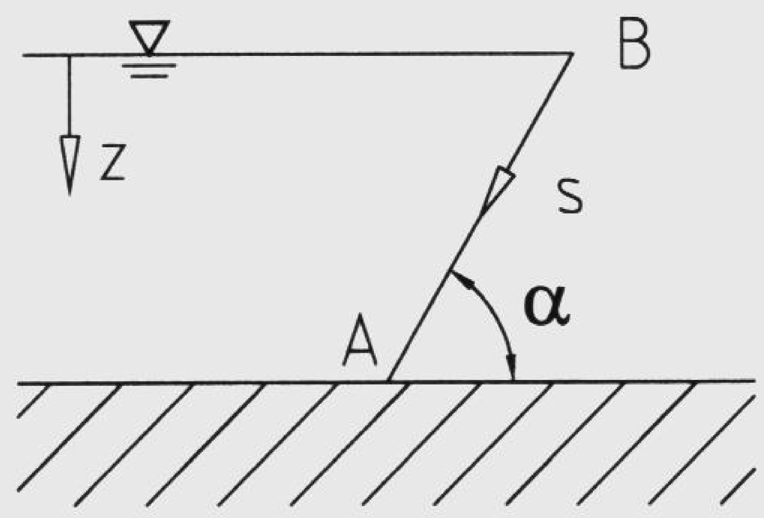
1. Aufgabe

a) Die Auftriebskraft, die ein eingetauchter Körper erfährt, ist gleich der Gewichtskraft des verdrängten Fluids.

b) z. B. nicht vollständig benetzte Körper oder Druckgradient nicht konstant

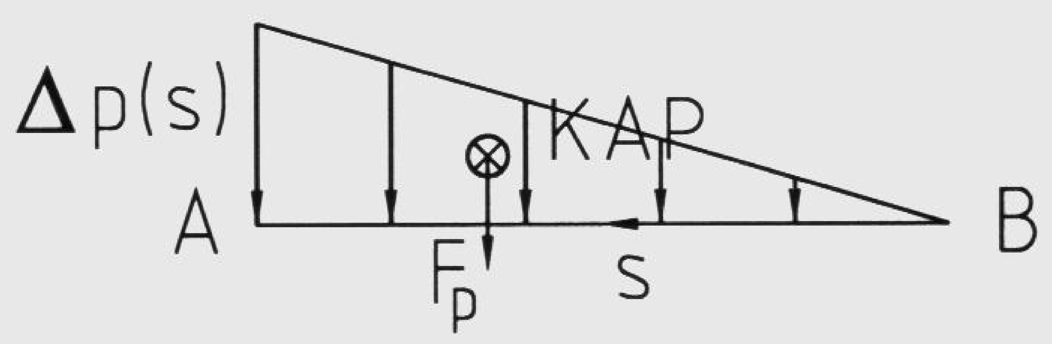
c) $F_P$ = Druckkraft auf Platte pro Einheitstiefe




$$F_P = \int_B^A \Delta p ds = \int_0^L \rho\, g\, s\, sin\alpha\, ds = \frac{\rho\, g\, L^2}{2}\, sin\alpha$$

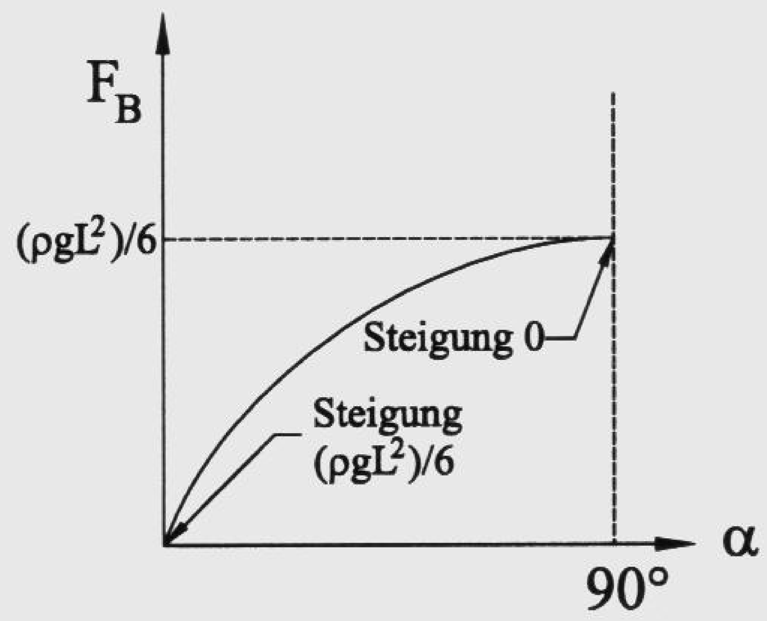
$$z = s \cdot sin\alpha$$

Kraftangriffspunkt (KAP) von $F_P$ entweder rechnerisch oder geometrisch bestimmen: Schwerpunkt des Dreiecks liegt bei $s = \frac{2}{3}L$




$$\sum M_A: \; F_P \cdot \tfrac{1}{3}L = F_B \cdot L$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{\rho\, g\, L^2}{6}\, sin\alpha\, (= f(\alpha))$$




d) $h = H - L\, sin\alpha = L(1 - sin\alpha)$

$\Delta p_B = \rho\, g\, L(1 - sin\alpha)$

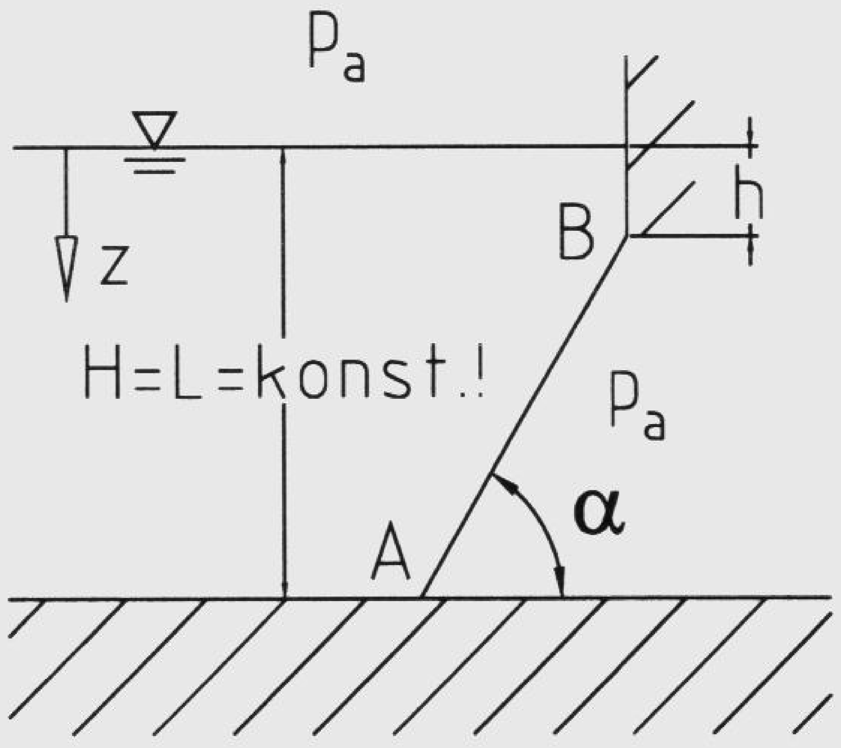
$F_P = \int_0^L \Delta p\, ds = \int_0^L (\Delta p_B + \rho\, g\, s\, sin\alpha)\, ds$

