ll \rho g \Delta h$

4. Aufgabe

2

a) Kräftebilanz am Volumenelement: ⇒ $-\frac{dp}{dx} - \frac{d\tau}{dy} - \rho g \sin\alpha = 0$

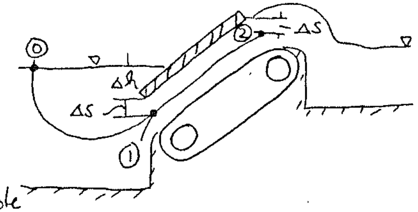


⇔ $\frac{d\tau}{dy} = -\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dx}$

⇔ $\tau = -\left(\rho g \sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right) y + C_1$

ausgebildete Strömung ⇒ $\frac{dp}{dx} = \text{const.}$

1



Bernoulli von ⓪ → ①:

$p_a + \rho g(\Delta h + \Delta s) = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}(1 + \zeta_e)$

Einlaufverluste

$v_1 = O(v_F)$

⇒ $p_1 \approx p_a + \rho g(\Delta h + \Delta s)$ mit $p_2 = p_a + \rho g \Delta s$ ⇒ $\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{\rho g \Delta h}{L}$ 1

1 ⇒ $\tau = -\left[\rho g\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\right] y + C_1 = -\eta \frac{du}{dy}$

1 ⇒ $u = \frac{1}{\eta}\left[\rho g\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\frac{y^2}{2} - C_1 y\right] + C_2$

Randbedingungen: $y = 0 \Rightarrow u = v_F \Rightarrow C_2 = v_F$

$y = \delta \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \frac{1}{\eta}\left[\rho g\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\frac{\delta^2}{2} - C_1 \delta\right] + v_F = 0$

2

⇔ $C_1 = \rho g\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\frac{\delta}{2} + \frac{v_F \eta}{\delta}$

⇒ $u(y) = \frac{\rho g \delta^2}{2\eta}\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\left(\frac{y^2}{\delta^2} - \frac{y}{\delta}\right) + v_F\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)$

1

b) Leistung $P = v_F(-\tau_w) B L$, $-\tau_w = \rho g\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\frac{\delta}{2} + \frac{v_F \eta}{\delta}$

⇒ Wenn Δh zunimmt, wird der Betrag der Wandschubspannung kleiner

⇒ nötige Leistung nimmt ab 2

c) $P = f(\rho, g, \delta, \alpha, \Delta h, \eta, v_F, L, B)$ ⇒ 10 Einflußgrößen 2

− 3 Grunddimensionen 1

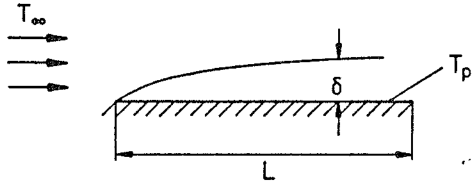
7 Kennzahlen 1

Sep. 1991 J

100.

5. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Fluid strömt über eine beheizte Platte. Die Temperatur des Fluids weit entfernt von der Platte sei T_∞, die der Platte T_p.



Die Temperaturverteilung in der Strömung wird durch folgende Erhaltungsgleichung beschrieben:

$$\rho c v \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T - p(\nabla \cdot \vec{v})$$

a) Für welche physikalische Größe stellt diese Gleichung die Erhaltungsgleichung dar und für welche Strömungen von welchen Fluiden ist die Gleichung gültig?

b) Ermitteln Sie für diese Gleichung Kennzahlen mit der Methode der Differentialgleichung.

c) Vereinfachen Sie die Gleichung für eine 2 dimensionale, stationäre, inkompressible Grenzschichtströmung ($\delta \ll L$) mit konstanten Stoffwerten.

Gegeben: Alle nötigen Referenzgrößen.

