Musterlösung zur Klausur Strömungslehre

1. Aufgabe (10 Punkte)

a) Kräftegleichgewicht:

$$F_A = F_G \quad \Rightarrow \quad V_K \rho_W g = (m_B + m_S)g$$
$$\Rightarrow \quad m_B = V_K \rho_W - m_S \quad \Rightarrow \quad m_B = \frac{\pi D^2 H}{12}\rho_W - m_S$$
$$\Rightarrow \quad m_B = 162 \text{ kg}$$

b) Kräftegleichgewicht:

$$F_{A_{b)}} = F_G \quad \Rightarrow \quad (2V_K + V_{Zyl})\rho_W g = (m_B + m_S + m_Z)g$$
$$\Rightarrow \quad \left(2\frac{\pi D^2 H}{12} + \frac{\pi d^2 h}{4}\right)\rho_W = m_B + m_S + m_Z$$
$$\Rightarrow \quad m_Z = \frac{\pi}{4}\left(\frac{2D^2 H}{3} + d^2 h\right)\rho_W - \frac{\pi D^2 H}{12}\rho_W + m_S - m_S$$
$$\Rightarrow \quad m_Z = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D^2 H}{3} + d^2 h\right)\rho_W \quad \Rightarrow \quad m_Z = 360 \text{ kg}$$

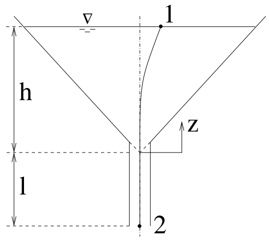
c) Kräftegleichgewicht:

$$F_A = F_G + F_p \qquad \text{mit} \quad F_p = \frac{\pi d^2}{4}(p_a + \rho_W g(L + 2H))$$
$$\Rightarrow \quad 2V_K \rho_W g = (m_B + m_S + m_Z)g + \frac{\pi d^2}{4}(p_a + \rho_W g(L + 2H))$$
$$\Rightarrow \quad m_Z = \frac{2\pi D^2 H}{12}\rho_W - \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{p_a}{g} + \rho_W(L + 2H)\right) - m_B - m_S$$
$$\Rightarrow \quad m_Z = \frac{\pi D^2 H}{12}\rho_W - \frac{\pi d^2}{4}\left(\frac{p_a}{g} + \rho_W(L + 2H)\right)$$
$$\Rightarrow \quad m_Z = -4058 \text{ kg}$$

keine Masse nötig; allein der Wasserdruck reicht aus

d) Ja, es ist möglich, dass die Boje sinkt, da das von der Boje verdrängte Wasservolumen immer kleiner wird, was bedeutet, dass die Auftriebskraft F_A abnimmt.

2. Aufgabe (11 Punkte)



a) Bernoulli von 1 nach 2:

$$p_a + \rho g h + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_a - \rho g l + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \mathrm{d}s$$

$$\text{mit} \quad \frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 100 \quad \Rightarrow \quad A_1 >> A_2 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 << v_2^2$$

$$\Rightarrow \quad \rho g(h+l) = \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} \mathrm{d}s \qquad (1)$$

Konti:

$$vA = v_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad v(z) = v_2 \frac{A_2}{A(z)} \qquad (2)$$

aus (1) und (2):

$$\Rightarrow \quad \rho \int_1^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(v_2 \frac{A_2}{A(z)}\right) \mathrm{d}s + \frac{\rho}{2} v_2^2 = \rho g(h+l) \qquad \text{mit} \quad \mathrm{d}s = -\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \quad \rho \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} \int_{h/10}^{h} \frac{A_2}{A(z)} \mathrm{d}z + \rho \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}\left(l + \frac{h}{10}\right) + \frac{\rho}{2} v_2^2 = \rho g(h+l)$$

$$\text{Nebenrechnung:} \quad \int_{h/10}^{h} \frac{A_2}{A(z)} \mathrm{d}z = \int_{h/10}^{h} \left(\frac{rh}{Rz}\right)^2 \mathrm{d}z = -\left[\left(\frac{rh}{R}\right)^2 \frac{1}{z}\right]_{h/10}^{h} = 0,09h$$

$$\Rightarrow \quad \rho g(h+l) = \frac{\rho}{2} v_2^2(t) + \rho \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}(l + 0,19h)$$

$$\text{für} \quad t = 0 \quad : \quad v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = \frac{g(h+l)}{l + 0,19h}$$

b) aus a):

$$\Rightarrow \quad g(h+l) - \frac{v_2^2}{2} = \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}(l + 0,19h)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}t = (l + 0,19h) \frac{2\mathrm{d}v_2}{2g(h+l) - v_2^2}$$

