....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungslehre“ (Diplom)

13. 08. 2010

1. Aufgabe

a) außen: $0 \to 1 : p_0 + \rho_W g(H_1 + L) = p_1$

innen: $0' \to 1' : p_0' + \rho_{\text{Öl}} g(H_1 + L + \Delta H) = p_1'$

$p_1 = p_1'$ und $p_0 = p_0' = p_a$

$$\Delta H = (\frac{\rho_W}{\rho_{\text{Öl}}} - 1)(H_1 + L)$$

b) Lösungsweg I:

allgemein 2-dim.: $F = \int p(z) \cdot 1 \cdot ds$

Koordinatentransf.: $s = \frac{z}{cos\alpha}$; $ds = \frac{dz}{cos\alpha}$

Vektorzerlegung: $F_{z,a} = -F \cdot \sin\alpha$ (außen) ; $F_{z,i} = F \cdot \sin\alpha$ (innen)

$$\Rightarrow F_{z,a} = -\int_0^L p(z) \cdot \sin\alpha \cdot \frac{dz}{\cos\alpha}$$

$$F_{z,a} = -\tan\alpha \int_0^L (p_1 - \rho_W g z) dz = -\tan\alpha \left[p_1 z - \rho_W g \frac{z^2}{2} \right]_0^L$$

$$= L \cdot \tan\alpha (\rho_W g \frac{L}{2} - p_1) \quad \text{mit} \quad \tan\alpha = \frac{r_2 - r_1}{L}$$

$$\Rightarrow F_{z,a} = L \cdot \frac{r_2 - r_1}{L} \left(\rho_W g \frac{L}{2} - p_1 \right)$$

analog: $F_{z,i} = L \cdot \frac{r_2 - r_1}{L} \left(p_1 - \rho_{\text{Öl}} g \frac{L}{2} \right)$

$$\sum F_{A,Tr} = 2 \cdot (F_{z,i} + F_{z,a}) = (d_2 - d_1) L g \frac{\rho_W - \rho_{\text{Öl}}}{2}$$

Lösungsweg II:

Archimedes: $F_{A,Tr} = A \cdot 1 \cdot g \cdot \Delta\rho$ mit $A = L\frac{d_2 - d_1}{2}$ und $\Delta\rho = (\rho_W - \rho_{\text{Öl}})$

c) $F_{A,ges} = G_{ges} \quad \Rightarrow \quad \rho_M = \frac{(F_{A,ges})}{g(V_{Tr} + V_R)}$ ges: Gesamt, R: Rohr

$V_R = \pi d_1 t H_2$ mit Hinweis und V_{Tr} und $F_{A,ges}$ aus Aufgabentext

$$\Rightarrow \rho_M = \frac{F_{A,ges}}{V_{Tr} + \pi d_1 t H_2}$$

d) $F_{A,R} = 0$

2. Aufgabe

a) HGG und Bernoulli von $\boxed{0}$ nach $\boxed{k}$:

außen: $p_{a_0} = p_{a_k} + \rho_L g(h_k - h_0) \quad \text{mit} \quad k = 1, 2$

innen: $p_{a_0} = p_{a_k} + \frac{\rho_G}{2} v_{G_k}^2 + \rho_G g(h_k - h_0)$

$$p_{a_0} + \rho_L g h_0 = p_{a_k} + \frac{\rho_G}{2} v_{G_k}^2 + \rho_G g(h_k - h_0) + \rho_L g h_0$$

$$v_{G_k} = \sqrt{2g(h_k - h_0)(\frac{\rho_L}{\rho_G} - 1)}$$

Konti: $v_{G_2} \frac{\pi d_2^2}{4} = v_{G_1} \frac{\pi d_1^2}{4}$

$$\frac{v_{G_1}}{v_{G_2}} = \frac{d_2^2}{d_1^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d_1}{d_2} = \sqrt{\frac{v_{G_2}}{v_{G_1}}}$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \sqrt[4]{\frac{h_2 - h_0}{h_1 - h_0}}$$

b) Bernoulli von $\boxed{0}$ nach $\boxed{2}$:

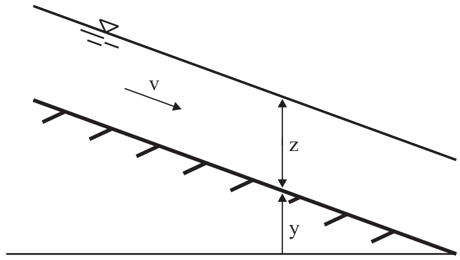
außen: $p_{a_0} = p_{a_2} + \rho_L g(h_2 - h_0)$

innen: $p_{a_0} = p_{a_2} + (1 + \zeta_{Dr}) \frac{\rho_G}{2} v_{G_2}^2 + \rho_G g(h_2 - h_0)$

$$d_1 = d_2 \quad , \quad \dot{V}_1 = \dot{V}_2 \quad \Rightarrow \quad v_{G_2} = v_{G_1}$$

$$\zeta_{Dr} = \frac{h_2 - h_1}{h_1 - h_0}$$

3. Aufgabe



a) Bernoulli: $\rho g z + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g y = konst$

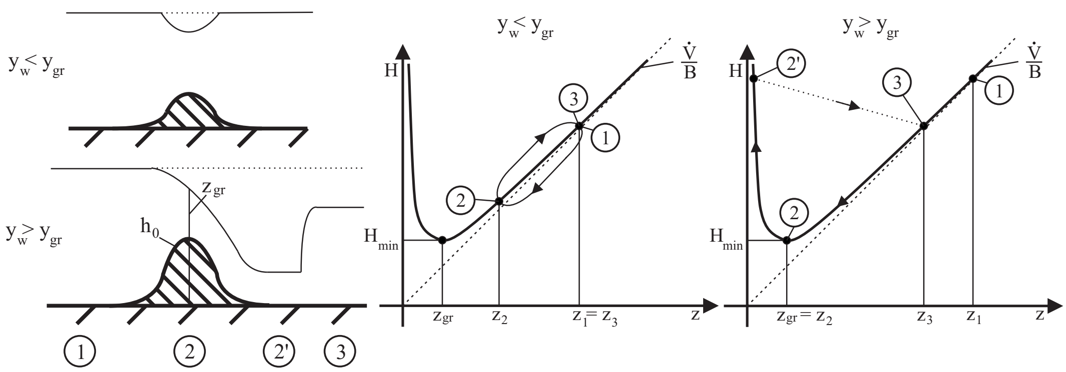
$$\Rightarrow \quad z + \frac{v^2}{2g} + y = konst$$

$$H = z + \frac{v^2}{2g} \quad \text{mit} \quad v = \frac{\dot{V}}{Bz} \quad \Rightarrow \quad H = z + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z^2}$$

$$H_{min}: \quad \frac{\partial H}{\partial z} \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}}$$

$$H_{min} = z_{gr} + \frac{\dot{V}^2}{2gB^2z_{gr}^2} = \frac{3}{2} z_{gr} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{gB^2}}$$

b) $y_W > y_{gr}$



c) $\Delta P = \dot{V} \cdot \Delta p_0 \quad$ und $\quad v_P = konst \quad$ und $\quad z_1^* = z_3$

$$\Delta p_0 = (p_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2)_{nachher} - (p_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2)_{vorher} = (p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2) - (p_3 + \frac{\rho}{2} v_3^2)$$

$p_1 = p_a + \rho g z_1 \quad$ und $\quad p_3 = p_a + \rho g z_3$

$$\Delta p_0 = \rho g (z_1 - z_3) + \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_3^2)$$

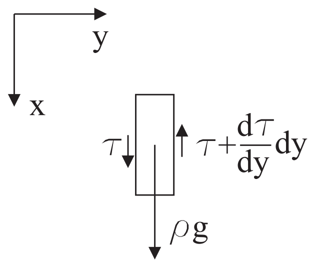
$$H = z + \frac{v^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad \Delta p_0 = \rho g (H_1 - H_3) \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \dot{V} \rho g (H_1 - H_3)$$

$$\underline{H_3 = z_3 + \frac{\dot{V}^2}{2g z_3^2 B^2}} \quad \wedge \quad H_1 = H_{min} + y_W \quad (\text{für } y_W > y_{gr}: H_1 > H_3)$$

$$\underline{H_{min} = \frac{3}{2} z_{gr}} \quad \text{mit} \quad \underline{z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}}}$$

$$\Delta P = \dot{V} \rho g (H_{min} + y_W - H_3) \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \dot{V} \rho g \left(\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}} + y_W - \left(z_1^* + \frac{\dot{V}^2}{2g(z_1^*)^2 B^2} \right) \right)$$