Hinweis: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla$

$\bar{Eu} = \frac{\Delta p}{\varrho v^2}$ $\quad Sr = \frac{l/v}{t}$

$Re = \frac{\varrho v l}{\eta}$ $\quad Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda}$

$\kappa = c_p/c_v$ $\quad Ma = \frac{v}{\sqrt{\kappa R T}}$ $\quad R = c_p - c_v$

$Ec = \frac{v^2}{c_p \frac{(T_W - T_\infty)}{\Delta T}}$

$K_3 = \frac{Eu}{Ec}\cdot\kappa$

$K_1 = Sr$

$K_2 = \frac{1}{Pr\cdot Re}\,\kappa = \frac{\eta\cdot\lambda}{\varrho v l\, \eta c_p}\cdot\frac{c_p}{c_v}$

5. Aufgabe

a) Die Gleichung ist die Energieerhaltungsgleichung (1) für kompressible (1) Strömungen, in denen Reibungseffekte (1) vernachlässigt werden. Die Gleichung gilt für ein ideales Gas mit konstanter spezifischer Wärmekapazität und Temperaturleitfähigkeit. (1)

dim.los Variablen — Ref.-Größe

b) $\bar\varrho = \frac{\varrho}{\varrho_\infty},\ \bar T = \frac{T-T_\infty}{T_p-T_\infty} = \frac{T-T_\infty}{\Delta T},\ \bar t = \frac{t}{\Delta t},\ \bar p = \frac{p}{\Delta p},\ \bar v = \frac{v}{u_\infty},\ \bar\nabla = \nabla L$ (1)

$\Rightarrow \varrho_\infty c_v \bar\varrho\left(\frac{\Delta T}{\Delta t}\frac{\partial \bar T}{\partial \bar t} + \frac{u_\infty}{L}\Delta T\, \bar{\vec v}\cdot\bar\nabla\bar T\right) = \frac{\lambda}{L^2}\Delta T\,\bar\nabla^2\bar T - \frac{\Delta p\, u_\infty}{L}\bar p(\bar\nabla\cdot\bar{\vec v})$ (1)

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\varrho_\infty u_\infty c_v \Delta T}{L}}\left(\frac{L}{u_\infty\Delta t}\bar\varrho\frac{\partial\bar T}{\partial\bar t} + \bar\varrho\,\bar{\vec v}\cdot\bar\nabla\bar T\right) = \frac{\lambda}{L^2}\Delta T\,\bar\nabla^2\bar T - \frac{\Delta p\, u_\infty}{L}\bar p(\bar\nabla\cdot\bar{\vec v})$

Achtung

$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{L}{u_\infty \Delta t}}_{K_1}\bar\varrho\frac{\partial\bar T}{\partial\bar t} + \bar\varrho\,\bar{\vec v}\cdot\bar\nabla\bar T = \underbrace{\frac{\lambda}{\varrho_\infty u_\infty L c_v}}_{K_2}\bar\nabla^2\bar T - \underbrace{\frac{\Delta p}{\varrho_\infty c_v\Delta T}}_{K_3}\bar p(\bar\nabla\cdot\bar{\vec v})$ (1)

z.B.: K_1, K_2, K_3 (1)

c) inkompressible Strömung: $\nabla\cdot\vec v = 0$, stationäre Str.: $\frac{\partial T}{\partial t}=0$

$\Rightarrow \varrho c_v\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\left(\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)$ (1)

dimensionslos machen, so daß Terme von der Ordnung $O(1)$ werden: $\bar x = \frac{x}{L},\ \bar y=\frac{y}{\delta},\ \bar u = \frac{u}{u_\infty},\ \bar v = \frac{v}{X},\ \bar T = \frac{T-T_\infty}{\Delta T}$. (1)

X: → Konti-Gl.: $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \Rightarrow \frac{u_\infty}{L}\underbrace{\frac{\partial\bar u}{\partial\bar x}}_{O(1)} + \frac{X}{\delta}\underbrace{\frac{\partial \bar v}{\partial\bar y}}_{O(1)} = 0 \Rightarrow X = \frac{\delta}{L}u_\infty$ (1)