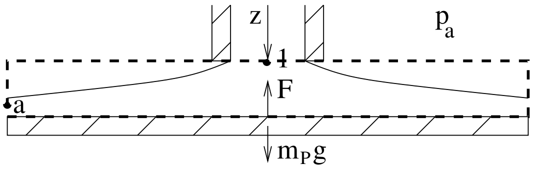
$$\text{stationäre Endgeschwindigkeit:} \quad v_{2,\text{stat.}} = \sqrt{2g(h+l)}$$

$$\text{da} \quad v_2(t) < v_{2,\text{stat.}} \quad \Rightarrow \quad \text{Integral für} \quad |x| < a$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = \left[\frac{l + 0,19h}{\sqrt{2g(h+l)}} \ln \frac{\sqrt{2g(h+l)} + v_2}{\sqrt{2g(h+l)} - v_2}\right]_0^{0,9\sqrt{2g(h+l)}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta T = \frac{l + 0,19h}{\sqrt{2g(h+l)}} \ln 19$$

3. Aufgabe (10 Punkte)



a) Impulsbilanz in z-Richtung:

$$-\rho v_1^2 \pi R_S^2 = m_P g - F \qquad \left(\text{Druck } p_a \text{ herrscht überall} \quad \Rightarrow \quad \sum F_P = 0\right)$$

Bernoulli von 1 nach a:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g h_1 = p_a + \frac{\rho}{2} v_a^2 \qquad \text{mit} \quad p_1 = p_a \quad \text{und} \quad \rho g h_1 << \frac{\rho}{2} v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_a$$

Konti:

$$v_1 \pi R_S^2 = \frac{\dot m}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{\dot m}{\rho \pi R_S^2} \quad \Rightarrow \quad F = m_P g + \frac{\dot m^2}{\rho \pi R_S^2} \quad \text{(mit Impuls)}$$

$$v_1 \pi R_S^2 = v_a 2\pi R_P h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{R_S^2}{2 R_P} \quad \text{(mit Bernoulli)}$$

b) Konti:

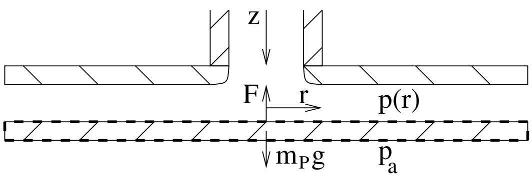
$$\dot m = \rho 2\pi R_P H v(R_P) = \rho 2\pi r H v(r) \quad \text{für} \quad R_S \le r \le R_P$$

$$\Rightarrow \qquad v(r) = \frac{\dot m}{\rho 2\pi H r} \quad ; \quad v(R_P) = \frac{\dot m}{\rho 2\pi H R_P}$$

Bernoulli:

$$p(r) + \frac{\rho}{2} v^2(r) = p_a + \frac{\rho}{2} v^2(R_P) \quad \text{für} \quad R_S \le r \le R_P$$

$$\Rightarrow \qquad p(r) = p_a + \frac{\rho}{2}\left(v^2(R_P) - v^2(r)\right) \quad \Rightarrow \quad p(r) = p_a + \frac{\dot m^2}{\rho 8 \pi^2 H^2}\left(\frac{1}{R_P^2} - \frac{1}{r^2}\right)$$



c) Impulsbilanz in z-Richtung um die Platte:

