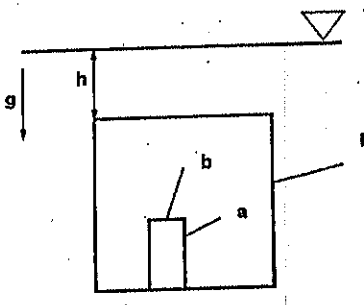
(Name, Matr.-Nr., Unterschrift)

Klausur Strömungslehre I/II

9. 7. 1999

1. Aufgabe (10 Punkte)

Eine Forschungsstation in Gestalt eines Würfels mit der Kantenlänge L wird mit der Tiefe h in ein Gewässer getaucht. Im Inneren der Station herrscht Umgebungsdruck p_a. Durch eine rechteckige Tür mit den Seitenlängen a und b kann die Station verlassen werden. Beim Öffnen dreht sich die Tür um die Kante a.



a) Welche Kraft F_A ist erforderlich, um die Türe zu öffnen, wenn F_A im Abstand $2/3b$ von der Drehachse der Tür angreift?

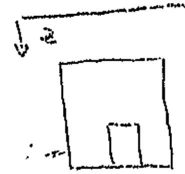
b) Ein Mann/eine Frau kann zum Öffnen der Türe die Kraft F_M aufbringen ($F_M < F_A$). Damit F_M ausreicht, muß die Station bis zur Höhe x geflutet werden, ohne daß Luft entweicht. Stellen Sie eine Beziehung zwischen F_M und x auf.

Gegeben: $L, h, a, b, p_a, \rho, g, F_M$

Hinweis:

- die Luft im Inneren der Station verhalte sich wie ein ideales Gas
- die Zustandsänderung der Luft ist isotherm

(1)



a) $p(z) = p_a + \rho g z$

$F_i = p_a \cdot a b$

$F_a = p_a \cdot ab + \frac{1}{2} \rho g ab (L + h + L + h - a)$

$F_{ges} = F_a - F_i = \rho g a b \left(L + h - \frac{a}{2}\right)$

Momentengleichgewicht: $F_{ges} \cdot \frac{b}{2} = F_A \cdot \frac{2}{3} b$

$\rightarrow F_A = \frac{3}{4} \rho g a b \left(L + h - \frac{a}{2}\right)$

b) Masse der Luft = konst, isotherm $\Big\}$ $\frac{p_i}{\rho_i} = \text{const.}$

$$\frac{p_a L^3}{M_L} = \frac{p_{ib} L^2 (L-x)}{M_L} \rightarrow p_{ib} = p_a \frac{L}{L-x}$$

$$F_i = p_{ib} \cdot ab + \rho g b \frac{x^2}{2} = p_a \frac{L}{L-x} ab + \rho g b \frac{x^2}{2}$$

$$F_{res} = p_a ab + \frac{1}{2} \rho g a b (2L + 2h - a) - p_a \frac{L}{L-x} ab - \rho g b \frac{x^2}{2}$$

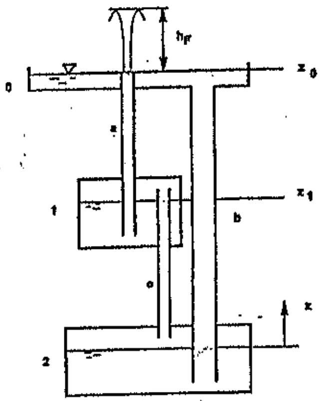
Momentengleichgewicht: $\frac{F_{res} \cdot b}{2} = F_M \cdot \frac{2}{3} b$

$$\rightarrow \frac{4}{3} F_M = p_a ab \left(- \frac{x}{L-x}\right) + \rho g b \left(La + ha - \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} x^2\right)$$

177

2. Aufgabe (13 Punkte)

Im zweiten Jahrhundert vor Christus erfand Heron von Alexandrien die abgebildete Fontäne. Das Wasser aus der Düse wird im Becken 0 aufgefangen und fließt dann durch die Leitung b (Durchmesser $d_b = 40mm$) in den unteren Behälter 2. Dieser ist über die Leitung c mit dem mittleren Behälter 1 verbunden. Die Fontäne wird durch den mittleren Behälter über die Leitung a (Durchmesser $d_a = 10mm$)gespeist.
Das Wasser, das in den unteren Behälter zurückfließt, verwirbelt dort. Die gesamte Strömung kann als reibungsfrei und stationär betrachtet werden.



Zu einem bestimmten Zeitpunkt betragen die Spiegelhöhen $z_0 = 25m$ und $z_1 = 15m$.

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Wasser die Düse verläßt.

b) Wie groß ist der Volumenstrom?

c) Wie groß ist die Steighöhe der Fontäne?

Im folgenden soll das Problem unter Berücksichtigung von Druckverlusten in den beiden Rohren a und b betrachtet werden.
In der Einlaufstrecke entsteht jeweils ein Druckverlust, der durch den Verlustbeiwert $\zeta = 1.16$ erfaßt wird. Die Rohrreibungsbeiwerte (für die Längen L_a und L_b) sind

$$\lambda_a = 0.0238$$
$$\lambda_b = 0.0337$$

bestimmt werden.

d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der das Wasser die Düse verläßt, unter Berücksichtigung von Druckverlusten.

e) Sind die Rohrströmungen laminar oder turbulent?

Gegeben: $\rho = 1kg/l, \eta = 10^{-3}Ns/m^2, p_a = 1bar, d_a = 10mm, d_b = 40mm,$
$L_a = 12m, L_b = 26m, g = 9.81m/s^2, z_0 = 25m, z_1 = 15m$

(2)

a) Bernoulli 0 - 2: $p_a + \rho g z_0 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_b^2$

$1 \rightarrow 0: p_1 + \rho g z_1 = p_a + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho v_a^2$
$= p_a + \rho g (z_0 + h_F)$

$p_1 = p_2 = p_a + \rho g z_0 - \frac{1}{2}\rho v_b^2$

konti (stationär): $v_b d_b^2 = v_a d_a^2$

$p_a + \rho g z_0 - \frac{1}{2}\rho v_b^2 + \rho g z_1 = p_a + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho v_a^2$

$\rightarrow \rho g z_1 = \frac{1}{2}\rho\left(1 + \left(\frac{d_a}{d_b}\right)^4\right) \cdot v_a^2$

$\rightarrow v_a = \sqrt{\frac{2 g z_1}{1 + \left(\frac{d_a}{d_b}\right)^4}} = 17.122 \frac{m}{s}$

b) $\dot{Q} = v_a \cdot \frac{\pi}{4} d_a^2 = 0.0013447 \frac{m^3}{s}$

c) $h_F = \frac{v_a^2}{2g} = 14.942 m$

d) Bernoulli mit Verlustterm

$p_a + \rho g z_0 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_b^2 \left(1 + \zeta + \lambda_b \frac{L_b}{d_b}\right)$

$p_1 + \rho g z_1 = p_a + \rho g z_0 + \frac{1}{2}\rho v_a^2 \left(1 + \zeta + \lambda_a \frac{L_a}{d_a}\right)$

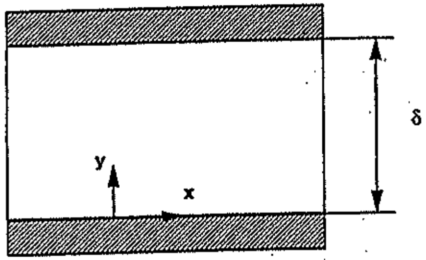
$\rightarrow v_a = \sqrt{\frac{2 g z_1}{1 + \zeta + \lambda_a \frac{L_a}{d_a} + \frac{d_a^4}{d_b^4}\left(1 + \zeta + \lambda_b \frac{L_b}{d_b}\right)}} = 3.08 \frac{m}{s}$

e) $v_b = v_a \cdot \frac{d_a^2}{d_b^2} = 0.193 m/s$

$Re_a = \frac{\rho v_a d_a}{\eta} = [illegible].800$ $\quad Re_b = \frac{\rho v_b d_b}{\eta} = 7720 > 2.300 \rightarrow$ turb.

4. Aufgabe (13 Punkte)

Zwischen zwei ebenen, unendlich ausgedehnten horizontal angeordneten Platten mit dem Abstand δ befindet sich eine Flüssigkeit. Durch einen Druckgradienten in x-Richtung wird eine Strömung induziert.



a) Leiten Sie für diese ausgebildete laminare Schichtenströmung die Differentialgleichung zur Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung in einem Newton'schen Fluid her.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$ und skizzieren Sie sorgfältig Ihr Ergebnis für $\eta = konst.$

c) Bestimmen Sie die Schubspannungen an den Wänden und den auf die Breite bezogenen Volumenstrom

Gegeben: $\delta, \frac{\partial p}{\partial x}, \eta$

Im zweiten Teil der Aufgabe sei die obere Platte geheizt, sodaß sich eine linearer Temperaturverteilung im Spalt einstellt.

$$T(y) = T_u + \Delta T \frac{y}{\delta}$$

Der Zusammenhang zwischen der Temperatur und der Zähigkeit lautet:

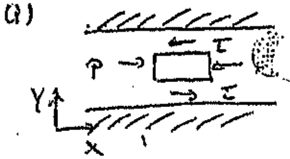
$$\eta = K/T$$

d) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$

Gegeben: $\delta, \frac{\partial p}{\partial x}, T_u, T_o, K$

(4)

a)



$(p(x) - p(x+dx))\,dy + (\tau(y) - \tau(y+dy))\,dx = 0$

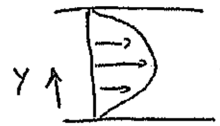
$\rightarrow \frac{dp}{dx} + \frac{d\tau}{dy} = 0$

$\tau = -\eta \frac{du}{dy} \rightarrow \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}$

b) 1. Integration $\frac{du}{dy} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx} y + C_1$ 2. Integration: $u(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx} y^2 + C_1 y + C_2$

RB: $y = 0, \delta \rightarrow u = 0$

$u(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\delta^2\left[\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{y}{\delta}\right]$



$\frac{dp}{dx} < 0$

c) $y = 0$: $\tau_w = -\frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\delta$; $y = \delta$: $\tau_w = \frac{1}{2}\frac{dp}{dx}\delta$

$\frac{\dot{Q}}{b} = \int_0^\delta u(y)\,dy = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\delta^2\left[\frac{1}{3}\frac{y^3}{\delta^2} - \frac{1}{2}\frac{y^2}{\delta}\right]_0^\delta = -\frac{1}{12\eta}\frac{dp}{dx}\delta^3$

d) $\eta = \frac{k}{T_u + \Delta T \frac{y}{\delta}}$; $\tau = -\frac{dp}{dx} y + C_1 = -\frac{k}{T_u + \Delta T \frac{y}{\delta}}\frac{du}{dy}$

$\frac{du}{dy} = \frac{T_u + \Delta T\, y/\delta}{k}\frac{dp}{dx} y - \frac{T_u + \Delta T\, y/\delta}{k} C_1$

$u(y) = \frac{1}{2}\frac{T_u}{k}\frac{dp}{dx} y^2 + \frac{1}{3}\frac{\Delta T}{k\delta}\frac{dp}{dx} y^3 - \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{k\delta} C_1 y^2 - \frac{T_u}{k} C_1 y + C_2$

RB: $y = 0, \delta$: $u = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$C_1 = \frac{1/2\, T_u + 1/3\, \Delta T}{1/2\, \Delta T + T_u}\,\delta\frac{dp}{dx}$

$u(y) = \frac{1}{2}\frac{T_u}{k}\frac{dp}{dx} y^2 + \frac{1}{3}\frac{\Delta T}{k\delta}\frac{dp}{dx} y^3 - \left(\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{k\delta} y^2 + \frac{T_u}{k} y\right)\frac{1/2\, T_u + 1/3\, \Delta T}{1/2\, \Delta T + T_u}$

180

5. Aufgabe (12 Punkte)

Eine Reihe Zylinder wird in eine Strömung getaucht. Die Frequenz f, mit der Wirbel von den Zylindern abschwimmen hängt von der Fluidgeschwindigkeit v, dem Zylinderdurchmesser D, dem Abstand der Zylinder y sowie der dynamischen Viskosität η und der Dichte ρ des Fluids ab.

a) Ermitteln Sie mit Hilfe des Π-Theorems die Kennzahlen des Problems

In einem Wärmetauscher wird Wasserstoff bei $400K$ und $10bar$ als Kühlflüssigkeit eingesetzt. Die Strömungsgeschwindigkeit des Wasserstoffs ist $15m/s$, der Durchmesser der Zylinder beläuft sich auf $50mm$.
Zur Bestimmung der Wirbelfrequenz wird ein Experiment für eine geometrisch ähnliche Zylinderanordnung durchgeführt. Es wird Luft bei $300K$ und $1bar$ als Fluid verwendet, der Zylinderdurchmesser beträgt $25mm$. Für Geschwindigkeiten bis zu $30m/s$ wird der Zusammenhang

$$f_L = C_L \cdot v_L \quad \text{mit} \quad C_L = 4.25\frac{1}{m} \tag{1}$$

aufgestellt.

b) Berechnen Sie die Wirbelfrequenz für den Wasserstoffwärmetauscher.

Gegeben $p_L = 1bar, T_L = 300K, D_L = 25mm, R_L = 287J/kgK, \eta_L = 1.846 \cdot 10^{-5}Ns/m^2,$
$p_W = 10bar, T_W = 400K, D_W = 50mm, v_W = 15m/s, R_W = 4124J/kgK,$
$\eta_W = 10.87 \cdot 10^{-6}Ns/m^2$

(5)

a) 6 Einflußgrößen f, v, D, y, η, ρ

3 Grunddimensionen $(M, L, T) \rightarrow$ 3 Kennzahlen

$\Pi_1 = f \rho^\alpha v^\beta D^\gamma \rightarrow M^0 L^0 T^0 = T^{-1}(ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma$

$M: 0 = \alpha$

$L: 0 = -3\alpha + \beta + \gamma \rightarrow \alpha = 0, \beta = -1, \gamma = 1 : \Pi_1 = \dfrac{fD}{v}$

$T: 0 = -1 - \beta$

$\Pi_2 = \eta \rho^\alpha v^\beta D^\gamma \rightarrow M^0 L^0 T^0 = ML^{-1}T^{-1}(ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma$

$M: 0 = 1 + \alpha$

$L: 0 = -1 - 3\alpha + \beta + \gamma \rightarrow \alpha = -1; \beta = -1; \gamma = -1 \cdot \Pi_2 = \dfrac{\eta}{\rho v D}$

$T: 0 = -1 - \beta$

$\Pi_3 = y \rho^\alpha v^\beta D^\gamma \rightarrow M^0 L^0 T^0 = L(ML^{-3})^\alpha (LT^{-1})^\beta L^\gamma$

$M: 0 = \alpha$

$L: 0 = 1 - 3\alpha + \beta + \gamma \rightarrow \alpha = \beta = 0; \gamma = -1 \rightarrow \Pi_3 = \dfrac{y}{D}$

$T: 0 = -\beta$

b) $\rho_L = \dfrac{p_L}{R_L T_L} = 1{,}16\ kg/m^3$; $\rho_W = \dfrac{p_W}{R_W T_W} = 0{,}606\ kg/m^3$

$y/D|_L = y/D|_W$ ist erfüllt, da geometrisch ähnlich (A.S.)

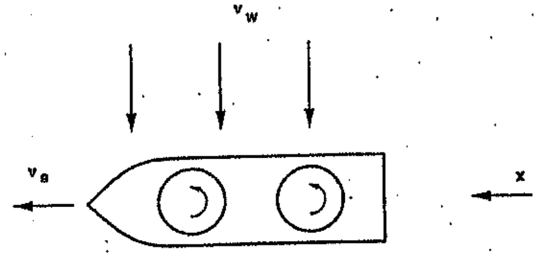
$\dfrac{\eta}{\rho v D}\Big|_L = \dfrac{\eta}{\rho v D}\Big|_W \rightarrow v_L = \dfrac{\rho_W}{\rho_L}\dfrac{D_W}{D_L}\dfrac{\eta_L}{\eta_W} v_W = 26.6\ m/s < 30\ m/s$

$f_L = 4.25 \frac{1}{m} v_L = 113.02\ Hz$: $\dfrac{fD}{v}\Big|_W = \dfrac{fD}{v}\Big|_L$

$f_W = \dfrac{D_L}{D_W} \cdot \dfrac{v_W}{v_L} f_L = \dfrac{D_L}{D_W} v_W \cdot 4.25 \frac{1}{m} = 31.9\ Hz$

6. Aufgabe (13 Punkte)

1927 baute Flettner ein Schiff mit zwei rotierenden Zylindern, die als Segel dienten (siehe Abb.). Die Höhe der Zylinder, die einen Durchmesser von $2.15m$ hatten, betrug $15m$. Bearbeiten Sie unter der Annahme, daß die Zylinder mit $750U/min$ rotieren, das Schiff eine Geschwindigkeit von $4km/h$ aufweist, wobei der senkrecht auf das Schiff auftreffende Wind mit $30km/h$ weht, folgende Teilaufgaben



a) Bestimmen Sie die Relativgeschwindigkeit v_r des Schiffes

b) Skizzieren Sie für einen Zylinder die Richtung der Schubkraft und der Relativgeschwindigkeit.

c) Berechnen Sie die gesamte auf das Schiff wirkende Schubkraft

d) Bestimmen Sie die Antriebskraft in Fahrtrichtung

Voraussetzungen: Die rotierenden Zylinder werden als unendlich lang angenommen und die Strömung sei drehungsfrei

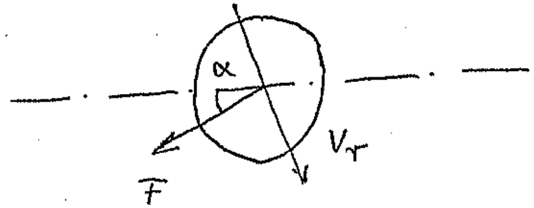
Gegeben: $H = 15m, D = 2.15m, v_W = 30km/h, v_S = 4km/h$

$n = 750U/min, \rho = 1.3kg/m^3$

a) $\vec{v}_r = 30\vec{j} - 4\vec{i}$ km/h

$v_r = |\vec{v}_r| = \sqrt{30^2 + 4^2}$ km/h $= 30.2$ km/h $= 8.41$ m/s

b)



c) $f = \rho v_r \Gamma$; $\Gamma = \omega r \, 2\pi r = 2\pi n \, 2\pi r^2 = 570.28 \frac{m^2}{s}$ [redacted]

$\rightarrow f = 6235$ N/m [redacted]

$F_{ges} = f \cdot 2 \cdot H = 187$ kN [redacted]

d) $F_x = F_{ges} \cdot \cos\alpha = F_{ges} \cdot \frac{v_w}{v_r} = 185.7$ kN [redacted]

7. Aufgabe (13 Punkte)

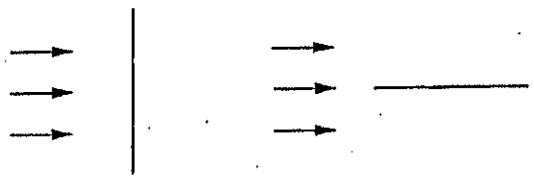
a) Nennen Sie die wichtigsten Voraussetzungen für die Gültigkeit der Grenzschichttheorie

b) Skizzieren Sie sorgfältig die Profile der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit an den Stellen x_1 und x_2 in einer Grenzschicht mit positivem und mit verschwindendem Druckgradienten

$\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

c) In zwei Versuchen werden zwei ebene Platten unterschiedlicher Längen L_1 und L_2 mit der gleichen Geschwindigkeit angeströmt. Wie groß ist das Verhältnis der Grenzschichtdicken an den Plattenenden, wenn die Grenzschichten laminar sind und kein Druckgradient vorhanden ist?

d) Der Strömungswiderstand einer dünnen Scheibe ist sehr unterschiedlich, je nachdem man ob man sie quer oder längs zur Anströmung hält.
Skizzieren Sie sorgfältig die Stromlinien!
Begründen Sie das unterschiedliche Widerstandsverhalten! (Voraussetzung: $Re >> 1$)



e) Der Widerstandsbeiwert c_w der Kugel ist

$$c_w = 0.4 \quad \text{bei} \quad Re = 10^5$$
$$c_w = 0.08 \quad \text{bei} \quad Re = 4 \cdot 10^5$$

Wie erklären Sie die unterschiedlichen Werte von c_w?

(7)

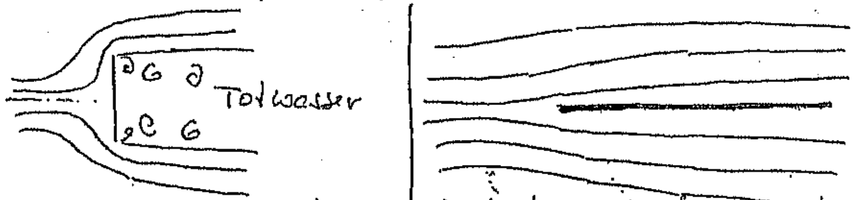
a) $Re >> 1$, keine Wandkrümmung

b)

$\frac{dp}{dx} > 0$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

c) $\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{Re_L}} \rightarrow \frac{\delta_1}{\delta_2} = \sqrt{L_1 / L_2}$

d)



Ablösung → Druck hinter der Platte < Druck vor der Platte → Druckwiderstand

Widerstand durch Tangentialkräfte → Reibungswiderstand

e) $Re = 10^5$ → laminare, abgelöste Grenzschicht

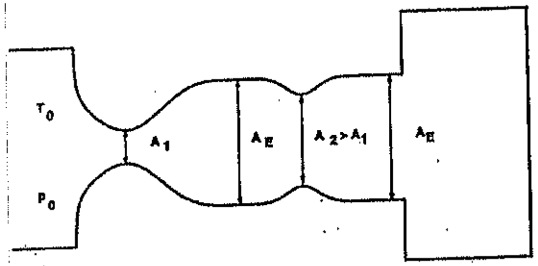
$Re = 4 \cdot 10^5$ turbulente Grenzschicht → Verschiebung der Ablösung stromab → kleineres Totwasser

→ höherer Druck auf der Rückseite

→ verminderter Druckwiderstand

8. Aufgabe (13 Punkte)

Gegeben ist ein ebener Überschallwindkanal. Der Druck und die Temperatur im Kessel betragen $p_0 = 1bar, T_0 = 300K$. Die Auslegungsmachzahl ist $Ma_E = 3$.



a) Skizzieren Sie sorgfältig den Verlauf des statischen Druckes und der Machzahl längs der Düsenachse für den Auslegungsfall.

Bestimmen Sie für $Ma_E = 3$

b) den Druck p_E und die Temperatur T_E im Endquerschnitt A_E und

c) den Massenstrom

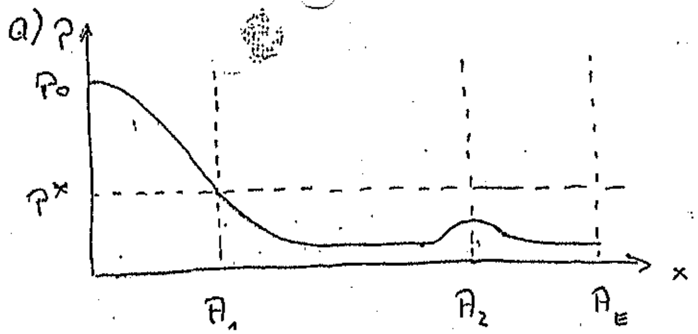
d) Welche Aufgabe hat die Düse mit dem Halsquerschnitt $A_2 > A_1$

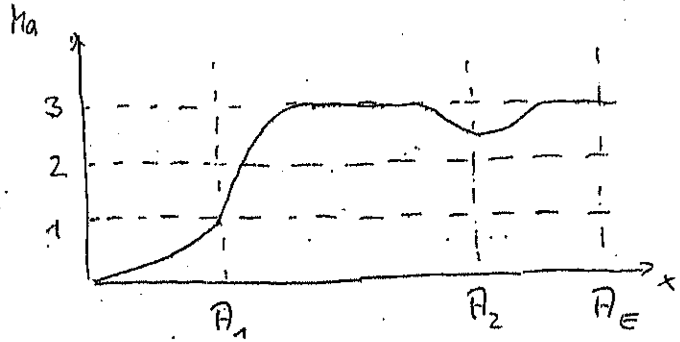
Gegeben: $T_0 = 300K, p_0 = 1bar, Ma_E = 3, A_E = 0.1m^2, \kappa = 1.4, R = 287Nm/kgK$

Hinweis:

- Die Strömung verläuft isentrop
- Die Luft wird als ideales Gas mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten betrachtet
- Isentropenbeziehungen:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$





b) $T_E/T_0 = \left(1 + \frac{1}{2}(\kappa-1) Ma_E^2\right)^{-1} \rightarrow T_E = 107\ K$

$p_E/p_0 = \left(T_E/T_0\right)^{\kappa/\kappa-1} \rightarrow p_E = 0{,}0272\ bar$

c) $\dot{m} = \rho_E u_E A_E = \frac{p_E}{RT_E} \cdot Ma_E\, a_E \cdot A_E$

$= \frac{p_E}{RT_E} \cdot Ma_E \sqrt{\kappa R T_E}\ A_E = 5.51\ kg/sec$

d) Durch den zweiten Halsquerschnitt wird die Meßzeit verlängert, weil der in die Düse laufende Verdichtungsstoß aufgehalten wird.

184

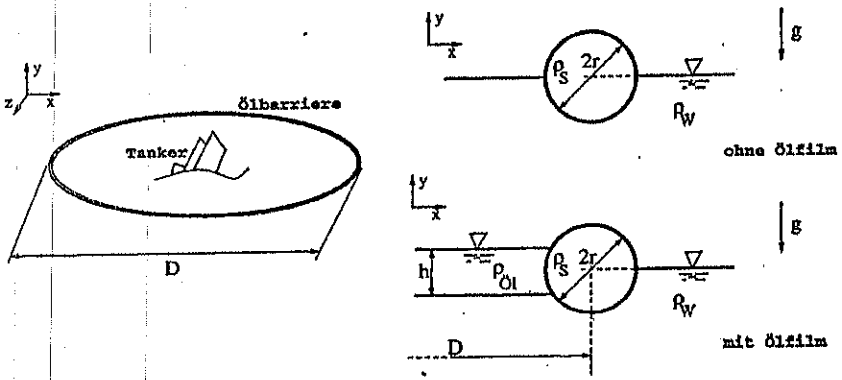
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

17. 3. 2000

1. Aufgabe (13 Punkte)

Eine Ölbarriere in Form eines ringförmigen Schlauches mit zylindrischem Querschnitt (Durchmesser $2r$) soll erstellt werden. Diese Ölbarriere soll auf dem Meer mit der Dichte ρ_W schwimmen und die Ausbreitung des auf der Wasseroberfläche befindlichen Öls der Masse $m_{Öl}$ und der Dichte $\rho_{Öl}$ verhindern. Ohne den Ölfilm taucht der Schlauch bis zur Hälfte in das Wasser ein. Diese Eintauchtiefe auf der ölabgewandten Seite bleibt konstant.



Schnitt durch den Schlauch

a) Bestimmen Sie eine mittlere Dichte ρ_S des Materials aus dem der Schlauch besteht.

b) Bestimmen Sie die maximale Ölfilmdicke h_{max}.

c) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung von $D \gg r$ den minimalen Durchmesser des Schlauchringes D.

Für die weiteren Teilaufgaben soll der Durchmesser D und die Ölfilmdicke $h = h_{max} = 2r$ als bekannt vorausgesetzt werden:

d) Bestimmen Sie die Auftriebskraft, die auf den Schlauch wirkt, sowie die Dichte $\rho_{Öl}$ in Abhängigkeit von den anderen Größen.

e) Bestimmen Sie die Radialkraft, die auf ein infinitisimal kleines Schlauchelement der Länge dl wirkt.

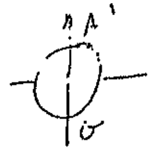
Gegeben: $r, g, \rho_W, \rho_{Öl}, m_{Öl}, dl$

Hinweis:

- $\rho_{Öl} < \rho_W \qquad D \gg r$
- Öl und Wasser mischen sich nicht
- Die Dichte der Luft ist zu vernachlässigen

1. Aufgabe

a) ohne Ölfilm



$G = A \qquad A = 2\pi \frac{D}{2} r^2 \pi \rho_s = \pi^2 D r^2 \rho_s$

$A = \pi^2 D r^2 \rho_w \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow \rho_s = \frac{1}{2}\rho_w$

b) 1) $0 < \rho_{öl} < \frac{1}{2}\rho_w$: Öl läuft über

$p_a + h_{max}\rho_{öl} g + (2r - h_{max})\rho_w g = p_a + r\rho_w g$

$\Rightarrow h_{max}(\rho_{öl} - \rho_w) g = r\rho_w g - 2r\rho_w g = -r\rho_w g$

$\Rightarrow h_{max} = \frac{r}{1 - \frac{\rho_{öl}}{\rho_w}}$

2) $\frac{1}{2}\rho_w < \rho_{öl} < \rho_w$; Öl läuft drunter

$p_a + h_{max}\rho_{öl} g = p_a + r\rho_w g \Rightarrow h_{max} = \frac{\rho_w}{\rho_{öl}} r$

3) $\rho_{öl} = \frac{1}{2}\rho_w \Rightarrow h_{max} = 2r$

c) $V_{öl} = \pi\frac{D^2}{4} h_{max} - \underbrace{2\pi\frac{D}{2}\frac{\pi r^2}{2} a}_{\text{vernachlässigbar, da } D \gg r} \qquad 0 < a < 1$ abhängig von h_{max}

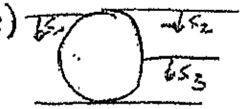
$V_{öl} = \frac{m_{öl}}{\rho_{öl}} \Rightarrow D = \sqrt{\frac{m_{öl}}{\rho_{öl}}\,\frac{4\left(1 - \frac{\rho_{öl}}{\rho_w}\right)}{\pi r}}$

d)

$A = 2\pi\frac{D}{2}\frac{1}{2}\pi r^2 \rho_{öl} + 2\pi\frac{D}{2}\frac{1}{4}\pi r^2 \rho_w$

$A = G \Rightarrow \pi^2 D r^2 \rho_s = \pi^2 D r^2 \frac{\rho_w}{2} \Rightarrow \rho_{öl} = \frac{1}{2}\rho_w$

e)

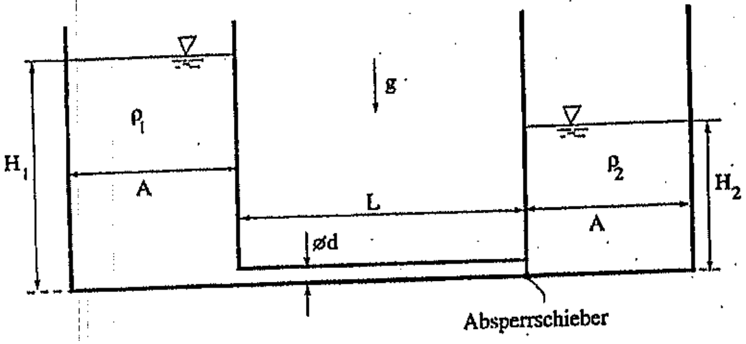


$F_R = dl\cdot\left[\int_0^{2r}(p_a + \rho_{öl} g s_1)\,ds_1 - \int_0^{r} p_a\,ds_2 - \int_0^{r}(p_a + \rho_w g s_3)\,ds_3\right] =$

$= dl\left[\frac{1}{2}\rho_{öl} g (2r)^2 - \frac{1}{2}\rho_w g r^2\right] = \frac{dl}{2} g r^2\left[4\rho_{öl} - \rho_w\right]$

2. Aufgabe (14 Punkte)

Zwei offene Behälter mit der gleichen Querschnittsfläche A, die mit einem Rohr (Durchmesser d und Länge L) verbunden sind, enthalten zwei unterschiedliche Flüssigkeiten mit den Dichten ρ_1 und ρ_2 und den Flüssigkeitsspiegelhöhen H_1 und H_2. Es gilt $\rho_1 > \rho_2$ und $H_1 > H_2$. Im Rohr befindet sich ein Absperrschieber, der die beiden Flüssigkeiten voneinander trennt. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird der Absperrschieber plötzlich entfernt. Die Strömung verläuft ab diesem Zeitpunkt instationär und verlustfrei.



2 a) Bestimmen Sie die Kraft auf den geschlossenen Absperrschieber wirkende Kraft.

