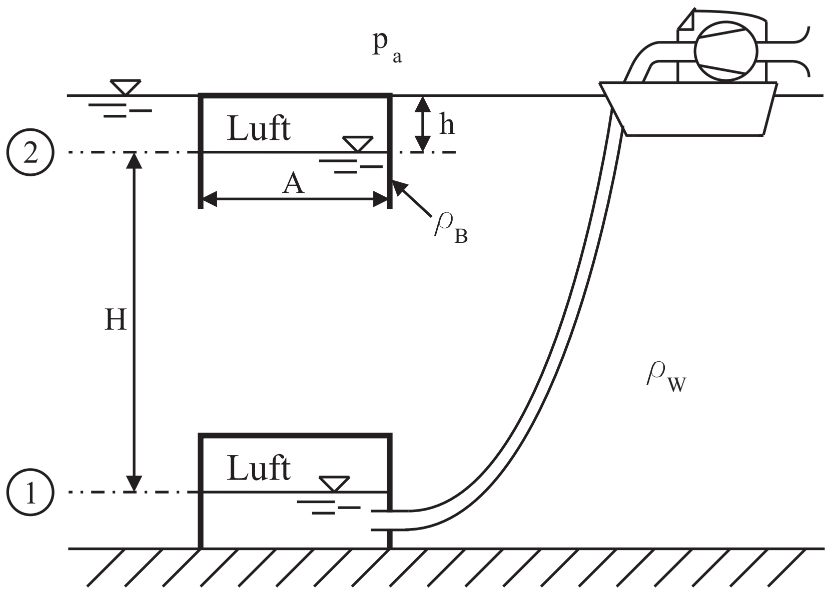
....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

10. 03. 2010

1. Aufgabe (9 Punkte)

Ein unten offener Behälter (Gewicht G, Grundfläche A, Dichte ρ_B), der vollständig mit Wasser gefüllt ist, liegt auf dem Boden eines Sees. Durch Einpumpen von Luft soll er gehoben werden. Dabei entspricht die Lufttemperatur der des umgebenden Wassers T_W.



a) Bestimmen Sie die Luftmasse, die eingepumpt werden muss, damit der Behälter gerade über dem Boden des Sees schwebt (Zustand 1). Das Wasser im Behälter kann über die Auflagefläche zum Boden hin entweichen.

Ein vernachlässigbarer Drucküberschuss lässt den Behälter aufsteigen.

b) Bestimmen Sie die Luftmasse, die beim Aufsteigen abgelassen werden muss, damit der Behälter gerade unter der Wasseroberfläche schwebt (Zustand 2). Betrachten Sie bei der Rechnung nur den Anfangs- und Endzustand.

c) Nachts sinkt die Wassertemperatur T_W und somit auch die Temperatur der eingeschlossenen Luft. Wie verhält sich der Behälter (Zustand 2) gegenüber der Wasseroberfläche? Erläutern Sie dies kurz!

Gegeben:

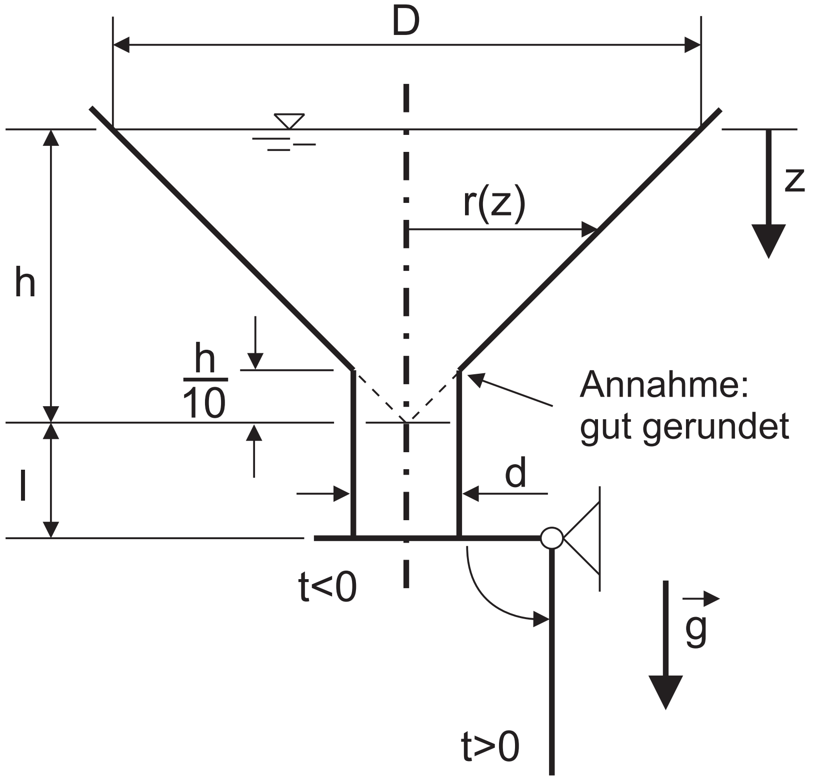
$G, \quad \rho_W, \quad \rho_B, \quad g, \quad p_a, \quad H, \quad h, \quad R, \quad T_W$

Hinweis:

Vernachlässigen Sie das Gewicht der eingepumpten Luft gegenüber dem Behältergewicht.

2. Aufgabe (9 Punkte)

Der Auslauf eines mit Wasser gefüllten, kreisförmigen Trichters wird zum Zeitpunkt t = 0 freigegeben. Der Trichter wird für t > 0 nachgefüllt, so dass sich die Höhe des Wasserspiegels nicht ändert.



Bestimmen Sie

a) die Beschleunigung, die auf ein Fluidteilchen am Auslauf zum Zeitpunkt t = 0 wirkt,

b) die Zeit ΔT, in der die Strömung am Auslauf 90% ihrer stationären Endgeschwindigkeit erreicht.

Gegeben:

$g, \quad h, \quad l, \quad D = 10d$

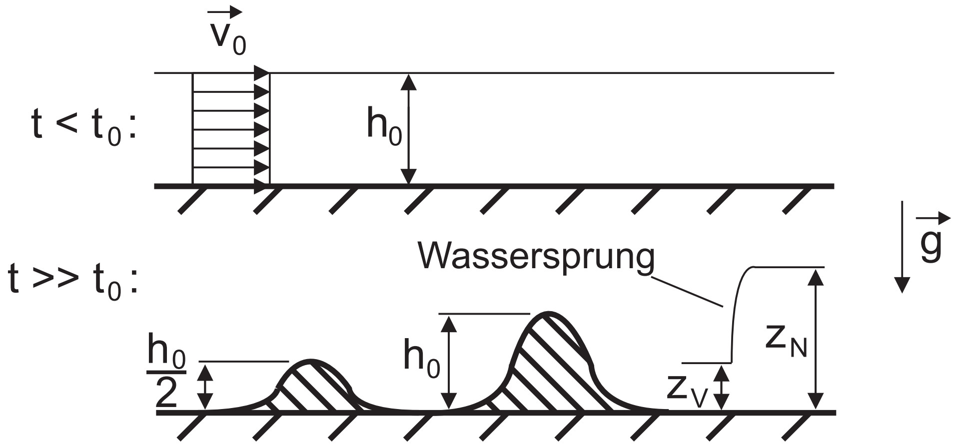
Hinweis:

Der Übergang an der Stelle $z = \dfrac{9}{10}h$ kann als gut gerundet angenommen werden.