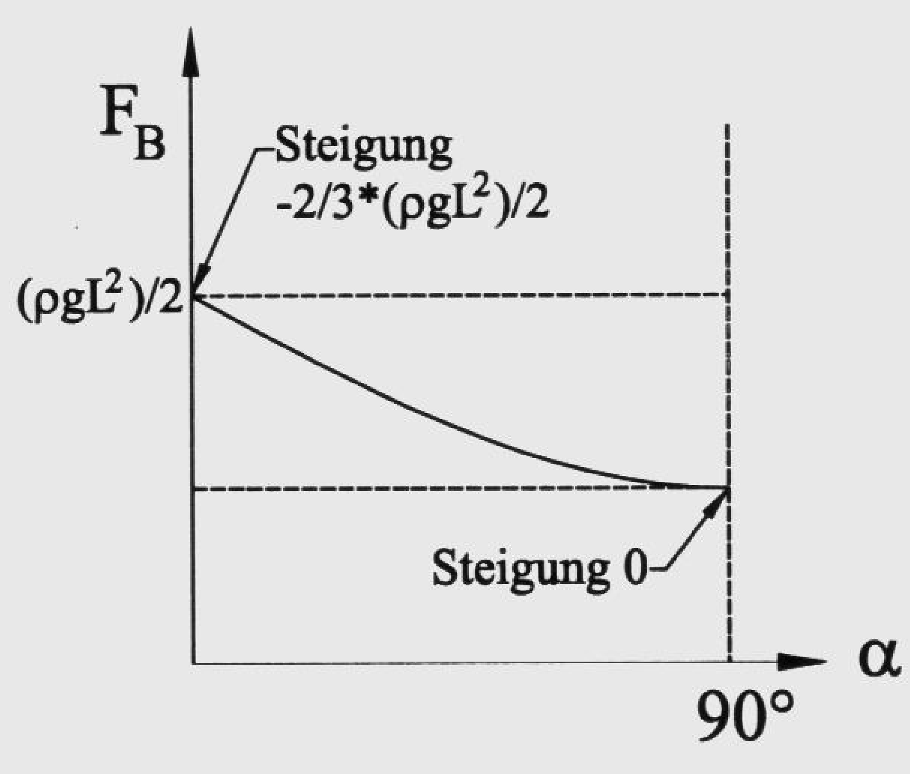
$$F_P = \underbrace{\Delta p_B \cdot L}_{F_{P\ Rechteck}} + \underbrace{\frac{\rho\, g\, L^2}{2}\, sin\alpha}_{F_{P\ Dreieck}}$$

KAP berechnen oder $F_P$ aufspalten

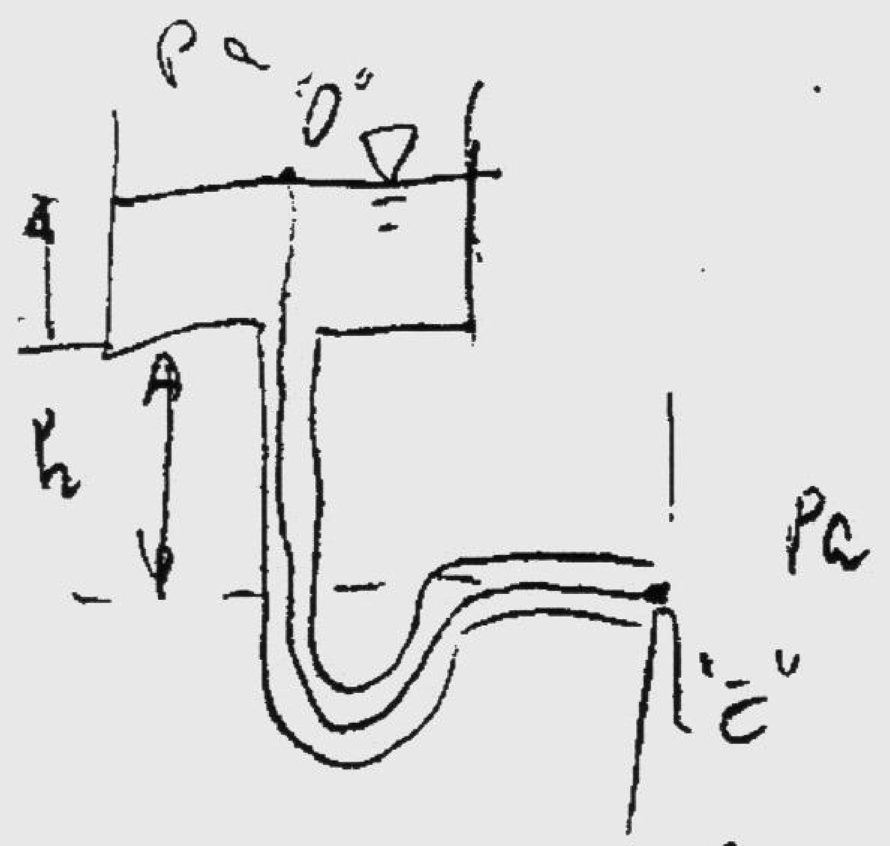
$$\sum M_A: \; F_{P Rechteck} \cdot \tfrac{L}{2} + F_{P Dreieck} \cdot \tfrac{L}{3} = F_B \cdot L$$

$$\Rightarrow F_P = \frac{\rho\, g\, L^2}{2} - \frac{\rho\, g\, L^2}{2}\, sin\alpha + \frac{\rho\, g\, L^2}{6}\, sin\alpha = \frac{\rho\, g\, L^2}{2}(1 - \tfrac{2}{3} sin\alpha)$$