4 b) Bestimmen Sie die Flüssigkeitsspiegelhöhen h_1 und h_2 für den Gleichgewichtszustand.

5 c) Bestimmem Sie eine Differentialgleichung für die Höhe $h_1(t)$.

3 d) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\rho_1 = \rho_2$.

Gegeben: $\rho_1, H_1, \rho_2, H_2, A, g, L, d, t_0 = 0$

Hinweis:

- Die beiden Flüssigkeiten vermischen sich nicht
- Die lokale Beschleunigung ist nur im Rohr zu berücksichtigen $d << L$
- Lösungsansatz für die DGL $a\cdot\ddot{x} + b\cdot x + c = 0$:

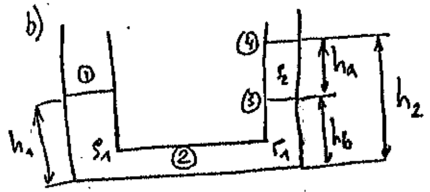
$$x(t) = -\frac{c}{b} + C_1 \sin(\sqrt{b/a}\, t) + C_2 \cos(\sqrt{b/a}\, t)$$

2. Aufgabe

a)

$$F = (p_a + \rho_1 g H_1 - p_a - \rho_2 g H_2)\cdot\frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi\cdot d^2\cdot g}{4}(\rho_1 H_1 - \rho_2 H_2)$$

b)



Druck in 2 ist gleich:

$$p_a + \rho_1 g h_1 = p_a + \rho_2 g h_2 + \cancel{\rho_2}\rho_1 g h_b$$

$h_a + h_b = h_2$ gleiches Volumen: $\rho_1 A H_1 = \rho_1 A h_1 + \rho_1 A h_b$

$\Rightarrow h_b = H_1 - h_1$ $\rho_2 A H_2 = \rho_2 A h_a \Rightarrow h_a = H_2$

$$\Rightarrow \rho_1 g h_1 = \rho_2 g H_2 + \rho_1 g (H_1 - h_1) \Rightarrow h_1 = \frac{\rho_2 H_2 + \rho_1 H_1}{2\rho_1} \qquad h_2 = H_2 + H_1 - h_1$$

c) Bernoulli: ③ → ④ $p_3 + \frac{1}{2}\rho_2 v_3^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho_2 v_4^2 + \rho_2 g h_a$

Kont.: $v_3 = v_4 = v_1$ $h_a = H_2$ $v_2 = v_1\frac{4A}{\pi d^2}$ $v_1 = -\frac{dh_1}{dt}$

Bernoulli: ① → ③ $p_a + \frac{1}{2}\rho_1 v_1^2 + \rho g h_1 = p_3 + \frac{1}{2}\rho_1 v_3^2 + \rho_1 g h_b + \rho_1 \cdot L\cdot\frac{dv_2}{dt}$

$$\Rightarrow \rho_1 g h_1 + \rho_1 L\frac{4A}{\pi d^2}\frac{d^2h_1}{dt^2} = \rho_2 g H_2 + \rho_1 g h_b$$

mit $h_b = H_1 - h_1 \Rightarrow$ die DGL lautet

$$\underbrace{\rho_1\cdot L\cdot\frac{4A}{\pi d^2}}_{a}\frac{d^2h_1}{dt^2} + \underbrace{2\rho_1 g}_{b}\, h_1 - \underbrace{(\rho_2 g H_2 + \rho_1 g H_1)}_{c<0} = 0$$

DGL: $a\ddot{h}_1 + \cancel{d}\, b\cdot h_1 + c = 0$

d) Lösung $h(t) = \frac{-c}{b} + C_1\sin\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, t\right)$

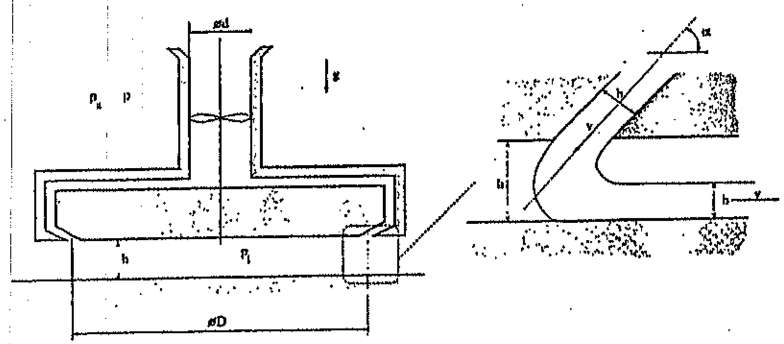
R.B. $h_1(t=0) = H_1$ $\sin(0) = 0$ $\cos(0) = 1 \Rightarrow C_2 = H_1 + c/b$

$v_1(t=0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$\Rightarrow h_1(t) = \frac{-c}{b} + (H_1 + c/b)\cos\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, t\right)$$ mit a, b, c aus c)

3. Aufgabe (11 Punkte)

Bei einem kreisförmigen Luftkissenfahrzeug (Masse m, Bodendurchmesser D) wird von einem Gebläse (Durchmesser d, Leistung P) aus der Umgebung mit dem Druck p_a Luft der Dichte ρ angesaugt und aus einem Ringspalt der Breite b unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit v radial nach innen geblasen. Der aus dem Spalt austretende, rund herum geschlossene Luftvorhang hält dabei im Raum unter dem Fahrzeug einen Überdruck p_i aufrecht, der den Strahl in die Horizontale umlenkt. Dabei schwebt das Fahrzeug stationär in einer Höhe h über dem Boden. Die Strömung ist inkompressibel und verlustfrei.



6 a) Bestimmen Sie die Strahlgeschwindigkeit v und den Überdruck $p_i - p_a$.

3 b) Bestimmen Sie die Gebläseleistung P.

2 c) Bestimmen Sie den optimalen Winkel α_{opt}, bei dem die Leistung minimal wird.

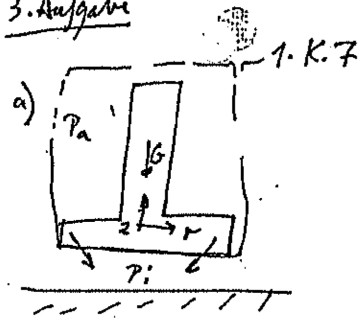
Gegeben: $g, m, D, d, \rho, b, \alpha, h$

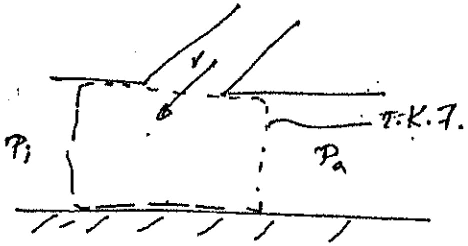
Hinweis:

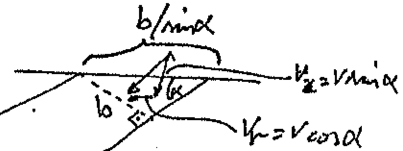
- $D \gg b$
- Vernachlässigen Sie die Gewichtskraft der Luft

3. Aufgabe

a)







1. K.F. Impulssatz in z-Richtung

$$(p_i - p_a)\cdot\pi \frac{D^2}{4} - mg = -\rho (v\sin\alpha)^2 \cdot \frac{b}{\sin\alpha}\cdot 2\pi \cdot \frac{D}{2}$$

$$\Rightarrow (p_i-p_a)\cdot\pi\frac{D^2}{4} - mg = -\rho v^2 \sin\alpha \cdot b\cdot\pi\cdot D$$

2. K.F. Impulssatz in radialer Richtung

$$(p_i-p_a)\pi\cdot D\cdot h = \rho v\sin\alpha\cdot v\cos\alpha\cdot\frac{b}{\sin\alpha}\cdot\pi\cdot D + \rho v^2 b\pi D$$

$$\Rightarrow (p_i-p_a)\cdot\pi D h = \rho v^2 b\pi D\,(\cos\alpha+1)$$

Einsetzen ergibt: $v = \sqrt{\dfrac{mg}{\rho\cdot D\cdot\pi\, b\left(\sin\alpha + \frac{D}{4h}(1+\cos\alpha)\right)}}$

$$(p_i-p_a) = \frac{mg(\cos\alpha+1)}{h\cdot D\cdot\pi\left(\sin\alpha+\frac{D}{4h}(1+\cos\alpha)\right)}$$

b) Bernoulli ∞ → Austritt $\quad p_a + \Delta p_G = p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow \Delta p_G = \frac{1}{2}\rho v^2$

$$\dot{Q} = \pi D\cdot b v \Rightarrow P = \dot{Q}\,\Delta p_G = \frac{1}{2}\rho\pi D b v^3$$

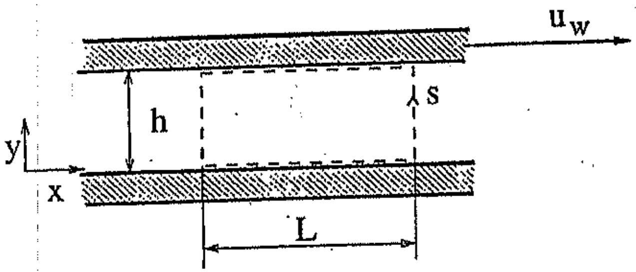
c) P minimal für $v_{minimal}$: $\left(\sin\alpha + \frac{D}{4h}\cos\alpha\right) = g(\alpha) = max!$

$$\frac{dg(\alpha)}{d\alpha} = \cos\alpha - \frac{D}{4h}\sin\alpha \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{D}{4h}\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha_{opt} = \arctan\frac{4h}{D}$$

4. Aufgabe (12 Punkte)

Zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten mit dem Abstand h befindet sich eine Bingham Flüssigkeit der Dichte ρ. Die obere Platte bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_w und die untere Platte ist in Ruhe. Es stellt sich eine stationäre ausgebildete inkompressible Strömung ein.



4 a) Vereinfachen Sie die angegebenen Erhaltungsgleichungen für den betrachteten Fall.

3 b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$. (Setzen Sie dafür die Beziehungen der Bingham Flüssigkeit ein.)

1 c) Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x = const, y)$.

1 d) Bestimmen Sie die Drehung $\omega(x, y)$.

3 e) Bestimmen Sie die Zirkulation Γ entlang der in der Skizze angegebenen Kurve s und den Wirbelfluß Ω durch die von der Kurve s aufgespannte Fläche.

Gegeben: $u_w, h, L, \rho, \tau_0, \eta$

Hinweis:

- Die Strömung ist als eben zu betrachten
- Die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls lauten:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$$
$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau$$

- Für eine Bingham Flüssigkeit gilt
  - für $|\tau| \leq \tau_0$ verhält sich das Fluid wie ein Festkörper
  - für $|\tau| > \tau_0$ gilt:

$$\tau_{xx} = 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{yy} = 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + \tau_0$$

4. Aufgabe ①

a) stationär $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$ inkompr. $\Rightarrow \rho = konst$ 2dimensional

$\Rightarrow$ Konti: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

x-Impuls: $\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$

y-Impuls: $\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$

für ausgebildete Strömung gilt: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$

Aus Konti folgt: $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ da $v = 0$ für $y = 0 \Rightarrow v \equiv 0$

$\Rightarrow$ x-Impuls: $0 = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}$

y-Impuls: $0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}$

b) $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$ eingesetzt ergibt: für $|\tau| > \tau_0$: $\tau_{xx} = 0$ $\tau_{yy} = 0$

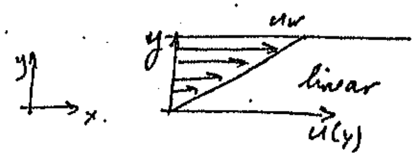
$\tau_{xy} = \eta \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_0 \Rightarrow$ x-Impuls: $0 = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ y-Impuls: $0 = \frac{\partial p}{\partial y}$

$\Rightarrow u = \frac{c_1}{\eta} \cdot y + c_2$

R.B.: $u(y=0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$ $u(y=h) = u_w \Rightarrow c_1 = \frac{u_w \cdot \eta}{h}$

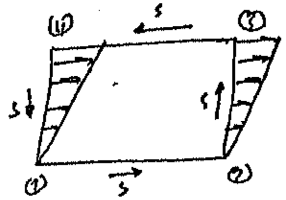
$\Rightarrow u = \frac{u_w}{h} \cdot y$ „Couette Strömung“

c)



d) $\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2} \frac{u_w}{h}$

e)



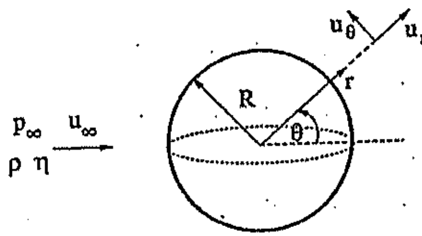
$\Gamma = \int_{①}^{①} \vec{v}\, d\vec{s} = -u_w \cdot l$

$\Omega = \int_A \omega\, dA = h \cdot l \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{u_w}{h} = \frac{-u_w \cdot l}{2}$

oder $\Omega = \frac{1}{2}\Gamma = \frac{-u_w l}{2}$ Satz von Stokes

5. Aufgabe (14 Punkte)

Eine Kugel mit dem Radius R wird bei einer niedrigen Reynoldszahl ($Re_D < 4$) von einem inkompressiblen Fluid der Dichte ρ und der Zähigkeit η umströmt. Die Anströmgeschwindigkeit beträgt u_∞.



Für eine solche Strömung existiert folgende analytische Nährungslösung in Polarkoordinaten:

$$u_\theta = u_\infty \cdot \sin(\theta) \cdot \left[-1 + \frac{1}{4}\left(\frac{R}{r}\right)^3 + \frac{3}{4}\left(\frac{R}{r}\right)\right]$$
$$u_r = u_\infty \cdot \cos(\theta) \cdot \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{R}{r}\right)\right]$$
$$p = -\frac{3\eta u_\infty R \cos(\theta)}{2r^2} + p_\infty$$

a) Bestimmen Sie den Druckwiderstand der Kugel.

b) Leiten Sie folgende Gleichung zur Bestimmung der Schubspannung an der Wand her:

$$\tau_w = -\eta \frac{3}{2} \frac{u_\infty \cdot \sin(\theta)}{R}$$

c) Bestimmen Sie den Reibungswiderstand der Kugel.

d) Bestimmen Sie den Gesamtwiderstandsbeiwert c_w in Abhängigkeit von der Reynoldszahl Re_D.

e) Skizzieren Sie für die Umströmung einer Kugel den c_w Verlauf in Abhängigkeit von der Reynoldszahl im Bereich $10^{-1} < Re_D < 10^7$. Markieren Sie und beschreiben Sie dabei die relevanten Bereiche.

Gegeben: η, ρ, R, u_∞

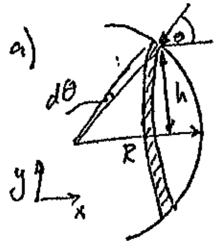
Hinweis:

- Folgende unbestimmte Integrale sind bekannt:

$$\int \sin(ax) \cdot \cos(ax)\, dx = \frac{1}{2a} \sin^2(ax) \qquad \int \sin^2(ax) \cdot \cos^2(ax)\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin(4ax)}{32a}$$
$$\int \sin^2(ax) \cdot \cos(ax)\, dx = \frac{1}{3a} \sin^3(ax) \qquad \int \sin(ax) \cdot \cos^2(ax)\, dx = -\frac{1}{3a} \cos^3(ax)$$
$$\int \sin^3(ax)\, dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + \frac{1}{3a}\cos^3(ax) \qquad \int \cos^3(ax)\, dx = \frac{1}{a}\sin(ax) - \frac{1}{3a}\sin^3(ax)$$

Aufgabe 5

a)



$h = \sin\theta \cdot R \qquad dA = 2\pi h \cdot R\, d\theta = 2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$

$p(r=R) = \frac{-3\eta u_\infty}{2R}\cos(\theta) \qquad (\cos(\theta)) \longleftarrow$

$F_{px} = W_p = -\int_0^\pi p(r=R)\cos\theta\, dA = +\int_0^\pi \frac{3\eta u_\infty}{2R} \cdot 2\pi R^2 \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta$

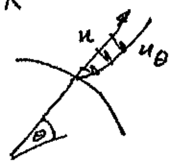
$- \int_0^\pi p_\infty \cdot 2\pi R^2 \cos\theta \sin\theta\, d\theta =$

$= \frac{3\eta u_\infty}{2R} 2\pi R^2 \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta - p_\infty \cdot 2\pi R^2 \int_0^\pi \cos\theta \sin\theta\, d\theta$

$= 3\eta u_\infty \pi R \left(-\frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Big|_0^\pi - p_\infty \cdot 2\pi R^2 \left(\frac{1}{2}\sin^2\theta\right)\Big|_0^\pi = 3\eta u_\infty \pi R\left(-\frac{1}{3}(-1)^3 + \dots\right)$

$= 2\eta u_\infty \pi R$

b) $\tau_W = \eta \frac{\partial u_\theta}{\partial n}\Big|_{r=R}$

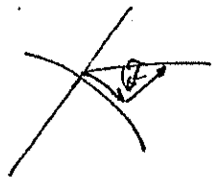


$\eta \frac{\partial u_\theta}{\partial n}\Big|_{r=R} = \eta \frac{\partial u_\theta}{\partial r}\Big|_{r=R} =$

$= u_\infty \sin\theta\, \eta \left(\frac{1}{4}(-3)\frac{R^3}{r^4} + \frac{3}{4}(-1)\frac{R}{r^2}\right)\Big|_{r=R}$

$= -\frac{3}{2}\eta\, u_\infty \sin\theta \frac{1}{R}$

c)



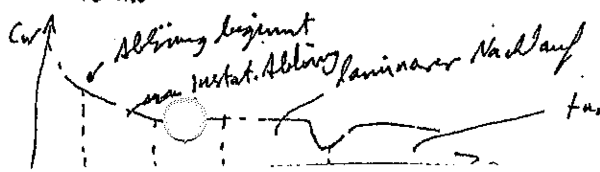
$F_{\tau x} = W_R = -\int_0^\pi \tau_w \sin\theta\, dA = \int_0^\pi \frac{3}{2}\eta u_\infty \frac{1}{R} \cdot \sin^2\theta \cdot 2\pi R^2 \sin\dots$

$= \frac{3}{2}\eta u_\infty R \cdot 2\pi \int_0^\pi \sin^3\theta\, d\theta = 3\eta R u_\infty \pi \cdot \left(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right)$

$= 3\eta u_\infty R\pi\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = 4\eta u_\infty R\pi$

d) $c_W = \frac{W_p + W_R}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \pi R^2} = \frac{2 \cdot 6 \cdot \eta u_\infty \pi R}{\rho u_\infty^2 \pi R^2} = \frac{12\eta}{\rho u_\infty R} = \frac{12 \cdot 2 \cdot \eta}{\rho u_\infty D} = \frac{24}{Re}$

e)



6. Aufgabe (11 Punkte)

Gegeben ist die komplexe Strömungsfunktion

$$F(z) = \frac{2}{3}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}} z^{3/2} + \frac{E}{2\pi}\ln(z)$$

Bestimmen Sie

a) das Potential $\phi(r,\theta)$ und die Stromfunktion $\psi(r,\theta)$, wobei E bekannt sei,

b) die kartesischen Geschwindigkeitskomponenten $u(r,\theta)$ und $v(r,\theta)$, wobei E bekannt sei,

c) die Konstante E so, daß bei $(x = L, y = 0)$ ein Staupunkt entsteht,

d) die Gleichung der Kontur $r(\theta)$.

Gegeben: L, u_∞

Hinweis:

- $z = x + iy = r \cdot e^{i\theta} = r \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

6. Aufgabe

a) $F(z) = \frac{2}{3}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}} \cdot z^{3/2} + \frac{E}{2\pi}\ln(z) = \frac{3}{2}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}} r^{3/2} e^{i\frac{3}{2}\theta} + \frac{E}{2\pi}(\ln r + \ln e^{i\theta})$

$= Re(r,\theta) + i \cdot Im(r,\theta) = \phi(r,\theta) + i\psi(r,\theta)$

$\Rightarrow \phi(r,\theta) = \frac{2}{3}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}} r^{3/2} \cos \frac{3}{2}\theta + \frac{E}{2\pi}\ln r$

$\psi(r,\theta) = \frac{2}{3}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}} r^{3/2} \sin \frac{3}{2}\theta + \frac{E}{2\pi}\theta$

b) $\bar{w} = u - iv = \frac{dF}{dz} = \frac{u_\infty}{\sqrt{L}} z^{1/2} + \frac{E}{2\pi z} = \frac{u_\infty}{\sqrt{L}} r^{1/2} e^{i\theta/2} + \frac{E}{2\pi}\frac{1}{r}e^{-i\theta}$

$= \frac{u_\infty\sqrt{r}}{\sqrt{L}}(\cos \theta/2 + i\sin \theta/2) + \frac{E}{2\pi r}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$

$= \frac{u_\infty\sqrt{r}}{\sqrt{L}}\cos\frac{\theta}{2} + \frac{E}{2\pi r}\cos\theta + i\left(\frac{u_\infty\sqrt{r}}{\sqrt{L}}\sin\theta/2 - \frac{E}{2\pi r}\sin\theta\right)$

$\Rightarrow u(r,\theta) = \frac{u_\infty\sqrt{r}}{\sqrt{L}}\cos\theta/2 + \frac{E}{2\pi r}\cos\theta$

$v(r,\theta) = \frac{E}{2\pi r}\sin\theta - \frac{u_\infty\sqrt{r}}{\sqrt{L}}\sin\theta/2$

c) $x = L;\ y = 0 \Rightarrow r = L \quad \theta = 0 \qquad u(r=L;\theta=0) = \frac{u_\infty\sqrt{L}}{\sqrt{L}} + \frac{E}{2\pi L} = 0$

$v(r=L;\theta=0) = 0$ da $\sin(\theta) \equiv 0$

$\Rightarrow \frac{E}{2\pi L} = -u_\infty \Rightarrow E = -2\pi u_\infty L$

d) $\psi(r=L;\theta=0) = 0 \Rightarrow$ Gleichung der Kontur $0 = \frac{2}{3}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}} r^{3/2} \sin\frac{3}{2}\theta - \frac{2\pi u_\infty}{2\pi}$

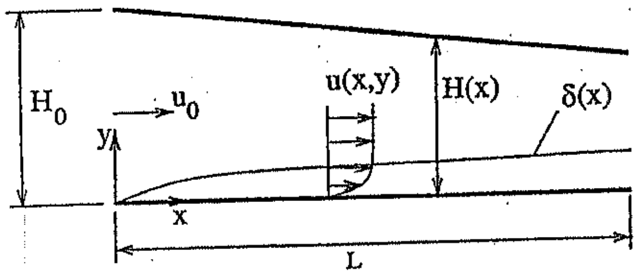
$0 = \frac{2}{3}\frac{r^{3/2}}{\sqrt{L}}\sin(\frac{3}{2}\theta) - L\cdot\theta$

$\Rightarrow r = L \cdot \left(\frac{3/2\,\theta}{\sin(\frac{3}{2}\theta)}\right)^{2/3}$

7. Aufgabe (10 Punkte)

Durch einen konvergenten Kanal der Länge L strömt eine inkompressible Flüssigkeit der Dichte ρ und der Zähigkeit η. An der unteren Kanalwand bildet sich eine laminare Grenzschicht aus. Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht läßt sich durch einen Polynomansatz darstellen:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0(x) + a_1(x)\frac{y}{\delta} + a_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$



a) Bestimmen Sie den Verlauf der Außengeschwindigkeit $u_a(x)$ und des Druckgradienten dp/dx. Betrachten Sie dabei die Strömung als reibungsfrei und eindimensional.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_0(x)$, $a_1(x)$ und $a_2(x)$.

c) Bestimmen Sie die Verdrängungsdicke $\delta_1(x)$ in Abhängigkeit von der Grenzschichtdicke $\delta(x)$.

d) Kann die Grenzschicht ablösen? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

e) Durch Anbringung eines Stolperdrahtes an der unteren Wand wird der Umschlag laminar/turbulent frühzeitig erzwungen. Wird der Reibungswiderstand an dieser Wand damit verkleinert oder vergrößert? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Gegeben: $u_0, \rho, \eta, L, H_0, H(x) = H_0 - C\cdot\frac{x}{L}$ $\quad C > 0$

Hinweis:

- Die Strömung ist als eben zu betrachten
- Die Grenzschicht an der oberen Kanalwand ist zu vernachlässigen
- $\delta \ll H(x)$

Aufgabe 7

a) Konti: $u_0 H_0 = u_a(x) H(x) \Rightarrow u_a(x) = \frac{u_0 H_0}{H(x)} = \frac{H_0 u_0}{H_0 - c\,x/L}$

$\frac{du_a}{dx} = \frac{H_0 u_0}{(H_0 - c\,x/L)^2}\cdot c/L$ $\qquad$ Bernoulli: $\frac{dp}{dx} = -\rho u_a \frac{du_a}{dx}$

$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{-\rho u_0^2 H_0^2}{L/c\,(H_0 - c\,x/L)^3}$

b) $\frac{\partial(u/u_a)}{\partial(y/\delta)} = a_1 + 2a_2\,(y/\delta)$ $\qquad \frac{\partial^2(u/u_a)}{\partial(y/\delta)^2} = 2a_2$

1. R.B. $y/\delta = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow a_0(x) = 0$

2. R.B. $y/\delta = 1 \Rightarrow u = u_a \Rightarrow a_1 + a_2 = 1$

3. R.B. $y/\delta = 0 \Rightarrow \eta \frac{u_a}{\delta^2}\frac{\partial^2(u/u_a)}{\partial(y/\delta)^2} = \frac{dp}{dx}$

$\Rightarrow \eta\frac{u_a}{\delta^2}2a_2 = \frac{-\rho u_0^2 H_0^2}{\frac{L}{c}(H_0 - c\frac{x}{L})^3} \Rightarrow a_2(x) = \frac{-\rho u_0 H_0 \delta^2}{2\eta\frac{L}{c}(H_0 - c\frac{x}{L})^2}$

$\Rightarrow a_1(x) = 1 + \frac{\rho u_0 H_0 \delta^2}{2\eta\frac{L}{c}(H_0 - c\frac{x}{L})^2}$

c) $\frac{\delta_1(x)}{\delta(x)} = \int_0^1\left(1 - \frac{u(x,y)}{u_a(x)}\right) d\,y/\delta = \int_0^1\left[1 - a_1\frac{y}{\delta} - a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] d\,y/\delta =$

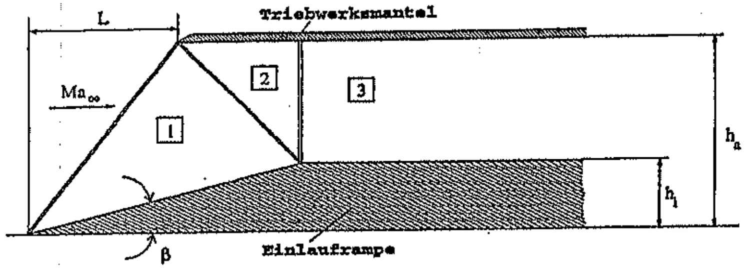
$= \left[\frac{y}{\delta} - \frac{a_1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{a_2}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]\Big|_0^1 = 1 - \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{3}$

d) Nein, da negativer Druckgradient.

e) vergrößert, da Gradient der Geschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial y}$ an der Wand bei turbulenten Strömungen größer ist.

8. Aufgabe (14 Punkte)

Ein Triebwerkseinlauf (Massenstrom $\dot{m}$) der Breite B mit einer Einlauframpe wird bei einem Überschallflug untersucht. An der Spitze der Einlauframpe bildet sich, wie in der Skizze dargestellt, ein schräger Verdichtungsstpß, der infolge der gewählten geometrischen Anordnung auf die Kante des Triebwerksmantels trifft. Dort wird der Stoß reflektiert und trifft wiederum genau auf das Ende der Rampe. Von diesem Punkt ausgehend, läuft ein senkrechter Verdichtungsstoß zurück zum Triebwerksmantel. Die Strömung kann als eben betrachtet werden.



a) Bestimmen Sie die Anströmmachzahl Ma_∞.

Rechnen Sie mit $Ma_\infty = 2.8$ weiter.

b) Bestimmen Sie die Rücklage L des Triebwerksmantels gemessen von der Spitze der Einlauframpe.

c) Bestimmen Sie die Größen Ma_3 und p_3 in $\boxed{3}$.

Rechnen Sie mit $p_3 = 12.0 bar$ und $Ma_3 = 0.6$ weiter.

d) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit u_3 in $\boxed{3}$.

e) Bestimmen Sie den Totaldruckverlust zwischen Anströmung $\boxed{\infty}$ und Zustand $\boxed{3}$.

f) Wie groß darf bei $Ma_\infty = 2.8$ der Umlenkwinkel β maximal sein, ohne daß der erste schräge Verdichtungsstoß $\boxed{\infty} \rightarrow \boxed{1}$ von der Einlauframpe ablöst? Skizzieren Sie einen abgelösten Fall und markieren Sie dabei Gebiete des Über- und Unterschalls.