$\Rightarrow \varrho c_v\left(\frac{u_\infty\Delta T}{L}\bar u\frac{\partial\bar T}{\partial\bar x} + \frac{\delta u_\infty}{L\,\delta}\Delta T\,\bar v\frac{\partial\bar T}{\partial\bar y}\right) = \lambda\left(\frac{\Delta T}{L^2}\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar x^2} + \frac{\Delta T}{\delta^2}\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar y^2}\right)$

$\Leftrightarrow \bar u \frac{\partial\bar T}{\partial\bar x} + \bar v\frac{\partial\bar T}{\partial\bar y} = \frac{\lambda L}{\varrho u_\infty\delta^2 c_v}\left(\underbrace{\frac{\delta^2}{L^2}}_{\ll 1}\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar x^2} \xrightarrow{} 0 + \frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar y^2}\right)$

$\Rightarrow \bar u\frac{\partial\bar T}{\partial\bar x} + \bar v\frac{\partial\bar T}{\partial\bar y} = \frac{\lambda L}{\varrho u_\infty\delta^2 c_v}\frac{\partial^2\bar T}{\partial\bar y^2}$ (1)

April 1991

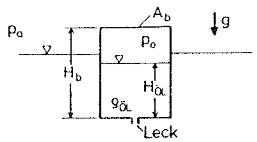
101

Klausur Strömungslehre I + II

25. März 1991

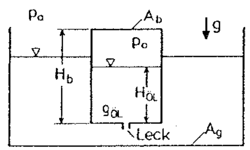
1. Aufgabe (12 Punkte)

Ein zylindrischer Druckbehälter der Höhe H_b und Masse m_b ist mit einem Öl der Dichte $\rho_{Öl}$ bis zur Höhe $H_{Öl}$ gefüllt. Darüber befindet sich Luft unter dem Druck p_o. Der Behälter schwimmt im Meer, es entsteht plötzlich ein Leck im Boden.



a) Bestimmen Sie das Ölvolumen, das bis zu dem Druckausgleich aus dem Druckbehälter austritt.

b) Der Druckbehälter schwimmt in einem Gefäß mit der Fläche A_g, bevor das Leck entsteht. Wie verändert sich das austretende Ölvolumen (Begründung)?



Gegeben: $H_b, H_{Öl}, A_b, A_g, p_o, m_b, g, p_a$

Hinweis: Die Luftmasse ist in dem Druckbehältergewicht enthalten, die Temperatur der Luft bleibt konstant und es gilt: $\frac{p_o A_b}{m_b g + p_a A_b} > 1$

Ein Ballon mit der Gesamtmasse m_B hat eine geschlossene Hülle, die ideal schlaff bis zum Erreichen des Volumens V_{max} ist. Ab dem Volumen V_{max} ist die Hülle ideal starr. Der Ballon steigt in einer Atmosphäre auf, in der die Temperaturverteilung

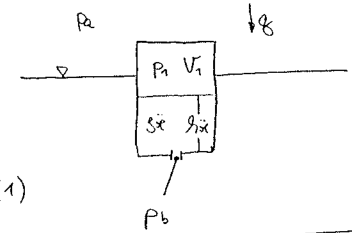
$$\frac{T}{T_o} = c \cdot z + 1, \quad \text{mit} \quad c = const.$$

herrscht.

c) Bestimmen Sie die maximale Steighöhe.