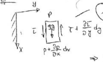
$$0 = -F + m_P g + \int_0^{R_P} \left(p(r) - p_a\right) 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$\Rightarrow \qquad F = m_P g + \int_0^{R_S} (c_1 - 1) p_a 2\pi r \mathrm{d}r + \int_{R_S}^{R_P} \left(c_3 - 1 - c_2 \frac{R_P^4}{H^2 r^2}\right) p_a 2\pi r \mathrm{d}r$$

$$\Rightarrow \qquad F = \underbrace{m_P g + (c_1 - 1) p_a \pi R_S^2 + (c_3 - 1) p_a \pi (R_P^2 - R_S^2)}_{K_1} - \frac{1}{H^2} \underbrace{c_2 p_a^2 \pi R_P^4 \ln \frac{R_P}{R_S}}_{K_2}$$

$$\Rightarrow \qquad F = 0 = K_1 - K_2 \frac{1}{H^2} \quad \Rightarrow \quad H = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$$

Afg. 4



1 $\tau dx - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right) dx + p dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx\right) dy + \rho g \, dx \, dy = 0$

$\Rightarrow -\frac{\partial \tau}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \Leftrightarrow \frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g$ 1

$\Rightarrow \tau(y) = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g\right) y + C_1$

1. RB: $\tau(y = B) = 0 \Rightarrow C_1 = -2\rho g \cdot B$ (mit $\frac{\partial p}{\partial y} = -\rho g$)

$\Rightarrow \tau(y) = 2\rho g (y - B)$ 1

Bingham Fluid: $-\eta \frac{du}{dy} - \tau_0 = \tau(y)$

$\Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\eta}\left[2\rho g (y - B) + \tau_0\right]$

$u(y) = -\frac{1}{\eta}\left[2\rho g \, y\left(\frac{y}{2} - B\right) + \tau_0 y + C_2\right]$

2. RB: $u(y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ 1

$\Rightarrow u(y) = -\frac{1}{\eta}\left[2\rho g\left(\frac{y^2}{2} - By\right) + \tau_0 y\right]$

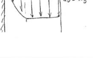
Gültigkeitsbereich:

$\tau(y_0) = -\tau_0 = 2\rho g (y_0 - B) \Rightarrow y_0 = \frac{-\tau_0}{2\rho g} + B$ 1

$u(y_0) = -\frac{1}{\eta}\left[-\frac{\tau_0^2}{4\rho g} - B^2 \rho g + \tau_0 B\right]$

$\Rightarrow u(y) = \begin{cases} -\frac{1}{\eta}\left[2\rho g\left(\frac{y^2}{2} - By\right) + \tau_0 y\right] & \text{für } 0 \le y \le y_0 \\ \frac{1}{\eta}\left[\frac{\tau_0^2}{4\rho g} + B^2 \rho g - \tau_0 B\right] & \text{für } y_0 \le y \le B \end{cases}$ 1

b) $u_B = u_0 = \frac{1}{\eta}\left(\frac{\tau_0^2}{4\rho g} + B^2 \rho g - \tau_0 B\right)$ s.o.



1

c) $\frac{\dot{Q}}{T} = \int_0^{y_0} -\frac{1}{\eta}\left[2\varrho g\left(\frac{y^2}{2} - By\right) + \tau_0 y\right] dy + \int_{y_0}^{B} u_0 \, dy$ (1)

mit $\tau_0 = B\varrho g$

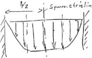
$\Rightarrow u(y) = \begin{cases} -\frac{1}{\eta}\left(\varrho g y^2 - B\varrho g y\right) & 0 \le y \le y_0 \\ \frac{1}{\eta} \cdot \frac{B^2}{4} \varrho g & y_0 \le y \le B \end{cases}$ (1)

$y_0 = \frac{B}{2}$

$\Rightarrow \frac{\dot{Q}}{T} = -\frac{1}{\eta}\left[\varrho g \frac{y^3}{3} - B\varrho g \frac{y^2}{2}\right]_0^{B/2} + \frac{1}{\eta}\left[\frac{B^2}{4}\varrho g y\right]_{B/2}^{B}$

$= \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{\eta} \varrho g B^3$ (1)

d) $\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{d)} > \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{a-c)}$



(1)

oder ⇕ (1)

[Der Betrag des Druckgradienten muß steigen, da an der 2. Wand zusätzlich Reibung entsteht, die überwunden werden muß.]