Gegeben: $\gamma = 1.40, R = 287 \frac{J}{kgK}, \beta = 12.0°, \dot{m} = 1130 \frac{kg}{s}, u_\infty = 600 \frac{m}{s}, p_\infty = 0.780 bar,$
$h_i = 0.180 m, h_a = 0.500 m, B = 1.57 m$

Diagramme für Winkelbeziehungen und gasdynamische Größen über den Verdichtungsstoß

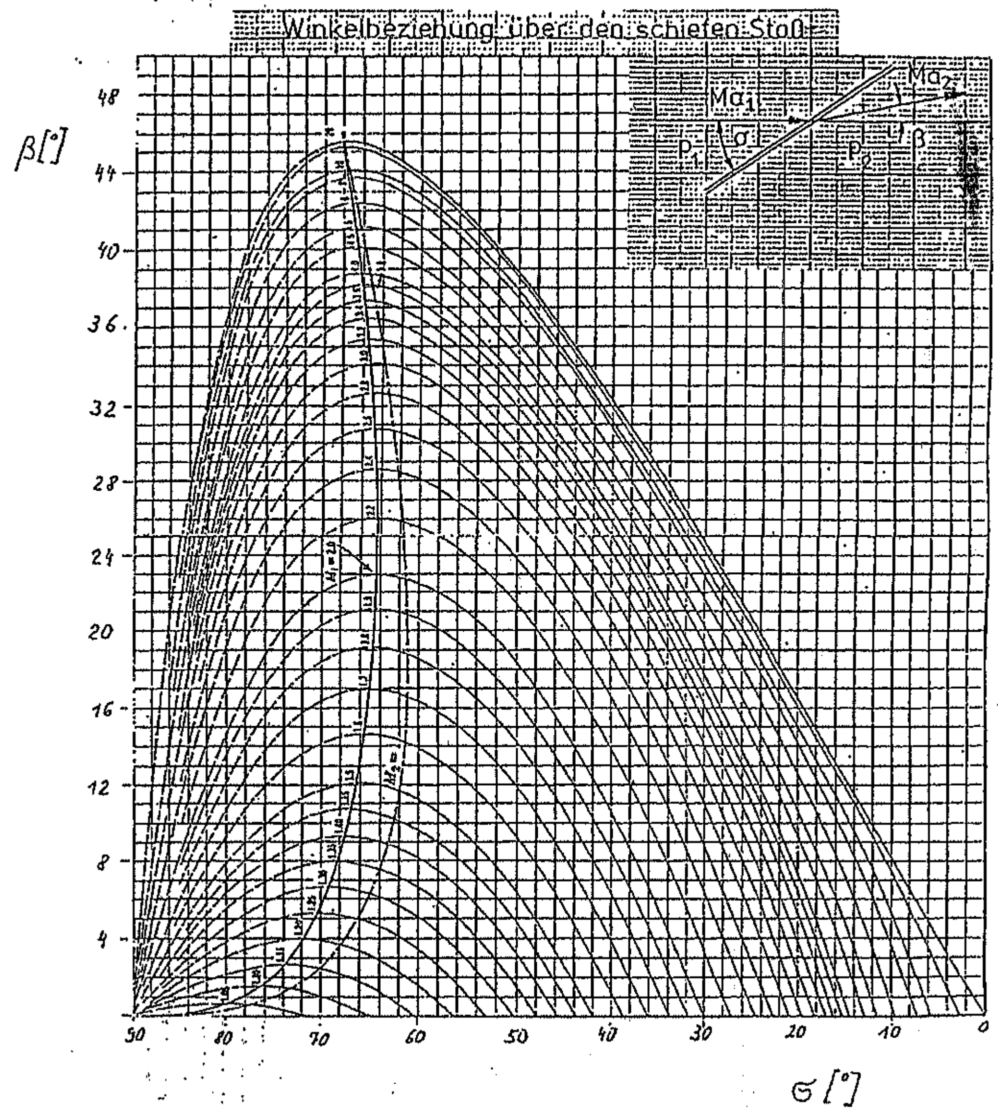
Hinweis:

- Die Luft wird als ideales Gas mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten betrachtet
- Über den schrägen Verdichtungsstoß gilt:

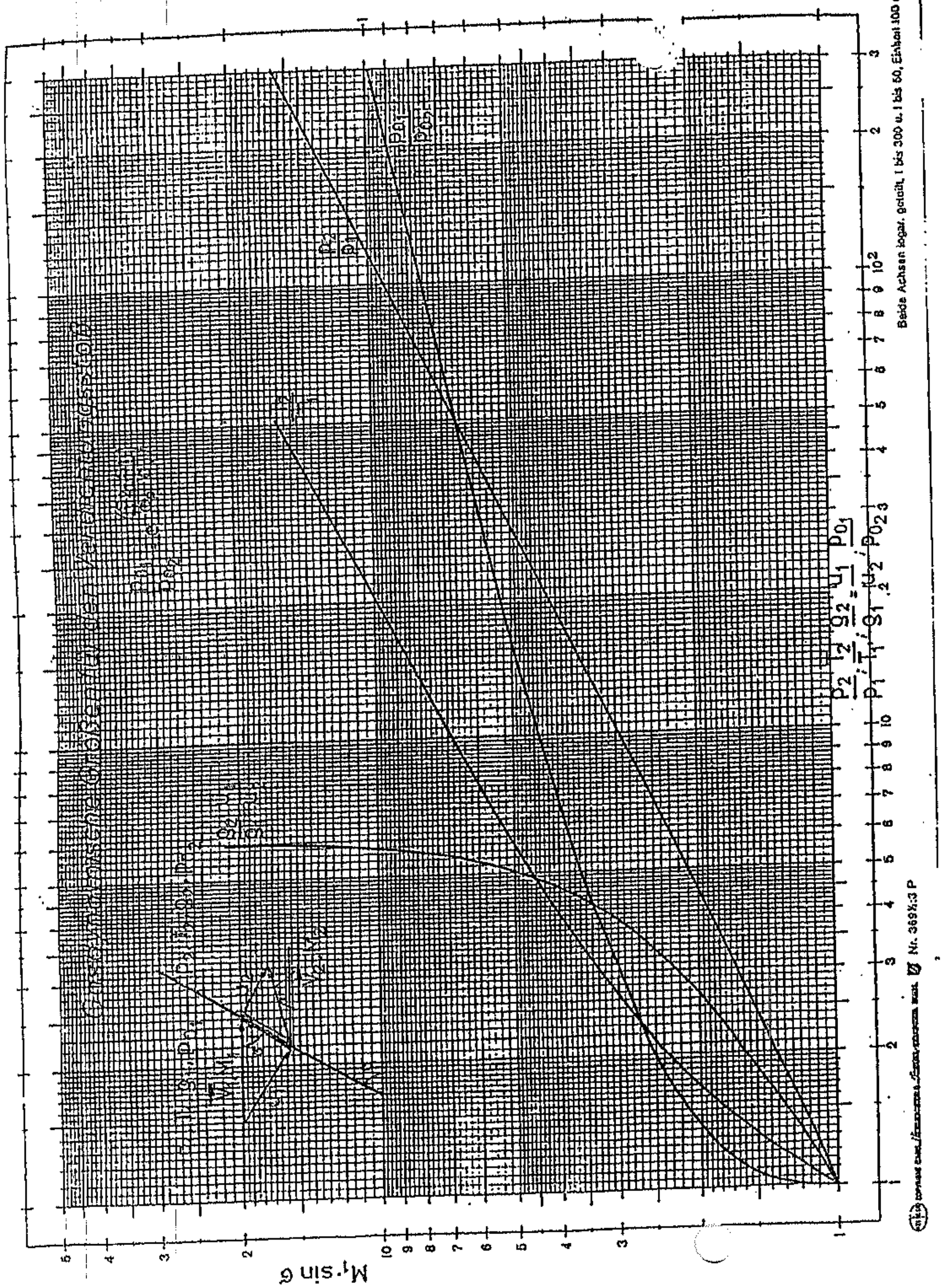
$$Ma^2_{nachStoß} \sin^2(\sigma - \beta) = \frac{(\gamma - 1) Ma^2_{vorStoß} \sin^2(\sigma) + 2}{2\gamma Ma^2_{vorStoß} \sin^2(\sigma) - (\gamma - 1)}$$

- $\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2$
- Isentropenbeziehungen

$$\frac{T_a}{T_b} = \left(\frac{\rho_a}{\rho_b}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_a}{p_b}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$



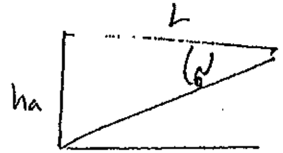
197.



Aufgabe 8

a) $u_\infty = 600\ m/s$ $\quad \rho_\infty = \frac{\dot m}{u_\infty h_a \cdot B}$ $\quad Ma_\infty = \frac{u_\infty}{\sqrt{\kappa \frac{p_\infty}{\rho_\infty}}} = \frac{u_\infty}{\sqrt{\kappa \frac{p_\infty u_\infty h_a B}{\dot m}}} = 2{,}8116$

b) $Ma_\infty = 2{,}8$ $\quad \beta_{\infty 1} = 12° \Rightarrow$ Diagramm $\sigma_{\infty 1} = 31°$



$\tan \sigma_{\infty 1} = \frac{h_a}{L} \Rightarrow L = \frac{h_a}{\tan \sigma_{\infty 1}} = 0{,}83214\ m$

c) $Ma_\infty = 2{,}8$ $\quad \beta_{\infty 1} = 12° \Rightarrow \sigma_{\infty 1} = 31°$

in Gleichung $Ma^2_{\text{nach Stoß}}$ ... eingesetzt $\Rightarrow M_1 = 2{,}2196$; $\beta_{12} = 12° \Rightarrow \sigma_{12} = 36{,}$

$\Rightarrow M_2 = 1{,}839$ $\quad \beta_{23} = 0° \Rightarrow \sigma_{23} = 90°$

$\Rightarrow M_3 = 0{,}60801$

$Ma_\infty \sin \sigma_{\infty 1} = 1{,}4421 \xrightarrow{\text{Diag.}} \frac{p_1}{p_\infty} = 2{,}1$

$Ma_1 \sin \sigma_{12} = 1{,}3396 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = 1{,}9$

$Ma_2 \sin \sigma_{23} = 1{,}8390 \Rightarrow \frac{p_3}{p_1} = 3{,}7$ $\qquad p_3 = \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_\infty} p_\infty = 11{,}515\ bar$

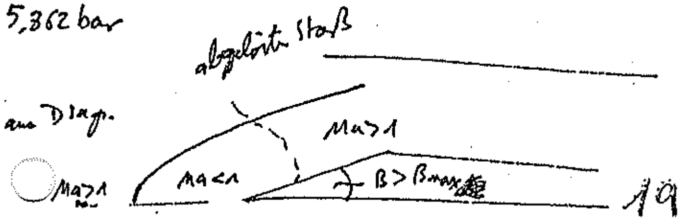
d) $u_3 = Ma_3 \cdot a_3 = Ma_3 \sqrt{\kappa \frac{p_3}{\rho_3}}$ $\quad \rho_3 = \frac{\dot m}{u_3 B (h_a - h_i)} \Rightarrow$

$u_3 = Ma_3^2 \frac{\kappa p_3 \cdot B (h_a - h_i)}{\dot m} = 269{,}03\ m/s$

e) $\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \Rightarrow p_{0\infty} = 21{,}168\ bar$ $\quad p_{03} = 15{,}306\ bar$

$\Rightarrow p_{0\infty} - p_{03} = 5{,}362\ bar$

f) $\beta_{max} = 32{,}5°$ aus Diag.



19 ?

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen

Direktor : Univ.-Prof. E. Krause, Ph.D.

Klausur
Strömungslehre I + II

am 25.7. 1990

Name : ....

Matr.-Nr. : ....

Unterschrift : ....

1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Σ	
Note	

Musterlösung

Klausur

(mit Punkteverteilung)

7. Aufgabe (8 Punkte)

Das Geschwindigkeitsprofil einer laminaren, inkompressiblen Grenzschichtströmung mit konstanter Zähigkeit η kann durch ein Polynom beschrieben werden :

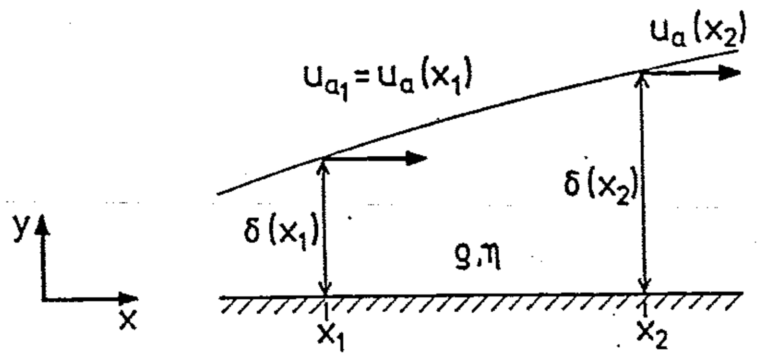
$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0 + a_1(x)\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

Die Außengeschwindigkeit $u_a(x)$ ist durch den Ansatz gegeben :

$$u_a(x) = u_{a1} - C * (x - x_1)^2$$

wobei u_{a1} die Außengeschwindigkeit an der Stelle x_1 ist und C eine positive Konstante. Die Grenzschichtdicke an der Stelle x_2 sei $\delta(x_2)$.

Gegeben : ρ , η , x_1 , u_{a1} , $\delta(x_2)$, C mit: $C > 0$



Bestimmen Sie :

a) den Verlauf des Druckgradienten $\partial p/\partial x$ in der Strömung als Funktion von x.

b) den Koeffizienten a_0 und die Koeffizienten $a_1(x)$, $a_2(x)$, $a_3(x)$

c) die Stelle x_2, wenn dies der Ablösepunkt ist.

5. Aufgabe (7 Punkte)

Die zweidimensionale, inkompressible Strömung eines Fluides mit konstanter Zähigkeit η läßt sich durch die Kontinuitäts- und die Impulsgleichungen in der angegebenen Form beschreiben. Durch Einführen des Wirbelvektors ω läßt sich aus den Impulsgleichungen die Wirbeltransportgleichung ableiten, die lediglich eine andere Form der Impulsgleichungen darstellt.

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

a) Leiten sie die Wirbeltransportgleichung aus den gegebenen Gleichungen her. (Hinweis : Eliminieren Sie den Druck p !)

Die Potentialtheorie baut auf der Annahme einer drehungsfreien ($\omega = 0$) und reibungsfreien Strömung auf.

b) Zeigen Sie, daß bei stationärer Potentialströmung die Bernoulli - Gleichung im gesamten Strömungsfeld und nicht nur entlang einer Stromlinie gilt.

Hinweise :

1. Wirbelvektor (zweidimensional):

$$\omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

2. Die Lösungen von a) und b) sind völlig unabhängig voneinander.

Aufgabe 5

a) Elimination des Druckes durch :

$$\frac{\partial}{\partial y}(x\text{-Impulsgl.})-\frac{\partial}{\partial x}(y\text{-Impulsgl.})=0$$

2

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=-\frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)}+\frac{1}{\rho}\cancel{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)}+\frac{\eta}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$

Konti

1

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\cancel{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}}+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\cancel{\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}}+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$-\cancel{\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}}-u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)-v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)-\cancel{\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}}$$

Konti

$$=\frac{\eta}{\rho}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\eta}{\rho}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

1

mit: $\omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$$\rightarrow \underline{\underline{\frac{\partial \omega}{\partial t}+u\frac{\partial \omega}{\partial x}+v\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}\right)}}$$

WTGL

Eliminiere T_2 und setze Gl. I ein:

$$\frac{\varkappa R T_1}{\varkappa-1}\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) = \frac{1}{2} v_1^2\left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}-1\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{\frac{2\varkappa R T_1}{\varkappa-1}\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}}-1}} \quad (1)$$

mit: $p_2 = p_a$

siehe auch S. L/15

b) Druck p_1 steigt an
Temp. T_1 steigt an
Machzahl M_2 steigt an (1)

c) $M_{2_{max}} = 1$ (1)

konvergente Düse (engster Querschnitt) (1)

Aus Flächen – Geschwindigkeitsbeziehung:

Die Strömung erreicht im engsten Querschnitt maximal Schallgeschwindigkeit. Soll die Strömung auf Überschallgeschwindigkeit beschleunigt werden, benötigt man einen konvergent – divergenten Querschnittsverlauf. (Laval – Düse)

L/17

Okt. 1990

Musterlösung Klausur Strömi I/II H 90

b) stationär : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

Potentialtheorie : $\omega = 0$ drehungsfrei

reibungsfrei

Dann lauten die Erhaltungsgl :

K : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ I

x-I : $u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ II

y-I : $u\,\frac{\partial v}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$ III

(1)

für $\omega = 0$ gilt : $\boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}}$

$$\Rightarrow \quad u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{I}$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial y} + v\,\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \qquad \text{II}$$

(1)

Integration von I und II :

$$\tfrac{1}{2}\rho(u^2+v^2) + p = f(y) \qquad \text{I}$$

$$\tfrac{1}{2}\rho(u^2+v^2) + p = g(x) \qquad \text{II}$$

Der Vergleich von Gl. I und II liefert : $f(y) = g(x) = \text{const}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tfrac{1}{2}\rho\,(u^2+v^2) + p = \text{const}}}$$

Bernoulli-Gl. im gesamten Strömungsfeld

(1)

1. Okt. 1990

8. Aufgabe

Unterschallströmung : $p_2 = p_a$ 1

Konti : $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$ I

Energie : $c_p T_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2} v_2^2$ II 1

Gasgl. : $\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1}$ III 1

" : $\rho_2 = \frac{p_2}{R T_2}$ IV

Isentropenbez. : $\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}$ V

Unbekannt : $\rho_1, v_1, \rho_2, v_2, T_2$ (5 Gl. + 5 Unbek.)

Eliminiere ρ : (III, IV)

$$\frac{p_1}{R T_1} v_1 A_1 = \frac{p_2}{R T_2} v_2 A_2 \qquad \text{I}$$

Eliminiere T : (V)

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} \frac{p_1}{p_2} \frac{T_2}{T_1} \qquad \text{I}$$

$$v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} \frac{p_1}{p_2} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \qquad \text{I}$$

$$\underline{v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{1}{\varkappa}}} \qquad \text{1} \quad \text{I}$$

Energie :

$$\frac{\varkappa R T_1}{\varkappa-1} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{\varkappa R T_2}{\varkappa-1} + \frac{1}{2} v_2^2 \qquad \text{II}$$

$$\frac{\varkappa R T_1}{\varkappa-1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \qquad \text{II}$$

Eliminiere T_2 und setze Gl. I ein :

$$\frac{\varkappa R T_1}{\varkappa-1}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right) = \frac{1}{2} v_1^2 \left(\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{v_1 = \sqrt{\frac{\frac{2\varkappa R T_1}{\varkappa-1}\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)}{\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{-\frac{2}{\varkappa}} - 1}}}} \qquad 1$$

mit:

b) Druck p_1 steigt an
Temp. T_1 steigt an
Machzahl M_2 steigt an
1

c) $M_{2_{max}} = 1$ 1

konvergente Düse (engster Querschnitt)

Aus Flächen - Geschwindigkeitsbeziehung :

Die Strömung erreicht im engsten Querschnitt maximal Schallgeschwindigkeit. Soll die Strömung auf Überschallgeschwindigkeit beschleunigt werden, benötigt man einen konvergent - divergenten Querschnittsverlauf. (Laval - Düse)

$$u = \left(a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)\right) u_a$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(a_1 \frac{1}{\delta} + 2a_2 \frac{y}{\delta^2} + 3a_3 \frac{y^2}{\delta^3}\right) u_a$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(+ 2a_2 \frac{1}{\delta^2} + 6a_3 \frac{y}{\delta^3}\right) u_a$$

$+ *$ (1)

I: $1 = a_1 + a_2 + a_3$

II: $0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3$

III: $\frac{\partial p}{\partial x} = \eta\, u_a \frac{2a_2}{\delta^2} \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\eta u_a} \frac{\partial p}{\partial x}$

$$\Rightarrow a_2(x) = \frac{\delta^2}{2\eta} \frac{2\rho C (x-x_1)\,(u_{a1} - C(x-x_1)^2)}{(u_{a1} - C \cdot (x-x_1)^2)}$$

$$\underline{\underline{a_2(x) = \frac{\delta^2 \rho C}{\eta} (x-x_1)}}$$

I/II: $a_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} a_2$

$a_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} a_2$

also: $$\underline{\underline{a_1(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \rho C}{\eta} (x-x_1)}}$$

$$\underline{\underline{a_3(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2 \rho C}{\eta} (x-x_1)}}$$ (1)

c) Ablösung bei $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ (1) für $y/\delta = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(a_1 \frac{1}{\delta} + 2a_2 \underbrace{\cancel{\left(\frac{y}{\delta^2}\right)}}_{=0} + 3a_3 \underbrace{\cancel{\left(\frac{y^2}{\delta^3}\right)}}_{=0}\right) u_a = 0$$

$\frac{a_1}{\delta} = 0$

$\boxed{a_1 = 0}$ (1) Ablösebedingung

$$a_1(x = x_2) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{\delta^2(x_2) \rho C}{\eta} (x_2 - x_1) = 0$$

$$3 = \frac{\delta^2 \rho C}{\eta} (x_2 - x_1)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{3\eta}{\delta^2(x_1) \rho C}$$

$$\underline{\underline{x_2 = x_1 + \frac{3\eta}{\delta(x_1)^2 C \rho}}}$$ (1)

5. Aufgabe (7 Punkte)

Die laminare Grenzschichtströmung über einer längsangeströmten ebenen Platte läßt sich unter Vernachlässigung der Reibungswärme durch die Kontinuitäts - , die Impuls- und die Energiegleichung in der folgenden Form beschreiben :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

a) Bestimmen Sie die Kennzahlen des Problems.

b) Überführen Sie die erhaltenen Kennzahlen in bekannte Kennzahlen der Strömungsmechanik.

Unter der Annahme konstanter Stoffwerte ist das Strömungsfeld unabhängig vom Temperaturfeld, so daß beide Felder getrennt berechnet werden können.

c) Nennen Sie die Voraussetzung, für die die Temperaturverteilung in der Grenzschicht direkt aus der Geschwindigkeitsverteilung bestimmt werden kann.

Hinweis für c) : Vergleichen Sie die Differentialgleichungen und gehen Sie davon aus, daß die Geschwindigkeitsverteilung $\vec{v}(x,y)$ bekannt ist.

Musterlösung Klausur Strömi I/II F:

5. Aufgabe (Strömi I/II) / 1. Aufgabe (Strömi II)

a)
b)

Konti : $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

Impuls : $\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

Energie : $\rho c_p\left(u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right) = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$

dimensionslose Größen : $\bar{u} = \frac{u}{u_\infty}$; $\bar{v} = \frac{v}{u_\infty}$; $\bar{\rho} = \cdot$

$\bar{x} = \frac{x}{L}$; $\bar{y} = \frac{y}{L}$; $\bar{\eta} = \cdot$

$\bar{c}_p = \frac{c_p}{c_{p\infty}}$; $\bar{T} = \frac{T}{T_\infty}$; $\bar{\lambda} = \cdot$

1P

Konti : $\frac{u_\infty}{L}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = 0$ ⇒ kein Kennzahl 1P

Impuls: $\rho_\infty \frac{u_\infty^2}{L}\bar{\rho}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = \eta_\infty\bar{\eta}\frac{u_\infty}{L^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$

$$\bar{\rho}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = \bar{\eta}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\underbrace{\left(\frac{\eta_\infty u_\infty L}{L^2 \rho_\infty u_\infty^2}\right)}_{K_1}$$

$$\underline{\underline{K_1 = \frac{\eta_\infty}{\rho_\infty u_\infty L} = \frac{1}{Re}}}$$ 1P

Energie: $\frac{\rho_\infty c_{p\infty} u_\infty T_\infty}{L}\bar{\rho}\bar{c}_p\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) = \frac{\lambda_\infty T_\infty}{L^2}\bar{\lambda}$

$$\bar{\rho}\bar{c}_p\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}}\right) = \underbrace{\frac{\lambda_\infty T_\infty L}{L^2 \rho_\infty c_{p\infty} u_\infty T_\infty}}_{K_2}\left(\bar{\lambda}\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$ 1P

$$\underline{\underline{K_2 = \frac{\lambda_\infty}{L \rho_\infty c_{p\infty} u_\infty}\frac{\eta_\infty}{\eta_\infty} = \frac{1}{Pr}\cdot\frac{1}{Re}}}$$ 1P

April 1990

5. Aufgabe (12 Punkte)

Ein konvergenter Kanal wird mit einem inkompressiblen Fluid mit der Dichte ρ und der Viskosität η durchströmt. In der Nähe der Kanalwände kann die Strömung mit der Grenzschichttheorie beschrieben werden.

a) Welche Kräfte wirken auf ein Fluidelement?

b) Geben Sie die charakteristische(n) Kennzahl(en) des Problems an. Welche Bedingungen müssen gelten, wenn die Grenzschichttheorie angewendet werden soll.

c) Vereinfachen Sie die Impulsgleichungen für Grenzschichtströmungen, indem Sie dimensionslose Größen einführen und eine Größenordnungsabschätzung durchführen.

Gegeben: alle nötigen Referenzwerte

Hinweis: Erhaltungsgleichungen für inkompressible, zweidimensionale und stationäre Strömungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

5. Aufgabe

a) Druck, Trägheit, Reibung

b) $Re = \frac{\rho u_{ref} L}{\eta}$; $Eu = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho u_{ref}^2}$

$Re \gg 1$; kleine Wandkrümmung

c) $\bar{u} = \frac{u}{u_{ref}}$; $\bar{x} = \frac{x}{L}$; $\bar{p} = \frac{p}{\rho u_{ref}^2}$ Grenzschichtdicke $\frac{\delta}{L} \sim \sqrt{Re_L}$

$\rightarrow \bar{y} = \frac{y}{L}\sqrt{Re_L}$ kont: $\bar{v} = \frac{v}{u_{ref}}\sqrt{Re_L}$

$$\rho\left(\frac{u_{ref}^2}{L}\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\frac{u_{ref}^2}{L}\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)=-\rho\frac{u_{ref}^2}{L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}+\eta\left(\frac{u_{ref}}{L^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{u_{ref}}{L^2}Re_L\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\rightarrow \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}+\frac{1}{Re_L}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \rightarrow \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$o(1)$ $o(1)$ $o(?)$ $o(1/Re)$ $o(1)$

$\ll 1$

$$\rho\left(\frac{u_{ref}^2}{L}\frac{1}{\sqrt{Re_L}}\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}+\frac{u_{ref}^2}{L}\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right)=-\rho\frac{u_{ref}^2}{L}\sqrt{Re_L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$$

$$+\eta\left(\frac{u_{ref}}{L^2}\frac{1}{\sqrt{Re}}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{u_{ref}}{L^2}\sqrt{Re}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

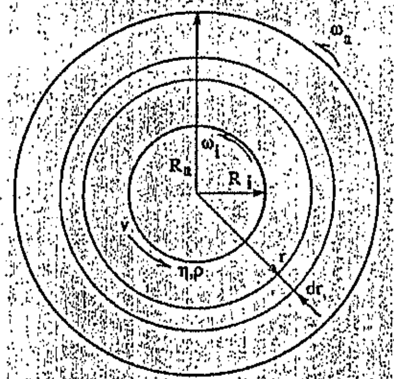
$$\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right)=-Re\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}+\frac{1}{Re_L}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \sim \frac{1}{Re_L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \rightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}=0$$

$\ll \frac{\partial p}{\partial x}$

4. Aufgabe (13 Punkte)

Zum Fadentransport bei der Garnerzeugung wird ein antreibender Vollzylinder mit dem Radius R_i und ein äußerer Zylinder mit dem Radius R_a verwendet. Beide Zylinder haben die Länge L. Zwischen den Zylindern befindet sich ein Fluid mit der Zähigkeit η und der Dichte ρ. Der innere Zylinder dreht sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω_i und der äußere mit der Winkelgeschwindigkeit ω_a.



a) Setzen Sie das Momentengleichgewicht für ein Ringelement an und bestimmen Sie die Umfangsgeschwindigkeitsverteilung $v(r)$ zwischen den Zylindern.

b) Der Druck am inneren Zylinder sei p_i. Bestimmen Sie die Druckverteilung $p(r)$ zwischen den Zylindern, wenn

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

ist.

c) Berechnen Sie das Drehmoment am inneren Zylinder, wenn

$$v(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

ist.

Gegeben: $R_i, R_a, \omega_i, \omega_a, \eta, \rho, L, p_i, A, B$

Hinweis:

- Es gilt:

$$\rho\frac{v^2}{r} = \frac{dp}{dr}; \quad \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2\tau)}{dr} = -\eta\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr}\right)$$

- Die Schubspannung berechnet sich aus

$$\tau = -\eta r\frac{d(v/r)}{dr}$$

4. Aufgabe

a) Momentengleichgewicht

$$2\pi r^2 L\tau - 2\pi(r+dr)^2 L(\tau+d\tau) = 0$$

$$r^2\tau - (r^2 + 2r\,dr + d^2r)(\tau + d\tau) = 0$$

$$2\tau r\,dr + \underbrace{\tau d^2r}_{\sim 0} + r^2 d\tau + \underbrace{2r\,dr\,d\tau}_{\sim 0} + \underbrace{d\tau\, d^2r}_{\sim 0} = 0$$

$$2\tau r\,dr + r^2 d\tau = \tau\, d(r^2) + r^2 d\tau = 0$$

$$\to d(r^2\tau) = 0 \to \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr}\right) = 0 \quad \text{R.S.}$$

1. Integration $\frac{1}{r}\frac{d(rv)}{dr} = C_1 \to d(rv) = C_1 r\,dr$

2. Integration $rv = \frac{1}{2}C_1 r^2 + C_2$

R.B. $v(R_i) = \omega_i R_i \Rightarrow \omega_i R_i^2 = \frac{1}{2}C_1 R_i^2 + C_2$

$v(R_a) = \omega_a R_a \quad \omega_a R_a^2 = \frac{1}{2}C_1 R_a^2 + C_2$

$$C_1 = 2\frac{\omega_i R_i^2 - \omega_a R_a^2}{R_i^2 - R_a^2} \qquad C_2 = \frac{R_i^2 R_a^2(\omega_a - \omega_i)}{R_i^2 - R_a^2}$$

$$v(r) = 2\frac{\omega_i R_i^2 - \omega_a R_a^2}{R_i^2 - R_a^2}\,r + \frac{R_i^2 R_a^2(\omega_a - \omega_i)}{R_i^2 - R_a^2}\,\frac{1}{r}$$

b) $$dp = \rho\frac{v^2}{r}dr = \rho\frac{A^2r^2 + 2AB + B^2/r^2}{r}dr$$

$$\int_{p_i}^{p} dp^* = \int_{R_i}^{r}\rho\left(A^2r^* + \frac{2AB}{r^*} + \frac{B^2}{r^{*3}}\right)dr^*$$

$$\to p = p_i + \rho\left[\frac{1}{2}A^2 r^{*2} + 2AB\ln r^* - \frac{B^2}{2}\frac{1}{r^{*2}}\right]_{R_i}^{r}$$

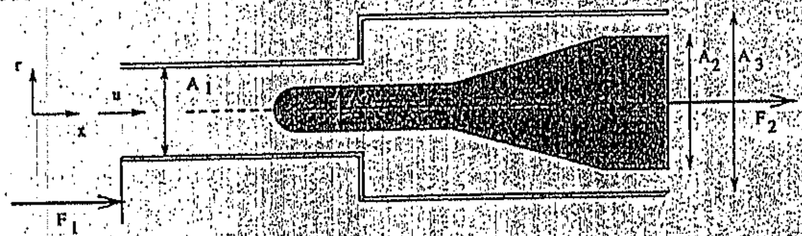
$$= p_i + \rho\left[\frac{1}{2}A^2(r^2 - R_i^2) + 2AB\ln\frac{r}{R_i} - \frac{B^2}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_i^2}\right)\right]$$

c) $$M = -2\pi R_i^2 L\eta R_i\frac{d}{dr}(A + B/r^2)\Big|_{R_i}$$

$$= -2\pi R_i^3 L\eta\left(-\frac{2B}{R_i^3}\right) = -4\pi L B\eta$$

3. Aufgabe (13 Punkte)

Aus einem langen Rohr strömt Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit u durch das skizzierte Ventil ins Freie.



a) Leiten Sie die folgende Beziehung für den Totaldruckverlust an der unstetigen Rohrerweiterung her.

$$\zeta = \frac{\Delta p_v}{\frac{1}{2}\rho u^2} = \left(1 - \frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)^2 \left(\frac{A_1}{A_1 - A}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

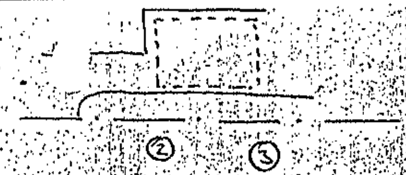
b) Berechnen Sie die Kraft F_1, die vom Ventilgehäuse auf die Rohrleitung wirkt.

c) Berechnen Sie die Kraft F_2, mit der der Absperrkörper gehalten werden muß.

Gegeben: $\rho, u, A, A_1 = 2A, A_2 = 3A, A_3 = 4A$

Hinweis: Die Wandreibung ist zu vernachlässigen.

3. Aufgabe



$\Delta p_v = p_{02} - p_{03} = p_2 - p_3 + \frac{1}{2}\rho(u_2^2 - u_3^2)$

a)

Konti: $u A_1 = u_2(A_1 - A) = u_3(A_3 - A)$

Impuls: $\rho u_3^2 (A_3 - A) - \rho u_2^2 (A_1 - A) = (p_2 - p_3)(A_3 - A)$

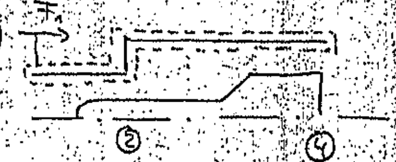
$u_3 = u_2 \frac{A_1 - A}{A_3 - A}$ $\quad p_2 - p_3 = \rho u_2^2 \left(\frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)^2 - \rho u_2^2 \frac{A_1 - A}{A_3 - A}$

$\Delta p_v = \frac{1}{2}\rho u_2^2 \left[2\left(\frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)^2 - 2\frac{A_1 - A}{A_3 - A} + 1 - \left(\frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)^2\right]$

$= \frac{1}{2}\rho u_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)\right]^2$

$\zeta = \frac{\Delta p_v}{\frac{1}{2}\rho u^2} = \frac{\Delta p_v}{\frac{1}{2}\rho u_2^2} \frac{u_2^2}{u^2} = \left[1 - \left(\frac{A_1 - A}{A_3 - A}\right)\right]^2 \left(\frac{A_1}{A_1 - A}\right)^2 = \frac{16}{9}$

b)



Impuls: $0 = (p_a - p_2)(A_3 - A_1) + F_1$

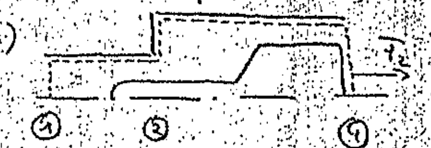
Bernoulli ② → ④: $p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 - \Delta p_v = p_a + \frac{1}{2}\rho u_4^2$

$u_2 = u_4$ (Konti)

$\rightarrow p_a - p_2 = \Delta p_v$

$\rightarrow F_1 = -\frac{8}{9}\rho u^2 (4A - 2A) = -\frac{16}{9}\rho u^2 A$

c)



Impuls: $\rho u_4^2 (A_3 - A_1) - \rho u^2 A_1 = p_1 A_1 + p_2 (A_3 - A_1) - p_a A_3 + F_2$

$\rightarrow F_2 = -\rho u^2 2A + \rho 4 u^2 A + (p_a - p_2) A_3 + (p_2 - p_1) A_1$

$p_2 - p_1 = \frac{1}{2}\rho u^2 - \frac{1}{2}\rho u_2^2 = -\frac{3}{2}\rho u^2$

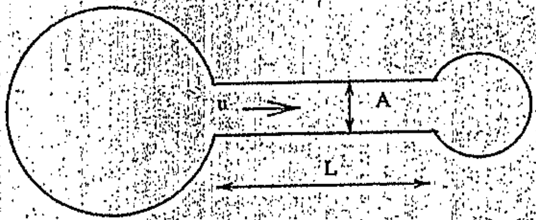
$\rightarrow F_2 = \rho u^2 A \left(-2 + 4 - \frac{8}{9}4 - \frac{3}{2}2\right) = -\frac{41}{9}\rho u^2 A$

2. Aufgabe (11 Punkte)

Zwei Ballons sind durch eine Rohrleitung der Länge L mit dem Querschnitt A verbunden. Der Druck in den Ballons hängt linear vom Ballonvolumen ab, V_0 ist das Ballonvolumen bei Umgebungsdruck.

$$p = p_a + C(V - V_0)$$

Zum Zeitpunkt 0 wird ein Ballon kurz zusammengedrückt und dabei um das Volumen ΔV verkleinert.



a) Zeigen Sie, daß die verlustfreie Strömung im Verbindungsrohr durch die Schwingungsgleichung

$$\ddot{u} + K^2 u = 0$$

beschrieben wird. Bestimmen Sie die Eigenfrequenz K des Systems.

b) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit im Rohr.

c) Bestimmen Sie die maximale Druckdifferenz zwischen den Ballons.