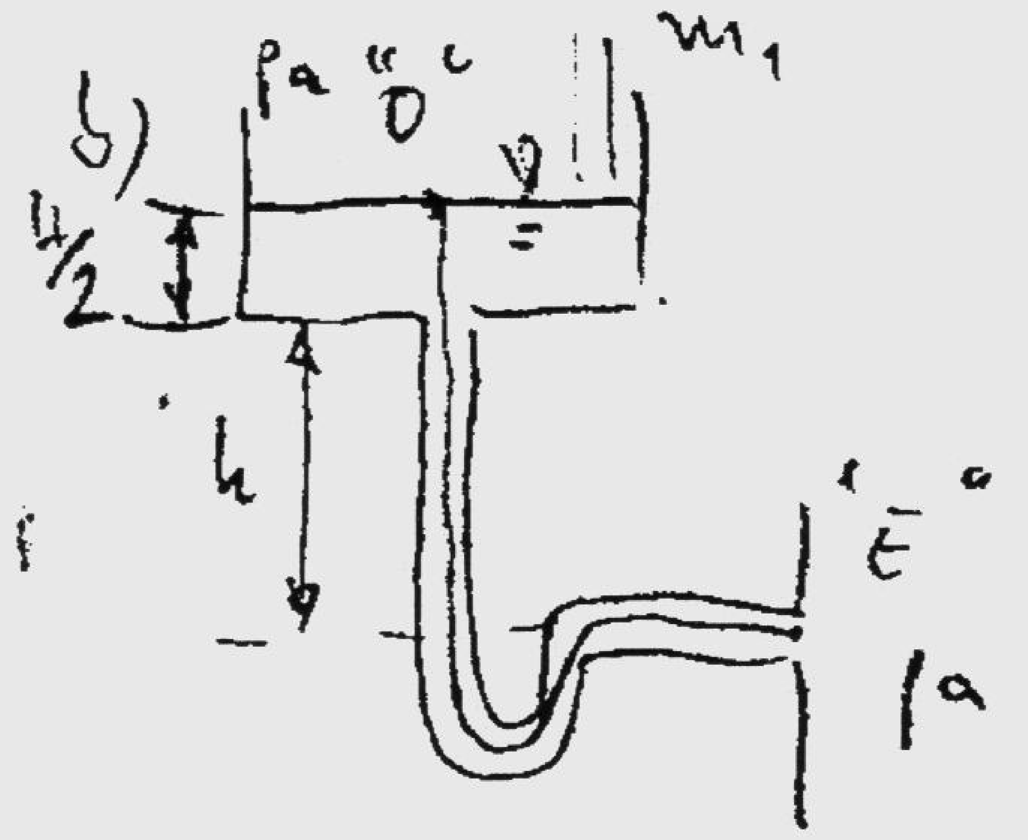
Aufg. 21 a) Bernoulli $0 \rightarrow E$




$$A \gg d^2 \Rightarrow \quad p_a + \rho g (h+z) = p_a + \frac{\rho}{2} v_E^2$$

$$\Rightarrow v_E = \sqrt{2g(h+z)}$$

b)



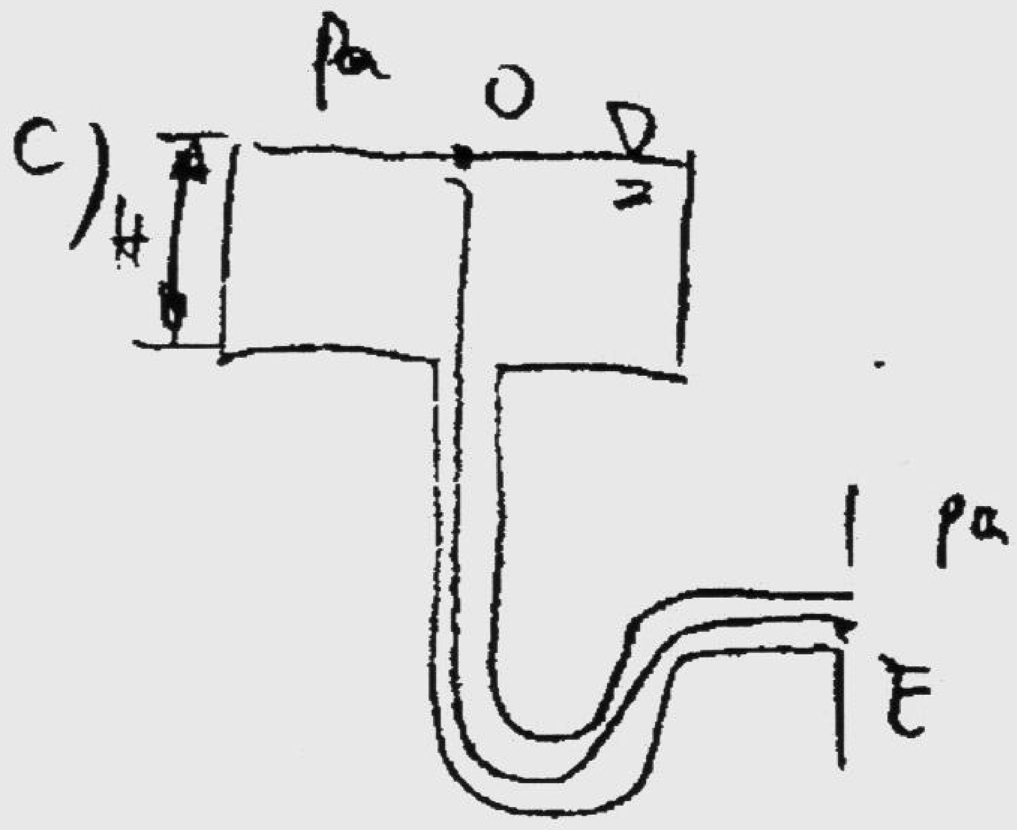

Verlustbeh. Bernoulli $0 \rightarrow E$

$$p_a + \rho g \left(h + \frac{H}{2}\right) \geq p_a + \frac{\rho}{2} v_{E1}^2 \left(1 + \zeta_{Ges}\right)$$

$$\Rightarrow \zeta_{Ges} \leq \frac{2g\left(h + \frac{H}{2}\right)}{v_{E1}^2} - 1$$

mit $v_{E1} = \dfrac{\dot{m}_1}{\rho \frac{\pi d^2}{4}}$

c)




Verlustbeh. Bernoulli $0 \rightarrow E$

$$p_a + \rho g (h+H) = p_a + \frac{\rho}{2} v_{E2}^2 \left(1 + \zeta_{Ges} + \zeta_V\right)$$

mit $v_{E2} = \dfrac{4 \dot{m}_{max}}{\rho \pi d^2}$

$$2g(h+H) = \left(\frac{4 \dot{m}_{max}}{\rho \pi d^2}\right)^2 \cdot \left(1 + \zeta_{Ges} + \zeta_V\right)$$

