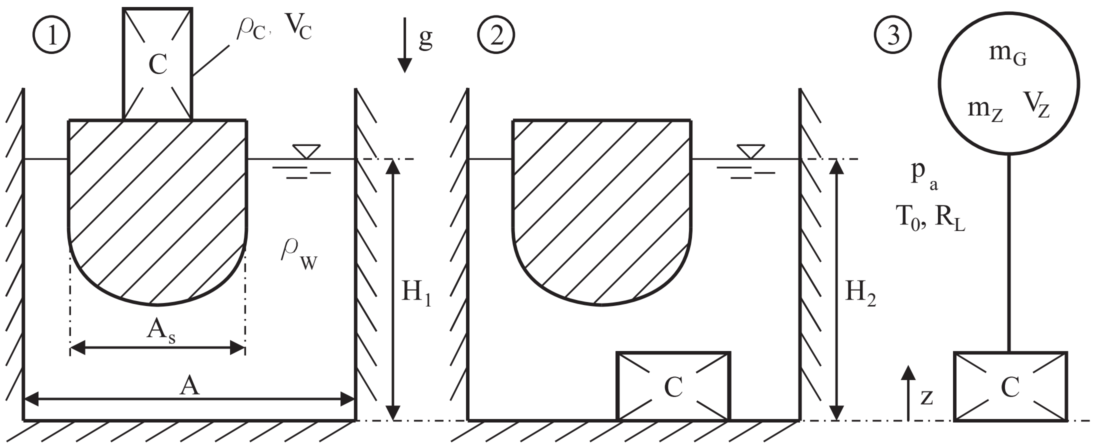
....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungslehre“ (Diplom)

07. 03. 2012

1. Aufgabe (9 Punkte)

Ein beladenes Container-Schiff befindet sich zunächst in einer allseitig geschlossenen Schleuse (Zustand „1“). Dann fällt der Container vom Schiff. Im Zustand „2“ liegt der Container „C“ (Volumen V_C, Dichte ρ_C) auf dem Grund der Schleuse und das Schiff ist unbeladen.



a) Wie ändert sich die Spiegelhöhe (ΔH) des von der Schleuse eingeschlossenen Wassers bei Betrachtung der Zustandsänderung von „1“ nach „2“?

Gegeben für a):

$A, \quad \rho_W, \quad \rho_C \quad \text{mit}\, \rho_C > \rho_W, \quad V_C$

Teilaufgabe b) und c) sind unabhängig von Teilaufgabe a) lösbar!

Im Folgenden hat das Container-Schiff die Schleuse verlassen und das Wasser wurde komplett abgepumpt (Zustand „3“). Ein Zeppelin mit starrer Hülle (Volumen V_Z, Strukturmasse m_Z, Gasmasse m_G) soll nun den Container weiter transportieren.

b) Welche Höhe erreicht der Zeppelin mitsamt Container innerhalb einer isothermen ($T_0 = konst.$) Atmosphäre?

Ein Riss an der Unterseite der Zeppelinhülle führt zum vollständigen Druckausgleich mit der Umgebung.

c) Wie ändert sich qualitativ (Steigen, Sinken oder Gleichbleibend) die Höhe des Zeppelins für den Fall, dass der Innendruck vor dem Riss niedriger als der Atmosphärendruck $p_i < p(z_{max})$ war? Begründen Sie kurz Ihre Antwort!

Gegeben für b) und c):

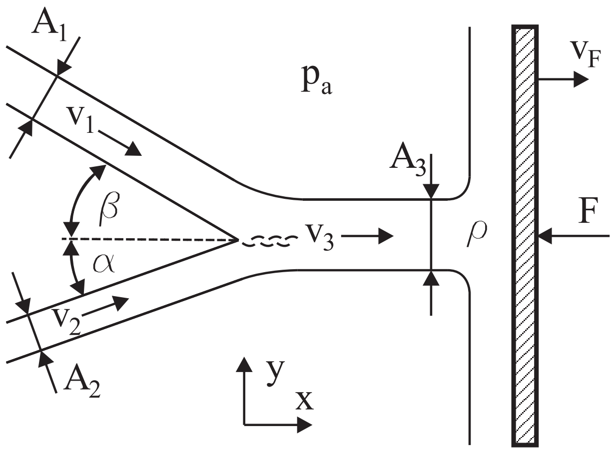
$g, \quad V_Z, \quad V_C \quad \text{mit}\, V_C \ll V_Z, \quad m_G, \quad m_Z, \quad \rho_C, \quad p_a, \quad T_0, \quad R_L$

Hinweis:

- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

2. Aufgabe (11 Punkte)

Zwei Wasserstrahlen treffen sich unter dem Winkel $\alpha + \beta$. Nach einer Vermischung bildet sich ein horizontaler Strahl, der auf eine vertikale Platte auftrifft. Dort wird der Strahl parallel zur Platte reibungsfrei in zwei gleich große Strahlen umgelenkt.



a) Bestimmen Sie den Winkel β.