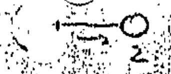
Gegeben: $\Delta V, L, A, \rho, C$

Hinweis:

- Allgemeiner Lösungsansatz der Schwingungsgleichung $\ddot{x} + a^2 x = 0$:

$$x = C_1 \sin(at) + C_2 \cos(at)$$

2. Aufgabe



a) Kont. $\dot{V}_1 = -uA \qquad \dot{V}_2 = uA$

Bernoulli $\rho L \dot{u} + p_2 - p_1 = 0 \quad (\partial/\partial t)$

$\rho L \ddot{u} + \dot{p}_2 - \dot{p}_1 = 0 \qquad p = p_a + C(V - V_0)$

$\dot{p} = C\dot{V}$

$\rightarrow \rho L \ddot{u} + 2CAu = 0$

$\ddot{u} + \frac{2CA}{\rho L} u = 0 \qquad k = \sqrt{\frac{2CA}{\rho L}}$

b) $V_2(t) = V_0 - \Delta V \cos(kt)$

$\dot{V}_2 = \Delta V k \sin(kt) = uA$

$\rightarrow u(t) = \frac{\Delta V k}{A} \sin(kt) \qquad u_{max} = \frac{\Delta V k}{A} = \Delta V \sqrt{\frac{2C}{\rho A L}}$

c) $(p_2 - p_1)_{max} = (\rho L \dot{u})_{max}$

$\dot{u} = \frac{\Delta V k^2}{A} \cos(kt) \rightarrow (p_2 - p_1)_{max} = \frac{\rho L \Delta V}{A} k^2$

$(p_2 - p_1)_{max} = 2C\Delta V$

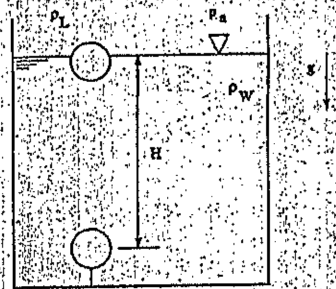
Frühjahr '98 / ~~10~~ 9 Blätter

Klausur Strömungslehre I + II

19. März 1998

1. Aufgabe (12 Punkte)

Eine mit Luft im Umgebungszustand gefüllte starre Kugel (Volumen V_0, Masse m) wird in einem mit Wasser gefüllten Behälter durch ein Seil in der Tiefe H festgehalten. Der Kugelradius sei klein gegenüber H.



a) Wie groß ist die Seilkraft?

b) Welcher Anteil des Kugelvolumens bleibt nach Lösen des Seils noch im Wasser? Wie ändert sich die Eintauchtiefe qualitativ, wenn anstelle einer Kugel ein Würfel mit der gleichen Masse und dem gleichen Volumen verwendet wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

c) Wie groß ist die Seilkraft, wenn die Kugel ein Leck an der Unterseite hat?

Gegeben: $g, m, V_0, \rho_L, \rho_W, H, p_a$

Hinweis zu c):

- Nehmen Sie an, daß die Zustandsänderung im Inneren der Kugel isotherm verläuft
- Das Luftvolumen in der Kugel sei gleich dem Kugelvolumen V_0

1. Aufgabe

a) $\Sigma F = 0: \; A - G - S = 0 \;\rightarrow\; S = A - G$

$G = m g \qquad A = \rho_W g V_0$

$S = (\rho_W V_0 - m) g$

b) $S = 0 \rightarrow A = G$

$A = \rho_W g V + \rho_L g (V_0 - V) = m g$

$\rightarrow V = \dfrac{m - \rho_L V_0}{\rho_W - \rho_L} \;\rightarrow\; \dfrac{V}{V_0} = \dfrac{m/V_0 - \rho_L}{\rho_W - \rho_L}$

$V > \frac{1}{2} V_0$ Würfel sinkt tiefer | Die Würfelmasse ist gleichmäßig verteilt. Die Kugel
$V < \frac{1}{2} V_0$ Kugel sinkt tiefer | ist in der Mitte am dicksten.

c) $p_a V_0 = p V = (p_a + \rho_W g H) V \rightarrow V = \dfrac{p_a}{p_a + \rho_W g H} V_0$

$A = \rho_W g V \rightarrow S = A - G = \left(\dfrac{p_a}{p_a + \rho_W g H} \rho_W V_0 - m\right) g$

...rgabe bezogen a.d. Walzrolle stationär: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$h(h) = \frac{1}{2}\left(D - (D_W + d)\right)$ $\Rightarrow \frac{h}{d} \ll 1$ 1

Definition: $u_\infty = \frac{1}{2}\omega d$; $\frac{V_r}{V_\Theta} = O\left(\frac{h}{d}\right) \ll 1 \Rightarrow \frac{V_r}{V_\Theta}\frac{d}{h} = O(1)$

Dimensionslose Größen:

$\bar V_\Theta = \frac{V_\Theta}{u_\infty}$; $\bar V_r = \frac{V_r}{u_\infty}\frac{d}{h}$ 1, $\bar\varrho = \frac{\varrho}{\varrho_0} = 1$; $\bar p = \frac{p}{\varrho_0 u_\infty^2}$ 1

$\bar r = \frac{r}{d}$ $\bar\Theta = \frac{\Theta}{2\pi}$; $\bar\eta = \frac{\eta}{\eta_0} = 1$ 1

Radiale Impulsgleichung:

$$\varrho_0\left(\frac{u_\infty^2 h^2}{d^3}\bar V_r\frac{\partial \bar V_r}{\partial\bar r} + \frac{u_\infty^2 h}{2\pi d^2}\frac{\bar V_\Theta}{\bar r}\frac{\partial\bar V_r}{\partial\bar\Theta} - \frac{u_\infty^2}{d}\frac{\bar V_\Theta^2}{\bar r}\right) = -\frac{\varrho_0 u_\infty^2}{d}\frac{\partial\bar p}{\partial\bar r}$$

$$+\eta_0\left(\frac{u_\infty h}{d^3}\frac{\partial^2\bar V_r}{\partial\bar r^2} + \frac{u_\infty h}{d^3}\frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar V_r}{\partial\bar r} + \frac{u_\infty h}{4\pi^2 d^3}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial^2\bar V_r}{\partial\bar\Theta^2} - \frac{u_\infty h}{d^3}\frac{\bar V_r}{\bar r^2} - \frac{u_\infty}{2\pi d^2}\frac{2}{\bar r^2}\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar\Theta}\right)$$ 1

$$\Big| \cdot \frac{d}{\varrho_0 u_\infty^2}$$

$$\frac{\partial\bar p}{\partial\bar r} = -\left(\left(\frac{h}{d}\right)^2\bar V_r\frac{\partial\bar V_r}{\partial\bar r} + \frac{1}{2\pi}\frac{h}{d}\frac{\bar V_\Theta}{\bar r}\frac{\partial\bar V_r}{\partial\bar\Theta} - \frac{\bar V_\Theta^2}{\bar r}\right)$$

$$+\frac{\eta_0}{\varrho_0 u_\infty d}\left(\frac{h}{d}\frac{\partial^2\bar V_r}{\partial\bar r^2} + \frac{h}{d}\frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar V_r}{\partial\bar r} + \frac{1}{4\pi^2}\frac{h}{d}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial^2\bar V_r}{\partial\bar\Theta^2} - \frac{h}{d}\frac{\bar V_r}{\bar r^2} - \frac{1}{\pi}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar\Theta}\right]$$ 1

$$\frac{\partial\bar p}{\partial\bar r} = \underbrace{\frac{\bar V_\Theta^2}{\bar r}}_{O(1)} - \underbrace{\frac{1}{\pi RE}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar\Theta}}_{O\left(\frac{1}{RE}\right)}$$ 1

$$\frac{\partial\bar p}{\partial\bar r} = -\frac{1}{\pi RE}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar\Theta}$$ 1

Θ-Impulsgleich.

$$\varrho_0\left(\frac{u_\infty^2 h}{d^2}\bar V_r\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar r} + \frac{u_\infty^2}{2\pi d}\frac{\bar V_\Theta}{\bar r}\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar\Theta} - \frac{u_\infty^2 h}{d^2}\frac{\bar V_r\bar V_\Theta}{\bar r}\right) = -\frac{\varrho_0 u_\infty^2}{2\pi d}\frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar p}{\partial\bar\Theta}$$ 1

$$+\eta_0\left(\frac{u_\infty}{d^2}\frac{\partial^2\bar V_\Theta}{\partial\bar r^2} + \frac{u_\infty}{d^2}\frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar r} + \frac{u_\infty}{4\pi^2 d^2}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial^2\bar V_\Theta}{\partial\bar\Theta^2} - \frac{u_\infty}{d^2}\frac{\bar V_\Theta}{\bar r^2} + \frac{u_\infty h}{2\pi d^3}\frac{2}{\bar r^2}\frac{\partial\bar V_r}{\partial\bar\Theta}\right)$$

$$\cdot \frac{2\pi d}{\varrho_0 u_\infty^2}$$

$$\frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar p}{\partial\bar\Theta} = -\left(2\pi\frac{h}{d}\bar V_r\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar r} + \frac{\bar V_\Theta}{\bar r}\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar\Theta} - 2\pi\frac{h}{d}\frac{\bar V_r\bar V_\Theta}{\bar r}\right)$$

$\frac{1}{4\pi^2} \ll 1$

$$+\frac{2\pi\eta_0}{\varrho_0 u_\infty d}\left(\frac{\partial^2\bar V_\Theta}{\partial\bar r^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar r} + \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial^2\bar V_\Theta}{\partial\bar\Theta^2} - \frac{\bar V_\Theta}{\bar r^2} + \frac{1}{2\pi}\frac{h}{d}\frac{2}{\bar r^2}\frac{\partial\bar V_r}{\partial\bar\Theta}\right)$$ 1

$$\frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar p}{\partial\bar\Theta} = -\underbrace{\frac{\bar V_\Theta}{\bar r}\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar\Theta}}_{O(1)} + \underbrace{\frac{2\pi}{RE}\left(\frac{\partial^2\bar V_\Theta}{\partial\bar r^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar r} - \frac{\bar V_\Theta}{\bar r^2}\right)}_{O\left(\frac{1}{RE}\right)}$$ 1

$$\frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar p}{\partial\bar\Theta} = \frac{2\pi}{RE}\left(\frac{\partial^2\bar V_\Theta}{\partial\bar r^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar V_\Theta}{\partial\bar r} - \frac{\bar V_\Theta}{\bar r^2}\right)$$ 1

Abschätzung: $$O\left(\frac{\frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar p}{\partial\bar\Theta}}{\frac{\partial\bar p}{\partial\bar r}}\right) = \frac{\frac{2\pi}{RE}}{\frac{1}{\pi RE}} = 2\pi^2 \gg 1$$ 1 1

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar r}\frac{\partial\bar p}{\partial\bar\Theta} \gg \frac{\partial\bar p}{\partial\bar r}$$ 1

$\Rightarrow$ vereinfachte Impulsgleichung

$$\boxed{\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\Theta} = \eta\left(\frac{\partial^2 V_\Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\Theta}{\partial r} - \frac{V_\Theta}{r^2}\right)}$$ 1

57

März 1995

9. Aufgabe (16 Punkte)

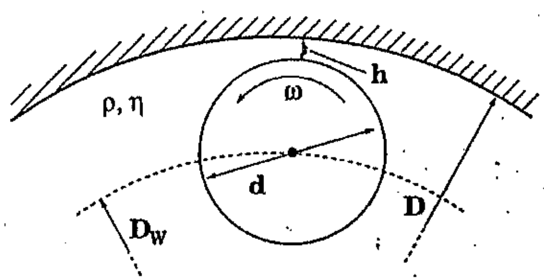
In einem unendlich ausgedehnten Wälzlager rollen die Wälzrollen bezogen auf ihre Drehachse auf der Außenwand ab. Die Wälzrollen haben die konstante Drehgeschwindigkeit ω und den Durchmesser d. Der Außendurchmesser ist D und der Durchmesser der Wälzrollenmittelpunkte D_W. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im schmalen Spalt zwischen den Wälzrollen und der Außenwand ist sehr klein. Es gilt:

$$\frac{h}{d} \ll 1 \qquad Re \ll 1$$

Die Flüssigkeit sei inkompressibel und die Temperatur konstant.
Die Impulsgleichungen in Polarkoordinaten lauten:

$$\varrho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}-\frac{v_\theta^2}{r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2}-\frac{v_r}{r^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

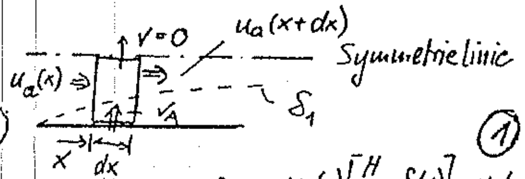
$$\varrho\left(v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}-\frac{v_r v_\theta}{r}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}+\eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}-\frac{v_\theta}{r^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$



- Leiten Sie aus den beiden Impulsgleichungen die vereinfachte Differentialgleichung für eine schleichende Spaltströmung mittels einer Größenordnungsabschätzung der einzelnen Terme her. Machen Sie dafür sämtliche Größen dimensionslos.

Gegeben: D, d, D_W, $(D-(D_W+d) \ll d)$, ω, ϱ, η

Hinweis: $\bar{\theta} = \dfrac{\theta}{2\pi} \qquad Re = \dfrac{\varrho v d}{\eta}$

a) 

①

Konti: $\int_A \vec{v}\cdot\vec{n}\, dA = 0$ ① ①

$\Rightarrow -u_a(x)\left[\frac{H}{2}-\delta_1(x)\right]+u_a(x+dx)\left[\frac{H}{2}-\delta_1(x+dx)\right]-v_A\left(x+\frac{dx}{2}\right)dx=0$

$u_a=u_\infty=const \Rightarrow u_\infty\delta_1(x)-u_\infty\delta_1(x)-u_\infty\frac{d\delta_1(x)}{dx}dx - v_A\, dx=0$

$\Rightarrow \underline{v_A = -u_\infty \frac{d\delta_1(x)}{dx}}$ (1) ①

b) $\frac{du_a}{dx}=0$ ①; K.P. $\Rightarrow \frac{d\delta_2}{dx}+\frac{\tau(y=0)}{\rho u_a^2}=0$ (2)

$\frac{\delta_2}{\delta}=\int_0^1 \frac{u}{u_a}\left(1-\frac{u}{u_a}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \left[\frac12\left(\frac y\delta\right)^2-\frac13\left(\frac y\delta\right)^3\right]_0^1=\frac16$ (3) ①

$\tau(y=0)=-\eta\frac{\partial u}{\partial y}=-\eta\frac{u_a}{\delta}$ (4) ①

(3),(4) in (2) einsetzen: $\frac16\cdot\frac{d\delta}{dx}-\frac{\eta}{\rho u_a\delta}=0$; $\delta d\delta=\frac{6\eta}{\rho u_a}$

① Integration; $\delta(x=0)=0 \Rightarrow \underline{\frac{\delta}{x}=\sqrt{\frac{12\eta}{\rho u_a x}}=\sqrt{\frac{12}{Re_x}}}$ ①

c) $\frac{\delta_1}{\delta}=\int_0^1\left(1-\frac{u}{u_a}\right)d\left(\frac y\delta\right)=\left[\frac y\delta-\frac12\left(\frac y\delta\right)^2\right]_0^1=\frac12$ ①

Mit (1): $v_A=-u_\infty\frac12\frac{d\delta}{dx}$; $\frac{d\delta}{dx}=\sqrt{\frac{12\eta}{\rho u_a}}\frac{1}{2\sqrt x}=\sqrt{\frac{3}{Re_x}}$

$\Rightarrow \underline{v_A=-u_\infty\frac12\sqrt{\frac{3}{Re_x}}}$ ① $Re_x=\frac{\rho u_a x}{\eta}$ ①

d) $F_W=2\int_0^L B\tau_W\, dx$ (Platte beidseitig benetzt) ①

$F_W=\frac12\rho u_\infty LB\cdot c_W \Rightarrow c_W=\frac4L\int_0^L\frac{\tau_W}{\rho u_\infty^2}dx$ ①

Mit (4) $\frac{\tau_W}{\rho u_\infty^2}=\frac{\eta}{\rho u_\infty\delta} \Rightarrow c_W=\frac4L\int_0^L\frac{\eta}{\rho u_\infty}\sqrt{\frac{\rho u_\infty}{12\eta x}}\,dx$ ①

$\Rightarrow c_W=\frac4L\sqrt{\frac{\eta}{12\rho u_\infty}}\left[2\sqrt x\right]_0^L=\frac43\sqrt3\sqrt{\frac{\eta}{\rho u_\infty L}}$

$c_W=\frac43\sqrt3\sqrt{Re_L}^{-1}$ $Re_L=\frac{\rho u_\infty L}{\eta}$ ①

8. Aufgabe

a) Energiesatz: $c_pT^*+\frac12u^{*2}=c_pT_0$ (1) ①

$Ma^*=1 \Rightarrow u^*=\sqrt{\varkappa RT^*}$ ①

Mit $\varkappa R=(\varkappa-1)c_p \Rightarrow u^*=\sqrt{(\varkappa-1)c_pT^*}$

Einsetzen in (1) $c_pT^*+\frac12(\varkappa-1)c_pT^*=c_pT_0$

$\Rightarrow \frac{T^*}{T_0}=\frac{2}{\varkappa+1}$ ①

Mit Isentropenbeziehung: $\frac{T}{\rho^{\varkappa-1}}=const$

$\Rightarrow \frac{\rho^*}{\rho_0}=\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}$ ①

b) Massenstrom $\dot m=\dot m_2=\rho_2u_2A_2$ ①

Mit $R\gg H_2 \Rightarrow A_2=2\pi R_W H_2$ ① R_W: Radius d. Welle

Druckverhältnis überkritisch $\Rightarrow u_2^2=a_2^2=\varkappa RT_2$

$\frac{\rho_2}{\rho_1}=\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}$ $\frac{T_2}{T_1}=\frac{2}{\varkappa+1}$ ①

Einsetzen: $\dot m=2\pi R_WH_2\rho_1\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}\sqrt{\varkappa RT_1}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac12}$ ①

id. Gasgl.: $\rho_1=\frac{p_1}{RT_1}$

$\Rightarrow \underline{\dot m=2\pi R_WH_2p_1\sqrt{\frac{\varkappa}{RT_1}}\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}}}$ (1) ①

c) stationär: $\dot m_2=\dot m_4$ ①

Mit (1): $H_2p_1\frac{1}{\sqrt{T_1}}=H_4p_3\frac{1}{\sqrt{T_3}}$ ①

$\Rightarrow \underline{p_3=\frac{H_2}{H_4}\sqrt{\frac{T_3}{T_1}}p_1}$ ①

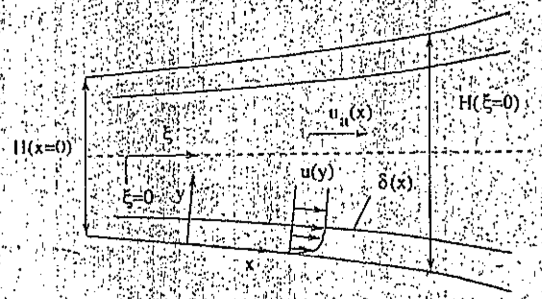
7. Aufgabe (13 Punkte)

Eine inkompressible Flüssigkeit der Dichte ρ und der Zähigkeit η strömt durch einen ebenen Kanal. Die Kontur des Kanals ist gegeben durch:

$$H(\xi) = H_0 + C \cdot \xi^m$$

An den Kanalwänden bildet sich eine Grenzschicht aus. Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht läßt sich durch einen Polynomansatz darstellen:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0 + a_1\frac{y}{\delta} + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$



Bestimmen Sie

a) die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2 für den Fall $\delta \ll H(\xi)$.

b) die Verdrängungsdicke δ_1 in Abhängigkeit von der Grenzschichtdicke δ.

c) die Impulsverlustdicke δ_2 in Abhängigkeit von der Grenzschichtdicke δ.

d) Die Strömung löst an der Stelle $x = x_0$ ab. Wie groß ist die Grenzschichtdicke an dieser Stelle. Für welche m kann die Strömung ablösen?

Gegeben: $\eta, \rho, H_0, u_a(\xi=0), C, m = 1, x_0$

7 Aufgabe a) $\dot V_0 = u_a(0) H_0 = u_a(\xi) H$

$\rightarrow u_a(x) = u_a(\xi) = \frac{u_{a0} H_0}{H_0 + Cx}$ (1) $\frac{\partial u_a}{\partial x} = -\frac{C u_{a0} H_0}{(H_0+Cx)^2}$

Bernoulli: $\frac{dp}{dx} = -\rho u_a \frac{du_a}{dx} = \rho C \frac{u_{a0}^2 H_0^2}{(H_0+Cx)^3}$ (1) (1)

1. RB: $y=0 \rightarrow u=0 \rightarrow a_0 = 0$ (1)

2. RB: $y=\delta \rightarrow u=u_a \rightarrow a_1+a_2=1$

3. RB: $y=0 \rightarrow \eta \frac{u_a}{\delta^2}\frac{\partial^2(u/u_a)}{\partial(y/\delta)^2} = \frac{dp}{dx} \rightarrow a_2 = \frac{\rho C \delta^2}{2\eta}\frac{u_{a0} H_0}{(H_0+Cx)^2}$

$\rightarrow \frac{u(x,y)}{u_a(x)} = \Big[1 - \underbrace{\frac{\rho C\delta^2}{2\eta}\frac{u_{a0}H_0}{(H_0+Cx)^2}}_{A}\Big]\frac{y}{\delta} + \frac{\rho C\delta^2}{2\eta}\frac{u_{a0}H_0}{(H_0+Cx)^2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$ (1)

b) $\delta_1 = \delta\int_0^1 1-(1-A)\frac{y}{\delta} - A\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 d\frac{y}{\delta} = \delta\left[\frac{y}{\delta} - \frac12(1-A)\left(\frac y\delta\right)^2 - \frac13 A\left(\frac y\delta\right)^3\right]_0^1$ (1)

$= \delta\left[1-\frac12(1-A)-\frac13 A\right] = \delta\left[\frac12 + \frac16 \frac{\rho C\delta^2}{2\eta}\frac{u_{a0}H_0}{(H_0+Cx)^2}\right]$ (1)

c) $\delta_2 = \delta\int_0^1 \frac{u}{u_a}\left(1-\frac{u}{u_a}\right) d\frac y\delta = \delta\int_0^1 \left[(1-A)\frac y\delta + A\left(\frac y\delta\right)^2\right]\left[1-(1-A)\frac y\delta - A\left(\frac y\delta\right)^2\right] d\frac y\delta$ (1)

$= \delta\int_0^1 -A^2\left(\frac y\delta\right)^4 - 2A(1-A)\left(\frac y\delta\right)^3 + (3A-1-A^2)\left(\frac y\delta\right)^2 + (1-A)\frac y\delta \, d\frac y\delta$

$= \delta\left[-A^2\frac15 - 2A(1-A)\frac14 + (3A-1-A^2)\frac13 + (1-A)\frac12\right]$ (1)

$= \delta\left(-\frac{1}{30}A^2 + \frac16\right) = \delta\left[\frac16 - \frac1{30}\left(\frac{\rho C\delta^2}{2\eta}\frac{u_{a0}H_0}{(H_0+Cx)^2}\right)^2\right]$ (1)

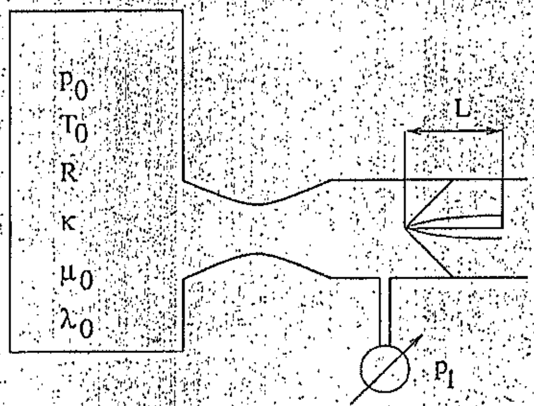
d) für $\frac{\partial p}{\partial x} > 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \rightarrow m > 0$ (1)

Ablösung: $\tau_w = 0 = \eta\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = \eta\frac{u_a}{\delta}\frac{\partial(u/u_a)}{\partial(y/\delta)}\Big|_{y/\delta=0}$ (1)

$1-A=0 \rightarrow \delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\rho C}\frac{(H_0+Cx_0)^2}{u_{a0}H_0}}$ (1)

8. Aufgabe (12 Punkte)

In einem Überschallkanal soll die Umströmung einer ebenen Platte in kompressibler Luft untersucht werden. Um den Anströmzustand (1) der Platte zu bestimmen, wird in der Meßkammer vor dem Verdichtungsstoß der statische Druck p_1 gemessen. Außerdem wird der Zustand im Kessel (0) bestimmt.



a) Bestimmen Sie die Machzahl Ma_1 in der Meßstrecke

b) Bestimmen Sie die Reynoldszahl $Re_1 = \frac{\rho_1 u_1 L}{\mu_1}$ in der Meßstrecke für eine Platte mit der Länge L

c) Wie ist die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit λ/λ_0 von der Temperatur unter der Voraussetzung, daß die Prandtl-Zahl nicht von der Temperatur abhängt?

Gegeben: $L, p_0, T_0, R, \kappa, \mu_0, p_1, \omega, \lambda_0$

Hinweis:

- Die Luft wird als ideales Gas mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten betrachtet.
- Isentropenbeziehungen

$$\frac{T_a}{T_b} = \left(\frac{\rho_a}{\rho_b}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_a}{p_b}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

- Die Abhängigkeit der Viskosität von der Temperatur wird mit dem folgenden Gesetz bestimmt:

$$\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\omega}$$

8. Aufgabe a) E-G: $c_p T_0 = c_p T_1 + \frac{1}{2} u_1^2$ 1 $c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1}$ 1

$\rightarrow T_0 = T_1 + \frac{1}{2}(\kappa - 1)\frac{u_1^2}{\kappa R}$ $(a^2 = \kappa R T)$ $\rightarrow$ $\frac{u_1}{a_1} = \sqrt{2\left(\frac{T_0}{T_1} - 1\right)/(\kappa - 1)}$
1

Isentropenbeziehungen: $Ma_1 = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}\left[\left(p_0/p_1\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right]}$ 1

b) $Re_1 = \frac{\rho_1 u_1 L}{\mu_1} = \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{u_1}{a_1} \frac{\mu_0}{\mu_1} \frac{\rho_0 a_1 L}{\mu_0}$ 1

$a_1 = \sqrt{\kappa R T_1} = \sqrt{\kappa R \frac{T_1}{T_0} T_0} = \sqrt{\kappa R T_0} \Big/ \sqrt{1 + \frac{1}{2}(\kappa - 1) Ma_1^2}$ 1

$\underbrace{\rho_1/\rho_0 = (p_1/p_0)^{1/\kappa}}_{1}$ $\mu_0/\mu_1 = (T_0/T_1)^{\omega} = (p_0/p_1)^{\ldots}$ 1

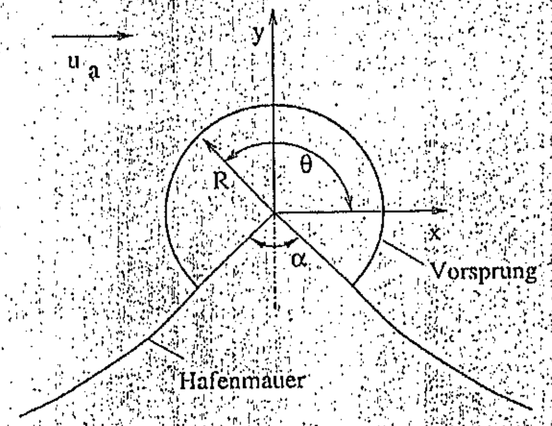
$\rightarrow Re_1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1/\kappa} Ma_1 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{-\frac{(\kappa-1)\omega}{\kappa}} \frac{\rho_0 L}{\mu_0} \frac{\sqrt{\kappa R T_0}}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}(\kappa - 1) Ma_1^2}}$ 1

c) $\underbrace{Pr = \frac{\mu c_p}{\lambda}}_{1} = \frac{\mu_0 c_{p0}}{\lambda_0} \neq f(T)$

$\underbrace{c_p \neq f(T)}_{1} \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\omega}$ 1

6. Aufgabe (13 Punkte)

An einer Hafeneinfahrt befindet sich ein kreisförmiger Vorsprung, auf dem ein Leuchtturm steht. Die Umströmung des Vorsprungs soll potentialtheoretisch beschrieben werden. Die Kontur der Hafenmauer und des Mauervorsprungs wird als verfestigte Stromlinie interpretiert.



a) Wählen Sie aus den gegebenen komplexen Strömungsfunktionen diejenigen aus, die die Umströmung des Mauervorsprungs beschreiben. Skizzieren Sie die Stromlinien dieser Strömung.

b) Berechnen Sie die Konstanten so, daß die Umströmung am Vorsprung richtig nachgebildet wird.

c) Berechnen und skizzieren Sie die Verteilung der Wasserspiegelhöhe entlang der Kontur des Mauervorsprunges. Die Wasserhöhe in großem Abstand sei H_∞.

