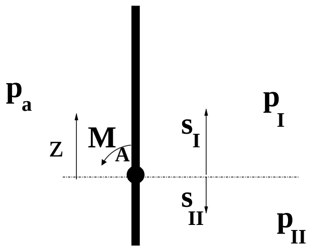
....

(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

17. 03. 2007

1. Aufgabe



$\sum M_A = \int\limits_0^{h_1} (p_I - p_a) s_I B ds_I - \int\limits_0^{h_2} (p_{II} - p_a) s_{II} B ds_{II}$

Hydrostatische Grundgleichung:

$p(z) + \varrho g z = p_a + \rho g (h + h_1)$

mit $s_I = z$: $p_I(s_I) + \varrho g s_I = p_a + \rho g (h + h_1)$

mit $s_{II} = -z$: $p_{II}(s_{II}) - \varrho g s_{II} = p_a + \rho g (h + h_1)$

$\sum M_A = \varrho g B \left(\left[(h + h_1) \frac{s_I^2}{2} - \frac{s_I^3}{3} \right]_0^{h_1} - \left[(h + h_1) \frac{s_{II}^2}{2} + \frac{s_{II}^3}{3} \right]_0^{h_2} \right)$

$= \varrho g B \left[(h + h_1) \frac{1}{2} (h_1^2 - h_2^2) - \frac{1}{3} (h_1^3 - h_2^3) \right]$

a) $\sum M_A = 0 \rightarrow h = \frac{2}{3} \frac{h_1^3 + h_2^3}{h_1^2 - h_2^2} - h_1; \quad h = \frac{5}{3}$

b) Bedingung für das Öffnen der Klappe:

$d(\sum M_A) > 0$

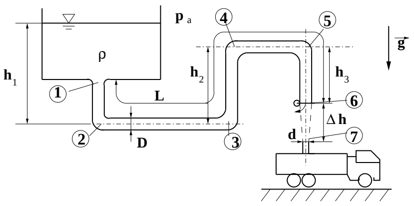
$d(\sum M_A) = \varrho g B \frac{1}{2} \left(h_1^2 - h_2^2\right) dh$

$\rightarrow h_1^2 - h_2^2 > 0$

$\rightarrow dh > 0$ für $d(\sum M_A) > 0$.

D.h. die Klappe öffnet bei steigendem Wasserspiegel.

2. Aufgabe



a) stationärer Bernoulli: '0'-'6'

$p_a = p_a + \frac{\varrho}{2} v_{stat}^2 + \varrho g(-h_1 + h_2 - h_3)$

$\rightarrow v_{stat} \sqrt{2g(h_1 - h_2 + h_3)}$

instationärer Bernoulli: '0'-'6'

$p_a = p_a + \frac{\varrho}{2} v^2 + \varrho g(-h_1 + h_2 - h_3) + \varrho \int \frac{\partial v}{\partial t} ds$

mit $\int \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{dv}{dt} L$, da $D << L$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{2g(h_1 - h_2 + h_3) - v^2}{2L} = \frac{v_{stat}^2 - v^2}{2L}$

$\rightarrow \int\limits_0^{0.5 v_{stat}} \frac{dv}{v_{stat}^2 - v^2} = \int\limits_0^{\Delta T} \frac{dt}{2L}$

mit Hinweis: $\rightarrow \Delta T = \left[\frac{L}{v_{stat}} ln \left(\frac{v_{stat} + v}{v_{stat} - v} \right) \right]_0^{0.5 v_{stat}}$

$\Delta T = \frac{L}{v_{stat}} ln \left[\frac{1.5}{0.5} \right] = 1.099 \frac{L}{v_{stat}}$

b) aus a): $dt = \frac{2L}{v_{stat}^2 - v^2} dv$

Wasservolumen:

$V_{Wasser} = \int\limits_0^{\Delta T} v(t) \frac{\pi D^2}{4} dt \quad \rightarrow \quad V_{Wasser} = \int\limits_0^{0.5 v_{stat}} \frac{\pi D^2}{4} \frac{2Lv(t)}{v_{stat}^2 - v(t)^2} dv(t)$

mit Hinweis: $V_{Wasser} = -\frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{2} 2L \quad ln[v_{stat}^2 - v(t)^2]_0^{0.5 v_{stat}}$