Setzen Sie im Folgenden den Winkel β als gegeben voraus.

b) Bestimmen Sie den Querschnitt A_3 und die Geschwindigkeit v_3,

Setzen Sie im Folgenden den Querschnitt A_3 und die Geschwindigkeit v_3 als gegeben voraus.

c) Bestimmen Sie den Massenstrom $\dot{m}$ eines von der Platte abgelenkten Strahles.

d) Bestimmen Sie die Stützkraft F für eine stehende Platte..

e) Bestimmen Sie die Kraft F für eine mit der Geschwindigkeit v_F in x-Richtung bewegte Platte.

Gegeben:

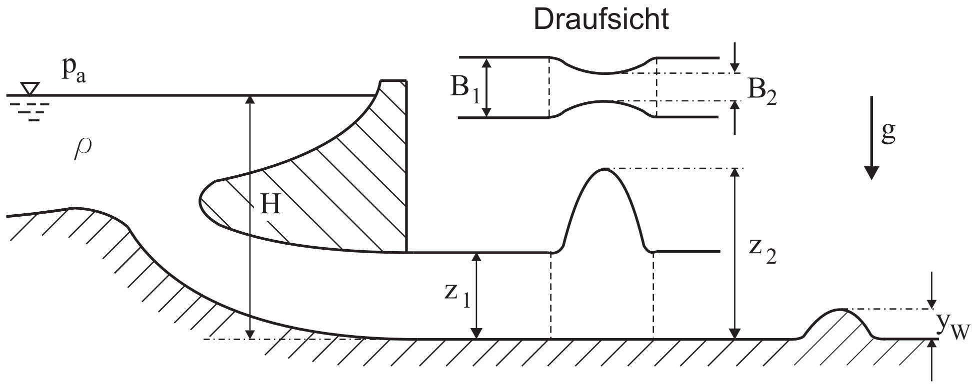
$A_1, \quad A_2, \quad v_1, \quad v_2, \quad \alpha, \quad \rho, \quad v_F$

Hinweis:

- Die Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}$ sei zu vernachlässigen.
- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

3. Aufgabe (13 Punkte)

Aus einem großen Reservoir strömt Wasser in einen offenen Kanal der Breite B_1. In dem Kanal beträgt die Höhe des Wasserspiegels z_1. Der Kanal verengt sich an einer Stelle auf $B_2 = B_1/\sqrt{2}$. An dieser Stelle wird die Spiegelhöhe $z_2 = 2z_1$ gemessen. Nach der Verengung folgt eine Bodenwelle der Höhe y_W.



a) Bestimmen Sie die Höhe H des Wasserspiegels in dem Reservoir.

b) Bestimmen Sie die Froudezahl nach der Verengung und skizzieren Sie sorgfältig 4 mögliche Verläufe der Spiegelhöhe nach der Verengung bis hinter die Bodenwelle.

c) Bestimmen Sie die Grenzhöhe y_{gr} der Bodenwelle, wenn zwischen der Verengung und der Bodenwelle ein Wassersprung steht.

Gegeben:

$$z_1, \quad z_2 = 2z_1, \quad \frac{B_2}{B_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hinweis:

• Das Verhältnis der Spiegelhöhen über einen Wassersprung ist:

$$\frac{z_{nach}}{z_{vor}} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2Fr_{vor}^2} - \frac{1}{2}$$

wenn der Index „vor" den Zustand vor dem Sprung und „nach" den Zustand nach dem Sprung bezeichnet, und Fr die Froude-Zahl ist.