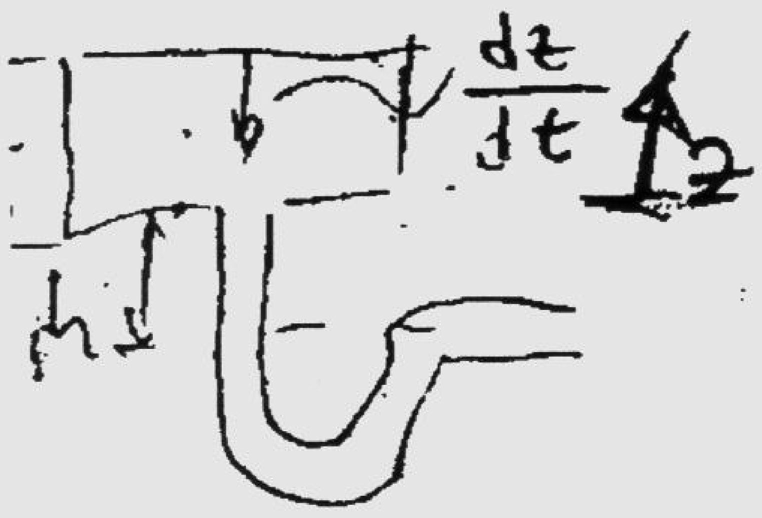
$$\Rightarrow \dot{m}_{max} = \sqrt{\frac{2g(h+H)}{1 + \zeta_{Ges} + \zeta_V}} \cdot \frac{\rho \pi d^2}{4}$$

$$= \sqrt{\frac{2g(h+H)}{\cancel{1} + \frac{2g\left(h + H/2\right)}{v_{E1}^2} - \cancel{1} + \zeta_V}} \; \frac{\rho \pi d^2}{4}$$

$$\dot m_{max} = \sqrt{\frac{(h+H)}{\left(h+\frac{H}{2}\right)+\xi_v \frac{V_{E1}^2}{2g}}} \cdot \frac{\rho\pi d^2}{4} \cdot V_{E1}$$

$$= \sqrt{\frac{(h+H)}{\left(h+\frac{H}{2}\right)+\frac{\xi_v}{2g}\left(\frac{4\dot m_1}{\rho\pi d^2}\right)^2}} \cdot \dot m_1$$

d) Quasistationär : $\int \frac{\partial v}{\partial t}\, ds = 0$




$$\frac{\rho}{2}\left(-\frac{dz}{dt}\right)^2 + \rho g(h+z) = \frac{\rho}{2} v_E^2(t)\,(1+\xi_{Ges})$$

mit Konti : $v_E \frac{\pi d^2}{4} = -\frac{dz}{dt}\cdot A \Rightarrow v_E(t) = -\frac{dz}{dt}\frac{4A}{\pi d^2}$

$$\Rightarrow \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{4A}{\pi d^2}\right)^2 \cdot (1+\xi_{Ges}) - 1\right] = 2g\,(h+z)$$

Trennung der Variablen:

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{4A}{\pi d^2}\right)^2(1+\xi_{Ges})-1}{2g}} \cdot \frac{dz}{\sqrt{h+z}} = dt$$

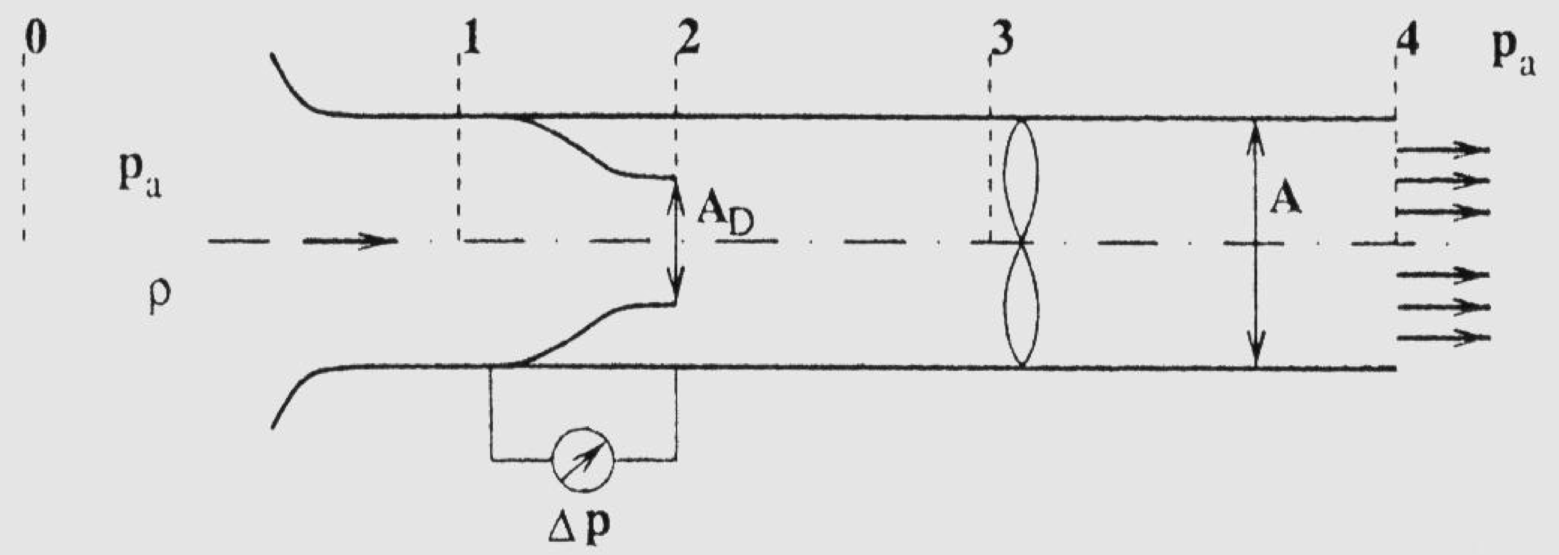
$$\Rightarrow T = \int_H^0 \underbrace{\sqrt{\frac{\left(\frac{4A}{\pi d^2}\right)^2(1+\xi_{Ges})-1}{2g}}}_{k} \cdot \frac{dz}{\sqrt{h+z}}$$

$$= k \cdot 2\sqrt{h+z}\,\Big|_H^0 = 2k\cdot\left(\sqrt{h}-\sqrt{h+H}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{g}\left[\left(\frac{4A}{\pi d^2}\right)^2(1+\xi_{Ges})-1\right]} \cdot \left(\sqrt{h}-\sqrt{h+H}\right)$$

2. Aufgabe (12 Punkte)

Der Volumenstrom eines Lüftungsgebläses mit gut gerundetem Einlauf wird mit einer Düse gemessen.




a) Skizzieren Sie sorgfältig den Verlauf des statischen Druckes und des Gesamtdruckes entlang der Rohrachse.

b) Bestimmen Sie den Volumenstrom.

c) Bestimmen Sie den Druck im Punkt 3.