Gegeben: $m_B, R_L, T_o = T(z=0), p_o = p(z=0), V_{max}, g, c = const.$

Aufgabe 1:



a) Behälter schwimmt nach dem Druckausgleich:

$\Rightarrow p_b A_b = m_b g + \rho_{öl} h_{öl} A_b g + p_a A_b \quad (1)$

HGG im Behälter:

$\Rightarrow p_b = p_1 + \rho_{öl} h_{öl} g \quad (2)$

$m_L = const., \; T_L = const.$:

$\Rightarrow p_0 V_0 = p_1 V_1 \Leftrightarrow p_1 = p_0 \dfrac{H_b - H_{öl}}{H_b - h_{öl}} \quad (3)$

aus (1) − (3):

$\Rightarrow p_0 \dfrac{H_b - H_{öl}}{H_b - h_{öl}} + \rho_{öl} h_{öl} g = \dfrac{m_b g}{A_b} + \rho_{öl} h_{öl} g + p_a$

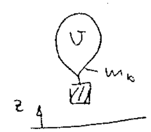
$\Leftrightarrow p_0 (H_b - H_{öl}) = \left(\dfrac{m_b g}{A_b} + p_a\right)(H_b - h_{öl})$

$\Rightarrow h_{öl} = H_b - \dfrac{p_0 A_b (H_b - H_{öl})}{m_b g + p_a A_b} \Rightarrow V_{öl} = (H_{öl} - h_{öl}) A_b = (H_b - H_{öl}) \left(\dfrac{p_0 A_b}{m_b g + p_a A_b} - 1\right) A_b$

b) Das austretende Ölvolumen bleibt gleich:

- da $V_{öl}$ unabhängig von der Dichte des umgebenden Mediums ist
- da der Verlauf des Bodendruckes p_b beim Ölaustritt gleich bleibt (Behälter schwimmt!).

c) Druckverlauf $p(z)$:



HGG in differentieller Form: $\dfrac{dp}{dz} = -\rho g$

ideale Gasgleichung: $\dfrac{p}{\rho} = RT$

Temperaturverlauf: $T = T_0 (c \cdot z + 1)$

$\Rightarrow \dfrac{dp}{p} = \dfrac{-g\,dz}{RT_0 (c \cdot z + 1)} \Leftrightarrow \ln p \Big|_{p_0}^{p} = \dfrac{-g}{RT_0 c} \ln (c \cdot z + 1) \Big|_0^z$

$\Leftrightarrow \dfrac{p}{p_0} = (c \cdot z + 1)^{\frac{-g}{RT_0 c}}$

Gleichgewicht bei $V = V_{max}$: $\rho V_{max} g = m_B g$; $\rho = \dfrac{p}{RT}$

$\Rightarrow \dfrac{p}{RT} V_{max} = m_B \Leftrightarrow \dfrac{p_0 (c \cdot z_{max} + 1)^{\frac{-g}{RT_0 c}}}{RT_0 (c \cdot z_{max} + 1)} = \dfrac{m_B}{V_{max}}$

$\Leftrightarrow z_{max} = \dfrac{1}{c} \left[\left(\dfrac{V_{max} p_0}{m_B R T_0} \right)^{\frac{RT_0 c}{g + RT_0 c}} - 1 \right]$

April 1991

V 7/4/

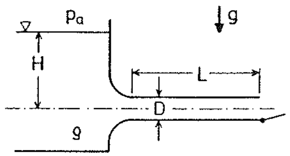
102

- April 1991

2. Aufgabe (12 Punkte)

Aus einem großen Reservoir strömt Wasser durch ein Rohr mit der Länge L und dem Durchmesser D ins Freie. Am Ende des Rohres befindet sich eine Klappe, die ab dem Zeitpunkt $t = 0$ so schließt, daß die Geschwindigkeit wie folgt abnimmt:

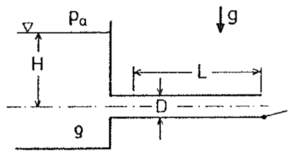
$$\frac{v}{v_o} = \frac{T_o}{t + T_o}, \quad \text{mit} \quad T_o > 0, \quad \text{und} \quad v_o = v(t = 0)$$



a) Skizzieren Sie den Druckverlauf im Rohr als Funktion der Zeit für $T_{o1} \ll 1, T_{o2} \gg 1$ sowie für T_{o3} mit $T_{o1} < T_{o3} < T_{o2}$.