5. Aufgabe (10 Punkte)

a) Auf Referenzgrößen bezogene dimensionslose Größen:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}\ , \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{L/\sqrt{Re}}\ , \quad \bar{u} = \frac{u}{u_\infty}\ , \quad \bar{v} = \frac{v}{u_\infty/\sqrt{Re}}\ ,$$
$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}\ , \quad \bar{T} = \frac{T}{T_\infty}\ , \quad \bar{p} = \frac{p}{p_{ref}}$$

Energiegleichung in dimensionsloser Form:

$$\rho_\infty c_p \frac{u_\infty T_\infty}{L}\bar{\rho}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) = \frac{u_\infty p_{ref}}{L}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}\right) + \lambda\frac{T_\infty}{L^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + Re\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$
$$+\eta\frac{u_\infty^2}{L^2}\left[2\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \sqrt{Re}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right)\right]$$

Grenzschichtannahmen: Größenordnungsabschätzung mit $Re >> 1$ und $\partial\bar{p}/\partial\bar{y} = 0$

$$\rho_\infty c_p \frac{u_\infty T_\infty}{L}\bar{\rho}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) = \frac{u_\infty p_{ref}}{L}\bar{u}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \lambda\frac{T_\infty}{L^2}Re\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \eta\frac{u_\infty^2}{L^2}\left(\sqrt{Re}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)^2$$

Multiplikation mit $L/(u_\infty p_{ref})$

$$\frac{\rho_\infty c_p T_\infty}{p_{ref}}\bar{\rho}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) = \bar{u}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda T_\infty}{p_{ref}u_\infty L}Re\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\eta u_\infty}{p_{ref}L}Re\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)^2$$

b) Aus a) ergeben sich neben der Reynolds Zahl folgende Kennzahlen:

$$K_1 = \frac{\rho_\infty c_p T_\infty}{p_{ref}}$$
$$K_2 = \frac{\lambda T_\infty}{p_{ref}u_\infty L}Re$$
$$K_3 = \frac{\eta u_\infty}{p_{ref}L}Re \quad (\text{mit z.B.} \quad p_{ref} = \rho_\infty u_\infty^2 \quad \Rightarrow \quad K_3 = 1)$$

c) Mit z. B. $p_{ref} = \rho_\infty u_\infty^2$

$$K_1 = \frac{c_p T_\infty}{u_\infty^2} = \frac{\gamma R T_\infty}{(\gamma-1)u_\infty^2} = \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2}$$
$$K_2 = \frac{\lambda T_\infty}{\rho_\infty u_\infty^3 L}Re = \frac{\lambda}{c_p\eta}\,\frac{c_p T_\infty}{u_\infty^2}\,\frac{\eta}{\rho_\infty u_\infty L}Re = \frac{1}{Pr}\,K_1$$
$$K_3 = 1$$

[Mit z.B. $p_{ref} = p_\infty$ käme noch die Euler Zahl hinzu!]

6. Aufgabe (14 Punkte)

a) Die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ setzt sich zusammen aus einer Parallelströmung (für den Wasserstrom), einem Dipol (für die Laterne) und einer Senke (für den Abfluss).

$$F(z) = u_\infty z \; + \; \frac{M}{2\pi(z+a)} \; - \; \frac{E}{2\pi} \ln(z)$$

$$\Rightarrow \quad F(z) = u_\infty(x+iy) \; + \; \frac{M((x+a)-iy)}{2\pi((x+a)^2+y^2)} \; - \; \frac{E}{2\pi} \ln re^{i\varphi}$$

$$F(z) = \Phi + i\Psi \quad \text{mit} \quad z = re^{i\varphi} \quad \text{und} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \varphi = \arctan(y/x)$$

$$\Rightarrow \quad \Phi = u_\infty x \; + \; \frac{M(x+a)}{2\pi((x+a)^2+y^2)} \; - \; \frac{E}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Psi = u_\infty y \; - \; \frac{My}{2\pi((x+a)^2+y^2)} \; - \; \frac{E}{2\pi} \arctan(y/x)$$