Gegeben: $u_a, R, \rho, \alpha = \pi/2, g, H_\infty$

Bekannte komplexe Strömungsfunktionen:

- Parallelströmung: $F(z) = (u_\infty - i v_\infty) z$
- Potentialwirbel: $F(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$
- Quelle/Senke: $F(z) = \frac{E}{2\pi}\ln z$
- Staupunktströmung: $F(z) = a z^2$
- Dipol: $F(z) = \frac{M}{2\pi z}$

Hinweis:

- $v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}$; $v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}$
- $z = x + iy = r \cdot e^{i\theta}$

6. Aufgabe a) Parallelströmung (1) + Dipol (1) + Potentialwirbel (1)

$F(z) = u_a z + \frac{M}{2\pi z} - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$

$= u_a r e^{i\theta} + \frac{M}{2\pi r} e^{-i\theta} - \frac{i\Gamma}{2\pi}(\ln r + i\theta)$ (1)

b) $F(z) = u_a r(\cos\theta + i\sin\theta) + \frac{M}{2\pi r}(\cos\theta - i\sin\theta) - \frac{i\Gamma}{2\pi}(\ln r + i\theta)$

$\phi = \mathrm{Re}(F) = u_a r\cos\theta + \frac{M}{2\pi r}\cos\theta + \frac{\Gamma}{2\pi}\theta$

$\psi = \mathrm{Im}(F) = u_a r\sin\theta - \frac{M}{2\pi r}\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$ (1)

$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = u_a\cos\theta - \frac{M}{2\pi r^2}\cos\theta$ (1)

$v_r(R) = 0 \to M = 2\pi R^2 u_a$ (1)

Staupunkt: $v_\theta(R, \theta = \frac{3}{2}\pi \pm \frac{\alpha}{2}) = 0$

$v_\theta(R) = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -u_a\sin\theta - \frac{2\pi R^2 u_a}{2\pi R^2}\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R}$ (1)

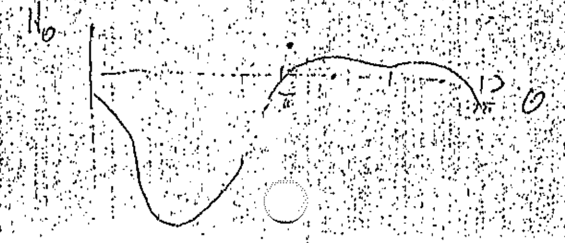
$= -2u_a\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} = 0 \to \Gamma = 4\pi R u_a\sin\theta$ (1)

$\alpha = \pi/2 \to \sin(\frac{3}{2}\pi \pm \pi/4) = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \to \Gamma = -2\sqrt{2}\pi R u_a$ (1)

c) Bernoulli: $p_0 + \frac{1}{2}\rho u_a^2 + \rho g H_\infty = p_0 + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g H_\theta$ (1)

$u^2(\theta, R) = \left(-2u_a\sin\theta - \frac{2\sqrt{2}\pi R u_a}{2\pi R}\right)^2 = u_a^2(2\sin\theta + \sqrt{2})^2$

$H_\theta = H_\infty + \frac{u_a^2 - u^2}{2g} = H_\infty + \frac{u_a^2}{2g}\left(1 - (2\sin\theta + \sqrt{2})^2\right)$ (1)



(1)

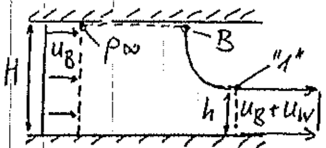
a) Absolutsystem: Strömung instationär

Bezugssystem mit u_B bewegt: Strömung stationär (1)

Bernoulli "B" -> "∞": $p_B = p_\infty + \frac{1}{2}\rho u_B^2$; $p_B = p_a$

$\Rightarrow \quad p_\infty = p_a - \frac{1}{2}u_B^2 \quad (1)$ (1)

b) Impulssatz; mit u_B mitbewegtes Kontrollvolumen



(1)

$$\int_A \rho\vec v(\vec v\cdot\vec n)dA = \Sigma\vec F$$ (1)

(1)

$$\Rightarrow -\rho u_B^2 H + \rho(u_W+u_B)^2 h = \int_0^H [p_\infty + \rho g(H-y)]dy - p_a(H-h) - \int_0^h [p_a + \rho g(h-y)]dy$$ (1)

$$\Rightarrow -\rho u_B^2 H + \rho(u_W+u_B)^2 h = (p_\infty + \tfrac{1}{2}\rho g H)H - p_a(H-h) - (p_a + \tfrac{1}{2}\rho g h)h$$ (1)

$$\Rightarrow -\rho u_B^2 H + \rho(u_W+u_B)^2 h = \tfrac{1}{2}\rho g(H^2-h^2) + (p_\infty - p_a)H \quad (2)$$

Bernoulli "B" -> "1": $p_a + \rho g H = p_a + \rho g h + \frac{1}{2}\rho(u_W+u_B)^2$ (1)

$\Rightarrow \quad (u_W+u_B)^2 = 2g(H-h) \quad (3)$ (1)

Konti: $u_B H = (u_W+u_B)h$ (1)

Quadrieren, mit (3) $\Rightarrow$ $u_B^2 H = 2gh^2(1-\frac{h}{H})$ (4)

(1),(3),(4) in (2): (1)

$$-2\rho g h^2(1-\tfrac{h}{H}) + 2\rho g h(H-h) = \tfrac{1}{2}\rho g(H^2-h^2) - \rho g\tfrac{h^2}{H}(H-h)$$

$$\Rightarrow -2h^2(H-h) + 2hH(H-h) = \tfrac{1}{2}H(H^2-h^2) - h^2(H-h)$$

$$\Rightarrow -2h^2 + 2hH = \tfrac{1}{2}H(H+h) - h^2$$

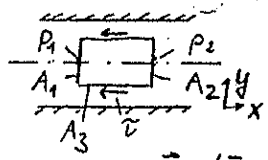
(1) $\Rightarrow$ $h^2 - \frac{3}{2}Hh + \frac{1}{2}H^2 = 0$ Quadr. Glg. für h

$\Rightarrow$ $h_{1/2} = \frac{3}{4}H \pm \sqrt{\frac{9}{16}-\frac{8}{16}}\,H$ $\Rightarrow$ $h = \frac{1}{2}H$ (1)

(2. Lösung h = H nicht sinnvoll)

4. Aufgabe

a)



Impulssatz: (1)

$$\frac{d\vec I}{dt} - \int_\tau \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec v)d\tau + \int_A \rho\vec v(\vec v\cdot\vec n)dA = \vec F_p + \vec F_R$$

$\vec v = (\bar u + u')\vec i + (\bar v + v')\vec j$; $\bar v = 0$; $\rho = const$ (1)

zeitl. Mittelung:

$$\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\int_\tau \rho\frac{\partial}{\partial t}[(\bar u+u')\vec i + v'\vec j]d\tau\, dt + \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\int_A \rho[(\bar u+u')\vec i + v'\vec j]\,\vec v\cdot\vec n\, dA\, dt = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}(\vec F_p+\vec F_R)\,dt$$ (1)

stationäre Strömung: $\frac{\partial\bar u}{\partial t}=0$ $\int u'\vec i\, dt = 0$; $\int v'\vec j\, dt = 0$ (1)

$$\int_A \dots dA = \int_{A_1}\rho[(\bar u+u')\vec i + v'\vec j][\bar u+u']dA + \int_{A_2}\rho[(\bar u+u')\vec i+v'\vec j][-\bar u-u']dA$$
$$+ \int_{A_3}\rho[(\bar u+u')\vec i+v'\vec j]\,v'dA \quad ; \quad \frac{\partial\bar u}{\partial x}=0 \Rightarrow \int_{A_1}\dots = -\int_{A_2}\dots$$ (1)

(1) $$\Rightarrow \frac{dI_x}{dt} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\int_{A_3}\rho(\bar u v' + u'v')\,dA\, dt = \pi r^2(p_1-p_2) + 2\pi r L\tau$$

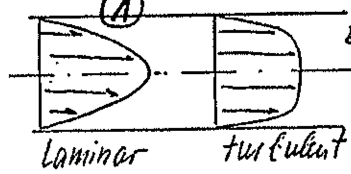
Newtonsches Fluid: $\tau = -\eta\frac{d\bar u}{dr}$

$\frac{1}{T}\int \bar u v'\, dt = 0$

$$\Rightarrow \frac{dI_x}{dt} = \frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_2}\int_{A_3}\rho\, u'v'\, dA\, dt = 2\pi r L\rho\,\overline{u'v'}$$ (1)

$$\Rightarrow (p_2-p_1)\frac{r}{2L} = -\rho\,\overline{u'v'} + \eta\frac{d\bar u}{dr}$$ (1), wenn ↑

b)



(1)

turbulent: (1)
Geschw. profil völliger;
Impulsaustausch in radialer Richtung wird größer (1)

c) laminar: $\Delta p_V = \lambda\frac{\rho}{2}u_m^2$; $\lambda = \frac{C_1}{Re}$ (1)

$C_1 = f(\text{Querschnitt})$ (1)

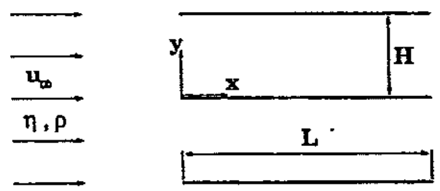
turbulent: $\Delta p_V = \lambda\frac{L}{d_h}\frac{\rho}{2}\bar u_m^2$ $\quad \lambda = \frac{C_2}{\sqrt[4]{Re_d}}$ $\quad C_2 = const$

$Re_d = \frac{\rho\bar u_m d_h}{\eta}$ $\quad d_h = \frac{4A}{U}$ (1)

7. Aufgabe (16 Punkte)

Ein Gitter bestehend aus ebenen Platten wird parallel mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt. Dabei wird ein Teil der Grenzschicht an den Platten abgesaugt. Die Absauggeschwindigkeit $v_A(x)$ wird so gewählt, daß die Geschwindigeit am Grenzschichtrand gleich der Anströmgeschwindigkeit ist. Die Strömung ist laminar und für die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht gilt näherungsweise

$$\frac{u}{u_a} = \frac{y}{\delta} \; .$$



a) Leiten Sie mit Hilfe einer Bilanz an einem differentiellen Element den Zusammenhang zwischen Absauggeschwindigkeit v_A und Verdrängungsdicke δ_1

$$v_A = v(y=0) = -u_\infty \frac{d\delta_1}{dx}$$

her.

b) Berechnen Sie die Grenzschichtdicke $\delta(x)$.

c) Berechnen Sie die Absauggeschwindigkeit $v_A(x)$.

d) Berechnen Sie den Widerstandsbeiwert einer Platte.

Gegeben: u_∞, L, H, ϱ, η

Hinweis: von Kármán-Polhausen Beziehung:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_a}\frac{du_a}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) + \frac{\tau(y=0)}{\varrho u_a^2} = 0$$

$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ (1)

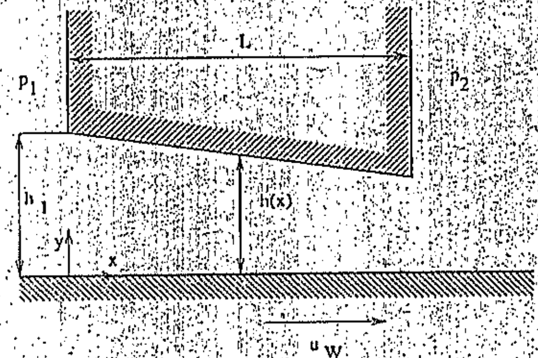
$\vec{q}$

$\frac{\vec{q}}{q_{ref}}$

5. Aufgabe (11 Punkte)

Zur Berechnung der Temperaturverteilung in ebenen, stationären kompressiblen Luftströmungen unter Vernachlässigung der Gravitation wird die Energiegleichung in kartesischen Koordinaten benötigt.

$$\rho c_p \vec{v} \cdot (\nabla T) = \lambda \nabla^2 T + \vec{v} \cdot (\nabla p) + \eta \left[2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]$$



a) Welche Vereinfachungen gelten für schleichende Strömungen?

b) Vereinfachen Sie die Energiegleichung unter der Annahme, daß die Spalthöhe in der Skizze wesentlich kleiner ist als die Länge L.

c) Vereinfachen Sie das Ergebnis aus b) für schleichende Strömungen und geben Sie die vereinfachte Gleichung dimensionsbehaftet an.

Gegeben: κ und alle nötigen Referenzwerte

Hinweis: $Pr = 0.7$, $\kappa = 1.4$, $a = \sqrt{\kappa R T}$, $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})^T$, $\vec{v} = (u, v)^T$

5. Aufgabe a) $\ldots \ll \ldots$; $\ldots (l/L) \ll \ldots$ (1)

b) $\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\bar{y} = \frac{y}{h_1}$, $\bar{u} = \frac{u}{u_W}$, $\bar{v} = \frac{v}{u_W}\frac{L}{l_1}$, $\bar{T} = \frac{T}{T_W}$,

$\bar{\eta} = \eta/\eta_{ref}$, $\bar{c}_p = c_p/c_{p,ref}$, $\bar{\lambda} = \lambda/\lambda_{ref}$ (2)

$\rightarrow \rho_1 c_{p,ref} \bar{\rho} \bar{c}_p \left[u_W \frac{T_W}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + u_W \frac{l_1}{L} \frac{T_W}{l_1} \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right] = \lambda_{ref} T_W \bar{\lambda} (\ldots)$

(1) $+ u_W p_1 \left(\frac{1}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{l_1} \frac{l_1}{L} \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) + \eta_{ref} \bar{\eta} \left[2 (\ldots) + (\ldots) \right]$

$\left(\cdot \frac{L}{\rho_1 u_W^3} \right)$: $\frac{c_{p,ref} T_W}{u_W^2} \bar{\rho} \bar{c}_p \left[\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right] = \frac{\lambda_{ref} T_W}{\rho_1 u_W^3 L} \bar{\lambda} (\ldots)$

$+ \frac{p_1}{\rho_1 u_W^2} \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \right) + \frac{\eta_{ref}}{\rho_1 u_W L} \bar{\eta} \left[2 \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \right)^2 + \frac{L^2}{l_1^2} (\ldots) \right]$

$\rightarrow \frac{c_{p,ref} T_W}{u_W^2} \bar{\rho} \bar{c}_p \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{\lambda_{ref} T_W}{\rho_1 u_W^2 L} \frac{L^2}{l_1^2} \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{p_1}{\rho_1 u_W^2} (\ldots)$

$+ \frac{\eta_{ref}}{\rho_1 u_W L} \frac{L^2}{l_1^2} \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2$ (2)

c) $\frac{1}{\kappa - 1} \frac{1}{Ma^2} \bar{\rho} \bar{c}_p \left(\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) = \frac{1}{Pr} \frac{1}{\kappa - 1} \frac{1}{Ma^2} \underbrace{\frac{1}{Re} \left(\frac{L}{l_1} \right)^2}_{\gg 1} \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{\kappa} \frac{1}{Ma^2} (\ldots) + \frac{1}{Re} \frac{L^2}{l_1^2} (\ldots)$ (2)

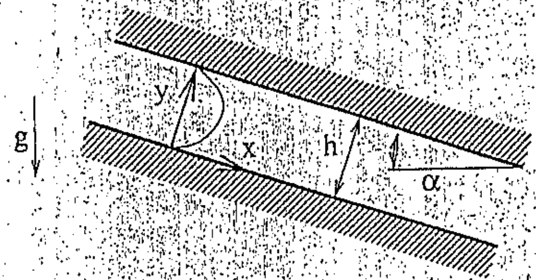
$Pr \approx 1$; $\frac{1}{\kappa} \approx 1$; $\frac{1}{\kappa - 1} \approx 1$ (1)

$\rightarrow \frac{1}{Pr} \frac{1}{\kappa - 1} \frac{1}{Ma^2} \frac{1}{Re} \left(\frac{L}{l_1} \right)^2 \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{1}{Re} \frac{L^2}{l_1^2} \bar{\eta} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right)^2$

$\rightarrow \lambda \frac{d^2 T}{d y^2} + \eta \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = 0$ (1)

4. Aufgabe (13 Punkte)

Ein um einen Winkel α geneigter ebener Kanal der Breite B wird von einem Ostwald-de Waele-Fluid durchströmt. In der Strömung wird der konstante Druckgradient dp/dx gemessen.



Bestimmen Sie für eine ausgebildete laminare Schichtenströmung

a) die Geschwindigkeitsverteilung. (Skizzieren Sie das Ergebnis)

b) die Schubspannungen an den Wänden

c) den Volumenstrom

Gegeben: $h, \alpha, dp/dx < 0, \rho, g, \eta, n = 3, B$

Hinweis:

- Ostwald-de Waele Fließgesetz: $\tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial y}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}$

4. Aufgabe a) $\Sigma = 0 = \tau - \frac{dp}{dx}dx\,dy\,\tau - \frac{d\tau}{dy}dy\,dx$ (1)

$\to \frac{d\tau}{dy} = \rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dx} = \Pi \to \tau(y) = \Pi y + C_1$ (1)

$\tau = -\eta\left(\frac{du}{dy}\right)^3 \to \frac{du}{dy} = \left(\frac{-\Pi y - C_1}{\eta}\right)^{1/3}$

$\to u(y) = -\frac{\eta}{\Pi}\frac{3}{4}\left(\frac{-\Pi y - C_1}{\eta}\right)^{4/3} + C_2$; $u(y=0) = 0$, $u(y=h) = 0$ (1) (1)

$-\frac{3}{4}\frac{\eta}{\Pi}\left(\frac{-C_1}{\eta}\right)^{4/3} + C_2 = 0$ Vorzeichen (1)

$-\frac{3}{4}\frac{\eta}{\Pi}\left(\frac{-\Pi h - C_1}{\eta}\right)^{4/3} + C_2 = 0$ $\longrightarrow -\Pi h - C_1 = C_1 \to C_1 = -\frac{\Pi h}{2}$

$C_2 = \frac{3}{4}\frac{\eta}{\Pi}\left(\frac{\Pi h}{2\eta}\right)^{4/3} \to u(y) = \frac{3}{4}\frac{\eta}{\Pi}\left[\left(\frac{\Pi h}{2\eta}\right)^{4/3} - \left(\frac{\Pi}{\eta}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right)^{4/3}\right]$

$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{\rho g \sin\alpha - dp/dx}{\eta}}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{4/3} - \left(\frac{h}{2} - y\right)^{4/3}\right]$ (1) (1)

b) $\tau(y=0) = C_1 = -\frac{1}{2}h\left(\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dx}\right)$ (1)

$\tau(y=h) = \Pi h + C_1 = \frac{1}{2}h\left(\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dx}\right)$ (1)

c) $\dot V = B\int_0^h u(y)\,dy = B\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{\Pi}{\eta}}\int_0^h \left(\frac{h}{2}\right)^{4/3} - \left(\frac{h}{2} - y\right)^{4/3} dy$ (1)

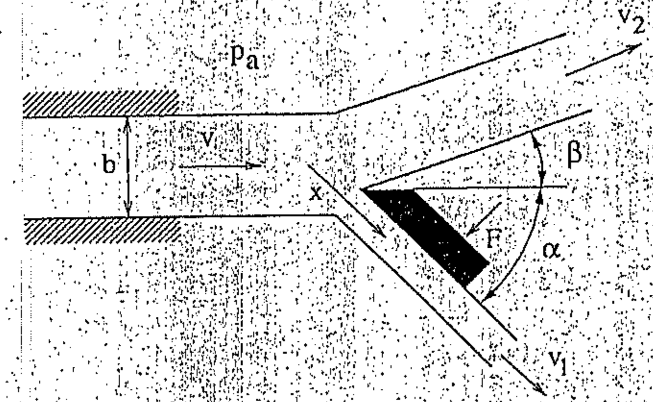
$= \frac{3}{4}B\sqrt[3]{\frac{\Pi}{\eta}}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{4/3}y + \frac{3}{7}\left(h/2 - y\right)^{7/3}\right]_0^h$ (2)

$= \frac{3}{4}B\sqrt[3]{\Pi/\eta}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{4/3} 2\frac{h}{2} - \frac{3}{7}\left(\ldots\right)\right]$

$= \frac{6}{7}B\left(h/2\right)^{7/3}\sqrt[3]{\frac{\rho g \sin\alpha - dp/dx}{\eta}}$ (1)

3. Aufgabe (11 Punkte)

Aus einem ebenen Kanal der Breite b und der Tiefe t tritt ein Flüssigkeitsstrahl stationär ins Freie. Die Strahlgeschwindigkeit ist v. Ein Viertel des Massenstromes wird mit Hilfe einer Schneide unter dem Winkel α abgetrennt.



a) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2?

b) Unter welchem Winkel β wird der restliche Strahl abgelenkt?

c) Man berechne die Kraft, die von der Flüssigkeit auf die Schneide ausgeübt wird.

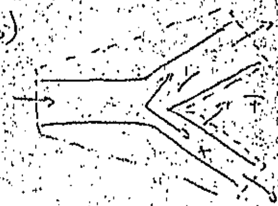
Gegeben: b, t, v, α, ρ

Hinweis:

- Die Wandreibung ist zu vernachlässigen.
- Legen Sie Ihr Koordinatensystem, so daß eine Achse in Richtung von Strahl 1 zeigt

3. Aufgabe (1)

a) $p_a + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \Rightarrow v_1 = v_2 = v$ (1)

b) 

$b_1 = \frac{1}{4} b$, $b_2 = \frac{3}{4} b$ (1)

$I_x = -\rho v^2 b t \cos\alpha + \frac{1}{4}\rho v^2 b t + \frac{3}{4}\rho v^2 b t \cos(\alpha+\beta) = 0$ (1)

$\Rightarrow -\cos\alpha + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos(\alpha+\beta) = 0$

$\Rightarrow \beta = \arccos\left[\frac{4}{3}\left(\cos\alpha - \frac{1}{4}\right)\right] - \alpha$ (1)

c) $F_x = 0$ (3)

$I_y = -\rho v^2 b t \sin\alpha + \frac{3}{4}\rho v^2 b t \sin(\alpha+\beta) = F_y$

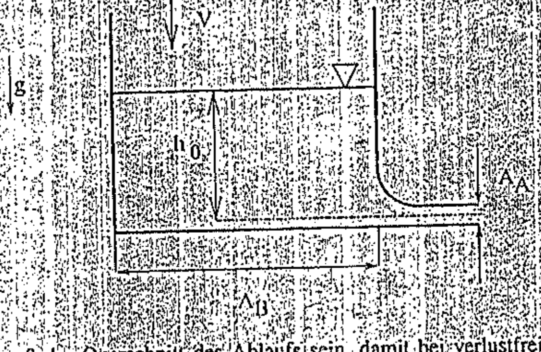
$\sin(\alpha+\beta) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)} = \sqrt{1-\frac{16}{9}\left(\cos\alpha-\frac{1}{4}\right)^2}$

$\Rightarrow F_y = \rho v^2 b t\left(-\sin\alpha + \frac{3}{4}\sqrt{1-\frac{16}{9}\left(\cos\alpha-\frac{1}{4}\right)^2}\right)$ (1)

$F_{Fl\to Sch} = -F_y$

2. Aufgabe (14 Punkte)

In ein Becken fließt ein Fluid mit dem Volumenstrom $\dot V$. Am Boden des Beckens befindet sich ein Ablauf.



a) Wie groß muß der Querschnitt des Ablaufs sein, damit bei verlustfreier Strömung die stationäre Wasserhöhe im Becken h_0 beträgt?

b) Aufgrund eines Defektes versiegt der Volumenstrom zum Zeitpunkt $t = 0$, so daß das Becken langsam leerläuft. Nach welcher Zeitdauer ist das Becken bei quasistationärer Zustandsänderung bis zur Höhe $h_0/2$ ausgelaufen?

c) Aufgrund eines anderen Defektes versiegt nicht der Zustrom, sondern die Abflußöffnung verstopft teilweise und hat nur noch den Querschnitt A_{def}. Stellen Sie die Differentialgleichung der quasistationären Bewegung des Wasserspiegels auf.

$$h = h(t)$$

Gegeben: $\dot V, A_B, A_{def}, g, h_0$

Hinweis:

- Bei quasistationärer Zustandsänderung kann die kinetische Energie des Wasserspiegels nicht vernachlässigt werden.

2. Aufgabe a) Bernoulli 0 → A

$p_0 + \rho g h_0 = p_0 + \frac{\rho}{2} v_A^2 \Rightarrow v_A = \sqrt{2 g h_0}$ (1)

$\dot V = v_A A_A \Rightarrow A_A = \frac{\dot V}{\sqrt{2 g h_0}}$ (1) (1)

b) quasistationärer Bernoulli ...

Konti: $\dot h A_B = v_A A_A \Rightarrow v_A = \dot h A_B / A_A$ (1)

$\Rightarrow g h + \frac{1}{2} \dot h^2 = \frac{1}{2} (A_B/A_A)^2 \dot h^2 \Rightarrow \left[(A_B/A_A)^2 - 1\right] \dot h^2 = 2 g h$ (1)

$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\sqrt{\frac{2 g h}{(A_B/A_A)^2 - 1}}$ ...

$\Rightarrow 2\sqrt{h}\Big|_{h_0}^{h_0/2} = \dots$

$\Rightarrow T = (2 - \sqrt{2}) \sqrt{\frac{(A_B/A_A)^2 - 1}{2 g}\, h_0}$ (1)

c) quasistationärer Bernoulli ...

Konti: $\dot V = v_A A_{def} + \dot h A_B$ ... (1)

$\Rightarrow g h + \frac{1}{2} \dot h^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\dot V - \dot h A_B}{A_{def}} \right)^2$ ... (1)

$\Rightarrow (A_B^2 - A_{def}^2) \dot h^2 - 2 \dot V A_B \dot h + \dot V^2 - 2 A_{def}^2 g h$ ... (1)

$\Rightarrow \dot h^2 - \frac{2 \dot V A_B}{A_B^2 - A_{def}^2} \dot h + \frac{\dot V^2 - 2 A_{def}^2 g h}{A_B^2 - A_{def}^2}$ ... (1)

$\dot h = \frac{\dot V A_B}{A_B^2 - A_{def}^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot V A_B}{A_B^2 - A_{def}^2} \right)^2 - \dots}$

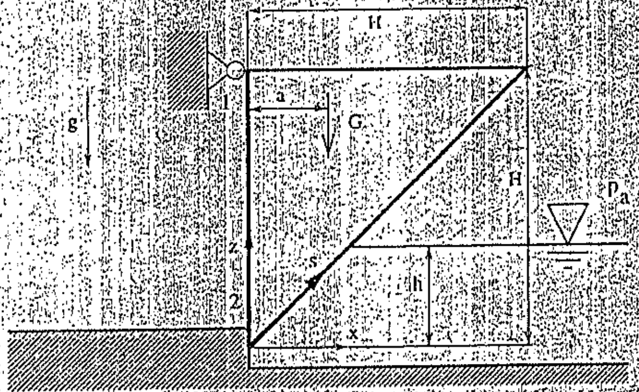
Spezialfall: $A_B = A_{def} \Rightarrow$ ... (1)

Klausur Strömungslehre I + II

10. Juli 1998

1. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Wehr mit dem Gewicht G und der Breite B hat den Querschnitt eines gleichschenkligen Dreieckes mit den skizzierten Abmaßen. Das Wehr ist im Punkt 1 gelenkig gelagert und liegt in 2 an einer Stufe an. Der Schwerpunkt des Wehres hat den seitlichen Abstand a vom Gelenk 1. An der schrägen Seite des Wehres steht Wasser mit der Dichte ρ bis zur Tiefe h.



a) Ermitteln und skizzieren Sie die Druckverteilung entlang der schrägen Wehrseite

b) Bestimmen Sie die Kraft im Lager 2

c) Bestimmen Sie die Kraft in 1

Gegeben: $B, H, G, a, \rho, g, p_a, h$

1. Aufgabe

a) $z = s \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, s$

$dp = -\rho g\, dz \Rightarrow \int dp = \dots$

$\Rightarrow p_a - p(z) = -\rho g (h - z)$

$p(s) = p_a + \rho g \left(h - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, s\right)$

b) $\sum T_{2i} = 0$

Hebelarm $= \frac{\sqrt{2}H}{2} - s$

$T_{1x} H - G a - \int_0^{\sqrt{2}h} \rho g \left(h - \frac{1}{2}\sqrt{2}\, s\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}H - s\right) B\, ds = 0$

$T_{1x} = \dfrac{G a + \rho g B [\dots]}{H}$

c) $\sum T_x = 0$: $T_{1x} + T_{2x} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}h} (p(s) - p_a) B\, ds = 0$

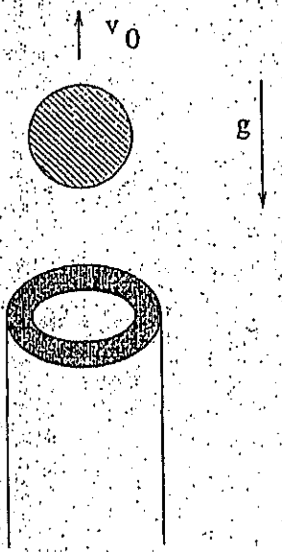
$\sum T_z = 0$: $T_{1z} - G + \frac{1}{2}\sqrt{2}\int_0^{\sqrt{2}h} (p(s) - p_a) B\, ds = 0$

$\Rightarrow T_{1z} = G - \frac{1}{2}\rho g B h^2$

18. 3. 98

9. Aufgabe (16 Punkte)

Eine Kugel mit dem Durchmesser D und der Dichte ρ_K wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht nach oben durch ruhende Luft der Dichte ρ_L geschossen.



Bestimmen Sie unter der Annahme eines konstanten Widerstandsbeiwertes c_w

a) die stationäre Sinkgeschwindigkeit und die Steighöhe

b) die Steigzeit

c) die Geschwindigkeit beim Auftreffen auf den Boden

d) die Fallzeit

Gegeben: $D, v_0, g, \rho_K, \rho_L, c_w$

Hinweis:

- Kugelvolumen: $V_K = \pi D^3/6$
- $\int \frac{dx}{ax^2+c} = \frac{2}{\sqrt{4ac}} \arctan(\frac{2ax}{\sqrt{4ac}})$
- $\int \frac{x dx}{ax^2+c} = \frac{1}{2a} ln(ax^2+c)$

9. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht im Freien: $\rho_K \cdot \frac{\pi D^3}{6} \frac{dv}{dt} = c_w \frac{\rho_L}{2} v^2 \frac{\pi D^3}{4} + \rho_K \frac{\pi D^3}{6} g$

1 $\frac{dv}{dt} = 0 \rightarrow$ stat. Sinkgeschw.: $\boxed{v_s^2 = \frac{4}{3} \frac{\rho_K}{\rho_L} \frac{Dg}{c_w}}$ 1

$\frac{dv}{dt} = -c_w \frac{\rho_L}{\rho_K} \cdot \frac{3}{4} \frac{1}{D} v^2 - g \Rightarrow -\frac{1}{g} \frac{dv}{1+(v/v_s)^2} = dt = \frac{dz}{v}$ 1

$H = -\frac{1}{g} \int_{v_0}^{0} \frac{v\,dv}{1+(v/v_s)^2} = \boxed{\frac{v_s^2}{2g} \ln\left(1+\left(\frac{v_0}{v_s}\right)^2\right) = H}$ 1

2

b) $T_H = -\frac{1}{g} \int_{v_0}^{0} \frac{dv}{1+(v/v_s)^2} = \boxed{\frac{v_s}{g} \arctan \frac{v_0}{v_s} = T_H}$ 1

c) Kräftegleichgewicht: $\rho_K \cdot \frac{\pi D^3}{6} \frac{dv}{dt} = -c_w \frac{\rho_L}{2} v^2 \frac{\pi D^2}{4} + \rho_K \frac{\pi D^3}{6} g$ 1

1 $\frac{1}{g} \frac{dv}{1-(v/v_s)^2} = dt = \frac{dz}{v} \Rightarrow H = \frac{1}{g} \int_0^{v_B} \frac{v\,dv}{1-(v/v_s)^2} = -\frac{v_s^2}{2g} \ln\left(1-\left(\frac{v_B}{v_s}\right)^2\right)$ 1

$\rightarrow \frac{v_s^2}{2g} \ln\left(1+\left(\frac{v_0}{v_s}\right)^2\right) = -\frac{v_s^2}{2g} \ln\left(1-\left(\frac{v_B}{v_s}\right)^2\right) \Rightarrow \boxed{v_B = \frac{v_s}{1+\left(\frac{v_s}{v_0}\right)^2}}$ 1

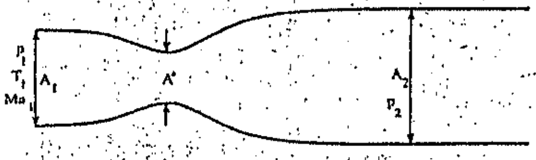
d) $T_B = \frac{1}{g} \int_0^{v_B} \frac{dv}{1-\left(\frac{v}{v_s}\right)^2} = \boxed{\frac{v_s}{2g} \ln \frac{v_s+v_B}{v_s-v_B} = T_B}$ 1

2

18. 3. 98

8. Aufgabe (12 Punkte)

Am Eintritt eines Überschallkanals herrschen die Strömungsgrößen p_1, T_1, Ma_1. In der Meßstrecke wird der Druck p_2 gemessen.



a) Bestimmen Sie die Machzahl Ma_2 in der Meßstrecke.

b) Bestimmen Sie den Massenstrom $\dot{m}$.

c) Bestimmen Sie A_2. Setzen Sie dabei Ma_2 als bekannt voraus.