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{a+x}{a-x} & \text{für} \quad |x| < a \\ \dfrac{1}{2a} \ln \dfrac{x+a}{x-a} & \text{für} \quad |x| > a \end{cases}$$

3. Aufgabe (13 Punkte)

Ein Kanal der Breite B wird mit der Geschwindigkeit v_0 bei einer Spiegelhöhe h_0 durchströmt, wobei $Fr < 1$ ist. Zum Zeitpunkt t_0 werden zwei Hindernisse mit den Höhen $h_0/2$ und h_0 hintereinander positioniert. Es stellt sich für $t \gg t_0$ bei strömendem Zustand in der Anströmung wieder eine stationäre Strömung ein. Hinter dem zweiten Hindernis steht ein Wassersprung.



a) Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf der Spiegelhöhe für $t \gg t_0$ und in einem Energiehöhendiagramm $H = f(z)$ den zugehörigen Verlauf der Energiehöhen. (Es ist keine Berechnung erforderlich; tragen Sie die charakteristischen Größen ein.)

b) Berechnen Sie die Energiehöhe H_V vor dem Wassersprung.

c) Leiten Sie den Energieverlust $\Delta H = H_N - H_V$ über den Wassersprung als alleinige Funktion der Spiegelhöhen unmittelbar vor und hinter dem Wassersprung z_V und z_N ab. Illustrieren Sie Ihre Herleitung mittels einer ausführlichen Skizze.

Gegeben:

$h_0, \quad v_0, \quad g$

Hinweise:

Die Strömung ist reibungsfrei.

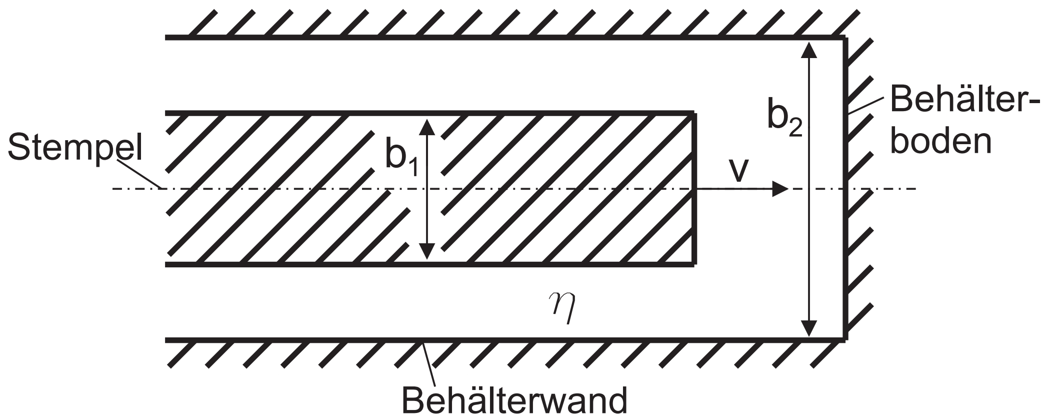
Die Zeichnungen gehören auf die Lösungsblätter! Zeichnungen in der Aufgabenstellung werden **NICHT** gewertet!

$$z_{gr} = \left(\frac{\dot{V}^2}{gB^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$H = z + \frac{\dot{V}^2}{2gz^2B^2}.$$

4. Aufgabe (14 Punkte)

Ein ebener Stempel mit der Breite b_1 bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit v in einen seitlich offenen Behälter der Breite b_2 hinein. Die Strömung kann als zweidimensional angenommen werden, d.h. die Ausdehnung der Konfiguration normal zur Skizzenebene ist unendlich. Der Behälter ist mit Öl der Zähigkeit η gefüllt. Die Strömung sei ausgebildet und laminar.



Bestimmen Sie

a) die Geschwindigkeitsverteilung abhängig vom Druckverlust $\frac{dp}{dx}$ und den gegebenen Größen im Spalt zwischen Stempel und Behälterwand. Nehmen Sie an, dass nur Reibungs- und Druckkräfte wirken sollen!

b) den Druckverlust $\frac{dp}{dx}$ und setzen Sie diesen in die Geschwindigkeitsverteilung ein, so dass diese nur noch von den gegebenen Größen abhängt. Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung im Spalt zwischen Stempel und Behälterwand.