$= -\frac{\pi D^2 L}{4} \quad ln \left[\frac{v_{stat}^2 - 0}{v_{stat}^2 - 0.25 v_{stat}^2} \right] = \frac{\pi D^2 L}{2} \quad ln \left(\frac{1}{0.75} \right)$

$= 0.288 \frac{\pi D^2 L}{4} = 0.072 \pi D^2 L$

c) stationärer Bernoulli: '6'-'7'

$p_a + \varrho g \Delta h + \frac{\varrho}{2} v_{stat}^2 = p_a + \frac{\varrho}{2} v_7^2$

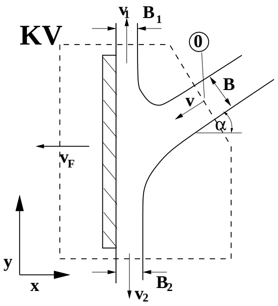
Konti:

$\frac{\pi D^2}{4} v_{stat} = \frac{\pi d^2}{4} v_7 \quad \rightarrow \quad v_7 = \frac{D^2}{d^2} v_{stat}$

$\rightarrow \Delta h = \frac{v_7^2 - v_{stat}^2}{2g} = \frac{v_{stat}^2}{2g} \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right)$

$\Delta h = (h_1 - h_2 + h_3) \left(\frac{D^4}{d^4} - 1 \right)$

3. Aufgabe

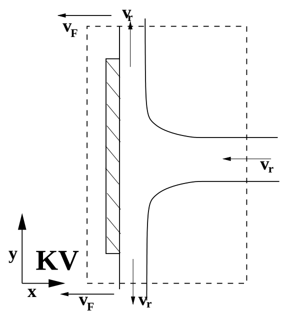


a) Impulssatz in x-Richtung:
$\frac{dI_x}{dt} = \varrho v^2 \cos\alpha B = F_x$
Die gesuchte Kraft ist $F = -F_x$.

b) verlustfreie Umlenkung, Bernoulli von '0'-'1' und '0'-'2':
$p_a + \frac{\varrho}{2}v^2 = p_a + \frac{\varrho}{2}v_1^2$
$p_a + \frac{\varrho}{2}v^2 = p_a + \frac{\varrho}{2}v_2^2$
$\rightarrow v_2 = v_1 = v$
Konti:
$\rightarrow vB = v_1 B_1 + v_2 B_2 \rightarrow B = B_1 + B_2$

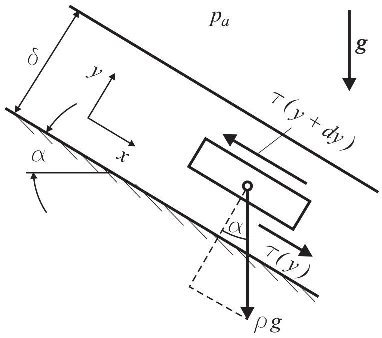
Impuls in y-Richtung KV 1:
$\frac{dI_y}{dt} = \varrho v^2 \sin\alpha B + \varrho v_1^2 B_1 - \varrho v_2^2 B_2 = 0$
$\rightarrow \quad v^2 \sin\alpha B + v^2 B_1 - v^2(B - B_1) = 0$
$\rightarrow \quad (\sin\alpha - 1)B + 2B_1 = 0$
$\rightarrow \quad B_1 = \frac{B}{2}(1 - \sin\alpha)$
$\rightarrow \quad B_2 = \frac{B}{2}(1 + \sin\alpha)$

c) Impulssatz in x-Richtung für die bewegte Kontrollfläche:
$\frac{dI_x}{dt} = \int \varrho v_a \left(\vec{v}_r \cdot \vec{n}\right) dA = F_x$
$\varrho v_a v_r - \varrho v_F v_r \frac{B}{2} - \varrho v_F v_r \frac{B}{2} = F_x$
$\rightarrow F_x = \varrho v(v - v_F)B - \varrho v_F(v - v_F)B$
$= \varrho(v - v_F)^2 B.$
Die gesuchte Kraft $F = -F_x$.