b) Mit $u = \partial\Phi/\partial x$ (bzw. $= \partial\Psi/\partial y$) und $v = \partial\Phi/\partial y$ (bzw. $= -\partial\Psi/\partial x$) oder mit $\mathrm{d}F/\mathrm{d}z = \bar{w} = u - iv$

$$u(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \cdots = u_\infty + \frac{M}{2\pi}\,\frac{y^2-(x+a)^2}{((x+a)^2+y^2)^2} - \frac{E}{2\pi}\,\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \cdots = -\frac{M}{2\pi}\,\frac{2(x+a)y}{((x+a)^2+y^2)^2} - \frac{E}{2\pi}\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

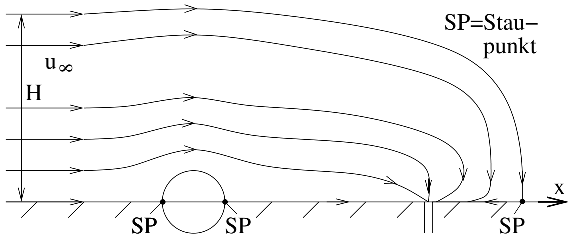
c) Nur Kreiszylinderumströmung: Parallelströmung und Dipol; Radius R bedeutet Staupunkt bei $(x', y') = (R, 0)$

$$u(x',y') = u_\infty + \frac{M}{2\pi}\,\frac{y'^2 - x'^2}{(x'^2+y'^2)^2} \quad \Rightarrow \quad u(R,0) = u_\infty - \frac{M}{2\pi}\,\frac{R^2}{R^4}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = u_\infty - \frac{M}{2\pi}\,\frac{1}{R^2} \quad \Rightarrow \quad M = 2\pi R^2 u_\infty$$

Konti: $\quad E = 2Hu_\infty$

d) Stromlinienbild



e) Staupunkt(e) (x_S, y_S) bei $u = 0$ und $v = 0$

$$E = 2Hu_\infty \quad \text{und} \quad M = 0$$

mit b) $\quad \Rightarrow \quad v = 0 \quad \Rightarrow \quad y_S = 0$

mit b) $\quad \Rightarrow \quad u = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\infty - \dfrac{E}{2\pi}\,\dfrac{x_S}{x_S^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_S = \dfrac{H}{\pi}$

7. Aufgabe (11 Punkte)

a) Randbedingungen:

1. R.B.: $y/\delta = 0 \quad : \quad u/u_\infty = 0,2 \quad (1)$
2. R.B.: $y/\delta = 1 \quad : \quad u/u_\infty = 1 \quad (2)$
3. R.B.: $y/\delta = 0 \quad : \quad \partial^2 u/\partial y^2 = 0 \quad (3)$
4. R.B.: $y/\delta = 1 \quad : \quad \partial u/\partial y = 0 \quad (4)$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{llllll} 0,2 & = a_0 & & & \\ 1 & = a_0 & +a_1 & +a_2 & +a_3 \\ 0 & = & & 2a_2 & \\ 0 & = & a_1 & +2a_2 & +3a_3 \end{array} \right|$$

$$\ldots \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{lcl} a_0 & = & 0,2 \\ a_1 & = & 1,2 \\ a_2 & = & 0 \\ a_3 & = & -0,4 \end{array} \right|$$

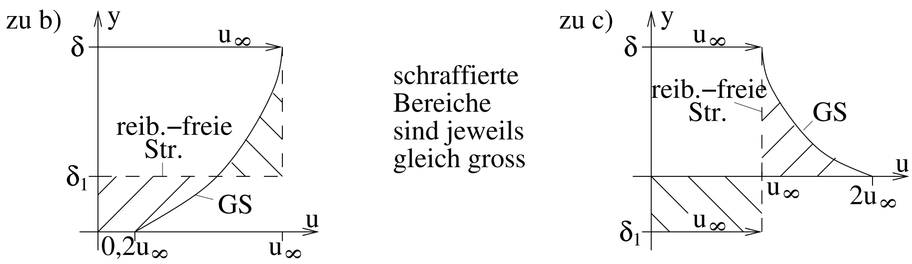
$$\Rightarrow \quad \frac{u}{u_\infty} = 0,2 + 1,2\frac{y}{\delta} - 0,4\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