b) Bestimmen Sie die Zeitkonstante T_o so, daß der Druck im Rohr p_{max} gerade nicht überschreitet.

c) Der gut gerundete Rohreinlauf wird durch einen scharfkantigen ersetzt:

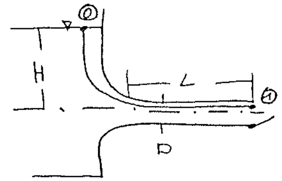


Wie muß nun die Zeitkonstante T_o verändert werden, damit im Rohr der Druck p_{max} wieder erreicht wird (Begründung)?

Gegeben: $H, L, D, g, p_{max} = p_a + 2\rho g H$

Hinweis: Der Durchmesser des Rohres D ist gegenüber der Höhe H vernachlässigbar.

Aufgabe 2:



a) instationärer Bernoulli: 0 → 1

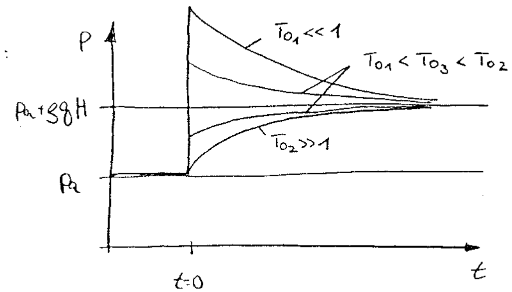
$$p_a + \rho g H = p(t) + \frac{\rho}{2} v^2(t) + \rho \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{v_0 T_0}{(t+T_0)^2}$$

$$\Rightarrow p(t) = p_a + \rho g H - \frac{\rho}{2} v_0^2 \left(\frac{T_0}{t+T_0}\right)^2 + \rho \frac{v_0}{T_0}\left(\frac{T_0}{t+T_0}\right)^2 \left(L + \frac{D}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow p(t) = p_a + \rho g H + \rho v_0 \left(\frac{T_0}{t+T_0}\right)^2 \left(\frac{L + D/\sqrt{2}}{T_0} - \frac{v_0}{2}\right)$$

p(t):



b) p_{max} bei $t=0$ und am Rohrende:

$$\Rightarrow p_{max} = p_a + 2\rho g H = p_a + \rho g H + \rho v_0 \left(\frac{L + D/\sqrt{2}}{T_0} - \frac{v_0}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \rho g H = \rho v_0 \left(\frac{L + D/\sqrt{2}}{T_0} - \frac{v_0}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow T_0 = \frac{L + D/\sqrt{2}}{\frac{v_0}{2} + \frac{gH}{v_0}} \qquad \text{Toricelli: } v_0 = \sqrt{2gH}$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{(L + D/\sqrt{2})}{\sqrt{2gH}}$$

c) v_0 wird um $\sqrt{gH}$ $\Rightarrow$ $T_{0c)} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{(L + D/\sqrt{2})}{\sqrt{2gH}}$

$\Rightarrow T_{0c)} < T_{0b)}$

Da v_0 kleiner wird, nimmt auch die Beschleunigung ab. Daher kann $T_{0c)}$ kleiner als $T_{0b)}$ gewählt werden.

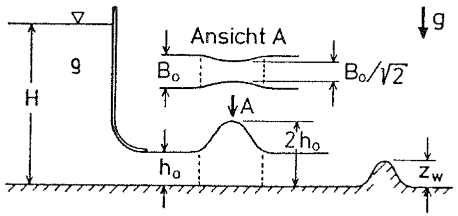
April 1991 A1/2

April 1991

103

3. Aufgabe (12 Punkte)

Aus einem großen Reservoir strömt Wasser in einen offenen Kanal der Breite B_o. In dem Kanal beträgt die Höhe des Wasserspiegels h_o. Der Kanal verengt sich an einer Stelle auf $\frac{B_o}{\sqrt{2}}$. An dieser Stelle wird die Höhe $2h_o$ gemessen. Nach der Verengung folgt eine Bodenwelle der Höhe z_w.



a) Bestimmen Sie die Höhe H des Wasserspiegels in dem Reservoir.

b) Skizzieren Sie sorgfältig den Verlauf der Spiegelhöhe nach der Verengung bis hinter die Bodenwelle (4 Möglichkeiten!)

c) Bestimmen Sie die Grenzhöhe z_{gr} der Bodenwelle, wenn zwischen der Verengung und der Bodenwelle ein Wassersprung steht.