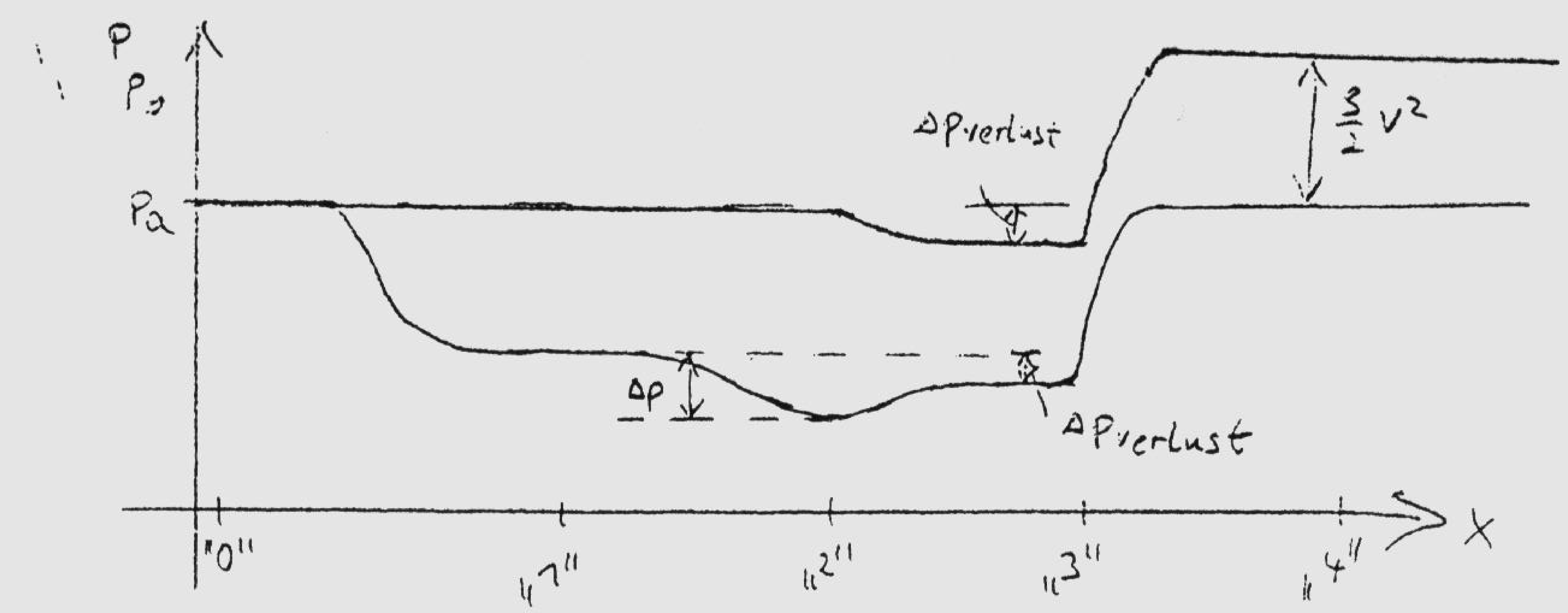
d) Bestimmen Sie die Gebläseleistung.

Gegeben: $A = 1\,\mathrm{m}^2$, $A_D = 0,5\,\mathrm{m}^2$, $p_a = 10^5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$, $\Delta p = 300\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$, $\rho = 1,25\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$

Hinweis: Die Reibungskräfte sind zu vernachlässigen. Die Ausdehnung der Rotorblätter des Gebläses sind zu vernachlässigen.

Aufg. 2)

a)




b)

$$p_a = p_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2}v_2^2 \quad \text{(Bern.)}$$

$$\Delta p > 0 \quad \text{d.h.} \quad \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2}(v_2^2 - v_1^2)$$

$$A \cdot v_1 = A_D \cdot v_2 \quad \text{(Konti)}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{\rho}{2}v_1^2\left(\left(\frac{A}{A_D}\right)^2 - 1\right)$$

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho\left(\left(\frac{A}{A_D}\right)^2 - 1\right)}} = 12,65\,\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \dot{Q} = v_1 \cdot A = 12,65\,\frac{m^3}{s}$$

c) mit Bilanzhülle!

IES: $\rho v_3^2 A - \rho v_2^2 A_D = (p_2 - p_3)A$ , $p_2 = p_a - \frac{\rho}{2}v_2^2$ (s.o.)

$\Rightarrow p_3 = p_2 + \rho v_2^2 \frac{A_D}{A} - \rho v_3^2$ , $v_3 = v_1$ (Konti)

$\Rightarrow p_3 = p_a - \frac{\rho}{2}v_2^2 - \rho v_1^2 + \rho v_2^2 \frac{A_D}{A}$ , $v_2 = v_1 \frac{A}{A_D}$ (Konti)

$\Rightarrow p_3 = p_a - \frac{\rho}{2}v_1^2\left(\frac{A^2}{A_D^2} + 2 - 2\frac{A}{A_D}\right)$

$\Rightarrow p_3 = 99800\,\frac{N}{m^2}$

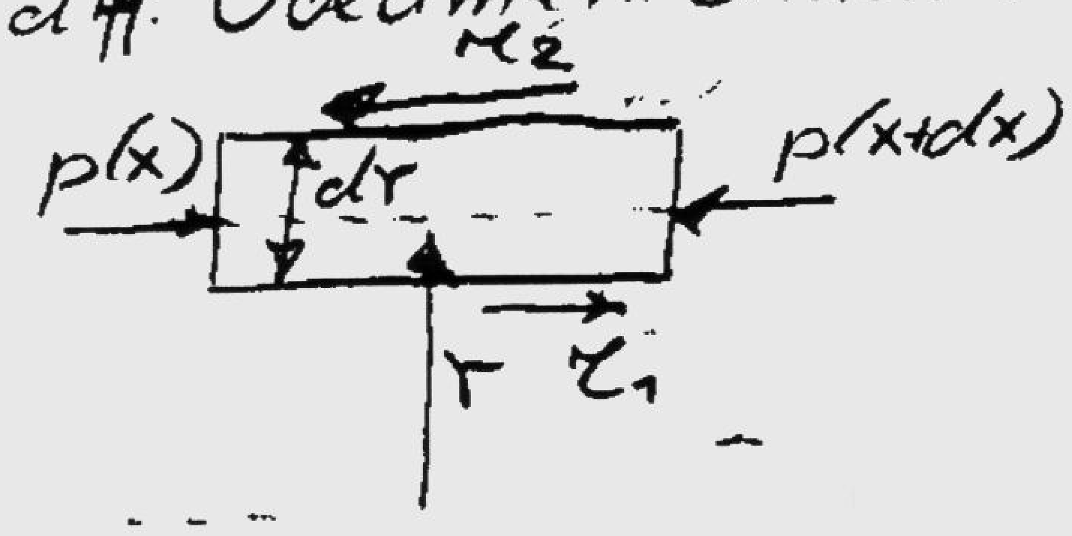
d) $P_{Gebl.} = \Delta p_0 \cdot \dot{Q}$ $v = \text{konst} \Rightarrow \Delta p_0 = p_a - p_3$

$= (p_a - p_3) \cdot \dot{Q} = 2530\,W$

Aufgabe 4

a) Geschwindigkeitsverteilung:

IES am diff. Volumenelement:




$$0 = \tau_1 2\pi\left(r-\frac{dr}{2}\right)dx - \tau_2 2\pi\left(r+\frac{dr}{2}\right)dx$$
$$p(x)2\pi r dr - p(x+dx)2\pi r dr$$

$$\Rightarrow 0 = -\underbrace{\left(\tau + r\frac{d\tau}{dr}\right)}_{} - r\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{d(r\cdot\tau)}{dr} = -r\frac{dp}{dx}$$