$v_a =$ Absolutgeschw.
$v_r =$ Relativgeschw.
$v_r = v - v_F$

4. Aufgabe



a)

Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:

$\left[\tau - \tau + \frac{d\tau}{dy}dy\right] dxB + \varrho g \sin\alpha dxdyB = 0$

$\rightarrow \frac{d\tau}{dy} = \varrho g \sin\alpha.$

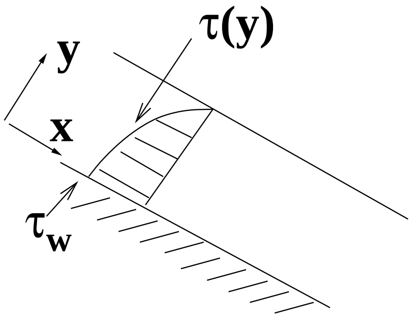
Integration $\int d\tau = \int \varrho_w \left(1 - \beta(T_w - T_a)\frac{y}{\delta}\right) g \sin\alpha dy$

$\rightarrow \quad \tau = \varrho_w g \sin\alpha \left[y - \beta\left(T_w - T_a\right)\frac{y^2}{2\delta}\right] + C_1$

R.B.: $\tau(y=\delta) = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = -\varrho_w g \sin\alpha\delta \left[1 - \frac{\beta}{2}\left(T_w - T_a\right)\right]$

$\rightarrow \tau(y) = \varrho_w g \sin\alpha \left[y - \delta - \frac{\beta(T_w - T_a)}{2}\left(\frac{y^2}{\delta} - \delta\right)\right]$

Skizze:



b) $\tau(y) = -\eta\frac{du}{dy}$ und mit $k = \frac{\beta(T_w - T_a)}{2}$

$\int du = \int \left[-\frac{\varrho_w g \sin\alpha}{\eta}\left(y - \delta - k\left(\frac{y^2}{\delta} - \delta\right)\right)\right] dy$

$\rightarrow \quad u(y) = -\frac{\varrho_w g \sin\alpha}{\eta}\left(\frac{y^2}{2} - \delta y - k\left(\frac{y^3}{3\delta} - y\delta\right)\right) + C_2$

Randbedingung: $u(y=0) = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$\rightarrow \quad u(y) = -\frac{\varrho_w g \sin\alpha}{\eta}\left(\frac{y^2}{2} - \delta y - k\left(\frac{y^3}{3\delta} - y\delta\right)\right)$

c) $\frac{\dot{m}}{B} = \int\limits_0^\delta \delta(y)u(y)dy$

$\frac{\dot{m}}{B} = \int\limits_0^\delta -\frac{\varrho_w^2 g \sin\alpha}{\eta}\left(1 - 2k\frac{y}{\delta}\right)\left(\frac{y^2}{2} - \delta y - k\left(\frac{y^3}{3\delta} - y\delta\right)\right) dy$

5. Aufgabe

a) $\overline{\omega} = \dfrac{\omega}{\omega_0},\ \overline{r} = \dfrac{r}{R},\ \overline{t} = \dfrac{t}{t_0}$

$\rightarrow \dfrac{\omega_0}{t_0}\dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{t}} = \nu R\overline{r}\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial}{\partial\overline{r}}\left(\dfrac{1}{R\overline{r}}\dfrac{\omega_0}{R}\dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{r}}\right)$

$\rightarrow \dfrac{\omega_0}{t_0}\dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{t}} = \nu\overline{r}\dfrac{\omega_0}{R^2}\dfrac{\partial}{\partial\overline{r}}\left(\dfrac{1}{\overline{r}}\dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{r}}\right)$

$\rightarrow \dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{t}} = \dfrac{\nu t_0}{R^2}\overline{r}\dfrac{\partial}{\partial\overline{r}}\left(\dfrac{1}{\overline{r}}\dfrac{\partial\overline{\omega}}{\partial\overline{r}}\right)$