Gegeben: $A_1, p_1, T_1, Ma_1, R, \kappa, p_2$

Hinweis:

- Die Strömung verläuft isentrop
- Die Luft wird als ideales Gas mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten betrachtet
- Isentropenbeziehungen

$$\frac{T_a}{T_b} = \left(\frac{\rho_a}{\rho_b}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_a}{p_b}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

8. Aufgabe

a) Energiegl.: $c_p T_1 + \frac{1}{2} u_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2} u_2^2$ (1) $a^2 = \kappa R T$ (1)

$$c_p T_1 + \frac{1}{2} \kappa R T_1 Ma_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2} \kappa R T_2 Ma_2^2 \quad \Big| : T_2$$

$$c_p \frac{T_1}{T_2} + \frac{1}{2} \kappa R \frac{T_1}{T_2} Ma_1^2 = c_p + \frac{1}{2} \kappa R Ma_2^2 \qquad c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1} R$$

Isentropenbez.: $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$ (1)

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left(\frac{2}{\kappa-1} + Ma_1^2\right) - \frac{2}{\kappa-1} = Ma_2^2$$

$$\Rightarrow \boxed{Ma_2 = \sqrt{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \left(\frac{2}{\kappa-1} + Ma_1^2\right) - \frac{2}{\kappa-1}}} \quad (1)$$

b) $\dot{m} = A_1 \cdot u_1 \cdot \rho_1$ (1) $\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1}$ (1)

$$\Rightarrow \dot{m} = A_1 \cdot \frac{p_1}{R T_1} \cdot Ma_1 \cdot a_1 = A_1 \cdot \frac{p_1}{R T_1} \cdot Ma_1 \cdot \sqrt{\kappa R T_1}$$

$$\boxed{\dot{m} = A_1 \cdot Ma_1 \cdot p_1 \cdot \sqrt{\frac{\kappa}{R T_1}}} \quad (1)$$

c) Konti: $\dot{m} = \rho_1 \cdot u_1 \cdot A_1 = \rho_2 \cdot u_2 \cdot A_2$ (1)

$$A_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{u_1}{u_2} \cdot A_1 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\kappa} \cdot \frac{Ma_1}{Ma_2} \cdot \frac{a_1}{a_2} A_1$$

$$= A_1 \cdot \frac{Ma_1}{Ma_2} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\kappa} \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = A_1 \frac{Ma_1}{Ma_2} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/\kappa} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{2\kappa}}$$

$$\boxed{A_2 = A_1 \cdot \frac{Ma_1}{Ma_2} \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa+1}{2\kappa}}} \quad (3)$$

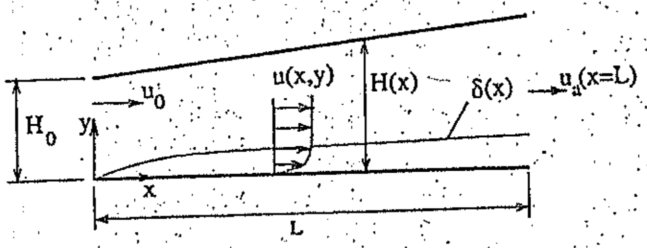
18. 3. 98

7. Aufgabe (13 Punkte).

Durch einen ebenen divergenten Kanal strömt eine inkompressible Flüssigkeit der Dichte ρ und der Zähigkeit η. Im Austrittsquerschnitt an der Stelle $x = L$ soll die Geschwindigkeit um die Hälfte gegenüber der Geschwindigkeit u_0 im Eintrittsquerschnitt verringert werden $(u_a(x = L) = u_0/2)$. An der unteren Kanalwand bildet sich eine laminare Grenzschicht aus. Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht läßt sich durch einen Polynomansatz darstellen:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0(x) + a_1(x)\frac{y}{\delta} + a_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

Die Länge des Kanals L wird so gewählt, daß keine Ablösung der Grenzschicht stattfindet.



Bestimmen Sie :

a) den Verlauf der Außengeschwindigkeit $u_a(x)$ und des Druckgradientes dp/dx für $0 < x < L$. Betrachten Sie dabei die Strömung als reibungsfrei und eindimensional.

b) die Koeffizienten $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ und $a_3(x)$.

c) die minimale Länge $\frac{L}{\delta} = f(Re_L)$, bei der keine Ablösung auftritt.

d) Nennen Sie zwei Möglichkeiten, um die Länge L zu verkürzen.

Gegeben: $u_0, \rho, \eta, H_0, H(x) = H_0 + \frac{C}{L}\cdot x$

Hinweis:

- die Größe C in $H(x)$ ist noch zu bestimmen.
- die Grenzschicht an der oberen Kanalwand ist zu vernachlässigen
- $\delta \ll H(x)$.

7. Aufgabe

a) Konti: $u_0 H_0 = u_a(x)\cdot H(x) \Rightarrow u_a(x) = \frac{u_0 \cdot H_0}{H(x)} \to u_a(x=L) = \frac{u_0}{2} \Rightarrow \boxed{C = H_0}$ (1)

$\boxed{u_a(x) = \frac{u_0}{1+x/L}}$ $\quad \frac{du_a}{dx} = \frac{-u_0}{L(1+x/L)^2}$ (1)

Bernoulli: $\frac{dp}{dx} = -\rho u_a \frac{du_a}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dx} = \rho \frac{u_0^2}{L(1+x/L)^3}}$ (1)

b) $\frac{\partial(u/u_a)}{\partial(y/\delta)} = a_1 + 2a_2(y/\delta) + 3a_3(y/\delta)^2 \qquad \frac{\partial^2(u/u_a)}{\partial(y/\delta)^2} = 2a_2 + 6a_3(y/\delta)$

(1) 1. R.B.: $y/\delta = 0 \Rightarrow u = 0 \Rightarrow \boxed{a_0 = 0}$ (1)

(1) 2. R.B.: $y/\delta = 1 \Rightarrow u = u_a \Rightarrow 1 = a_1 + a_2 + a_3$

(1) 3. R.B.: $y/\delta = 0 \Rightarrow \eta \frac{u_a}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2(u/u_a)}{\partial(y/\delta)^2} = \frac{dp}{dx} \Rightarrow \eta \frac{u_a}{\delta^2} 2a_2 = \rho \frac{u_0^2}{L(1+x/L)^3}$

$\Rightarrow \boxed{a_2 = \frac{\rho\delta^2}{2\eta} \frac{u_0}{L(1+x/L)^2}}$

(1) 4. R.B.: $y/\delta = 1 \Rightarrow \frac{\partial(u/u_a)}{\partial(y/\delta)} = 0 = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \quad ; a_1 = 1 - a_2 - a_3$

$\Rightarrow 1 + a_2 + 2a_3 = 0 \Rightarrow \boxed{a_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\rho\delta^2}{4\eta} \frac{u_0}{L(1+x/L)^2}}$

$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{3}{2} - \frac{\rho\delta^2}{4\eta} \frac{u_0}{L(1+x/L)^2}}$ (1)

c) Ablösung: $\frac{\partial u(x=L, y=0)}{\partial y} = 0 = a_1$ (1)

$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{\rho\delta^2}{4\eta} \frac{u_0}{4L} \Rightarrow \frac{L^2}{\delta^2} = \frac{L \cdot u_0 \cdot \rho}{24\eta}$

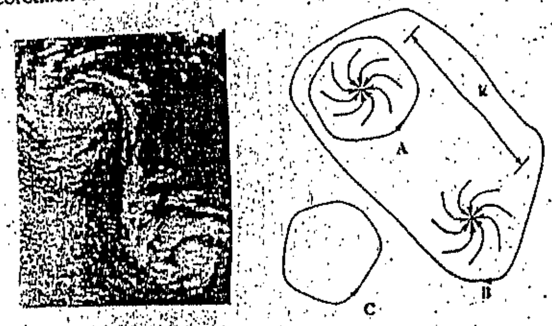
$\Rightarrow \boxed{\frac{L}{\delta} = \sqrt{\frac{Re_L}{24}}}$ (1)

d) mögliche Antworten: turbulenter Umschlag; Mitbewegen der Wand; kontinuierliches Absaugen, tangentiales Ausblasen bzw. Absaugen, ...

1.3. 98

6. Aufgabe (13 Punkte)

In dem abgebildeten Satellitenphoto von der Erdatmosphäre sind zwei gleichstarke Wirbelstürme mit Abstand k zu erkennen, die sich umeinander drehen. Das horizontale Geschwindigkeitsfeld wird potentialtheoretisch untersucht.



a) Wählen Sie aus den gegebenen komplexen Strömungsfunktionen (die Konstanten seien bekannt) diejenigen aus, die die betrachtete Strömung beschreiben. Geben Sie die gewählten Funktionen und die Vorzeichen der Konstanten explizit an.

b) Hat diese Strömung Staupunkte? Begründen Sie kurz (keine Rechnung) ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie zum Zeitpunkt des Photos in Abhängigkeit von den angegebenen Konstanten die Kreisfrequenz ω, mit der sich die beiden Wirbelstürme umeinander drehen. Betrachten Sie dafür die induzierten Geschwindigkeiten in den Mittelpunkten der Wirbelstürme.

d) Wie ändert sich diese Kreisfrequenz qualitativ mit der Zeit. Begründen Sie kurz ihre Antwort.

e) Bestimmen Sie für die angegebenen Kurven A, B und C jeweils die Zirkulation (keine Rechnung).

Gegeben: k, benötigte Konstanten

Bekannte komplexe Strömungsfunktionen:

Parallelströmung: $F(z) = (u_\infty - i v_\infty) z$

Potentialwirbel: $F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$

Quelle/Senke: $F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$

Staupunktströmung: $F(z) = a z^2$

Dipol: $F(z) = \frac{M}{2\pi z}$

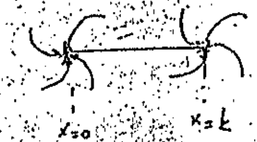
Hinweis:

- es entstehen keine Zentrifugalkräfte
- $z = x + iy = r \cdot e^{i\theta}$

6. Aufgabe

a) Pot. Wirbel + Senke + verschobener Pot. Wirbel + verschobene Senke

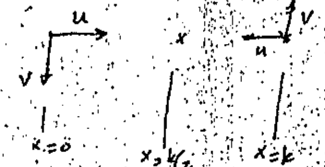
$$F(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \ln z + \frac{E}{2\pi} \ln z + \frac{-i\Gamma}{2\pi} \ln(z-k) + \frac{E}{2\pi} \ln(z-k) \quad (1)$$



$\Gamma > 0$; $E < 0$ (1) $\quad \sum$ (2)

b) Ja. Auf der Verbindungslinie der beiden Wirbelstürme bei x=k/2 heben sich die induzierten Geschwindigkeiten von den beiden Wirbeln auf. (2)

c)



Kreisfrequenz um $x = k/2$:

$$\omega = \frac{v}{k/2} = \frac{2v}{k} \quad (1)$$

nur der Potentialwirbel ist für die Drehung verantwortlich

$$F' = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \ln z \qquad \overline{w} = \frac{dF'}{dz} = u - iv = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} = \frac{-i\Gamma}{2\pi} \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow v = \frac{\Gamma \cdot x}{2\pi (x^2 + y^2)} \qquad v(x=k, y=0) = \frac{\Gamma \cdot k}{2\pi k^2} = \frac{\Gamma}{2\pi k}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2v}{k} = \frac{2\Gamma}{2\pi k^2} = \frac{\Gamma}{\pi k^2} \quad (1) \qquad \sum (2)$$

d) Die Kreisfrequenz wird größer, da infolge der Senken die beiden Wirbelstürme sich näher kommen. (2)

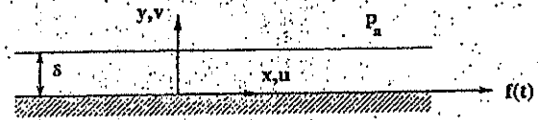
e) $\Gamma_A = \Gamma$ (1) $\quad \Gamma_B = -2\Gamma$ (1) $\quad \Gamma_C = 0$ (1) $\quad \sum$ (3)

18. 3. 98.

5. Aufgabe (12 Punkte)

Eine unendlich ausgedehnte ebene Platte schwingt in x-Richtung mit der Geschwindigkeit $f(t) = U_0 \cos(\omega t)$. Dabei entsteht eine mitschwingende Schicht mit konstanter Dicke δ. Zur Untersuchung dieses Problems sollen die folgenden Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls vereinfacht werden:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) = 0$$
$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau$$



(4) a) Vereinfachen Sie die Erhaltungsgleichungen für 2-dimensionale, instationäre, inkompressible Strömungen. Setzen Sie für den Schubspannungstensor $\nabla \cdot \tau = \eta \nabla^2 \vec{v}$ ein.

(3) b) Im eingeschwungenen Zustand herrscht überall der Druck p_a und die vertikale Komponente der Geschwindigkeit verschwindet. Vereinfachen Sie die Gleichungen weiter und zeigen Sie, daß die konvektiven Terme verschwinden.

(3) c) Bestimmen Sie die Kennzahl(en) des Problems.

(2) d) Wie ändert sich qualitativ die Dicke der mitschwingenden Schicht in Abhängigkeit von der Frequenz ω und der Viskosität η.

Gegeben: $\eta, \rho, \delta, U_0, \omega, f(t)$

5. Aufgabe

a) Konti: $(\nabla \vec{v} = 0) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0}$ (1) Kontr.

Impuls: $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}$

$$\rho \cdot \nabla \cdot (\vec{v}\vec{v}) = \rho \cdot \nabla \cdot \begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} \\ \frac{\partial vu}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \rho \begin{pmatrix} u\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ Konti}} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \\ v\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1)$$

(1) (1)

$\Rightarrow$ X-Impuls: $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

Y-Impuls: $\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$

b) $v = 0$; $p = p_a \Rightarrow$ Konti: $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$

(1) $v = 0$ + Vereinfachung

(1) $p = p_a$ + "

(1) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ + "

X-Impuls: $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} = \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

Y-Impuls: $0 = 0$

$u \neq f(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow$ X-Impuls: $\boxed{\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$

c) $\bar{t} = t \cdot \omega$ $\quad \bar{u} = u/U_0$ $\quad \bar{y} = y/\delta$ (1)

$\Rightarrow \rho U_0 \omega \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \eta \frac{U_0}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \frac{\eta}{\rho \omega \delta^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$ (1) Einsetz.

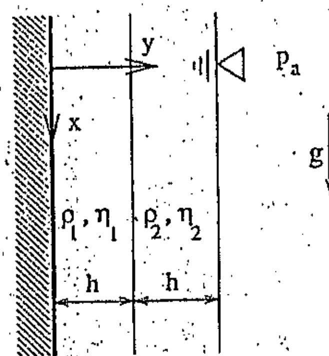
$\Rightarrow \boxed{K_1 = \frac{\eta}{\rho \omega \delta^2}}$ (1) Kennzahl

d) $\omega \uparrow \rightarrow \delta \downarrow$ (1) $\quad \eta \uparrow \rightarrow \delta \uparrow$ (1)

18. 3. 98

4. Aufgabe (12 Punkte)

Zwei Newtonsche Fluide der Dichte ρ_1, ρ_2 und der Zähigkeit η_1, η_2 strömen unter dem Einfluß der Erdschwere eine senkrecht stehende Wand der Breite B hinunter. Die Dicke jeder der beiden Fluidschicht beträgt jeweils h.



a) Leiten Sie für diese ausgebildete laminare Schichtenströmung die Differentialgleichung zur Bestimmung der Geschwindigkeitsverteilung her.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$ und skizzieren Sie Ihr Ergebnis für $\eta_2 < \eta_1$.

c) Bestimmen Sie die Schubspannung an der Wand.

Gegeben: $B, g, h, \rho_1, \eta_1, \rho_2, \eta_2$

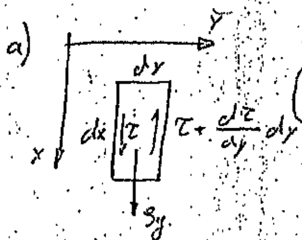
Hinweis:

- Die beiden Fluide mischen sich nicht.
- Die von der Luft auf die Oberfläche der Fluidschicht übertragene Schubspannung wird vernachlässigt.

4. Aufgabe

$\sum F = 0$ ausgebildete Strömung ⇒ keine Druckkräfte

3 a)



2 $\tau \cdot B \cdot dx + \rho \cdot g \cdot dy\,dx \cdot B = \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy\right) dx \cdot B$

$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = \rho \cdot g$ Newton-Fluid: $\tau = -\eta \frac{du}{dy}$

$\Rightarrow \boxed{\eta \frac{d^2u}{dy^2} = -\rho g}$ 1 $\int \ldots$

6 b) $\int \eta \frac{d^2u}{dy^2} = \int -\rho g \Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{\rho}{\eta} g y + C_1$; $u = \frac{-\rho g}{2\eta} y^2 + C_1 \cdot y + C_2$

Zwei Gebiete: $0 \le y \le h$: $u = u_1 = \frac{-\rho_1 g}{2\eta_1} y^2 + C_1 y + C_2$

$h < y \le h_2$: $u = u_2 = \frac{-\rho_2 g}{2\eta_2} y^2 + C_3 \cdot y + C_4$ (1)

R.B.: $y = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$

$y = h \Rightarrow \tau_1 = \tau_2 \Rightarrow \eta_1 \left(\frac{du_1}{dy}\right) = \eta_2 \left(\frac{du_2}{dy}\right) \Rightarrow -\rho_1 g h + \eta_1 C_1 = -\rho_2 g h + \eta_2 C_3$

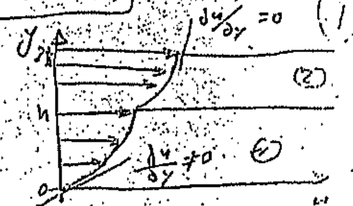
$y = 2h \Rightarrow \tau_2 = 0 \Rightarrow -\rho_2 \cdot g \cdot 2h + \eta_2 C_3 = 0 \Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{\rho_2}{\eta_2} g \cdot 2h}$

$\eta_1 \cdot C_1 = -\rho_2 \cdot g \cdot h + \rho_1 \cdot g \cdot h + \rho_2 \cdot g \cdot 2h \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{g \cdot h}{\eta_1} \cdot (\rho_1 + \rho_2)}$ (1)

$y = h \Rightarrow u_1 = u_2 \Rightarrow \frac{-\rho_1 g}{2\eta_1} h^2 + C_1 h = \frac{-\rho_2 g}{2\eta_2} h^2 + C_3 h + C_4$

$\Rightarrow \boxed{C_4 = \frac{g \cdot h^2 \cdot \left(\eta_2 (\rho_1 + 2\rho_2) - 3\eta_1 \rho_2\right)}{2\eta_1 \eta_2}}$ (1)

$\eta_2 < \eta_1$



3 c) Schubspannung an der Wand:

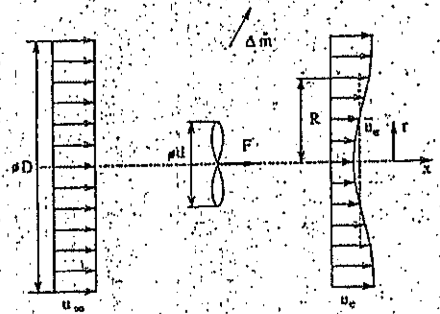
$\tau_w = \eta \frac{du}{dy}\Big|_{y=0} = \eta_1 C_1 = \boxed{g \cdot h (\rho_1 + \rho_2) = \tau_w}$

18. 3. 98

3. Aufgabe (13 Punkte)

In einem Umlaufwindkanal mit offener Meßstrecke (Durchmesser D) wird die Luftumströmung (Dichte ρ) von einem Windrad (Durchmesser d) untersucht. Bei einer Anströmung mit der Geschwindigkeit u_∞ wird im Nachlauf in einer Schnittebene $x = const.$ das Geschwindigkeitsfeld $u_e(r,\varphi)$ gemessen:

$$u_e(r,\varphi) = \begin{cases} u_\infty\left((1-c) - c\cdot\cos(\pi\frac{r}{R})\right) & 0 \le r \le R \\ u_\infty & R < r \le D/2 \end{cases}$$



a) Bestimmen Sie den verdrängten Massenstrom $\Delta\dot{m}$ in der Meßstrecke.

b) Wie groß soll die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}_e$ gewählt werden, so daß der verdrängte Massenstrom $\Delta\dot{m}$ in der Meßstrecke gleich bleibt.

Für die weiteren Teilaufgaben setzen Sie $\bar{u}_e$ als bekannt voraus:

c) Bestimmen Sie die vom Windrad ausgeübte Kraft F aufgrund der angenäherten Geschwindigkeitsverteilung.

d) Bestimmen Sie d anhand der Rankineschen Strahltheorie.

e) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit u' in der Rotorebene in Abhängigkeit von u_∞ und $\bar{u}_e$.

Gegeben: $\rho, D, u_\infty, u_e(r,\varphi), R, c$

Hinweis:

- die Reibung ist zu vernachlässigen
- $d \ll D$, $d/2 < R < D/2$, $0 < c < 1$
- $\int x\cos(ax)dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$

3. Aufgabe

a) $\rho u_\infty \pi R^2 = \Delta\dot{m} + \rho\int_0^{2\pi}\int_0^R u_e(r,\varphi)\, r\, dr\, d\varphi$ (1)

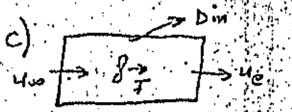
$\Rightarrow \Delta\dot{m} = \rho u_\infty \pi R^2 - \rho\cdot 2\pi\cdot u_\infty \int_0^R \left[(1-c)r - c\cdot r\cdot\cos(\pi \tfrac{r}{R})\right] dr$

$= \rho u_\infty \pi R^2 - \rho\cdot 2\pi\cdot u_\infty \left[\left(\frac{1-c}{2}\right) r^2 - c\,\frac{\cos(\frac{\pi}{R}r)}{(\pi/R)^2} + c\,\frac{r\sin(\frac{\pi}{R}r)}{\pi/R}\right]_0^R$

$\boxed{\Delta\dot{m} = \rho u_\infty \pi R^2 c\left(1 - \tfrac{4}{\pi^2}\right)}$ (1) (3)

b) $\Delta\dot{m} = \rho u_\infty \pi R^2 - \rho \bar{u}_e \pi R^2$ (1) $\Rightarrow \boxed{\bar{u}_e = u_\infty\left(1 - c\left(1 - \tfrac{4}{\pi^2}\right)\right)}$ (1)

c)

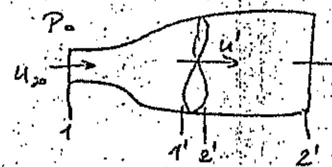


$\Delta\dot{m} = \rho(u_\infty - \bar{u}_e)\cdot\pi\cdot R^2$ (1)

Impulssatz: $-\rho u_\infty^2 \pi R^2 + \Delta\dot{m}\, u_\infty + \rho\bar{u}_e^2 \pi R^2 = F_1$

$\Rightarrow \boxed{F = (\bar{u}_e - u_\infty)\cdot\bar{u}_e\cdot\rho\cdot\pi\cdot R^2}$ (1) negativ (2)

d) Rankinesche Strahltheorie → eindimensional, Kraft ist gleichmäßig verteilt



Bernoulli $1 \to 1'$: $\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 + p_a = \frac{1}{2}\rho u'^2 + p_1'$

$2' \to 2$: $\frac{1}{2}\rho u'^2 + p_2' = \frac{1}{2}\rho\bar{u}_e^2 + p_a$

$F = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 (p_2' - p_1')$ (1)

$(p_2' - p_1') = \frac{1}{2}\rho\bar{u}_e^2 + p_a - \frac{1}{2}\rho u'^2 - \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 - p_a + \frac{1}{2}\rho u'^2$

$\Rightarrow d^2 = \frac{8(\bar{u}_e - u_\infty)\cdot\bar{u}_e\cdot R^2}{(\bar{u}_e - u_\infty)(\bar{u}_e + u_\infty)} \Rightarrow \boxed{d = 2R\sqrt{\frac{2\bar{u}_e}{\bar{u}_e + \bar{u}_\infty}}}$

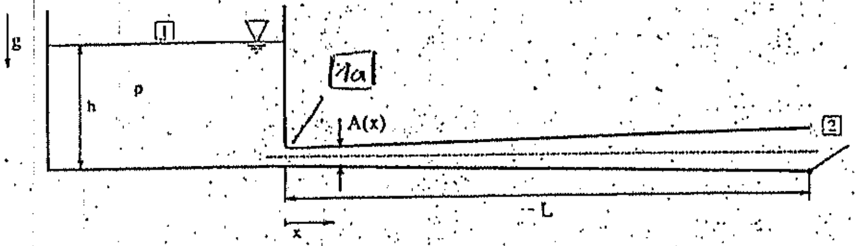
e) Konti: $\bar{u}_e\cdot\pi\cdot R^2 = u'\cdot\pi\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2$ (1)

$u' = \bar{u}_e\cdot R^2\cdot\frac{4(\bar{u}_e + u_\infty)}{8R^2\cdot\bar{u}_e} = \boxed{u' = \frac{\bar{u}_e + u_\infty}{2}}$

18. 3. 98

2. Aufgabe (12 Punkte)

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird an der Stelle $\boxed{2}$ plötzlich eine Klappe geöffnet. Die Flüssigkeit mit der Dichte ρ strömt aus einem großen Behälter durch das Rohr mit der Querschnittsfläche A(x) ins Freie.



Bestimmen Sie

(1) a) die stationäre Austrittsgeschwindigkeit v_{stat}.

(1) b) die lokale Beschleunigung am Austritt $\boxed{2}$ zum Zeitpunkt $t = t_0$.

(1) c) die Zeit T, in der die Geschwindigkeit am Austritt $\boxed{2}$ den Wert $c \cdot v_{stat}$ erreicht.

(3) d) das Volumen Q der in dieser Zeit T ausgeströmten Flüssigkeit.

<u>Gegeben:</u> $\rho, g, L, h, t_0 = 0, c, A_0 = A(x = 0), A(x) = A_0(x/L + 1)$

<u>Hinweis:</u>

- alle Strömungsverluste sind zu vernachlässigen
- $0 < c < 1$
- $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln(\frac{a+x}{a-x})$
- $\int \frac{x dx}{a^2 - b^2 x^2} = -\frac{1}{2b^2} \ln(a^2 - b^2 x^2)$

2. Aufgabe

a) Bernoulli: $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ $\quad p_a + \rho g h = p_a + \frac{1}{2} \rho V_{2stat}^2 \Rightarrow \boxed{V_{2stat} = \sqrt{2gh}}$ (1)

b) instat. Bernoulli: $p_a + \rho g h = p_a + \frac{1}{2} \rho V_2^2(t) + \rho \int_0^L \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} dx$ (1) Bernoulli

Konti: $V(x,t) = \frac{V_2(t) \cdot 2 A_0}{(x/L + 1) A_0} = \frac{2 \cdot L \cdot V_2(t)}{x + L}$ (1) Konti zw. x u. (1) oder x u. (1a)

Zum Zeitpunkt $t = 0 \Rightarrow V_2(t) = 0 \Rightarrow g \cdot h = \int_0^L \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} dx = \frac{dV_2(t)}{dt} \int_0^L \frac{2L}{x+L} dx$

(1) Berechn. Integral

$= \frac{dV_2(t)}{dt} \cdot 2 \cdot L \cdot \ln(x+L) \Big|_0^L = 2 \cdot L \cdot \ln 2 \cdot \frac{dV_2(t)}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dV_2(t)}{dt} = \frac{g \cdot h}{L \cdot \ln 4}}$ (1) Lösung

(1) Ansatz Bernoulli mit Integral

c) $g \cdot h = \frac{1}{2} V_2^2(t) + \frac{dV_2(t)}{dt} \cdot L \cdot \ln 4 \Rightarrow \frac{V_{2stat}^2}{2} - \frac{1}{2} V_2^2(t) = \frac{L}{2} \ln 4 \cdot \frac{dV_2(t)}{dt}$

$\frac{V_{2stat}^2 - V_2^2(t)}{L \cdot \ln 16} = \frac{dV_2(t)}{dt} \Rightarrow \int_0^T \frac{dt}{L \ln 16} = \int_0^{c \cdot V_{2stat}} \frac{dV_2(t)}{V_{2stat}^2 - V_2^2(t)}$ (1) Trennung

$\Rightarrow \frac{T}{L \cdot \ln 16} = \frac{1}{2 V_{2stat}} \ln\left(\frac{V_{2stat} + V_2}{V_{2stat} - V_2}\right) \Big|_0^{c \cdot V_{2stat}}$ (1) Integral

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{L \cdot \ln 4}{V_{2stat}} \ln\left(\frac{1+c}{1-c}\right)}$ (1) Lösung

d) $Q = \int_0^T V_2(t) \cdot 2 A_0 \cdot dt$ (1) $\quad dt = L \cdot \ln 16 \cdot \frac{dV_2(t)}{V_{2stat}^2 - V_2^2(t)}$

$Q = 2 \cdot L \cdot \ln 16 \cdot A_0 \int_0^{c \cdot V_{2stat}} \frac{V_2(t)\, dV_2(t)}{V_{2stat}^2 - V_2^2(t)} =$ (1) Integrierbare Form

$= 2 \cdot L \cdot A_0 \cdot \ln 16 \cdot \left(-\frac{1}{2} \ln\left(V_{2stat}^2 - V^2(t)\right)\right) \Big|_0^{c \cdot V_{2stat}}$

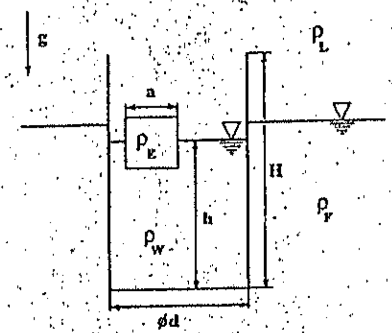
$\boxed{Q = L \cdot A_0 \cdot \ln 16 \cdot \ln\left(\frac{1}{1-c^2}\right)}$ (1) Lösung

Klausur Strömungslehre

18. 3. 1999

1. Aufgabe (12 Punkte)

In einer Badewanne befindet sich eine Flüssigkeit mit der Dichte ρ_F. An der Oberfläche schwimmt ein Glas mit zylindrischem Querschnitt und Leergewicht G. Das Glas wird mit Wasser (Dichte ρ_W) gefüllt und später wird ein Eiswürfel mit der Dichte ρ_E und Würfelkantenlänge a ins Glas gelegt. Die Dichte der Luft beträgt ρ_L und wird berücksichtigt.



a) Bestimmen Sie die maximale Höhe des Wassers im Glas h_{max}, bei der das Glas nicht untertaucht. (ohne Eiswürfel)

b) Bestimmen Sie für den Eiswürfel das Verhältnis der Volumenanteile oberhalb und unterhalb der Wasseroberfläche im Glas.

c) Bestimmen Sie h_{max}, wenn der Eiswürfel sich im Glas befindet.

d) Nach einer gewissen Zeit schmilzt der Eiswürfel. Bestimmen Sie nun die Änderung der Höhe Δh der Wasseroberfläche im Glas.

Gegeben: $G, H, d, a, g, \rho_L, \rho_F, \rho_W, \rho_E$

Hinweis:

- $\rho_L < \rho_E < \rho_W$, $\rho_W > \rho_F$
- der Eiswürfel besteht aus Wasser mit der Dichte ρ_W im flüssigen Zustand

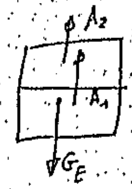
---

1. Aufgabe K Gleichgewicht (1) + eingesetzt (1)

a) $A = \rho_F \cdot g \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot H = G + \rho_W \cdot h_{max} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot g + (H - h_{max}) \cdot \rho_L \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot g$

$$\Rightarrow \boxed{h_{max} = \left(\frac{\rho_F - \rho_L}{\rho_W - \rho_L}\right) \cdot H - \frac{G}{(\rho_W - \rho_L) \cdot g \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \quad (1)$$

b)

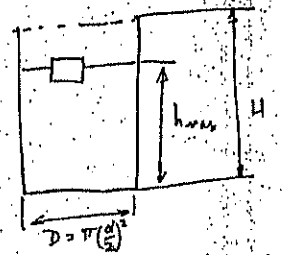


$A_1 + A_2 = G_E \qquad V_1 + V_2 = V \qquad A_1 = \rho_W \cdot g \cdot V_1 \qquad A_2 = \rho_L \cdot g \cdot V_2$

$G_E = \rho_E \cdot g \cdot V \Rightarrow \rho_W \cdot g \cdot V_1 + \rho_L \cdot g \cdot V_2 = \rho_E \cdot g \cdot V = \rho_E \cdot g \cdot (V_1 + V_2)$ (1)

$$(\rho_W - \rho_E) \cdot V_1 + (\rho_L - \rho_E) \cdot V_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{\rho_E - \rho_L}{\rho_W - \rho_E}} \quad (1)$$

c)



$A = \rho_F \cdot g \cdot D \cdot H$ (1)

$\sum G = G + \rho_W \cdot g\,(h_{max} \cdot D - V_1) + \rho_L \cdot g \left[(H - h_{max}) \cdot D - V_2\right] \cdot 1$

$+ \rho_E \cdot g \cdot (V_1 + V_2) =$ (1)

$= G + \rho_W \cdot g \cdot h_{max} + \rho_L \cdot g \cdot (H - h_{max}) \cdot D +$

$+ \underbrace{\rho_E \cdot g (V_1 + V_2) - \rho_W \cdot g \cdot V_1 - \rho_L \cdot g \cdot V_2}_{=0} =$ (1)

$= G + \rho_W \cdot g \cdot h_{max} + \rho_L \cdot g \, (H - h_{max}) \cdot D$

$$\Rightarrow \boxed{h_{max} = \left(\frac{\rho_F - \rho_L}{\rho_W - \rho_L}\right) \cdot H - \frac{G}{(\rho_W - \rho_L) \cdot g \cdot \pi \cdot (d/2)^2}} \quad (1)$$

wie in Teilaufgabe 1a) !