4. Aufgabe



a) $\sum F = 0$ ausgebildete Strömung, keine Druckkräfte

$$\tau B \cdot dx - (\tau + \frac{d\tau}{dy}dy)B \cdot dx + \rho g B \cdot dx\, dy = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d\tau}{dy} = \rho g \quad \text{Newton Fluid } \tau = -\eta \frac{du}{dy}$$

$$\Longrightarrow \eta \frac{d^2u}{dy^2} = -\rho g$$

b) $\int \eta \frac{d^2u}{dy^2}\, dy = \int -\rho g\, dy \Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{\rho}{\eta} g y + C_1 \quad ; \quad u = \frac{-\rho g}{2\eta}\, y^2 + C_1 \cdot y + C_2$

Zwei Gebiete:

$$0 \leq y \leq h: \quad u_1(y) = -\frac{\rho_1 g}{2\eta_1}\, y^2 + C_1 \cdot y + C_2$$

$$h < y \leq 2h: \quad u_2(y) = -\frac{\rho_2 g}{2\eta_2}\, y^2 + C_3 \cdot y + C_4$$

R.B.:

$$y = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow \underline{C_2 = 0}$$

$$y = h \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 \Rightarrow \eta_1 (\frac{du_1}{dy}) = \eta_2 (\frac{du_2}{dy}) \Rightarrow -\rho_1 g h + \eta_1 C_1 = -\rho_2 g h + \eta_2 C_3$$

$$y = 2h \Rightarrow \tau_2 = 0 \Rightarrow -\rho_2 g \cdot 2h + \eta_2 C_3 = 0 \Rightarrow \underline{C_3 = \frac{\rho_2}{\eta_2} g \cdot 2h}$$

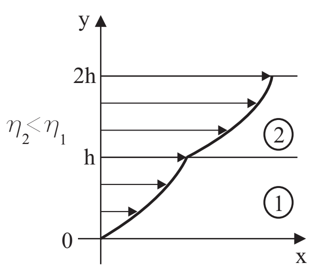
$$\eta_1 C_1 = -\rho_2 g h + \rho_1 g h + \rho_2 g \cdot 2h \Rightarrow \underline{C_1 = \frac{gh}{\eta_1}(\rho_1 + \rho_2)}$$

$$y = h \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow -\frac{\rho_1 g}{2\eta_1} h^2 + C_1 h = -\frac{\rho_2 g}{2\eta_2} h^2 + C_3 h + C_4$$

$$\underline{C_4 = \frac{g h^2 (\eta_2(\rho_1 + 2\rho_2) - 3\eta_1 \rho_2)}{2\eta_1 \eta_2}}$$

$$u_1(y) = -\frac{\rho_1 g}{2\eta_1} y^2 + \frac{gh}{\eta_1}(\rho_1 + \rho_2) y$$

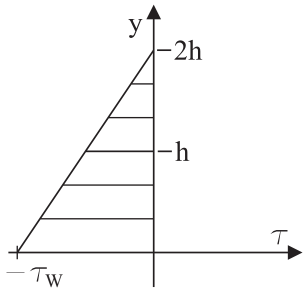
$$u_2(y) = -\frac{\rho_1 g}{2\eta_1} y^2 + 2h \frac{\rho_2}{\eta_2} g y + \frac{g h^2 (\eta_2(\rho_1 + 2\rho_2) - 3\eta_1 \rho_2)}{2\eta_1 \eta_2}$$



c) Schubspannung an der Wand:

$$\tau_W = \eta_1 \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \eta_1 C_1 = g h (\rho_1 + \rho_2)$$