$\rightarrow \quad K_r = \dfrac{\nu t_0}{R^2}$

b) $\omega(R_1, t_1) = \omega(R, t_0)$

$\rightarrow \quad K_r$ ist konstant, so dass $K_{r_1} = K_{r_2}$

$\rightarrow \quad \frac{\nu t_1}{R_1^2} = \frac{\nu t_0}{R^2}$

$\rightarrow \quad \frac{\nu 2 t_0}{R_1^2} = \frac{\nu t_0}{R^2}$

$\rightarrow \quad R_1 = \sqrt{2}R$

c) $\omega(r,t) = \omega_0 e^{-\frac{r^2}{f(t)}}$

- $\dfrac{\partial\omega}{\partial r} = \omega_0\left(-\dfrac{2r}{f(t)}\right)e^{-\frac{r^2}{f(t)}}$
- $r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\omega}{\partial r}\right) = \left(\dfrac{2r}{f(t)}\right)^2\omega(r,t)$
- $\dfrac{\partial\omega}{\partial t} = \omega_0 e^{-\frac{r^2}{f(t)}}\left(\dfrac{r^2}{f^2(t)}\dfrac{\partial f}{\partial t}\right) = \omega(r,t)\dfrac{r^2}{f^2(t)}\dfrac{\partial f}{\partial t}$

in die DGL eingesetzt: $\frac{\partial f}{\partial r} = 4\nu$

$\rightarrow f(t) = 4\nu t + C_1$

Anfangsbedingung: $t = t_0; r = R \quad \rightarrow \quad \omega = \omega_0 e^{-1} = \omega_0 e^{-\frac{R^2}{4\nu t_0 + C_1}}$

Vergleich der Exponenten ergibt:

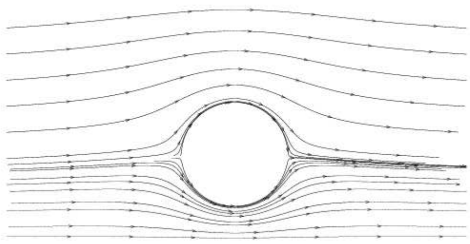
$C_1 = R^2 - 4\nu t_0$

$f(t) = 4\nu(t - t_0) + R^2$

6. Aufgabe

a) $F(z) = u_\infty z + \frac{M}{2\pi}\left[\frac{1}{z+ib} + \frac{1}{z-ib}\right]$

b)



c) $\Phi(z) = Re\,(F(z)) = Re\left(u_\infty z + \frac{M}{2\pi z}\right) = u_\infty r\cos\theta + \frac{M\cos\theta}{2\pi r}$

$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = u_\infty\cos\theta - \frac{M\cos\theta}{2\pi r^2} = u_\infty\cos\theta\left(1 - \frac{M}{2\pi r^2 u_\infty}\right)$

$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\left(-u_\infty r\sin\theta - \frac{M\sin\theta}{2\pi r}\right) = -u_\infty\sin\theta\left(1 + \frac{M}{2\pi r^2 u_\infty}\right)$

Bedingung auf der Kontur: $v_r(r=R) = 0$

$\rightarrow u_\infty\cos\theta = \frac{M\cos\theta}{2\pi r^2} \quad \rightarrow M = 2\pi u_\infty R^2$

$v_r = u_\infty\cos\theta\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right),\; v_\theta = -u_\infty\sin\theta\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)$

d) Druckbeiwert auf der Kontur:

$c_p = 1 - \frac{v_r^2(r=R) + v_\theta^2(r=R)}{u_\infty^2}$ mit $v_\theta(r=R) = -u_\infty\sin\theta(1+1) = -2u_\infty\sin\theta$

$c_p = 1 - \frac{(-2u_\infty\sin\theta)^2}{u_\infty^2} = 1 - 4\sin^2\theta$

7. Aufgabe

a) Reibungsfreie Außenströmung: $\frac{dp}{dx} = -\varrho U_a \frac{\partial U_a}{\partial x}|_{y=\delta}$ mit $U_a(x) = Cx^{\frac{1}{3}}$

$$\frac{dp}{dx} = -\varrho C x^{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} C x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{1}{3}\varrho C^2 x^{-\frac{1}{3}}$$

$\frac{dp}{dx} < 0$ d.h. beschleunigte Strömung $\rightarrow$ keine Ablösung

b) Polynomansatz: $\frac{u(x,y)}{U_a(x)} = a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + a_4\left(\frac{y}{\delta}\right)^4$