1. Integration:

$$\tau\cdot r = -\frac{dp}{dx}\frac{r^2}{2} + C_1$$

$$\Leftrightarrow \tau = -\frac{dp}{dx}\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$ ; mit R.B. $\tau(r=0)=0$ folgt $c_1 = 0$

$$\Rightarrow \tau(r) = -\frac{dp}{dx}\frac{r}{2} = -\eta\frac{du}{dr}$$ (Newtonsche Fließgesetz)

$$\Leftrightarrow \frac{du_2}{dr} = \frac{r}{2\eta}\frac{dp}{dx}$$

2. Integration:

$$u_2(r) = \frac{1}{4\eta}\frac{dp}{dx}\cdot r^2 + C_2$$ ; mit R.B. $u(r=R)=0$ folgt $c_2 = -\frac{R^2}{4\eta}\frac{dp}{dx}$

$$\Rightarrow u_2(r) = -\frac{R^2}{4\eta}\frac{dp}{dx}\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

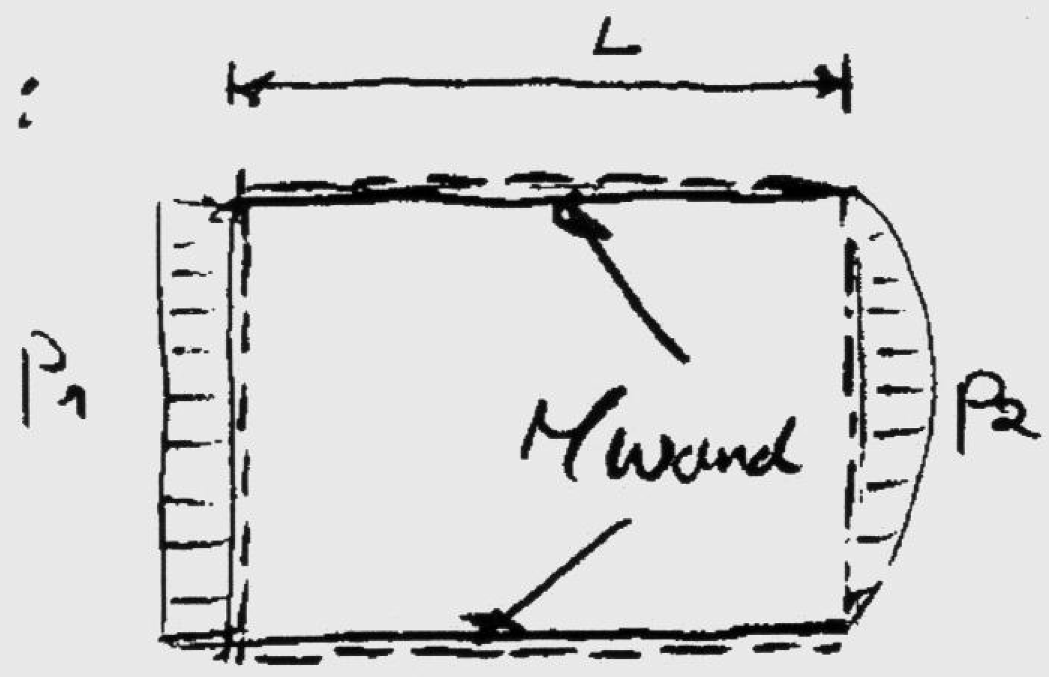
$\frac{dp}{dx} = ?$

$$\dot{Q} = \text{konst} = u_1 \pi R^2 = 2\pi R^2\int_0^1 u_2(r/R)\frac{r}{R}\,d\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$= -\frac{R^4}{8\eta}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{8u_1\eta}{R^2}$$

$$\Rightarrow u_2(r) = 2u_1\left(1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)$$

b) IES :




$$-\dot{I}_{Ein} + \dot{I}_{aus} = \Delta p \pi R^2 - F_R$$

mit $\Delta p = p_1 - p_2$

$$F_R = \frac{1}{2}\left(\tau_{Wand}(x=0) + \tau_{Wand}(x=L)\right) 2\pi R L$$

$$\tau_{wand}(x=L) = -\eta \left.\frac{du_2}{dr}\right|_{r=R} = 4\eta \frac{u_1}{R}$$

$$\tau_{wand}(x=0) = C \cdot \tau_w(x=L)$$

$$\Rightarrow F_R = \tau_{wand}(x=L) \cdot (C+1)\pi R L$$

$$\dot{I}_{Ein} = -\rho u_1^2 \pi R_1^2$$

$$\dot{I}_{aus} = 2\pi\rho R^2 \int_0^1 u_2\left(\frac{r}{R}\right)^2 \frac{r}{R}\, d\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^2 \rho u_1^2$$

$$\Rightarrow \quad \rho\frac{u_1^2 \pi R^2}{3} = \Delta p \pi R^2 - \pi R L (C+1) 4\eta \frac{u_1}{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta p = 4\eta \frac{u_1 L (C+1)}{R^2} + \rho \frac{u_1^2}{3}$$

5. Aufgabe (10 Punkte)

a) Auf Referenzgrößen bezogene dimensionslose Größen:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\delta} = \frac{y}{L/\sqrt{Re}}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_\infty/\sqrt{Re}},$$

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \bar{T} = \frac{T}{T_\infty}, \quad \bar{p} = \frac{p}{p_{ref}}$$

Energiegleichung in dimensionsloser Form:

$$\rho_\infty c_p \frac{u_\infty T_\infty}{L} \bar{\rho} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{u_\infty p_{ref}}{L} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) + \lambda \frac{T_\infty}{L^2} \left( \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + Re \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right)$$
$$+ \eta \frac{u_\infty^2}{L^2} \left[ 2 \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{Re}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \sqrt{Re} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right) \right]$$

Grenzschichtannahmen: Größenordnungsabschätzung mit $Re >> 1$ und $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$; weiterhin folgt: $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$

$$\rho_\infty c_p \frac{u_\infty T_\infty}{L} \bar{\rho} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{u_\infty p_{ref}}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \lambda \frac{T_\infty}{L^2} Re \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \eta \frac{u_\infty^2}{L^2} \left( \sqrt{Re} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2$$