d) Schubspannungsverteilung



5. Aufgabe

a) Einflussgrößen:

$$
\begin{aligned}
\text{Partikeldurchmesser } d_P \quad [d] &\doteq m \\
\text{Partikeldichte } \rho_P \quad [\rho] &\doteq \frac{kg}{m^3} \\
\text{Dichte des Fluids } \rho_F \quad [\rho] &\doteq \frac{kg}{m^3} \\
\text{Viskosität des Fluids } \eta_F \quad [\eta] &\doteq \frac{kg}{m\,s} \\
\text{Sinkgeschwindigkeit } v_s \quad [v] &\doteq \frac{m}{s} \\
\text{Erdbeschleunigung } g \quad [g] &\doteq \frac{m}{s^2}
\end{aligned}
$$

Es sind 6 Variable vorhanden mit insgesamt 3 unterschiedlichen Grundeinheiten $(s,\, m,\, kg)$.

$\Rightarrow$ Laut Pi-Theorem besitzt das Problem $6-3=3$ Kennzahlen.

Wiederkehrende Variable: $g,\, d_P,\, \rho_P$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Pi_1 &= v_s \cdot g^\alpha \cdot d_P^\beta \cdot \rho_P^\gamma \\
[m]:\ 0 &= 1+\alpha+\beta-3\gamma \quad \Rightarrow \beta = -1/2 \\
[s]:\ 0 &= -1-2\alpha \quad \Rightarrow \alpha = -1/2 \\
[kg]:\ 0 &= \gamma \quad \Rightarrow \gamma = 0 \\
\Rightarrow \Pi_1 &= \frac{v_s}{\sqrt{g d_P}} = Fr
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Pi_2 &= \rho_F \cdot g^\alpha \cdot d_P^\beta \cdot \rho_P^\gamma \\
[m]:\ 0 &= -3+\alpha+\beta-3\gamma \quad \Rightarrow \beta = 0 \\
[s]:\ 0 &= 0-2\alpha \quad \Rightarrow \alpha = 0 \\
[kg]:\ 0 &= 1+\gamma \quad \Rightarrow \gamma = -1 \\
\Rightarrow \Pi_2 &= \frac{\rho_F}{\rho_P}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \Pi_3 &= \eta_F \cdot g^\alpha \cdot d_P^\beta \cdot \rho_P^\gamma \\
[m]:\ 0 &= -1+\alpha+\beta-3\gamma \quad \Rightarrow \beta = -3/2 \\
[s]:\ 0 &= -1-2\alpha \quad \Rightarrow \alpha = -1/2 \\
[kg]:\ 0 &= 1+\gamma \quad \Rightarrow \gamma = -1 \\
\Rightarrow \Pi_3 &= \frac{\eta_F}{\sqrt{g d_P}\rho_P d_P} = \frac{\rho_F}{\rho_P}\frac{\eta_F}{\rho_F d_P v_s}\frac{v_s}{\sqrt{g d_P}} = \frac{Fr}{Re}\frac{\rho_F}{\rho_P}
\end{aligned}
$$

b) Damit das Ergebnis für die Sinkgeschwindigkeit übertragen werden kann, müssen die drei dimensionslosen Kennzahlen übereinstimmen:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{F,1}}{\rho_{P,1}} &= \frac{\rho_{F,2}}{\rho_{P,2}} \\ \Rightarrow \rho_{F,1} &= \frac{\rho_{F,2}}{\rho_{P,2}}\,\rho_{P,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Fr_1 &= Fr_2 \\ \frac{v_s}{\sqrt{g d_{P,1}}} &= \frac{v_{s,2}}{\sqrt{g d_{P,2}}} \\ \Rightarrow v_{s,2} &= v_{s,1}\sqrt{\frac{d_{P,2}}{d_{P,1}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Re_1 &= Re_2 \\ \frac{\rho_{F,1} d_{P,1} v_{s,1}}{\eta_{F,1}} &= \frac{\rho_{F,2} d_{P,2} v_{s,2}}{\eta_{F,2}} \\ \Rightarrow \eta_{F,1} &= \eta_{F,2}\frac{\rho_{P,1}}{\rho_{P,2}}\frac{{d_{P,1}}^{3/2}}{{d_{P,2}}^{3/2}} \end{aligned}$$

c) Eine zusätzliche Einflussgröße mit keiner weiteren Grundeinheit:

Oberflächenspannung $\sigma_F \quad [\sigma] \doteq \dfrac{kg}{s^2}$
$\Rightarrow$ Eine zusätzliche Kennzahl:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Pi_4 &= \sigma_F \cdot g^{\alpha} \cdot d_P^{\beta} \cdot \rho_P^{\gamma} \\ [m]:\ 0 &= 0 + \alpha + \beta - 3\gamma \quad \Rightarrow\ \beta = -2 \\ [s]:\ 0 &= -2 - 2\alpha \quad \Rightarrow\ \alpha = -1 \\ [kg]:\ 0 &= 1 + \gamma \quad \Rightarrow\ \gamma = -1 \\ \Rightarrow \Pi_4 &= \frac{\sigma_F}{\rho_P\, d_P^2\, g} = \frac{\sigma_F}{\rho_P v_s^2 d_P}\frac{v_s^2}{g\, d_P} = Fr^2\frac{\sigma_F}{\rho_P v_s^2 d_P} = Fr^2\frac{1}{We} \end{aligned}$$

6. Aufgabe

a) Potentialfunktion:

$$\Phi(r,\varphi) = u_\infty r\cos\varphi + v_\infty r\sin\varphi + \frac{E}{2\pi}\ln r + \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi \text{ oder}$$

$$\Psi(r,\varphi) = u_\infty r\sin\varphi - v_\infty r\cos\varphi + \frac{E}{2\pi}\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

$$\Rightarrow v_r(r,\varphi) = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = u_\infty\cos\varphi + v_\infty\sin\varphi + \frac{E}{2\pi r}$$

$$\Rightarrow v_\varphi(r,\varphi) = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -u_\infty\sin\varphi + v_\infty\cos\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

b) Staupunkt:

$$v_r = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{-E}{2\pi(u_\infty\cos\varphi + v_\infty\sin\varphi)}$$

$$v_\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{-\Gamma}{2\pi(v_\infty\cos\varphi - u_\infty\sin\varphi)}$$

$$\Rightarrow -E\left(v_\infty\cos\varphi - u_\infty\sin\varphi\right) = -\Gamma\left(u_\infty\cos\varphi + v_\infty\sin\varphi\right)$$

$$-E\left(v_\infty - u_\infty\tan\varphi\right) = -\Gamma\left(u_\infty + v_\infty\tan\varphi\right)$$

$$\Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{Ev_\infty - \Gamma u_\infty}{\Gamma v_\infty + Eu_\infty}\right)$$

Berechne v_∞ so, dass $\varphi_s = 45° = \frac{\pi}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{Ev_\infty - \Gamma u_\infty}{\Gamma v_\infty + Eu_\infty} = 1$

$$v_\infty(E-\Gamma) = u_\infty(E+\Gamma) \quad \Rightarrow \quad v_\infty = u_\infty\frac{E+\Gamma}{E-\Gamma}$$

Koordinaten des Staupunktes: $\varphi_s = \frac{\pi}{4}$

$$r_s = \frac{-E}{2\pi\left(u_\infty\frac{1}{\sqrt{2}} + u_\infty\frac{E+\Gamma}{E-\Gamma}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$= -\frac{(E-\Gamma)}{2\sqrt{2}\pi u_\infty}$$

c) Stromfunktion:

$$\Psi(r,\varphi) = u_\infty r\sin\varphi - v_\infty r\cos\varphi + \frac{E}{2\pi}\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