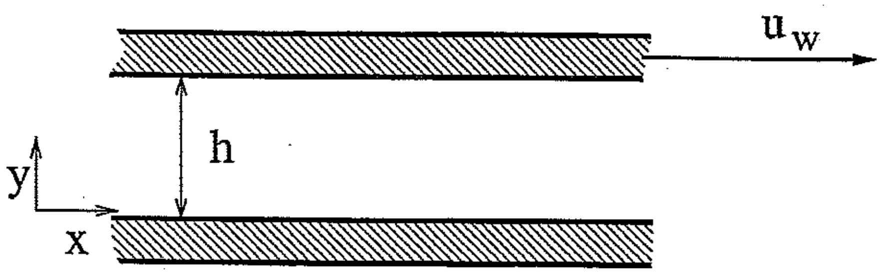
d) Masse bleibt gleich (1) $\rightarrow \Delta V_{glas} = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \Delta h = V \cdot \frac{\rho_E}{\rho_W} - V_1$ (1)

$= V \cdot \left(\frac{\rho_E}{\rho_W} - \frac{(\rho_E - \rho_L)}{(\rho_W - \rho_L)}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = \frac{a^3 \cdot \rho_L \cdot (\rho_W - \rho_E)}{\rho_W \cdot \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot (\rho_W - \rho_L)}} \quad (1)$$

4. Aufgabe (9 Punkte)

Zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten mit dem Abstand h befindet sich eine Bingham Flüssigkeit der Dichte ρ. Die obere Platte bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_w und die untere Platte ist in Ruhe. Es stellt sich eine stationäre ausgebildete inkompressible Strömung ein.



a) Vereinfachen Sie die angegebenen Erhaltungsgleichungen für den betrachteten Fall.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x, y)$. (Setzen Sie dafür die Beziehungen der Bingham Flüssigkeit ein.)

c) Skizzieren Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x = const, y)$.

d) Bestimmen Sie die Drehung $\omega(x, y)$.

Gegeben: $u_w, h, L, \rho, \tau_0, \eta$

Hinweis:

- Die Strömung ist eben zu betrachten
- Die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls lauten:

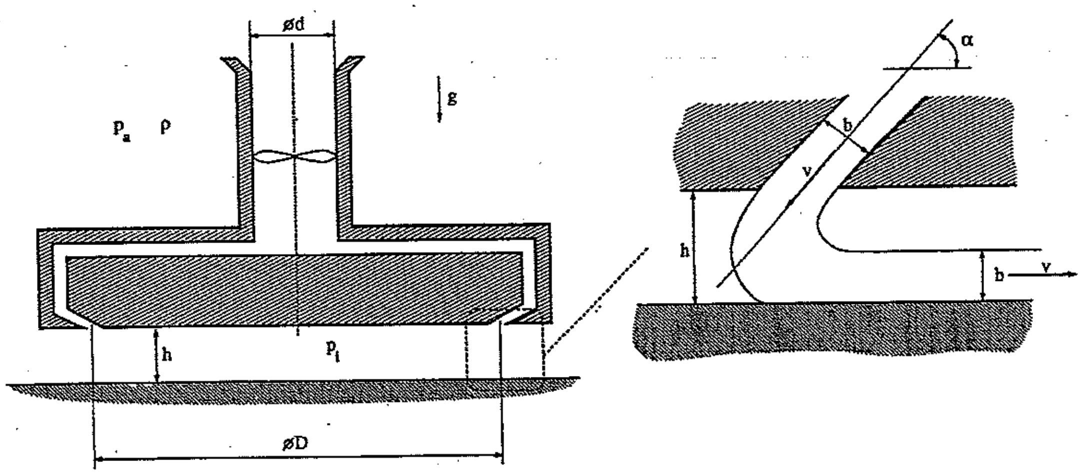
$$\begin{aligned} \frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) &= -\nabla p + \nabla \cdot \tau \end{aligned}$$

- Für eine Bingham Flüssigkeit gilt
  - für $|\tau| \leq \tau_0$ verhält sich das Fluid wie ein Festkörper
  - für $|\tau| > \tau_0$ gilt:

$$\tau_{xx} = 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \tau_{yy} = 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_0$$

3. Aufgabe (9 Punkte)

Bei einem kreisförmigen Luftkissenfahrzeug (Masse m, Bodendurchmesser D) wird von einem Gebläse (Durchmesser d, Leistung P) aus der Umgebung mit dem Druck p_a Luft der Dichte ρ angesaugt und aus einem Ringspalt der Breite b unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit v radial nach innen geblasen. Der aus dem Spalt austretende, rund herum geschlossene Luftvorhang hält dabei im Raum unter dem Fahrzeug einen Überdruck p_i aufrecht, der den Strahl in die Horizontale umlenkt. Dabei schwebt das Fahrzeug stationär in einer Höhe h über dem Boden. Die Strömung ist inkompressibel und verlustfrei.



a) Bestimmen Sie die Strahlgeschwindigkeit v und den Überdruck $p_i - p_a$.

b) Bestimmen Sie die Gebläseleistung P.

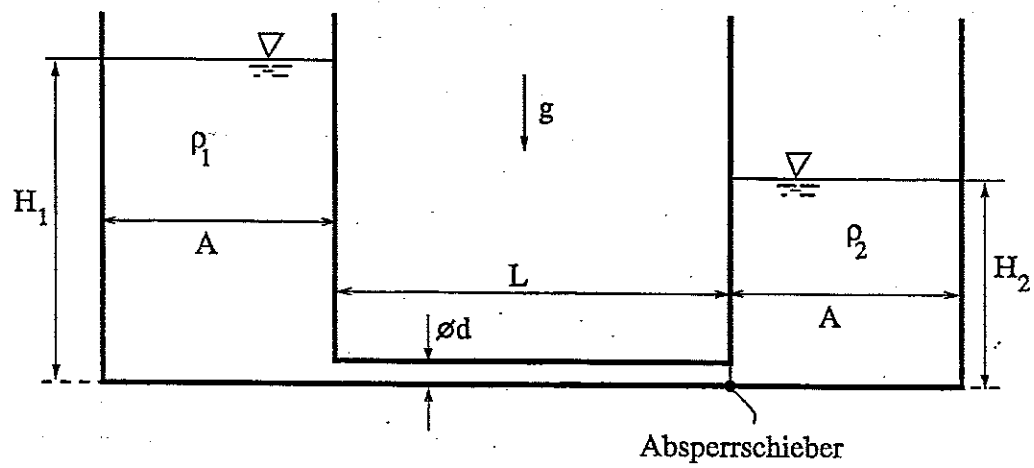
Gegeben: $g, m, D, d, \rho, b, \alpha, h$

Hinweis:

- $D \gg b$
- Vernachlässigen Sie die Gewichtskraft der Luft

2. Aufgabe (8 Punkte)

Zwei offene Behälter mit der gleichen Querschnittsfläche A, die mit einem Rohr (Durchmesser d und Länge L) verbunden sind, enthalten zwei unterschiedliche Flüssigkeiten mit den Dichten ρ_1 und ρ_2 und den Flüssigkeitsspiegelhöhen H_1 und H_2. Es gilt $\rho_1 > \rho_2$ und $H_1 > H_2$. Im Rohr befindet sich ein Absperrschieber, der die beiden Flüssigkeiten voneinander trennt. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ wird der Absperrschieber plötzlich entfernt. Die Strömung verläuft ab diesem Zeitpunkt instationär und verlustfrei.



a) Bestimmen Sie eine Differentialgleichung für die Höhe $h_1(t)$.

b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\rho_1 = \rho_2$.

Gegeben: $\rho_1, H_1, \rho_2, H_2, A, g, L, d, t_0 = 0$

Hinweis:

- Die beiden Flüssigkeiten vermischen sich nicht
- Die lokale Beschleunigung ist nur im Rohr zu berücksichtigen $d << L$
- Lösungsansatz für die DGL $\quad a \cdot \ddot{x} + b \cdot x + c = 0$:

$$x(t) = -\frac{c}{b} + C_1 \sin(\sqrt{b/a}\, t) + C_2 \cos(\sqrt{b/a}\, t)$$

....

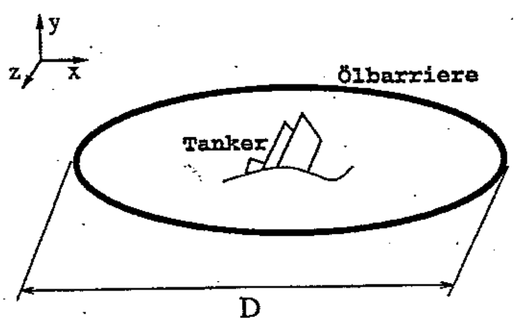
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

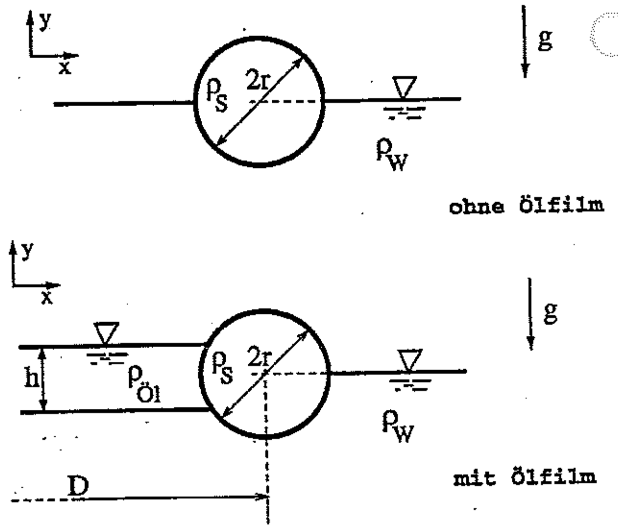
Kenntnisnachweis Strömungslehre I

17. 3. 2000

1. Aufgabe (7 Punkte)

Eine Ölbarriere in Form eines ringförmigen Schlauches mit zylindrischem Querschnitt (Durchmesser $2r$) soll erstellt werden. Diese Ölbarriere soll auf dem Meer mit der Dichte ρ_W schwimmen und die Ausbreitung des auf der Wasseroberfläche befindlichen Öls der Masse $m_{Öl}$ und der Dichte $\rho_{Öl}$ verhindern. Ohne den Ölfilm taucht der Schlauch bis zur Hälfte in das Wasser ein. Diese Eintauchtiefe auf der ölabgewandten Seite bleibt konstant.





Schnitt durch den Schlauch

a) Bestimmen Sie eine mittlere Dichte ρ_S des Materials aus dem der Schlauch besteht.

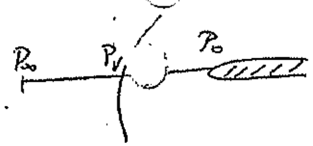
b) Bestimmen Sie die maximale Ölfilmdicke h_{max}.

c) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung von $D \gg r$ den minimalen Durchmesser des Schlauchringes D.

Gegeben: $r, g, \rho_W, \rho_{Öl}, m_{Öl}$

Hinweis:

- $\rho_{Öl} < \rho_W \qquad D \gg r$
- Öl und Wasser mischen sich nicht
- Die Dichte der Luft ist zu vernachlässigen



$$\frac{p_0}{p_\infty} = \frac{p_0}{p_h} \cdot \frac{p_h}{p_V} \cdot \underbrace{\frac{p_V}{p_\infty}}_{=1} \quad (p_V = p_\infty)$$

$$\frac{p_h}{p_V} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(Ma_\infty^2 - 1\right) \qquad \text{Stoß} \qquad Ma_h^2 = \frac{2+(\kappa-1)Ma_\infty^2}{2\kappa Ma_\infty^2 - (\kappa-1)}$$

$$\frac{p_0}{p_h} = \left(\frac{T_0}{T_h}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_h^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \quad \text{isent. Str.}$$

$$= \left(1 + \frac{\kappa-1}{2}\,\frac{2+(\kappa-1)Ma_\infty^2}{2\kappa Ma_\infty^2-(\kappa-1)}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

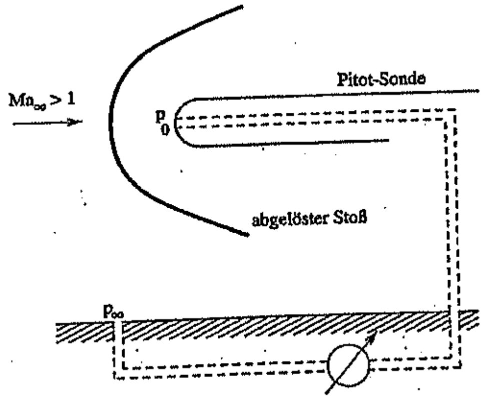
$$\Rightarrow c_p = \frac{2}{\kappa Ma_\infty^2}\left[\left(1+\frac{2\kappa}{\kappa+1}\left(Ma_\infty^2-1\right)\right)\cdot \underbrace{\left(1+\frac{\kappa-1}{2}\,\frac{2+(\kappa-1)Ma_\infty^2}{2\kappa Ma_\infty^2-(\kappa-1)}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}}_{F} - 1\right]$$

f) $$\lim_{Ma_\infty\to\infty} c_p = \lim_{Ma_\infty\to\infty}\left[\left(\frac{2}{\kappa Ma_\infty^2} + \frac{4\kappa}{(\kappa+1)\kappa}\left(1-\frac{1}{Ma_\infty^2}\right)\right)\cdot F - \frac{2}{\kappa Ma_\infty^2}\right]$$

$$= \lim_{Ma_\infty\to\infty}\left(\frac{4}{\kappa+1}\cdot F\right) = \frac{4}{\kappa+1}\left(1+\frac{(\kappa-1)^2}{4\kappa}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

6. Aufgabe (14 Punkte)

Ein Pitot-Sonde wird mit $Ma_\infty > 1$ angeströmt. Vor der Sonde entsteht ein abgelöster, gekrümmter Verdichtungsstoß, der auf der Staustromlinie als senkrecht angesehen werden kann. Vor und nach dem Stoß sei die Strömung isentrop.



a) Skizzieren die Schall-Linie und kennzeichnen Sie Unterschall- und/oder Überschallbereiche.

b) Wo wird die starke Lösung über den gekrümmten Stoß erwartet?

c) Wie groß ist der Winkel des Stoßes in großer Entfernung?

d) Ermitteln Sie für eine isentrope Strömung folgenden Ausdruck:

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} Ma^2.$$

e) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung des Stoßes den Druckbeiwert im Staupunkt der Pitot-Sonde $c_{p_0} = \dfrac{p_0 - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty^2/2}$.

f) Bestimmen Sie den Grenzwert von c_{p_0} für $Ma_\infty \to \infty$.

Gegeben: γ, Ma_∞

Hinweis:

- Die Luft wird als ideales Gas mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten betrachtet.
- Isentropenbeziehungen,

$$\frac{T_a}{T_b} = \left(\frac{\rho_a}{\rho_b}\right)^{\gamma-1} = \left(\frac{p_a}{p_b}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

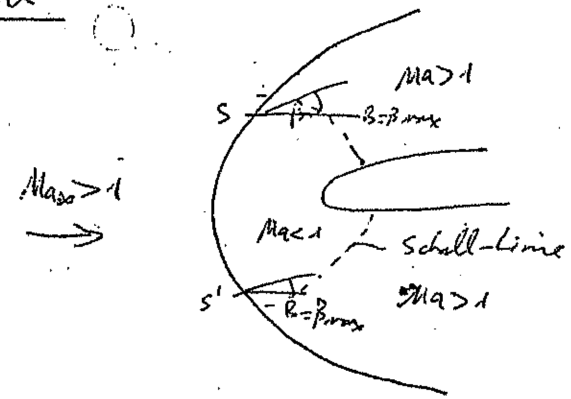
- Über den senkrechten Verdichtungsstoß gelten

$$\frac{p_{nachStoß}}{p_{vorStoß}} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(Ma^2_{vorStoß} - 1\right) \qquad Ma^2_{nachStoß} = \frac{2 + (\gamma-1)Ma^2_{vorStoß}}{2\gamma Ma^2_{vorStoß} - (\gamma - 1)}$$

---

6. Aufgabe

a)



b) Die starke Lösung wird auf dem Stoß zwischen S und S' erwartet: An diesen Punkten ist der Umlenkwinkel über dem Stoß $\beta = \beta_{max}$.

c) Der Winkel des Stoßes geht in großer Entfernung in den Machschen Winkel α der Anströmung über. $\alpha = \arcsin \frac{1}{Ma_\infty}$

d) Energiegleichung $h_0 = h + \frac{u^2}{2} = c_p T + \frac{u^2}{2} = const.$

$\Rightarrow c_p T_0 = c_p T + u^2/2$ mit $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$ und $a = \sqrt{\gamma R T}$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\gamma-1}{\gamma R T}u^2 \Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2$$

e) $c_p = \dfrac{p_0 - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2}$ $\qquad \frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 = \frac{1}{2}\rho_\infty Ma_\infty^2 \gamma R T_\infty$ mit $p_\infty = \rho_\infty R T_\infty$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho_\infty u_\infty^2 = \frac{Ma_\infty^2}{2}\gamma p_\infty$$

$$\Rightarrow c_p = \frac{\frac{p_0}{p_\infty} - 1}{\frac{\gamma}{2} Ma_\infty^2} = \frac{2}{\gamma Ma_\infty^2}\left(\frac{p_0}{p_\infty} - 1\right)$$

c) $\frac{d\delta_2}{dx} = 0$ da δ_0 = konst.

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho u_a^2(x)} = \frac{2\delta_2(x) + \delta_1(x)}{u_a(x)} \cdot \frac{du_a(x)}{dx}$$

$$\frac{du_a(x)}{dx} = \frac{-dp}{dx} \frac{1}{\rho u_a(x)}$$

$$\frac{\tau_w(x)}{\rho u_a^2(x)} = \frac{-2/6\,\delta_0 - \frac{1}{3}\delta_0}{\rho u_a^2(x)} \frac{dp}{dx} \Rightarrow$$

$$\cancel{\tau_w =}\ \tau_w(x) = -\frac{2}{3}\delta_0 \frac{dp}{dx} = +\frac{4}{3}\delta_0 \frac{p_0 k}{\ell^2} x$$

d) Ablösung für $\tau_w(x) = 0$ da $\tau_w > 0$ $\Rightarrow$ keine Ablösung für $x > 0$

5. Aufgabe (12 Punkte)

In einer Plattengrenzschicht werden Geschwindigkeitsprofile und Druckverlauf vermessen. Der auf der Platte gemessene Druckverlauf wird durch die Beziehung

$$\frac{p(x)}{p_0} = 1 - k\left(\frac{x}{l}\right)^2 \qquad k = konst. \qquad 0 < k < 1$$

und die Geschwindigkeitsprofile werden durch

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = \left(\frac{y}{\delta_0}\right)^{1/2} \qquad u_a(x=0) = u_\infty$$

wiedergegeben, wobei die Grenzschichtdicke δ_0 konstant ist.

a) Bestimmen Sie die Verdrängungsdicke δ_1 und die Impulsverlustdicke δ_2.

b) Bestimmen Sie die Außengeschwindigkeit $u_a(x)$.

c) Bestimmen Sie die Wandschubspannung $\tau_w(x)$ für $x > 0$.

d) Kann diese Grenzschicht ablösen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gegeben: $p_0, k, \delta_0, l, u_\infty, \rho$

Hinweis:

- Die Integralbeziehung nach von Kármán lautet:

$$\frac{d\delta_2(x)}{dx} + \frac{(2\delta_2(x) + \delta_1(x))}{u_a(x)}\frac{du_a(x)}{dx} - \frac{\tau_w(x)}{\rho u_a^2(x)} = 0$$

- Die Grenzschichtgleichung (x-Impuls):

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

5. Aufgabe

a) $$\frac{\delta_1}{\delta_0} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d(y/\delta) = \int_0^1 \left(1 - (y/\delta_0)^{1/2}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) =$$

$$= \left[\frac{y}{\delta_0} - \frac{2}{3}(y/\delta)^{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \delta_1 = 1/3\ \delta_0$$

$$\frac{\delta_2}{\delta_0} = \int_0^1 \frac{u}{u_a}\left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d(y/\delta) = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{3/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \delta_2 = 1/6\ \delta_0$$

b) Aus x-Impuls für $y = \delta_0$ (Reibungsterme vernachlässigbar, $v\frac{\partial u}{\partial y}$ vernachlässigbar $v \ll u$)

$$\rho u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{-dp}{dx} = p_0 \cdot \frac{2k}{l}\left(\frac{x}{l}\right) = 2\frac{k}{l^2} x p_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\rho\frac{\partial u_a^2}{\partial x} = \frac{2kx}{l^2} p_0 \Rightarrow u_a^2 = \frac{2kp_0}{\rho l^2} \cdot x^2 + C$$

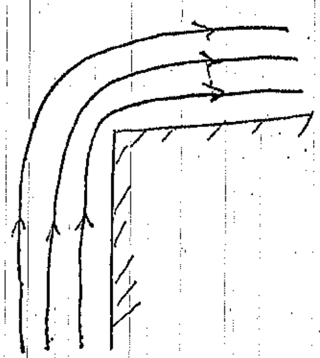
für $u_a(x=0) = u_\infty \Rightarrow C = u_\infty^2$

$$\Rightarrow u_a = \sqrt{u_\infty^2 + \frac{2kp_0}{\rho l^2}x^2}$$

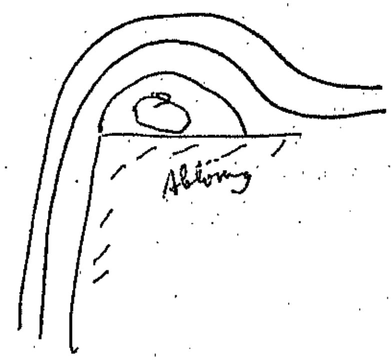
f) Stromlinie: $\psi = \frac{q}{2/3} \cdot r^{2/3} \sin\left(\frac{2}{3}\theta\right) = \mathrm{const} =:$

$$\Rightarrow r = \left(\frac{2/3\, K}{\frac{q}{L} \cdot L^{1/3} \sin(2/3\,\theta)} \right)^{3/2}$$

g) pot.



real

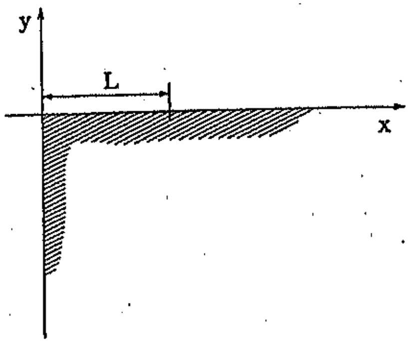


4. Aufgabe (16 Punkte)

Die ebene inkompressible Strömung um eine 90°-Ecke kann mit Hilfe der komplexen Strömungsfunktion

$$F(z) = \frac{a}{n} z^n \qquad 0 < n < 1$$

beschrieben werden.
Die Geschwindigkeit an der Wand an der Stelle $x = L, y = 0$ beträgt $|\vec{v_L}| = u_L > 0$.



a) Bestimmen Sie das Potential und die Stromfunktion für die angegebene komplexe Strömungsfunktion.

b) Bestimmen Sie die beiden kartesischen Geschwindigkeiten $(u(r,\theta), v(r,\theta))$.

c) Bestimmen Sie den Wert der Konstanten a und n.

d) Bestimmen Sie den Verlauf des Druckbeiwerts c_p auf der Wand und skizzieren Sie diesen. (Benutzen Sie u_L als Referenzgeschwindigkeit)

e) Skizzieren Sie sorgfältig die Linien konstanten Drucks.

f) Geben Sie die Beziehung $r = r(\theta)$ für die Stromlinien an.

g) Skizzieren Sie das potentialtheoretische und das reale Strömungsfeld.

Gegeben: u_L, L

Hinweis:

- $z = x + iy = r \cdot e^{i\theta} = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$

4. Aufgabe

a) $F = \frac{a}{n} z^n = \frac{a}{n} r^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = \phi + i\psi$

$\Rightarrow \phi = \frac{a}{n} r^n \cos(n\theta) \qquad \psi = \frac{a}{n} r^n \sin(n\theta)$

b) $\bar{w} = u - iv = \frac{dF}{dz} = a \cdot z^{n-1} = a \cdot r^{n-1} \cdot (\cos[(n-1)\theta] + i\sin[(n-1)\theta])$

$\Rightarrow u = a\, r^{n-1} \cdot \cos[(n-1)\theta] \qquad v = -a\, r^{n-1} \sin[(n-1)\theta]$

c) Wand ist Stromlinie $\Rightarrow \psi = \text{const} = C = \frac{a}{n} r^n \sin(n\theta)$

für $y = 0;\ x \geq 0:\ r = x;\ \theta = 0 \qquad C = \frac{a}{n} x^n \underbrace{\sin(n\theta)}_{=0} = 0 \Rightarrow C = 0$

$y \leq 0;\ x = 0:\ r = y;\ \theta = \frac{3}{2}\pi \qquad 0 = \frac{a}{n} y^n \sin(\frac{3}{2} n\pi) = 0$

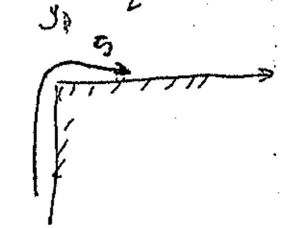
$\Rightarrow \sin(\frac{3}{2} \cdot n \cdot \pi) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} n\pi = 0;\ \pi;\ 2\pi, \dots\ k \cdot \pi \qquad k \in \mathbb{N}^0$

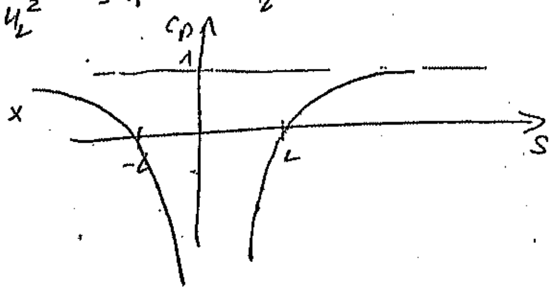
$\Rightarrow n = 2/3$ da $0 < n < 1$

$|\vec{V_L}| = u_L = u(r = L; \theta = 0) \Rightarrow a \cdot L^{-1/3} \underbrace{\cos 0}_{=1} = u_L \Rightarrow a = u_L \cdot L^{1/3}$

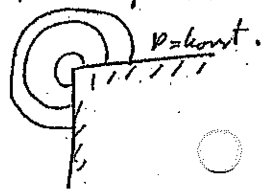
V-Komponente ist Null

d) $c_p = 1 - \frac{\vec{V}^2}{u_L^2} = 1 - \frac{a^2 r^{-2/3}}{u_L^2} = 1 - \frac{u_L^2 L^{2/3} \cdot r^{-2/3}}{u_L^2} = 1 - \left(\frac{L}{r}\right)^{2/3}$





e) Linien $p = \text{konst.} \Rightarrow c_p = \text{const.} \Rightarrow r = \text{const.} \Rightarrow$ Kreise um Ursprung



3. Aufgabe (9 Punkte)

In einem Modellversuch soll die pulsierende Strömung in den Arterien des menschlichen Blutkreislaufes studiert werden. Der Innendurchmesser der Arterien sei d, das Blut pulsiert mit der Frequenz f des Herzschlages, wobei die zeitlich gemittelte Geschwindigkeit u beträgt. Blut hat die gleiche Dichte wie Wasser, aber die vierfache dynamische Zähigkeit von Wasser.

a) Welche bekannte(n) Kennzahl(en) kennzeichnen das Problem. Was haben diese Kennzahlen für eine Bedeutung.

b) Wie groß müssen im Modellversuch die mittlere Geschwindigkeit u_M und die Frequenz f_M gewählt werden, wenn der Modelldurchmesser d_M beträgt und Blut als Modellflüssigkeit dient.

c) Wie in b) aber mit Wasser als Modellflüssigkleit.

Gegeben: d, f, u, d_M

3. Aufgabe

a) Reynoldszahl $Re = \frac{u \cdot d}{\nu} = \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Reibungskraft}}$

Strouhalzahl $Sr = \frac{l}{\tau \cdot u} = \frac{\Delta t}{\Delta t_{char}}$ Δt: Zeit für ein Fluidteilchen, um mit Geschw. u die Strecke l zurückzulegen

Δt_{char}: für die Strömung charakt. Zeit $\Rightarrow \Delta t_{char} = \frac{1}{f}$ für period. Vorgänge

b) $Re = Re_{Modell} \Rightarrow \frac{u \cdot d}{\nu} = \frac{u_M d_M}{\nu_M}$ mit $\nu = \nu_M$

$\Rightarrow u_M = u \cdot \frac{d}{d_M}$

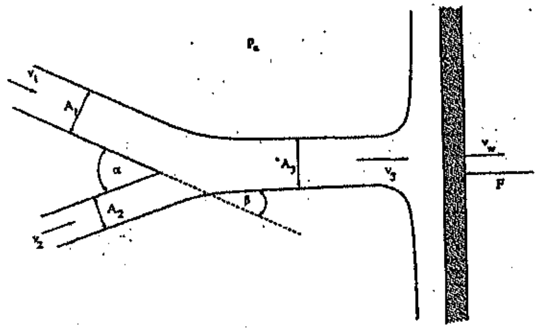
$Sr = Sr_{Modell}$ $\frac{d \cdot f}{u} = \frac{d_M \cdot f_M}{u_M} = \frac{d_M^2 \cdot f_M}{u \cdot d} \Rightarrow f_M = \frac{d^2 \cdot f}{d_M^2}$

c) $Re = Re_{Modell}$ $\nu = 4\nu_M \Rightarrow u_M = u \frac{d}{4 d_M}$

$Sr = Sr_{Modell}$ $f_M = \frac{d}{d_M} \frac{u_M}{u} \cdot f = \frac{d^2}{4 d_M^2} \cdot f$

2. Aufgabe (12 Punkte)

Zwei Wasserstrahlen treffen sich unter dem Winkel α. Nach einer Vermischung bildet sich ein horizontaler Strahl, der auf eine vertikale mit der Geschwindigkeit v_w bewegte Platte auftrifft. Dort wird der Strahl parallel zur Platte reibungslos in zwei gleich große Strahlen umgelenkt.



Bestimmen Sie

a) den Winkel β,

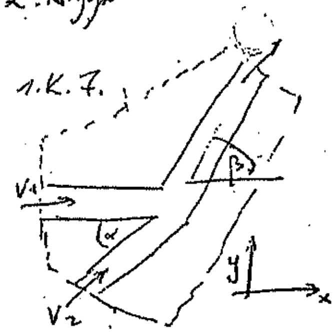
b) den Querschnitt A_3 und die Geschwindigkeit v_3,

c) die Kraft F, damit sich die Platte mit der konstanten Geschwindigkeit v_w in horizontaler Richtung bewegt.