Multiplikation mit $L/(u_\infty p_{ref})$

$$\frac{\rho_\infty c_p T_\infty}{p_{ref}} \bar{\rho} \left( \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\lambda T_\infty}{p_{ref} u_\infty L} Re \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{\eta u_\infty}{p_{ref} L} Re \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2$$

b) Aus a) ergeben sich neben der Reynolds Zahl folgende Kennzahlen:

$$K_1 = \frac{\rho_\infty c_p T_\infty}{p_{ref}}$$
$$K_2 = \frac{\lambda T_\infty}{p_{ref} u_\infty L} Re$$
$$K_3 = \frac{\eta u_\infty}{p_{ref} L} Re \quad (\text{mit z.B.} \quad p_{ref} = \rho_\infty u_\infty^2 \quad \Rightarrow \quad K_3 = 1)$$

c) Mit z. B. $p_{ref} = \rho_\infty u_\infty^2$

$$K_1 = \frac{c_p T_\infty}{u_\infty^2} = \frac{\gamma R T_\infty}{(\gamma - 1) u_\infty^2} = \frac{1}{(\gamma - 1) M_\infty^2}$$
$$K_2 = \frac{\lambda T_\infty}{\rho_\infty u_\infty^3 L} Re = \frac{\lambda}{c_p \eta} \frac{c_p T_\infty}{u_\infty^2} \frac{\eta}{\rho_\infty u_\infty L} Re = \frac{1}{Pr} K_1$$
$$K_3 = 1$$

[Mit z.B. $p_{ref} = p_\infty$ käme noch die Euler Zahl hinzu!]

6. Aufgabe

a) Die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ setzt sich (ohne Wandeinfluß) aus Potentialwirbel (Zirkulation $\Gamma$) und Senke (Schluckvermögen $E$) zusammen. Der Wandeinflu kann durch Spiegelung (Abstand jeweils $a$) simuliert werden (Drehsinn des gespiegelten Wirbels entgegengesetzt zum ersten). Damit ergibt sich:

$$F(z) = -\frac{E}{2\pi}\left[\ln(z+a) + \ln(z-a)\right] + \frac{i\Gamma}{2\pi}\left[\ln(z+a) - \ln(z-a)\right]$$

b) kart. Geschwindigkeitskomponenten $u(x,y), v(x,y)$

konjugiert komplexe Geschwindigkeit: $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = \bar{w} = u - iv$

$$= -\frac{E}{2\pi}\left[\frac{1}{z+a} + \frac{1}{z-a}\right] + \frac{i\Gamma}{2\pi}\left[\frac{1}{z+a} - \frac{1}{z-a}\right]$$

$$= -\frac{E}{\pi}\frac{z}{z^2-a^2} - \frac{i\Gamma}{\pi}\frac{a}{z^2-a^2}$$

mit $z^2 - a^2 = (x+iy)^2 - a^2 = b + 2ixy$ und $b = x^2 - y^2 - a^2$

$$\Rightarrow \bar{w} = -\frac{E}{\pi}\frac{(x+iy)(b-2ixy)}{(b+2ixy)(b-2ixy)} - \frac{i\Gamma}{\pi}\frac{a(b-2ixy)}{(b+2ixy)(b-2ixy)}$$

$$= -\frac{E}{\pi}\frac{bx + 2xy^2 + i(by - 2x^2y)}{(b^2+4x^2y^2)} - \frac{i\Gamma}{\pi}\frac{ab - 2ixya}{(b^2+4x^2y^2)}$$

$$= \frac{1}{\pi(b^2+4x^2y^2)}\left[-E(bx+2xy^2) - 2\Gamma axy + i(-E(by-2x^2y) - \Gamma ab)\right]$$

$$\Rightarrow u = -\frac{E(bx+2xy^2) + 2\Gamma axy}{\pi(b^2+4x^2y^2)}$$

$$\Rightarrow v = \frac{E(by-2x^2y) + \Gamma ab}{\pi(b^2+4x^2y^2)}$$

c) Staupunkt: $(x_s, y_s) = (0, -a)$

$$b = -2a^2$$

$$vs = \frac{E(2a^3) + \Gamma(-2a^3)}{\pi(4a^4)}$$

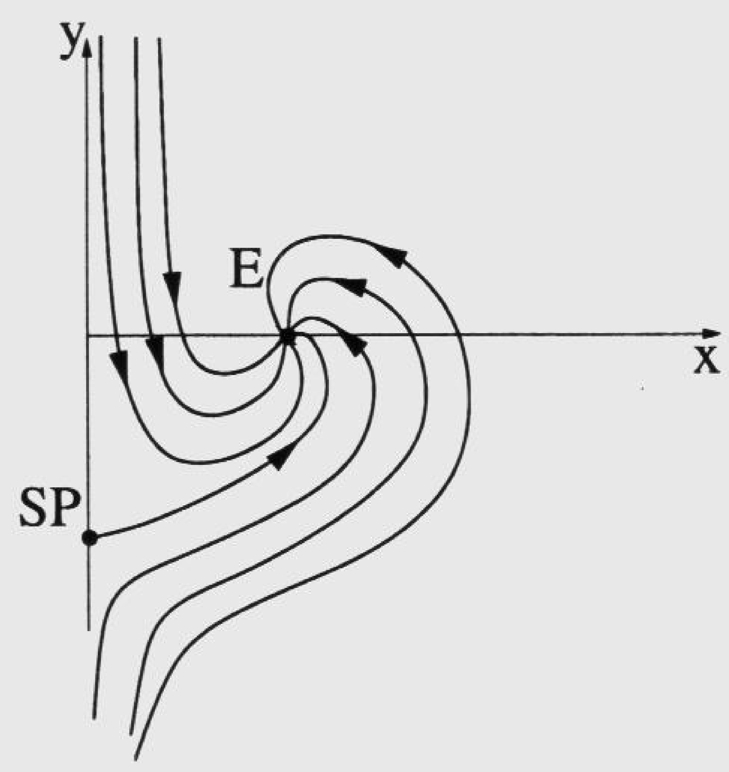
$$\Rightarrow E = \Gamma$$

Geschwindigkeit im Ursprung$(0,0) = |\vec{v}_0| = -v(0,0)$, da $u(0,0) = 0$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \frac{\Gamma ab}{\pi b^2} = \frac{\Gamma a}{\pi(-a^2)} \Rightarrow \Gamma = -v_0\pi a$$

$$\Rightarrow \quad E = \Gamma = -v_0\pi a$$

d) Skizze



**5. Aufgabe** (12 Punkte)

In einer Plattengrenzschicht werden Geschwindigkeitsprofile und Druckverlauf vermessen. Der auf der Platte gemessene Druckverlauf wird durch die Beziehung

$$\frac{p(x)}{p_0} = 1 - k\left(\frac{x}{l}\right)^2 \qquad k = konst. \qquad 0 < k < 1$$

und die Geschwindigkeitsprofile werden durch

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = \left(\frac{y}{\delta_0}\right)^{1/2} \qquad u_a(x=0) = u_\infty$$

wiedergegeben, wobei die Grenzschichtdicke $\delta_0$ konstant ist.

a) Bestimmen Sie die Verdrängungsdicke $\delta_1$ und die Impulsverlustdicke $\delta_2$.

b) Bestimmen Sie die Außengeschwindigkeit $u_a(x)$.

c) Bestimmen Sie die Wandschubspannung $\tau_w(x)$ für $x > 0$.