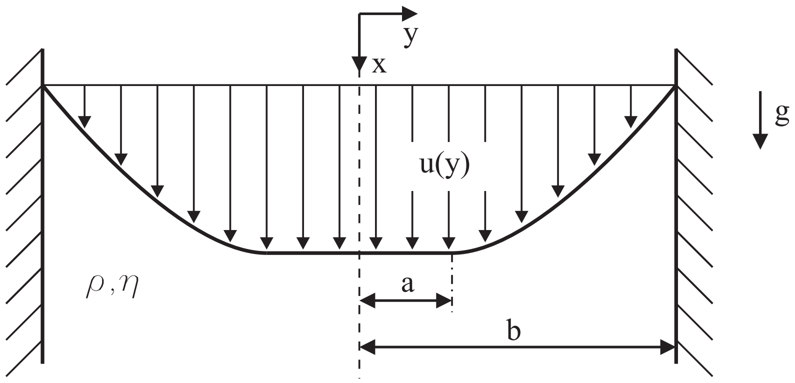
• Das Verhältnis von Grenzhöhe und minimaler Energiehöhe ist:

$$z_{gr} = \frac{2}{3} H_{min} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{g\, B^2}}$$

• Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

4. Aufgabe (12 Punkte)

Zwischen zwei parallelen, unendlich ausgedehnten Platten (Abstand $2b$) strömt eine Bingham-Plastik (Dichte ρ, Zähigkeit η). Die Strömung ist ausgebildet und besitzt keinen Druckgradienten in x-Richtung $\partial p/\partial x = 0$.



a) Leiten Sie mithilfe einer aussagekräftigen Skizze für den Bereich $a \leq y \leq b$ die Differentialgleichung für die Geschwindigkeitsverteilung her.

b) Geben Sie die zugehörigen Randbedingungen an.

c) Skizzieren Sie sorgfältig den Schubspannungsverlauf $\tau(y)$ für den Bereich $-b \leq y \leq b$.

d) Bestimmen Sie den Abstand a.

Setzen Sie im Folgenden den Abstand a als gegebenen voraus.

e) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$ für den Bereich $0 \leq y \leq b$.

Gegeben:

$$b, \quad \rho, \quad \eta, \quad \tau_0, \quad g, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Hinweis:

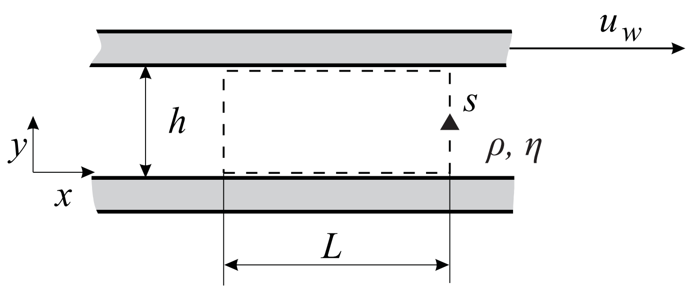
- Fließgesetze für eine Bingham-Plastik:

$$|\tau| \geq \tau_0 : \tau = \begin{cases} -\eta \frac{du}{dy} + \tau_0 & \text{für} \quad \frac{du}{dy} < 0 \\ -\eta \frac{du}{dy} - \tau_0 & \text{für} \quad \frac{du}{dy} > 0 \end{cases}$$

- Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse hinsichtlich der Plausibilität von Einheit und Vorzeichen!

5. Aufgabe (11 Punkte)

Zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten mit dem Abstand h befindet sich eine Newtonsche Flüssigkeit der Dichte ρ und der Zähigkeit η. Die obere Platte bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_W und die untere Platte ist in Ruhe. Der Druck in x-Richtung ist konstant. Es stellt sich eine stationäre ausgebildete inkompressible Strömung ein.



a) Vereinfachen Sie unter der Annahme einer ebenen Strömung die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls (siehe Hinweis) für den betrachteten Fall.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$. (Setzen Sie dafür die Beziehungen der Newtonschen Flüssigkeit aus dem Hinweis in die in Aufgabenteil a) vereinfachten Gleichungen ein.)

c) Bestimmen Sie den Wirbelvektor $\vec{\omega}(x, y)$.

d) Bestimmen Sie die Zirkulation Γ entlang der in der Skizze angegebenen Kurve s und den Wirbelfluss Ω durch die von der Kurve s aufgespannte Fläche.