Randbedingungen:

1.) $\frac{u}{U_a} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 0$

2.) $\frac{u}{U_a} = 1$ für $\frac{y}{\delta} = 1$

3.) $\frac{\partial^2\left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = \frac{dp}{dx}$ für $\frac{y}{\delta} = 0$

4.) $\frac{\partial\left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 1$

5.) $\frac{\partial^2\left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 0$ für $\frac{y}{\delta} = 1$

mit 1.) ist identisch erfüllt ...

mit 2.) $\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$

mit 3.) mit $U_a(x) = Cx^{\frac{1}{3}}$ und $\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{3}\varrho C^2 x^{-\frac{1}{3}}$ (siehe a)) folgt:

$\rightarrow \quad \frac{\partial^2\left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2}|_{y/\delta=0} = \eta\frac{U_a}{\delta^2}2a_2$ folgt $a_2 = -\frac{\varrho\delta^2}{6\eta}Cx^{-\frac{2}{3}}$

mit 4.) $\Rightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0$

mit 5.) $\Rightarrow 2a_2 + 6a_3 + 12a_4 = 0$

$\rightarrow 4 = 3a_1 + 2a_2 + a_3$

$\rightarrow 0 = 3a_1 + 4a_2 + 3a_3$

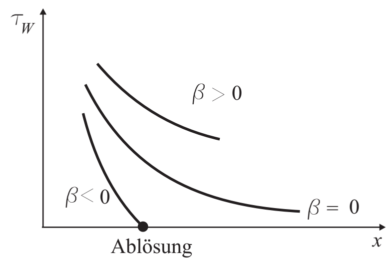
$\rightarrow 4 = -2a_2 + -2a_3$

$\rightarrow a_3 = -2 - 2a_2 = -2 + \frac{\varrho\delta^2}{6\eta}Cx^{-\frac{2}{3}}$

$\rightarrow a_1 = 2 + \frac{1}{18}\frac{\varrho\delta^2}{\eta}Cx^{-\frac{2}{3}}$

$\rightarrow a_4 = 1 - \frac{1}{18}\frac{\varrho\delta^2}{\eta}Cx^{-\frac{2}{3}}$

c) Verlauf der Wandschubspannung τ_w über x



8. Aufgabe

a) Wenn im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit erreicht wird, stellt sich der maximale Massendurchsatz $\dot{m}_{max}$ ein. Also wenn gilt

$\dot{m}_{max} = \varrho^* u^* A^*$

$$\varrho^* = \frac{p^*}{RT^*} = \frac{\frac{p^*}{p_0}}{R\frac{T^*}{T_0}} \frac{p_0}{T_0}$$

$$u^* = a^* = \sqrt{\gamma R T^*} = \sqrt{\gamma R \frac{T^*}{T_0} T_0}$$

mit Energiesatz: $c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$ und $c_P = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2$$

kritischer Zustand: $Ma = Ma^* = 1$

$$\frac{T^*}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\gamma + 1}$$

mit der Isentropenbeziehung folgt

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\dot{m}_{max} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1\right)} \frac{p_0}{RT_0} \sqrt{\gamma R \frac{2}{\gamma + 1} T_0} \quad A_D$$

$$= A_D \frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

b) $\dot{m}_{max} = \varrho_1 u_1 A_1 \rightarrow \quad A_1 = \dfrac{\dot{m}_{max}}{\varrho_1 u_1}$

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} ; \; u_1 = Ma_1 \sqrt{\gamma R T_1}$$

$$\varrho_1 = \frac{p_0}{RT_0} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

$$\rightarrow \quad A_1 = A_D \frac{\frac{p_0}{\sqrt{RT_0}} \sqrt{\gamma} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}{\frac{p_0}{RT_0} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} Ma_1^2\right)^{\left(-\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{2}\right)} \sqrt{\gamma R T_0} Ma_1}$$

$$\rightarrow \quad A_1 = A_D \frac{1}{Ma} \left[\left(\frac{2}{\gamma + 1}\right) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2\right)\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

c) $u_1 = \sqrt{\gamma R T_0} \quad Ma_1 \left(1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{1}{2}}$