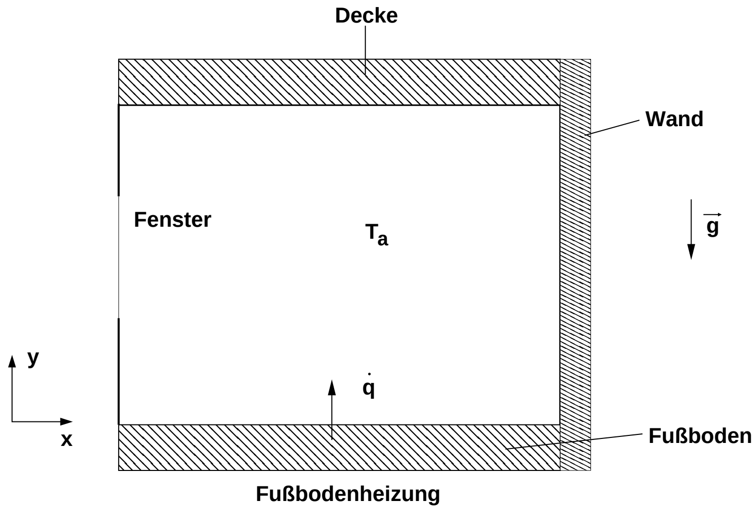
c) die Schubspannungen am Stempel und an der Behälterwand und skizzieren Sie die Schubspannungsverteilung im Spalt.

Gegeben:

$\eta, \quad v, \quad b_1, \quad b_2$

5. Aufgabe (9 Punkte)

Betrachten Sie die folgende Fragestellung im Rahmen der Ähnlichkeitstheorie:
In einem Wohnhaus soll eine Fußbodenheizung ausgelegt werden. Dazu ist es notwendig, die Verteilung der Temperatur in den Wohnräumen und die Wärmeübergänge an den Wänden und den Decken zu kennen.



Die Gleichungen für die entstehende freie Konvektionsströmung an senkrechten Wänden lauten

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\
u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -g\frac{1}{T}(T - T_a) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y} &= a\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}
\end{aligned}
$$

Die Größen u, v bezeichnen die Geschwindigkeitskomponenten in x- und y-Richtung, T die veränderliche Temperatur und T_a die Raumtemperatur. Die Temperaturleitfähigkeit $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ und die kinematische Viskosität ν können als konstant vorausgesetzt werden.

a) Bestimmen Sie, unter Berücksichtigung der für die sich einstellende Zirkulationsströmung charakteristischen Geschwindigkeit u_{ref}, die Kennzahlen, die das betrachtete Problem beschreiben mit der Methode der Differentialgleichungen.

b) Führen Sie die gefundenen Kennzahlen auf Ihnen bekannte Ähnlichkeitsparameter der Strömungsmechanik zurück.

c) Welche Bedeutung habe diese Kennzahlen?

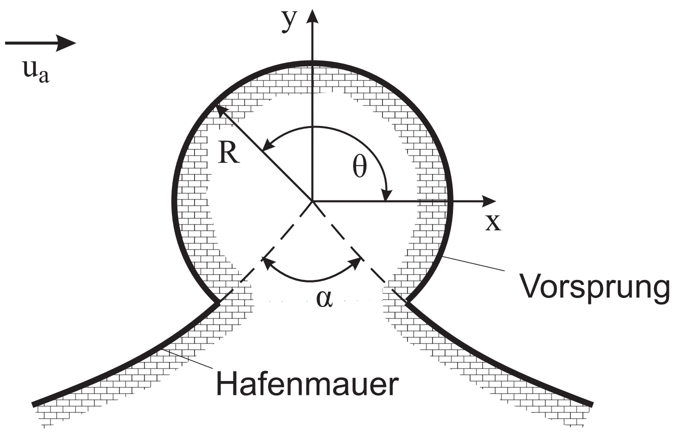
Gegeben:

u_{ref}, alle weiteren notwendigen Referenzgrößen

6. Aufgabe (13 Punkte)

a) Betrachten Sie die reibungslose Umströmung eines Kreiszylinders. Beschreiben Sie kurz unter Betrachtung der sich ausbildenden Staupunkte, wie sich das Strömungsfeld ändert, wenn der Zylinder in Rotation versetzt wird. Unterscheiden Sie dabei qualitativ drei charakteristische Zustände für die sich ergebende Zirkulation ($\Gamma < 0$).