Gegeben: u_W, h, L

Hinweis:

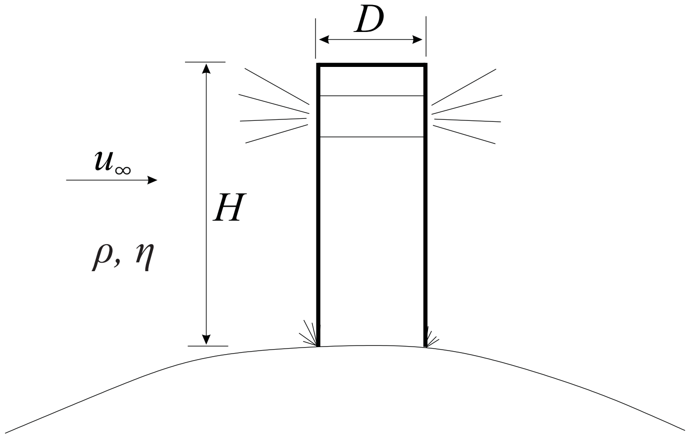
- Die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls lauten:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) &= 0 \\ \rho\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho\,(\vec{v} \cdot \nabla)\,\vec{v} &= -\nabla p + \nabla \cdot \tau \end{aligned}$$

- Für eine Newtonsche Flüssigkeit gilt:

$$\tau_{xx} = 2\eta\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{yy} = 2\eta\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

6. Aufgabe (11 Punkte)



Ein Leuchtturm (Durchmesser D, Höhe H) wird mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt. Auf der windabgewandten Seite bildet sich eine Kármán'sche Wirbelstraße aus, deren Wirbel mit der Frequenz f abschwimmen. Um die Windkraft F_W auf den Leuchtturm zu bestimmen, sollen Windkanalexperimente durchgeführt werden.

a) Bestimmen Sie mit dem Buckinghamschen π-Theorem die dimensionslose(n) Kennzahl(en) des Problems und überführen Sie die erhaltene(n) Kennzahl(en) in bekannte Kennzahlen der Strömungsmechanik.

Gegeben für a): Alle notwendigen Referenzgrößen

Die Experimente sollen in einem sogenannten Kryo-Kanal bei Bedingungen mit geringer Temperatur ($p_{Modell} = p_0$, $T_{Modell} < T_{Real}$) an einem Modell im Maßstab 1:10 erfolgen. Bei dem Medium im Kryo-Kanal handelt es sich um ein ideales Gas $(R_{Modell} = R_{Real},\ \gamma = 1,4)$. Für die Zähigkeit der Luft und des Modell-Gases soll gelten:

$$\eta(T) = \eta_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{0{,}72}, \quad \text{mit} \quad \eta_0 = \eta_{0,Real} = \eta_{0,Modell}$$

b) Wie groß ist das Verhältnis der Frequenzen der abschwimmenden Wirbel $\dfrac{f_{Modell}}{f_{Real}}$?

c) Der Versuch soll durchgeführt werden, ohne Kompressibilitätseffekte im Modell berücksichtigen zu müssen. Bis zu welcher Windgeschwindigkeit in der Realausführung eignet sich das betrachtete Modell?

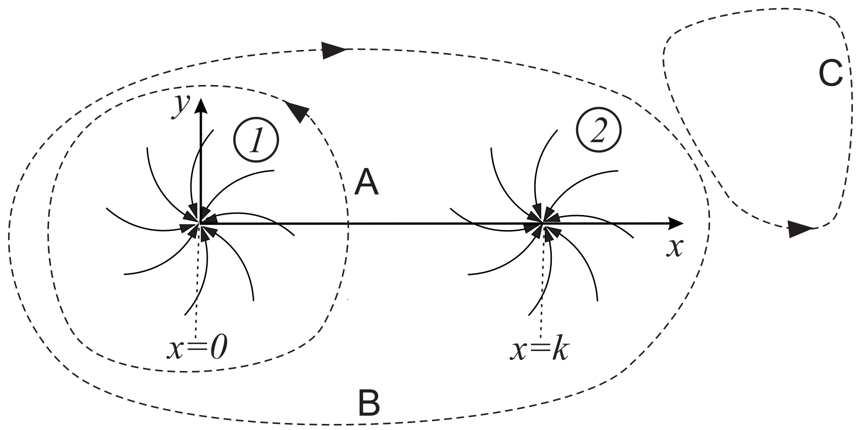
Gegeben für b) und c):

$$\frac{D_{Real}}{D_{Modell}} = 10,\ T_0,\ T_{Modell},\ R_{Real},\ \gamma$$

Hinweis zu b):
Nehmen Sie am Ort des realen Leuchtturms die Umgebungsbedingungen $(T_{Real} = T_0, p_{Real} = p_0)$ an.