d) Kann diese Grenzschicht ablösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gegeben: $p_0, k, \delta_0, l, u_\infty, \rho$

Hinweis:

- Die Integralbeziehung nach von Kármán lautet:

$$\frac{d\delta_2(x)}{dx} + \frac{(2\delta_2(x) + \delta_1(x))}{u_a(x)}\frac{du_a(x)}{dx} - \frac{\tau_w(x)}{\rho u_a^2(x)} = 0$$

- Die Grenzschichtgleichung (x-Impuls):

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

5. Aufgabe

a) $\frac{\delta_1}{\delta_0} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d(y/\delta) = \int_0^1 \left(1 - (y/\delta_0)^{1/2}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) =$

$= \left[\frac{y}{\delta_0} - \frac{2}{3}(y/\delta)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \delta_1 = 1/3\, \delta_0$

$\frac{\delta_2}{\delta_0} = \int_0^1 \frac{u}{u_a}\left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d(y/\delta) = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{3/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]_0^1$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \delta_2 = 1/6\, \delta_0$

b) Aus x-Impuls für $y = \delta_0$ (Reibungsterme vernachlässigbar, $v\frac{\partial u}{\partial y}$ vernachlässigbar $v \ll u$)

$\rho u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{-dp}{dx} = p_0 \cdot \frac{2k}{l}\left(\frac{x}{l}\right) = 2\frac{k}{l^2} x\, p_0$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho\frac{\partial u_a^2}{\partial x} = \frac{2kx}{l^2} p_0 \Rightarrow u_a^2 = \frac{2kp_0}{\rho l^2} \cdot x^2 + C$

für $u_a(x=0) = u_\infty \Rightarrow C = u_\infty^2$

$\Rightarrow u_a = \sqrt{u_\infty^2 + \frac{2kp_0}{\rho l^2} x^2}$

c) $\frac{d\delta_2}{dx} = 0$ da $\delta_0 = $ konst.

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho u_a^2(x)} = \frac{2\delta_2(x) + \delta_1(x)}{u_a(x)} \cdot \frac{du_a(x)}{dx}$$

$$\frac{du_a(x)}{dx} = -\frac{dp}{dx} \frac{1}{\rho u_a(x)}$$

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho u_a^2(x)} = \frac{-2/6\,\delta_0 - \frac{1}{3}\delta_0}{\rho u_a^2(x)} \frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

$$\cancel{\tau_w} = \tau_w(x) = -\frac{2}{3}\delta_0 \frac{dp}{dx} = +\frac{4}{3}\delta_0 \frac{p_0 k}{\ell^2} x$$

d) Ablösung für $\tau_w(x) = 0$ da $\tau_w > 0$ $\Rightarrow$ keine Ablösung für $x > 0$

8. Aufgabe:

a) $\frac{u_m}{a_m} = Ma_m$

$\Rightarrow Ma_m = u_m \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma R T_m}}$

Energiesatz ⓪ → m

$c_p T_0 = c_p T_m + \frac{u_m^2}{2}$

$\Rightarrow T_m = T_0 - \frac{u_m^2}{2c_p} = T_0 - \frac{u_m^2 (\gamma - 1)}{2\gamma R}$

$T_m = 293\,K - \frac{544{,}2^2 \cdot 0{,}4}{2 \cdot 1{,}4 \cdot 287} \cdot \frac{m^2\,kg\,K\,s^2}{s^2\,m\,kg\,m}$

$T_m = 145{,}6\,K \Rightarrow Ma_m = \frac{544{,}2}{\sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 145{,}6}} \Rightarrow Ma_m = 2{,}25$

b) $\dot{m} = \rho^* u^* A^* = \rho_m u_m A_m = const.$ mit $u^* = a^*$

$\Rightarrow \dot{m} = \underbrace{\frac{\rho^*}{\rho_0}}_{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}} \cdot \underbrace{\rho_0}_{= \frac{p_0}{RT_0}} \cdot \underbrace{\frac{a^*}{a_0} \cdot a_0}_{} \cdot A^*$

$= \frac{\sqrt{\gamma R T^*}}{\sqrt{\gamma R T_0}} \cdot \sqrt{\gamma R T_0}$

$= \sqrt{\gamma R \underbrace{\frac{T^*}{T_0}}_{= \frac{2}{\gamma+1}} T_0}$

$\Rightarrow \dot{m} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{1/2} \cdot \frac{p_0}{RT_0} \cdot \sqrt{\gamma R T_0} \cdot A^*$

$\dot{m} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1 \cdot 10^5}{287 \cdot 293} \cdot \sqrt{1{,}4 \cdot 287 \cdot 293} \cdot \frac{N}{m^2} \frac{kg\,K}{Nm} \frac{m}{K\,s} \cdot 0{,}1\,m^2$

$\dot{m} = 23{,}613\,\frac{kg}{s}$

c) Meßzeit endet, wenn im Kessel$^{(K)}$ der Druck derart angestiegen ist, dass am Ende der Messstrecke$_{(M)}$ ein senkrechter Verdichtungsstoß steht

$$p_K(t) = \underbrace{\frac{p_K}{p_M}}_{} \cdot \frac{p_M}{p_0} \cdot p_0$$

$$= \underbrace{\left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_M^2 - 1)\right]}_{} \cdot \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_M^2\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \cdot p_0$$

$$= 5{,}739 \cdot 0{,}08648 \cdot p_0$$

$$p_K(t) = 49632 \ \frac{N}{m^2}$$

$$\Delta m_K = \dot{m} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta m_K}{\dot{m}} = \frac{V_K \Delta \rho_K}{\dot{m}} = \frac{V_K}{\dot{m} R T_K} \cdot \Delta p_K$$

$$\Delta p_K = p_K(t) - p_K(t=0) = (49632 - 7500)\frac{N}{m^2} = 42132 \ \frac{N}{m^2}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{300 \cdot 41132}{23{,}613 \cdot 287 \cdot 293} \cdot \frac{\cancel{m^3}\ s\ \cancel{kg}\,\cancel{K}\ \cancel{N}}{\cancel{kg}\ \cancel{Nm}\ \cancel{K}\ \cancel{m^2}}$$

$$\Delta t = 6{,}37 \ s$$

d) $$\dot{m} = \rho_M u_M A_M \Rightarrow A_M = \frac{\dot{m}}{\rho_M u_M} = \frac{\dot{m}}{u_M} \frac{\rho_0}{\rho_M} \cdot \frac{1}{\rho_0}$$

$$A_M = \frac{\dot{m}}{u_M} \cdot \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_M^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \frac{R T_0}{p_0}$$

$$A_M = \frac{23{,}613 \cdot 287 \cdot 293}{544{,}2 \cdot 10^5} \cdot 5{,}746 \cdot \frac{kg}{s} \frac{s}{m} \frac{Nm}{kg\,K} \frac{m^2\,K}{N}$$

$$A_M = 0{,}21 \ m^2$$