Im Folgenden wird eine Hafeneinfahrt betrachtet, die teilweise eine kreiszylindrische Kontur aufweist. Dieser Teil der Hafeneinfahrt dient als Fundament für einen Leuchtturm. Die Umströmung des Vorsprungs soll potentialtheoretisch beschrieben werden.



b) Wählen Sie aus den gegebenen komplexen Potentialfunktionen diejenigen aus, die die Umströmung des Mauervorsprungs beschreiben und geben Sie die resultierende komplexe Potentialfunktion an. Skizzieren Sie unter Angabe der Konturstromlinie und der Staupunkte das Stromlinienbild dieser Strömung.

c) Berechnen Sie die Konstanten der die Hafenmauerumströmung beschreibenden komplexen Potentialfunktion als Funktion der gegebenen Größen so, dass die potentialtheoretische Umströmung des kreiszylindrischen Vorsprungs nachgebildet wird.

d) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilung der Wasserspiegelhöhe entlang der Kontur des Mauervorsprunges. Die Wasserhöhe in großem Abstand zur Mauer sei H_∞.

Gegeben:

$u_a,\ R,\ \rho,\ \alpha = \pi/2,\ g,\ H_\infty$

Bekannte komplexe Potentialfunktionen:

Potentialwirbel:	$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$
Quelle/Senke:	$F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$
Dipol:	$F(z) = \frac{M}{2\pi z}$
Staupunktströmung:	$F(z) = \alpha z^2$
Parallelströmung:	$F(z) = (u_\infty - i v_\infty) z$

Winkeltabelle:

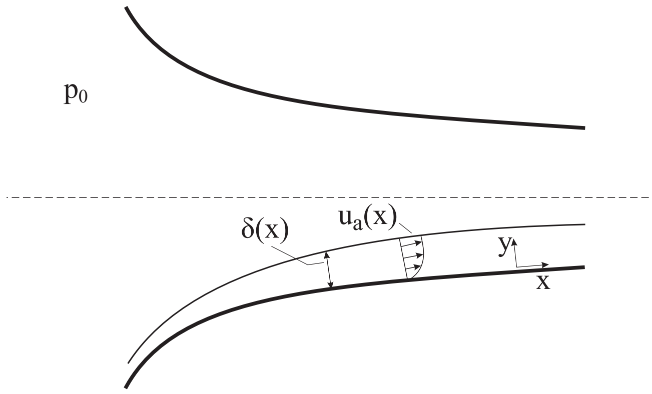
φ	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\sin\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0
$\cos\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

Hinweise:

- $v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ $\qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$ $\qquad z = x + iy = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

7. Aufgabe (13 Punkte)

Ein konvergenter Kanal wird von einem inkompressiblen Gas (Dichte ρ, Zähigkeit η) durchströmt. An den gekrümmten Begrenzungswänden bilde sich eine selbstähnliche Grenzschicht mit der Dicke $\delta(x)$ aus. Die Krümmung der Wände sei klein.



Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht lasse sich durch folgenden Polynomansatz darstellen:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0 + a_1 \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}\right)$$

Der Druckverlauf wurde gemessen:

$$p(x) = p_0 - C\frac{x^2}{2}$$

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0 und a_1 des Geschwindigkeitsprofils.

b) Bestimmen Sie den Verlauf der Außengeschwindigkeit $u_a(x)$ unter der Bedingung $u_a(x=0) = 0$.

c) Bestimmen Sie, in Abhängigkeit der Grenzschichtdicke δ und der Außengeschwindigkeit $u_a(x)$, die Verdrängungsdicke δ_1, die Impulsverlustdicke δ_2 und die Schubspannung auf der Kanalwand $\tau(y=0)$.