b)

$$\delta_1 \ := \ \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) \mathrm{d}\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta_1}{\delta} = \left[0,8\frac{y}{\delta} - \frac{1,2}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \frac{0,4}{4}\left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta_1}{\delta} = 0,3$$



c) δ_1/δ wird kleiner, hier sogar negativ

d) Mit dieser Impulsgleichung kann der Fall A nicht analysiert werden, da im Fall A der Mittelwert $\bar{u}$ zeitabhängig ist, aber der Term $\partial\bar{u}/\partial t$ nicht in der Gleichung berücksichtigt wird.

8. Aufgabe (12 Punkte)

a)

$$A_1\rho_1 u_1 = A_2\rho_2 u_2 \quad \text{(Konti)} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{u_1}{u_2}$$

$$\text{mit} \quad \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1}{\sqrt{\gamma R T_1}}\frac{\sqrt{\gamma R T_2}}{u_2}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad \text{(Hinweis)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{\gamma-1}} \quad \text{mit} \quad \frac{T_1}{T_0}\frac{T_0}{T_2} \quad \text{aus Hinweis}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{A_2}{A_1} = \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad \Rightarrow \quad \frac{A_2}{A_1} = 0,1694$$

b) Ruhedruck p_0

$$\frac{p_0}{p_1} = \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \Rightarrow \quad p_0 = \rho_1 R T_1\left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \text{mit Annahme id. Gas:} \quad p_1 = \rho_1 R T_1$$

$$\Rightarrow \quad p_0 = \rho_1 R T_1\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \Rightarrow \quad p_0 = 2,733\cdot 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

Massenstrom $\dot m$

$$\dot m = A_1\rho_1 u_1 \quad \Rightarrow \quad \dot m = A_1\rho_1 M_1\sqrt{\gamma R T_1} \quad \Rightarrow \quad \dot m = 23,29\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}}$$

c)

$$\frac{\rho_4}{\rho_3} = \frac{(\gamma+1)M_3^2}{(\gamma-1)M_3^2+2} \quad \text{(Hinweis)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_4}{\rho_3}\frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}M_3^2 + \frac{\rho_4}{\rho_3}\frac{2}{(\gamma+1)} = M_3^2$$

$$\Rightarrow \quad M_3^2 = \frac{\rho_4}{\rho_3}\frac{2}{(\gamma+1)}\frac{1}{1-\frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}\frac{\rho_4}{\rho_3}} \quad \Rightarrow \quad M_3 = 4,05$$

Konti über den Stoß

$$\rho_3 u_3 = \rho_4 u_4 \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_4}{\rho_3} = \frac{u_3}{u_4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_4}{\rho_3} = \frac{u_3^2}{u_3 u_4} \quad \Rightarrow \quad \frac{\rho_4}{\rho_3} = \frac{u_3^2}{c^{*2}} \quad \text{(Hinweis)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\rho_4}{\rho_3} = M_3^{*2} \quad \Rightarrow \quad M_3^* = 2,145 \quad \text{analog} \quad \frac{\rho_3}{\rho_4} = M_4^{*2} \quad \Rightarrow \quad M_4^* = 0,466$$

$$M_4^2 = \frac{c_4^{*2}}{c_4^2}M_4^{*2} \quad \Rightarrow \quad M_4^2 = \frac{T_4^*}{T_0}\frac{T_0}{T_4}M_4^{*2} \quad \Rightarrow \quad M_4^2 = \frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_4^2\right)M_4^{*2}$$

$$\Rightarrow \quad M_4^2\left(1-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}M_4^{*2}\right) = \frac{2M_4^{*2}}{\gamma+1} \quad \Rightarrow \quad M_4 = M_4^*\sqrt{\frac{2}{(\gamma+1)-(\gamma-1)M_4^{*2}}}$$

$$\Rightarrow \quad M_4 = 0,433$$