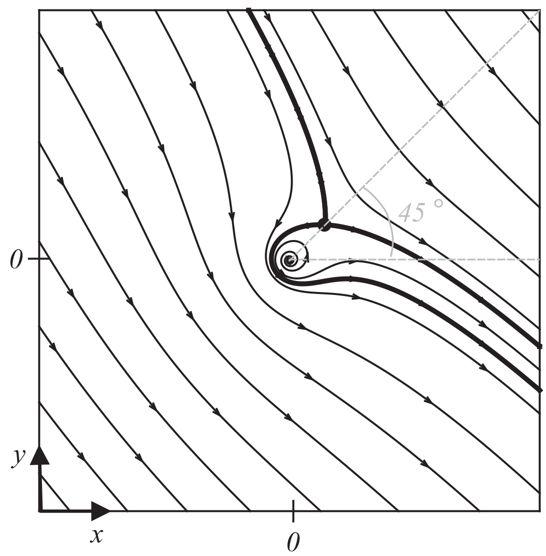
Punkt *London* hat Koordinaten $r = 1,\ \varphi = -\frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \Psi_L = -\frac{u_\infty}{\sqrt{2}} - \frac{v_\infty}{\sqrt{2}} - \frac{E}{2\pi}\frac{\pi}{4} - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln 1$

$$= -\frac{u_\infty}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{E+\Gamma}{E-\Gamma}\right) - \frac{E}{8} = -\frac{\sqrt{2}u_\infty E}{E-\Gamma} - \frac{E}{8}$$

Stromfunktion im Ursprung: $\quad \Psi(0,0) \to \infty$

d) Berechne erst den Wert der Stromfunktion auf der Staupunktstromlinie Ψ_s. Der Ursprung liegt sicher in der Aschewolke (Quelle der Aschewolke liegt im Ursprung) und besitzt ein Maximum der Stromfunktion. Daher entscheide, ob $\Psi_L \in [\Psi_s, \Psi(0,0)]$. In diesem Fall befindet sich London unter der Aschewolke. Andernfalls befindet sich saubere Luft über London.

e) Skizze:



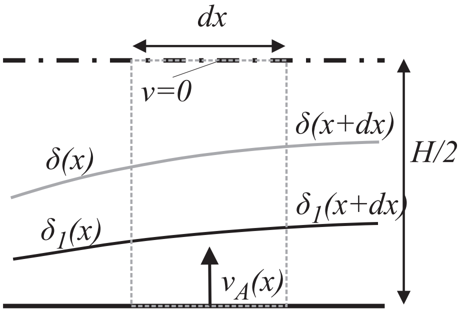
7. Aufgabe

a) Aus Eulergleichung

$$u_a(x)\frac{du_a(x)}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$$

folgt mit $p = konst.$ dass $u_a(x) = u_\infty = konst.$

b) Massenerhaltung/Volumenbilanz am differenziellen Element:



Wegen $v(x, H/2) = 0$ kein Volumenstrom über die Symmetrieebene $y = H/2$.

$$u_\infty\left(\frac{H}{2} - \delta_1(x)\right) + v_A(x + \frac{dx}{2})dx = u_\infty\left(\frac{H}{2} - \delta_1(x + dx)\right)$$

$v_A(x), \delta_1(x)$ mit Taylorreihe entwickeln:

$$\begin{aligned} v_A(x + \frac{dx}{2}) &= v_A(x) + \frac{dv_A}{dx}\frac{dx}{2} + \cdots \\ \delta_1(x + dx) &= \delta_1(x) + \frac{d\delta_1}{dx}dx + \cdots \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ einsetzen in Volumenbilanz:

$$-u_\infty\,\delta_1 \;+\; v_A\,dx \;+\; \underbrace{\frac{dv_A}{dx}\frac{dx}{2}\,dx}_{\text{von höherer Ordnung} \to \text{klein}} = -u_\infty\,\delta_1 - u_\infty\frac{d\delta_1}{dx}\,dx$$

$$\Rightarrow \qquad v_A = -u_\infty\frac{d\,\delta_1}{d\,x}$$

c) $\delta_1 = \delta\int_0^1\left(1 - \frac{u}{u_a}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{1}{2}\delta$

$$\delta_2 = \delta\int_0^1\frac{u}{u_a}\left(1 - \frac{u}{u_a}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{1}{6}\delta$$

$$\tau(y = 0) = -\eta\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = -\frac{\eta\,u_a}{\delta}\left.\frac{d\left(\frac{u}{u_a}\right)}{d\left(\frac{y}{\delta}\right)}\right|_{\frac{y}{\delta}=0} = -\frac{\eta\,u_a}{\delta} = -\frac{\eta\,u_\infty}{\delta}$$