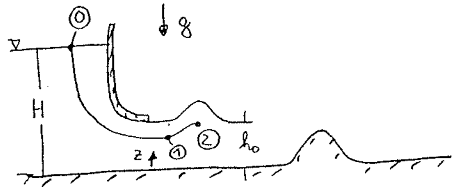
Gegeben: h_o, ~~$z_{gr} = \frac{2}{3}H_{min}$~~ $h_{gr} = \frac{2}{3}H_{min} = \sqrt[3]{\frac{\dot{Q}^2}{g B^2}}$

Hinweis: Das Verhältnis der Spiegelhöhen über einen Wassersprung ist:

$$\frac{h_1}{h_o} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2Fr_o^2} - \frac{1}{2}$$

wenn der Index 'o' den Zustand vor dem Sprung und '1' den Zustand nach dem Sprung bezeichnet, und Fr die Froude-Zahl ist.

Aufgabe 3:



a) Bernoulli von ⓪ → ①:

$p_a + \rho g H = p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2$

mit: $p_1 = p_a + \rho g (h_0 - z_1)$

$\Rightarrow p_a + \rho g H = p_a + \rho g (h_0 - z_1) + \rho g z_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \Leftrightarrow \rho g (H - h_0) = \frac{\rho}{2} v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(H - h_0)}$ (1

Konti: $v_2 \, 2h_0 \frac{B_0}{\sqrt{2}} = v_1 h_0 B_0 \Leftrightarrow v_2 = v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bernoulli von ① → ②: $\rho g h_0 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = \rho g 2h_0 + \frac{\rho}{2} v_2^2$

$\Bigg\} \; g h_0 = \frac{v_1^2}{4}$ (2)

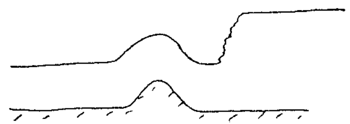
aus (1) + (2): $H = 3h_0$

b) $Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{2g(H - h_0)}{g h_0}} = 2 > 1 \Rightarrow$ schießender Zustand

Verlauf 1: nur schießend

Verlauf 2: Wassersprung zwischen Verengung und Bodenwelle

Verlauf 3: Wassersprung nach der Bodenwelle



Verlauf 4: wie Verlauf 2 + Übergang zum schießenden Zustand

c) Die Energiehöhe H_1 nach dem Wassersprung ist:

$H_1 = H_{min} + z_{gr}$ mit $H_{min} = \frac{3}{2} h_{gr} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\dot{Q}^2}{g B^2}}$; $\dot{Q} = v_1 h_0 B_0 = \sqrt{4 g h_0} \, h_0 B$

$H_1 = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_1 + \frac{\dot{Q}^2}{2 h_1^2 B_0^2 g} = h_1 + \frac{4 g h_0^3 B_0^2}{2 h_1^2 B_0^2 g} = h_1 + 2h_0 \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2$

$h_1 = h_0 \sqrt{\frac{1}{4} + 2Fr_0^2} - \frac{1}{2} = \left(\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2}\right) h_0$

$H_{min} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{4 g h_0^3 B_0^2}{g B_0^2}} = \frac{3}{2} h_0 \sqrt[3]{4}$

$\Rightarrow \underline{\underline{z_{gr} = H_1 - H_{min} = h_0 \left[\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} + \frac{2}{\left(\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{4} \right]}}$

April 1991

4/4/3