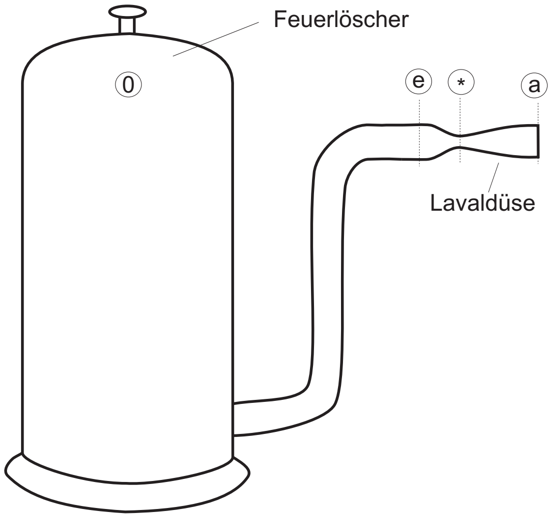
d) Bestimmen Sie den Verlauf der Grenzschichtdicke $\delta(x)$ für $x \geq x_0 > 0$ mit der von Kármánschen Integralbeziehung. Die Grenzschichtdicke $\delta(x_0) = \delta_0$ sei bekannt.

Gegeben: ρ, η, δ_0, C

Hinweise:

- Von Kármánsche Integralbeziehung: $$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_a}\frac{du_a}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) + \frac{\tau(y=0)}{\rho u_a^2} = 0$$
- Zu Teil d): Bringen Sie zunächst die von Kármánsche Integralbeziehung auf die Form
$$\frac{d\delta}{dx} + \Gamma\frac{\delta}{x} - \Omega\frac{1}{\delta\, x} = 0$$
und lösen Sie diese dann. Die Konstanten Γ und Ω müssen im Endergebnis nicht wieder durch bekannte Größen ersetzt werden.
- $\int \sin^2(ax)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax)$
- $\int \frac{x}{a^2 - x^2}dx = -\frac{1}{2}\ln(a^2 - x^2)$

8. Aufgabe (10 Punkte)



Bei einem zur Brandbekämpfung eingesetzten CO_2-Feuerlöscher soll eine angepasste Laval-Düse ($p_a = p_\infty$) erprobt werden. Die Strömung verlaufe reibungsfrei und isentrop (reversibel adiabat). Die Kondensationstemperatur des CO_2 ist vom Druck abhängig (siehe Hinweis), wobei beim Bezugsdruck p_B die Kondensation bei der Bezugstemperatur T_B stattfindet. Das Kohlenstoffdioxid und der „CO_2-Schnee" verhalten sich wie ein ideales Gas, dies gilt auch entlang der Phasengrenze. Der Index K bezeichnet die Kondensation, e den Düseneintritt und a den Düsenaustritt.

a) Bestimmen Sie den Druck p_0 in der Flasche, der nötig ist, damit am Düsenaustritt (Zustand a) das gasförmige CO_2 zu Schnee kondensiert. Wie hoch ist dann die Machzahl am Düsenaustritt?

b) Der austretende Massenstrom des Feuerlöschers soll $\dot{m}$ betragen. Wie groß muss die Austrittsfläche A_a sein? Geben Sie den engsten Querschnitt A^* der Laval-Düse an.

c) Bei ersten Tests des Feuerlöschers herrschen keine Idealbedingungen, da der Umgebungsdruck vom Auslegungszustand p_∞ abweicht. Im Austrittsquerschnitt A_a der Düse stellt sich ein senkrechter Verdichtungsstoß ein. Wie groß ist die Austrittsgeschwindigkeit u_{a2} hinter dem Stoß?

Gegeben:

$T_0,\ p_\infty,\ \gamma,\ p_B,\ T_B,\ \dot{m},\ c_p$

Hinweis:

- Die Ergebnisse einer Teilaufgabe dürfen in den folgenden Teilaufgaben als bekannt vorausgesetzt werden.
- Für die Kondensationstemperatur gilt: $\dfrac{T_K}{T_B} = \dfrac{p_K}{p_B}$
- $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$
- Für isentrope Strömungen gilt:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$$