Einsetzen in Kàrmàn-Pohlhausen:

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{d\delta_2}{d\delta}\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{6}\frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{d\delta_1}{dx} = \frac{d\delta_1}{d\delta}\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d\delta}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\frac{d\delta}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\delta}{dx} = \frac{\eta}{\rho\, u_\infty\, \delta}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\delta\, d\delta = \frac{\eta}{\rho u_\infty}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3}\delta^2 = \frac{\eta}{\rho\, u_\infty}x + C$$

Anfangsbedingung für δ: $\quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$$\Rightarrow \quad \delta(x) = \sqrt{3}\sqrt{\frac{\eta x}{\rho u_\infty}}$$

d) $v_A(x) = -u_\infty \dfrac{d\,\delta_1}{dx} = -u_\infty \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{3}\sqrt{\dfrac{\eta x}{\rho u_\infty}}\right) = -u_\infty \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3\eta}{\rho u_\infty}}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{3\eta u_\infty}{\rho x}}$

e) Massenerhaltung/Volumenbilanz über den kompletten Kanal:

$$u_\infty H = 2\dot{V}_{ab} + (H - 2\delta_1(L))u_\infty = 2\dot{V}_{ab} + (H - \delta(L))u_\infty = 2\dot{V}_{ab} + (H - h)u_\infty$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{2\dot{V}_{ab}}{u_\infty}$$

Aus $\delta(L) = \sqrt{3}\sqrt{\frac{\eta L}{\rho u_\infty}} = h$ folgt:

$$L = \frac{u_\infty \rho}{3\eta}\frac{4\dot{V}_{ab}^2}{u_\infty^2} = \frac{4}{3}\frac{\dot{V}_{ab}^2\rho}{\eta u_\infty}$$

8. Aufgabe

a) Temperaturverhältnis $\frac{T}{T_0}$:

$$h_0 = h + \frac{1}{2}u^2 \quad \Rightarrow \quad c_p T_0 = c_p T + \frac{1}{2}\gamma R T M^2$$

mit $h = c_p T, \quad c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$ und $u = M\sqrt{\gamma R T}$

$$\frac{T}{T_0} = (1 + \frac{\gamma - 1}{2}M^2)^{-1}$$

Temperatur am Austritt:

$T = T^* = \dfrac{2}{\gamma + 1}T_0$ mit $M = 1$ (engster Querschnitt und $\dfrac{p_a}{p_0} = \dfrac{1}{5} < 0,528$)

Geschwindigkeit u am Austritt:

$$u = c^* = \sqrt{\gamma R T^*} = \sqrt{\frac{2\gamma R T_0}{\gamma + 1}}$$

b) Massenstrom $\dot{m}$:

$$\dot{m} = \rho^* c^* A^*$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \frac{\rho^*(t)}{\rho_0(t)}\rho_0(t)\sqrt{\gamma R \frac{T^*}{T_0} T_0} A_{aus} = \frac{p^*}{p_0(t)}\frac{p_0(t)}{R T^*}\sqrt{\gamma R \frac{T^*}{T_0} T_0} A_{aus}$$

$$= \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} p_0(t)\sqrt{\frac{\gamma}{R T_0}}\left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{-1/2} A_{aus}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{m} = \left(\frac{2}{\gamma + 1}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}\sqrt{\frac{\gamma}{R T_0}} A_{aus}\, p_0(t)$$

c) austretende Masse Δm:

$$\Delta m = -V(\rho_0(t_e) - \rho_0(t_0))$$

$\Rightarrow \Delta m = \dfrac{V}{R T_0}(p_0(t_0) - p_0(t_e))$ mit $\rho_0 = \dfrac{p_0}{R T_0}$ und $T_0 = konst.$

$p_0(t_e) = \dfrac{p_0(t_e)}{p_a} p_a = \left(\dfrac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} p_a$ (kritisches Druckverhältnis)

$$\Rightarrow \Delta m = \frac{V}{R T_0}\left(p_0(t_0) - \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} p_a\right)$$