7. Aufgabe (13 Punkte)

Das ebene Strömungsfeld zweier gleichstarker Wirbelstürme, die sich umeinander drehen, soll mittels der Potentialtheorie untersucht werden. Der Abstand der beiden Wirbelstürme beträgt k.



a) Bestimmen Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ mit Hilfe der gegebenen Elementarfunktionen. Geben Sie das Vorzeichen der Konstanten explizit an.

b) Hat diese Strömung Staupunkte? Begründen Sie kurz (ohne Rechnung) Ihre Antwort.

c) Skizzieren Sie das Stromlinienbild unter Angabe der Staupunkte und Staupunktstromlinien.

d) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung $u_{ind,1\rightarrow 2}$, die von Wirbelsturm ① im Zentrum von Sturm ② $(x = k, y = 0)$ induziert wird. Wie wird sich der Abstand der beiden Wirbelstürme mit der Zeit verändern?

e) Bestimmen Sie ohne Rechnung für die angegebenen Kurven A, B und C jeweils die Zirkulation.

f) Wie ändert sich die Staupunktposition qualitativ, wenn die Zirkulation von Wirbelsturm ① erhöht wird? Begründen Sie Ihre Antwort kurz oder erläutern Sie Ihre Antwort mit Hilfe einer Skizze.

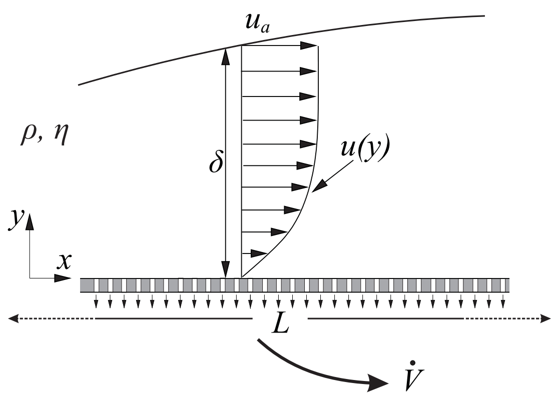
Gegeben:

k, alle benötigten Konstanten der Elementarfunktionen

Elementarfunktionen:

Parallelströmung:	$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$
Potentialwirbel:	$F(z) = -\dfrac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
Quelle/Senke :	$F(z) = \dfrac{E}{2\pi}\ln z$
Staupunktströmung:	$F(z) = az^2$
Dipol:	$F(z) = \dfrac{M}{2\pi z}$

8. Aufgabe (10 Punkte)



An einer längs angeströmten ebenen Platte (Breite B) bildet sich eine laminare, inkompressible Grenzschicht aus. Durch gleichmäßig in der Platte verteilte Bohrungen wird mit konstanter Geschwindigkeit über der Länge L der Volumenstrom $\dot{V}$ abgesaugt. Für das Geschwindigkeitsprofil in x-Richtung in der Grenzschicht gilt der Polynomansatz:

$$\frac{u(y)}{u_a} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 .$$

a) Für die Berechnung der Koeffizienten nennen Sie die drei Randbedingungen, die das Problem eindeutig beschreiben.

b) Bestimmen Sie für diese Grenzschichtströmung die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 des Geschwindigkeitsprofils.

c) Die Platte wird nun als Bodenplatte in einem Windkanal mit divergentem Querschnitt verwendet und die Grenzschicht löst im Punkt x_{ab} ab. Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil der Grenzschicht am Punkt der Ablösung als Funktion der gegebenen Größen.

d) In zwei anderen Versuchen werden zwei ebene Platten unterschiedlicher Längen L_1 und L_2 ohne Absaugung frei mit Luft mit der gleichen Geschwindigkeit längs angeströmt. Wie groß ist das Verhältnis der Grenzschichtdicken an den Plattenenden, wenn die Grenzschichten laminar sind und kein Druckgradient vorhanden ist?

Gegeben: $\dot{V},\ B,\ L,\ \eta,\ \rho,\ u_a(x_{ab}), \delta(x_{ab})$

Hinweis:

- x-Impulsgleichung der Grenzschichtgleichungen für zweidimensionale stationäre inkompressible Strömungen:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$