Gegeben: $A_1, A_2, v_1, v_2, \alpha, v_w, \rho$

2. Aufgabe

1. K. F.



Impulssatz: x-Richtung:

$$-\rho v_1^2 A_1 - \rho v_2^2 \cos\alpha\, A_2 + \rho v_3^2 \cos\beta\, A_3 = 0$$

y-Richtung:

$$-\rho v_2^2 \sin\alpha\, A_2 + \rho v_3^2 \sin\beta\, A_3 = 0$$

Konti: $v_1 A_1 + v_2 A_2 = v_3 A_3$

a) Winkel β

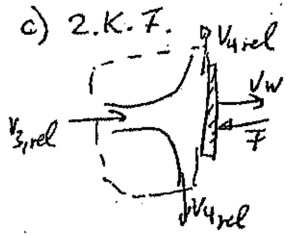
$$v_3^2 A_3 \sin\beta = v_2^2 A_2 \sin\alpha$$
$$v_3^2 A_3 \cos\beta = v_1^2 A_1 + v_2^2 A_2 \cos\alpha \Leftrightarrow \tan\beta = \frac{v_2^2 A_2 \sin\alpha}{v_1^2 A_1 + v_2^2 A_2 \cos\alpha}$$

b) $v_3^2 A_3^2 = (v_1 A_1 + v_2 A_2)^2$ $\qquad \frac{v_3^2 A_3^2}{A_3} \sin\beta = v_2^2 A_2 \sin\alpha = \frac{\sin\beta}{A_3}(v_1 A_1 + v_2 A_2)^2$

$$\Rightarrow A_3 = \frac{\sin\beta\,(v_1 A_1 + v_2 A_2)^2}{\sin\alpha\, v_2^2 A_2} \qquad (\beta \text{ aus a)})$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{1}{A_3}(v_1 A_1 + v_2 A_2)$$

c) 2. K. F.



Aus Symm $A_4 = \frac{1}{2} A_3$ (Konti)

$v_4 = v_3$ (Bernoulli)

$v_{3rel} = v_3 - v_W$. $\qquad v_{4rel} = v_{3rel}$

Impulssatz in x-Richtung für bewegtes System:

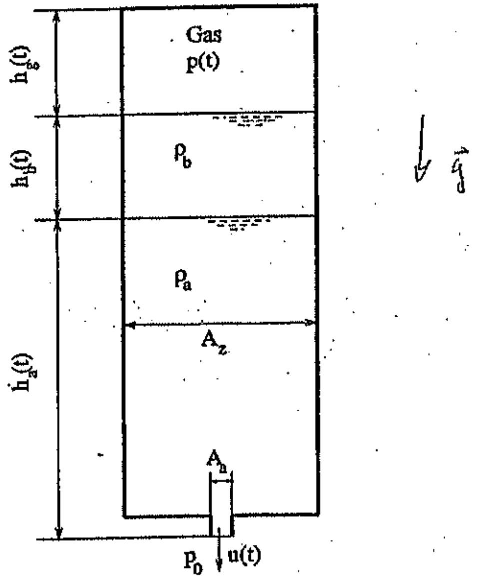
$$\int \rho \vec{v}_{rel} (\vec{v}_{rel} \cdot \vec{n})\, dA = -F$$

$$-\rho (v_3 - v_w)^2 A_3 = -F \quad \Rightarrow F = \rho (v_3 - v_w)^2 A_3$$

Wärme + Stoffübertragung + Teil Strömungslehre

1. Aufgabe (11 Punkte)

Ein oben geschlossener Behälter besteht aus einem zylindrischen Körper, der in ein kurzes Ausflußrohr ins Freie (Druck p_0) mündet. In diesem Behälter sind Flüssigkeiten der Dichten ρ_a und ρ_b sowie ein ideales Gas unter dem anfänglichen Druck $p(t=0) = p_0 + \Delta p$ und einer konstanten Temperatur übereinandergeschichtet. Die Fluide vermischen sich nicht.



a) Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit u(t=0) für den skizzierten Flüssigkeitsstand?

b) Bestimmen Sie für einen quasistationären Ausfluß der Flüssigkeit "a" eine Differentialgleichung zur Berechnung der Höhe $h_g(t)$. Lösen Sie diese Differentialgleichung nicht.

c) Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit, unmittelbar bevor die gesamte Flüssigkeit "a" ausgeflossen ist?

d) Wie groß muß Δp im Ausgangszustand mindestens sein, damit die Flüssigkeit "a" völlig ausfließen kann?

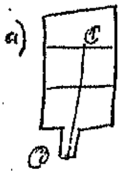
Gegeben: $\rho_a, \rho_b, p_0, \Delta p, h, h_g(t=0) = h, h_b(t=0) = h, h_a(t=0) = 3h, A_z, A_a$, g

Hinweis:

- alle Strömungsverluste sind zu vernachlässigen
- die Querschnittsfläche des Ausflußrohres A_a ist gegenüber derjenigen des zylindrischen Teils A_z vernachlässigbar $A_a << A_z$

1. Aufgabe

a)



Aus Konti: $V_1 = \underbrace{\frac{A_a}{A_z}}_{\ll 1} \cdot u \Rightarrow V_1$ vernachlässigbar

Bernoulli 1–2: $p_0 + \Delta p + \frac{1}{2}\rho_b \cancel{V_1^2}^{\,0} + \rho_a \cdot g \cdot h_a + \rho_b \cdot g \cdot h_b = p_0 + \frac{1}{2}\rho_a u^2$

$$\Rightarrow u = \sqrt{\frac{2}{\rho_a}\left[\Delta p + g h (3\rho_a + \rho_b)\right]}$$

b) Bernoulli 1→2 quasistationär $h_b(t) = h = \text{const.}$ für den betrachteten Ablauf

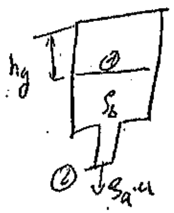
$p(t) = \rho(t) \cdot R \cdot T$ $\quad p/\rho = p \cdot \frac{V}{m} = R \cdot T = \text{const.}$

$p(t) = p(t=0) \cdot \frac{V(t=0)}{V(t)} = (p_0 + \Delta p)\frac{h \cdot A_z}{h_g(t) \cdot A_z} = (p_0 + \Delta p) \cdot \frac{h}{h_g(t)}$

$h_a(t) = 3h - h_g(t) + h = 4h - h_g(t)$ $\quad$ Konti: $A_a \cdot u(t) = A_z \frac{dh_g(t)}{dt} \Rightarrow u(t) = \frac{A_z}{A_a}\frac{dh}{dt}$

Einsetzen ergibt: $(p_0 + \Delta p)\frac{h}{h_g(t)} + \rho_a \cdot g(4h - h_g(t)) + \rho_b \cdot g \cdot h = p_0 + \frac{1}{2}\rho_a \left[\frac{A_z}{A_a}\frac{dh}{dt}\right.$

c) Bern. ①→②



$h_g(t) = 3h + h = 4h$

$\frac{(p_0 + \Delta p) \cdot h}{4h} + \rho_b \cdot g \cdot h = p_0 + \frac{1}{2}\rho_a u^2$

$$\Rightarrow u^* = \sqrt{\frac{2}{\rho_a}\left(\frac{p_0 + \Delta p}{4} - p_0 + \rho_b g h\right)}$$

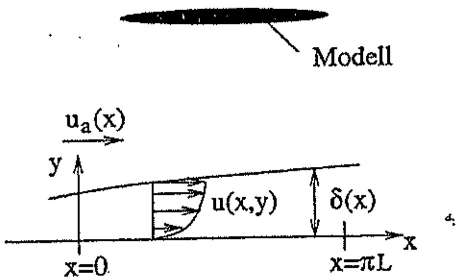
d) Grenzwert $u^* = 0$

$$\frac{p_0 + \Delta p}{4} - p_0 + \rho_b g h = 0 \Rightarrow \Delta p = 3p_0 - 4\rho_b g h$$

7. Aufgabe (13 Punkte)

Ein Windkanal wird mit einem inkompressiblen Fluid der Dichte ρ und der Viskosität η durchströmt. In dem Bereich $0 \leq x \leq \pi L$ wird unmittelbar oberhalb der Grenzschicht die durch ein Windkanalmodell verursachte Geschwindigkeitsverteilung $u_a(x)$ gemessen. Das Geschwindigkeitsprofil der laminaren Grenzschicht im Bereich $0 \leq x \leq \pi L$ wird durch den folgenden Polynomansatz angenähert:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_1\left(\frac{y}{\delta(x)}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^2 + a_3\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^3 + a_4\left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^4$$



a) Leiten Sie aus der unten angegebenen, dimensionslosen Impulsgleichung die dimensionslose Wandbindungsgleichung einer Grenzschicht her.
zweidimensionale, stationäre, inkompressible Impulsgleichung in x-Richtung:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_1 bis a_4 als Funktion von x.

c) Geben Sie die Definition der Impulsverlustdicke $\delta_2(x)$ an.

d) Bestimmen Sie die Verdrängungsdicke $\delta_1(x)$ an der Stelle $x = L\pi/2$.

Gegeben: $u_\infty, \rho, \eta, \delta(x), L, \; u_a(x) = u_\infty(1 + \frac{1}{2}\sin(\frac{x}{L}))$

8. Aufgabe (13 Punkte)

a) Ein Rennfahrer fährt mit 252km/h mit seinem Sportwagen über die Autobahn, wobei die Temperatur der Luft $T_L = 293$K beträgt. Kann man diese Umströmung noch näherungsweise inkompressibel berechnen (kurze(!) Begründung)?

b) Ein Objekt wird mit einer Machzahl von $Ma_\infty = 2,0$ angeströmt. Welchen maximalen und welchen minimalen Wert kann der Stoßwinkel σ eines auftretenden Verdichtungsstoßes annehmen?

c) Im Zustand 1 vor einem schrägen Verdichtungsstoß herrscht das Druckverhältnis $p_{01}/p_1 = 50$ und die Geschwindigkeit $\vec{v_1} = 800$m/s. Bestimmen Sie die Machzahl Ma_1 vor dem Stoß und die Ruhetemperatur T_{01}.

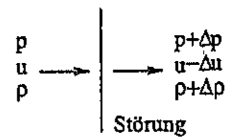
Gegeben: $\frac{p_{01}}{p_1} = 50, \quad \vec{v_1} = 800\frac{m}{s}, \quad R = 287\frac{J}{kgK}, \quad \gamma = 1,4$

Rechnen Sie mit $Ma_1 = 3,0$ und $T_{01} = 500$K weiter.

d) Bestimmen Sie die Temperatur T_1. Berechnen Sie die Machzahl Ma_2 nach dem Stoß und den Stoßwinkel σ, wenn $T_2 = 250$K ist.

e) Bestimmen Sie den Umlenkwinkel β.

f) Eine kleine Störung bewegt sich mit der Geschwindigkeit u durch ein ruhendes Gas. Für einen mitbewegten Beobachter ist diese Strömung stationär und eindimensional (s. Skizze unten).
Stellen Sie mit den in der Skizze gegebenen Größen die Massen- und Impulsbilanz auf. Leiten Sie einen Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit her.



Hinweis:

- Die Luft wird als ideales Gas mit konstanten spezifischen Wärmekapazitäten betrachtet
- $\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma^2$
- Isentropenbeziehungen: $\frac{T_a}{T_b} = (\frac{\rho_a}{\rho_b})^{\gamma-1} = (\frac{p_a}{p_b})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$
- zu f): Isentropenbeziehung in differentieller Form: $\frac{dp}{d\rho} = \gamma\frac{p}{\rho}$

5. Aufgabe (11 Punkte)

a) Das Verhältnis welcher Kräfte beschreibt die Reynoldszahl? Geben Sie die Definition der Reynoldszahl an.

b) Ein unendlich langer Zylinder mit dem Durchmesser D wird von einem Fluid, das die Zähigkeit η und die Dichte ρ besitzt, mit der Geschwindigkeit u_∞ quer angeströmt. Die Widerstandskraft W des Zylinders soll gemessen werden. Bestimmen Sie mit Hilfe des Buckinghamschen Π-Theorems die relevanten Kennzahlen.

c) Gegeben sind die instationären, kompressiblen, zweidimensionalen Erhaltungsgleichungen der Masse, des Impulses in y-Richtung und der Energie. Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Kontinuitätsgleichung das Gleichungssystem für eine inkompressible und reibungsfreie Strömung.

Hinweis:
Die instationären, zweidimensionalen, kompressiblen Erhaltungsgleichung lauten:

- Masse:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0$$

- y-Impuls:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv + \sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p + \sigma_{yy}) = 0$$

- Energie:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uE + up + u\sigma_{xx} + v\sigma_{xy} + q_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vE + vp + v\sigma_{yy} + u\sigma_{xy} + q_y) = 0$$

mit

$$\sigma_{xx} = -\eta\left[2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \quad , \quad \sigma_{yy} = -\eta\left[2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] \quad , \quad \sigma_{xy} = -\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

und

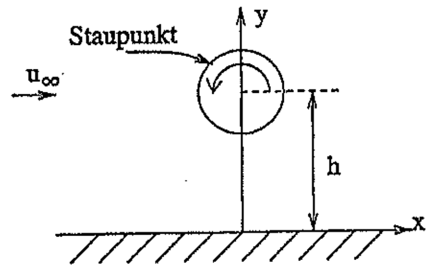
$$q_x = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x} \quad , \quad q_y = -\lambda\frac{\partial T}{\partial y}$$

6. Aufgabe (14 Punkte)

a) Wie ist eine Stromlinie definiert?

b) In welcher geometrischen Beziehung stehen Strom- und Äquipotentiallinien?

Ein mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierender Kreiszylinder wird von einem inkompressiblen Fluid mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt. Der Zylinder befindet sich in einem Abstand h über einen festen Wand. Die Strömung sei reibungsfrei und zweidimensional.



c) Unter der Annahme einer potentialtheoretischen Beschreibung des Strömungsfeldes formulieren Sie eine geeignete komplexe Potentialfunktion $F(z)$, die dieses Strömungsproblem beschreibt.

d) Bestimmen Sie die Potentialfunktion Φ und die Stromfunktion Ψ.

e) Vereinfachen Sie die in c) erhaltene komplexe Potentialfunktion $F(z)$ für $h = 0$. Ermitteln Sie den/die Staupunkt/e.

f) Skizzieren Sie für die Strömung aus e) die Linien $\Phi = const.$

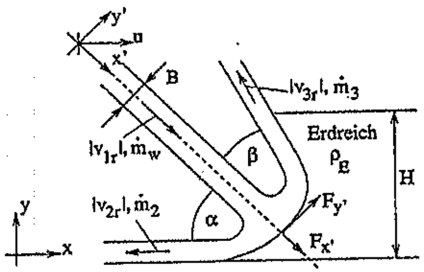
Gegeben: $h, u_\infty,$ alle benötigten Konstanten

Hinweis: Gegeben sind die folgenden komplexen Potentialfunktionen:

- $F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$ Parallelströmung
- $F(z) = \frac{E}{2\pi}\ln z$ Quelle/Senke
- $F(z) = \frac{M}{2\pi z}$ Dipol
- $F(z) = \frac{-i\Gamma}{2\pi}\ln z$ Potentialwirbel
- $F(z) = az^2$ Staupunktströmung

3. Aufgabe (13 Punkte)

Mit einem Wasserstrahl (Dichte ρ_w, Breite B) wird das Erdreich (Dichte ρ_E) auf einer Höhe H und einer Tiefe T abgetragen. Dabei bewegt sich der Wasserstrahl mit einer Geschwindigkeit u in x-Richtung relativ zum Erdreich. Der Wasserstrahl trifft unter einem Winkel α auf das Erdreich auf und teilt sich gemäß der Zeichnung in zwei Teilstrahlen auf. Diese Teilstrahlen führen jeweils einen Teil des abgespülten Erdreiches ($\dot{m}_E$) mit sich. Die eingezeichneten Geschwindigkeiten $|v_{1r}|$, $|v_{2r}|$ und $|v_{3r}|$ beziehen sich auf das mit u mitbewegte Relativsystem (x', y').



Das abströmende Erdreich soll als Kontinuum betrachtet werden. In allen Bereichen herrscht der Druck p_a. Alle Strahlen haben die Tiefe T.

a) Bestimmen Sie den Massenstrom $\dot{m}_W$ und $\dot{m}_E$.

b) Vom Erdreich wirken auf den Strahl die Kräfte $F_{x'}$ und $F_{y'}$. Stellen Sie die Impulsbilanz im Koordinatensystem (x', y') für die x'- und die y'-Richtung in Abhängigkeit von $\dot{m}_2, \dot{m}_3$ und β auf (Formulieren Sie nur den Ansatz).

c) Stellen Sie zusätzlich zu den beiden Gleichungen aus b) eine dritte Gleichung zur Bestimmung von $\dot{m}_2, \dot{m}_3$ und β auf.

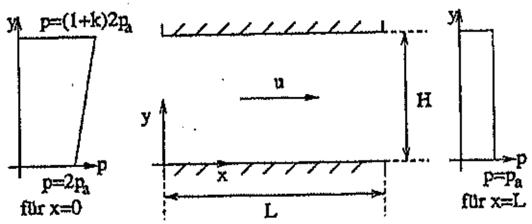
d) Nun sei $\beta < \pi/2$ und $\alpha = 0$, wobei der untere Teilstrahl ($\dot{m}_2$) weiterhin in negativer x-Richtung strömt. Die Kräfte F_x und F_y, die vom Erdreich auf den Strahl wirken, sind nun gegeben.
Stellen Sie für das mit dem Erdreich verbundene Koordinatensystem (x, y) die Impulsbilanz in x- und in y-Richtung in Abhängigkeit von $\dot{m}_2, \dot{m}_3$ und β auf (Formulieren Sie nur den Ansatz).

Gegeben: $\rho_W, \rho_E, B, T, H, u, |v_{1r}|, |v_{2r}|, |v_{3r}|, \alpha, F_{x'}, F_{y'}$

4. Aufgabe (9 Punkte)

Zwischen zwei ebenen Platten mit dem Abstand H strömt ein inkompressibles Newtonsches Fluid mit konstanter Zähigkeit η. In dem Bereich $0 \leq x \leq L$ sei die Strömung stationär und laminar. Bei $x = 0$ und $x = L$ sind die skizzierten Druckprofile aufgeprägt. Man erhält die folgende angenäherte Druckverteilung:

$$p(x, y) = p_a \frac{x}{L} + 2p_a(1 + k\frac{y}{H})(1 - \frac{x}{L}) \quad , \quad k > 0$$



a) Leiten Sie das Geschwindigkeitsprofil der Kanalströmung für $0 \leq x \leq L$ her. Vernachlässigen Sie Querströmungen (u hängt nur von y ab; $v = 0$)!

b) An welcher Stelle (y/H) ist die Schubspannung für $k = 0.2$ gleich null?

Gegeben: p_a, k, L, H, η

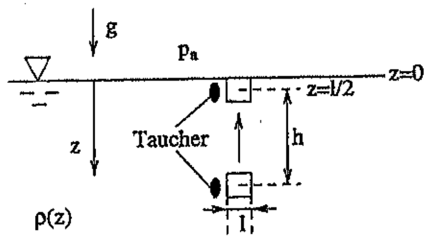
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

21. 7. 2000

1. Aufgabe (11 Punkte)

Im Meer sei die aufgrund unterschiedlichen Salzgehaltes vorliegende Dichteverteilung $\rho(z)$ bekannt. Ein Taucher soll eine würfelförmige Kiste der Kantenlänge l aus der Tiefe $z = h + l/2$ bis zur Tiefe $z = l/2$ heben (s. Skizze). Auf die Kiste wirkt die Gewichtskraft F_G, die an jeder Stelle größer ist, als die auf die Kiste wirkende Auftriebskraft.



a) Bestimmen Sie die Druckverteilung $p(z)$.

b) Welche Arbeit verrichtet der Taucher bei dieser Bergung? Berücksichtigen Sie dazu nur die Gewichts- und die Auftriebskraft der Kiste.

c) Der Taucher besitzt zusammen mit seiner Ausrüstung (ohne Schwimmweste) die Dichte ρ_T und das Volumen V_T. In der Tiefe z_T hat er seine im Volumen veränderliche Schwimmweste mit Luft unter Umgebungsdruck $p(z_T)$ derart befüllt, daß er gerade schwebt. Die Weste mitsamt der befüllten Luft hat eine Dichte $\rho_{Weste} \ll \rho_0$ und in der Tiefe z_T ein Volumen V_W.
Bestimmen Sie z_T.

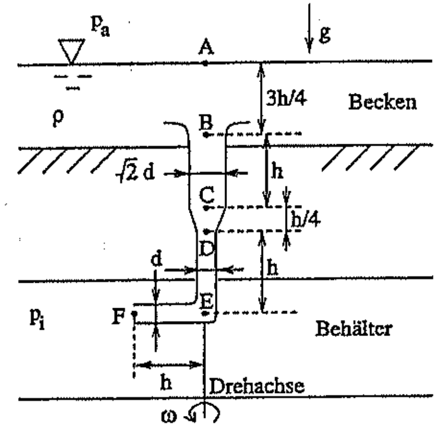
d) Die Schwimmweste aus c) darf sich maximal bis zu einem Volumen $V_{max} = 2V_W$ ausdehnen bevor sie platzt. Bis zu welcher Tiefe z_{min} darf der Taucher aus c) höchstens aufsteigen?
Nehmen Sie isotherme Zustandsänderung an.

Gegeben: $p_a, \rho_0, C, g, h, l, F_G, \rho_T, V_T, V_W, \quad \rho(z) = \rho_0 + Cz, \quad C > 0, \quad z \geq 0$

Hinweis: $l \ll h$

2. Aufgabe (15 Punkte)

Ein großes Becken ist über einen gut gerundeten Abfluß mit einem Behälter verbunden, in dem der Druck p_i herrscht. In dem großen Behälter ist ein abgewinkeltes Rohr angeschlossen, das um die Drehachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω angetrieben wird. Zwischen den Punkten C und D tritt durch Einbauten der Druckverlustbeiwert ζ auf. Das Rohr hat zwischen den Punkten B und C den Rohrreibungsbeiwert λ_1 und zwischen den Punkten D und F den Rohrreibungsbeiwert λ_2.



a) Es wird die Druckdifferenz $\Delta p = p_C - p_D = \rho g h 7/4$ gemessen. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_C im Punkt C. (Δp ist nur für Teilaufgabe a) gegeben!)

b) Berechnen Sie bei einem Behälterinnendruck $p_i = p_a$ die Winkelgeschwindigkeit ω derart, daß die Tangentialkomponente der Geschwindigkeit des Fluids im Punkt F gleich der Radialkomponente ist.

c) Betrachten Sie eine Stromlinie von A nach F für die Anordnung aus b). Zeichnen Sie sorgfältig die gesamte mechanische Energie und deren Anteile entlang der Stromlinie als Funktion der Lauflänge.

d) Nun sei $\lambda_1, \lambda_2, \zeta, \omega = 0$ und die Geschwindigkeit im Punkt F $v_F = v_0$. Plötzlich wird der Druck im Behälter erhöht auf $p_i = p_a + 3\rho g h$ (d.h. $v_F = 0$ für den stationären Zustand). Berechnen Sie das Volumen, das von jetzt bis zu dem Zeitpunkt austritt, an dem die Geschwindigkeit $v_F = 0,01 v_0$ ist. Vernachlässigen Sie dabei den instationären Anteil von Punkt C nach Punkt D.

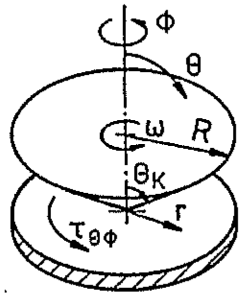
Gegeben: $g, h, d, \zeta, \lambda_1, \lambda_2 \quad d \ll h$

Hinweis: $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \omega^2 r$

9 Sem. 1997

9. Aufgabe (16 Punkte)

Ein Viskosimeter besteht aus einer kreisförmigen Platte und einem darüber angeordneten stumpfen Kegel mit dem Radius R und Öffnungswinkel Θ_K. In dem Spalt zwischen Kegel und Platte befindet sich ein Fluid mit unbekannter Zähigkeit η. Durch die Drehung des Kegels mit der Winkelgeschwindigkeit ω bildet sich in dem Spalt eine schleichende Strömung aus, die ausschließlich in Umfangsrichtung weist. An der Platte wird das Moment M gemessen.



Die Impulsgleichungen vereinfachen sich für diese Strömung zu:

$$\frac{d\tau_{\theta\phi}}{d\theta} = \frac{-2\tau_{\theta\phi}}{\tan\theta}$$

a) Bestimmen Sie die Schubspannung $\tau_{\theta\phi}$ als Funktion des Winkels θ.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponente $v_\phi(r,\theta)$ und die Zähigkeit η. Die Schubspannung $\tau_{\theta\phi}$ ist definiert als:

$$\tau_{\theta\phi} = -\eta\left(\sin\theta\frac{\partial\frac{v_\phi}{r\sin\theta}}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}\right)$$

Gegeben: R, M, ω, θ_K

Hinweis:

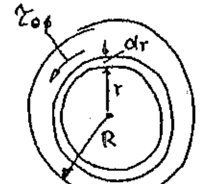
$$\int\frac{1}{\tan x}dx = \ln(\sin x)$$

$$\int\frac{1}{\sin^3 x}dx = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)\right)$$

9. Aufgabe

a) $\frac{d\tau_{\theta\phi}}{d\theta} = \frac{-2\tau_{\theta\phi}}{\tan\theta} \Leftrightarrow \frac{d\tau_{\theta\phi}}{\tau_{\theta\phi}} = \frac{-2}{\tan\theta}d\theta \Rightarrow \ln\tau_{\theta\phi} = -2\ln(\sin\theta) + C_1'$ (1) (1)

$\Leftrightarrow \tau_{\theta\phi} = e^{\ln(\sin^{-2}\theta)+C_1'} = \frac{C_1}{\sin^2\theta}$ (1)



Moment M wirkt auf die Platte:

$\Rightarrow M = \int_0^R 2\pi r\, r\, \tau_{\theta\phi}\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}\, dr$ (3)

$\Leftrightarrow M = \int_0^R 2\pi r^2 C_1\, dr = \frac{2}{3}\pi R^3 C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{3M}{2\pi R^3}$ (1)

$\Rightarrow \underline{\underline{\tau_{\theta\phi} = \frac{3M}{2\pi R^3\sin^2\theta}}}$ (1)

b) $\tau_{\theta\phi} = -\eta\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\right) + \underbrace{\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial\phi}}_{=0 \text{ da } v_\theta=0 \text{ (laut Aufgabenstellung)}}\right)$ (1)

$\Rightarrow \frac{3M}{2\pi R^3\sin^2\theta} = -\eta\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left(\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\right) \Leftrightarrow \frac{-3M}{2\pi R^3\eta}\frac{1}{\sin^3\theta}d\theta = d\left(\frac{v_\phi}{r\sin\theta}\right)$ (1)

$\Rightarrow \frac{3M}{4\pi R^3\eta}\left(\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right) = \frac{v_\phi}{r\sin\theta} + C_2$ (1)

$\Leftrightarrow \frac{3M}{4\pi R^3\eta}\left(\tan^{-1}\theta + \frac{\sin\theta}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right) + C_2\sin\theta = \frac{v_\phi}{r}$ (1)

Randbedingung: $\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_\phi = 0 \Rightarrow C_2 = 0$ (1)

$\theta = \theta_K \Rightarrow v_\phi = \omega r$ (1)

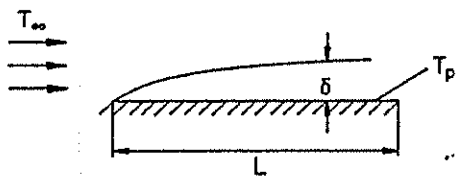
$\Rightarrow \underline{\underline{v_\phi = \frac{3M}{4\pi R^3\eta}\left[\tan^{-1}\theta + \frac{\sin\theta}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right)\right] r}}$ (1)

$\Rightarrow \underline{\underline{\eta = \frac{3M}{4\pi R^3\omega}\left[\tan^{-1}\theta_K + \frac{\sin\theta_K}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\theta_K}{1-\cos\theta_K}\right)\right]}}$ (1)

Sep. 1991 5

5. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Fluid strömt über eine beheizte Platte. Die Temperatur des Fluids weit entfernt von der Platte sei T_∞, die der Platte T_p.



Die Temperaturverteilung in der Strömung wird durch folgende Erhaltungsgleichung beschrieben:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T - p(\nabla \cdot \vec{v})$$

a) Für welche physikalische Größe stellt diese Gleichung die Erhaltungsgleichung dar und für welche Strömungen von welchen Fluiden ist die Gleichung gültig?

b) Ermitteln Sie für diese Gleichung Kennzahlen mit der Methode der Differentialgleichung.

c) Vereinfachen Sie die Gleichung für eine 2 dimensionale, stationäre, inkompressible Grenzschichtströmung ($\delta \ll L$) mit konstanten Stoffwerten.

Gegeben: Alle nötigen Referenzgrößen.

Hinweis: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$

$Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$ $\quad Sr = \frac{l/v}{t}$

$Re = \frac{\rho v l}{\eta}$ $\quad Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda}$

$\varkappa = c_p/c_v$ $\quad Ma = \frac{v}{\sqrt{\varkappa R T}}$ $\quad R = c_p - c_v$

$Ec = \frac{\cancel{u_\infty}\, v^2}{c_p \underbrace{(T_W - T_\infty)}_{\Delta T}}$

$K_3 = \frac{Eu}{Ec} \cdot \varkappa$

$K_1 = \cancel{Str}\ Sr$

$K_2 = \cancel{St}\ \frac{1}{Pr \cdot Re}\, \varkappa = \frac{\cancel{\eta} \cdot \lambda}{\rho v l\, \eta c_p} \cdot \frac{c_p}{c_v}$

5. Aufgabe

a) Die Gleichung ist die Energieerhaltungsgleichung (1) für kompressible (1) Strömungen, in denen Reibungseffekte (1) vernachlässigt werden. Die Gleichung gilt für ein ideales Gas mit konstanter spezifischer Wärmekapazität und Temperaturleitfähigkeit. (1)

b) Dim.lose Variablen $\qquad$ Ref.-Größen

$\bar\rho = \frac{\rho}{\rho_\infty}$, $\bar T = \cancel{\frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}$, $\bar t = \frac{t}{\Delta t}$, $\bar p = \frac{p}{\Delta p}$, $\bar{\vec v} = \frac{\vec v}{u_\infty}$, $\bar\nabla = \nabla L$ (1)

$$\Rightarrow \rho_\infty c_v \bar\rho \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \frac{\partial \bar T}{\partial \bar t} + \frac{u_\infty}{L} \Delta T\, \bar{\vec v} \cdot \bar\nabla \bar T \right) = \frac{\lambda}{L^2} \Delta T\, \bar\nabla^2 \bar T - \frac{\Delta p\, u_\infty}{L} \bar p (\bar\nabla \cdot \bar{\vec v}) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\rho_\infty u_\infty c_v \Delta T}{L}}_{\text{Aillen}} \left(\frac{L}{u_\infty \Delta t} \bar\rho \frac{\partial \bar T}{\partial \bar t} + \bar\rho\, \bar{\vec v} \cdot \bar\nabla \bar T \right) = \frac{\lambda}{L^2} \Delta T\, \bar\nabla^2 \bar T - \frac{\Delta p\, u_\infty}{L} \bar p (\bar\nabla \cdot \bar{\vec v})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{L}{u_\infty \Delta t}}_{K_1} \bar\rho \frac{\partial \bar T}{\partial \bar t} + \bar\rho\, \bar{\vec v} \cdot \bar\nabla \bar T = \underbrace{\frac{\lambda}{\rho_\infty u_\infty L c_v}}_{K_2} \bar\nabla^2 \bar T - \underbrace{\frac{\Delta p}{\rho_\infty c_v \Delta T}}_{K_3} \bar p (\bar\nabla \cdot \bar{\vec v}) \quad (1)$$

z.B.: K_1, K_2, K_3 (1)

c) inkompressible Strömung: $\nabla \cdot \vec v = 0$, stationäre St.: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

$$\Rightarrow \rho c_v \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

dimensionslos machen, so daß Terme von der Ordnung O(1) werden: $\bar x = \frac{x}{L}$, $\bar y = \frac{y}{\delta}$, $\bar u = \frac{u}{u_\infty}$, $\bar v = \frac{v}{X}$, $\bar T = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}$. (1)

X: → Konti-Gl.: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{u_\infty}{L} \underbrace{\frac{\partial \bar u}{\partial \bar x}}_{O(1)} + \frac{X}{\delta} \underbrace{\frac{\partial \bar v}{\partial \bar y}}_{O(1)} = 0 \Rightarrow X = \frac{\delta}{L} u_\infty$ (1)

$$\Rightarrow \rho c_v \left(\frac{u_\infty \Delta T}{L} \bar u \frac{\partial \bar T}{\partial \bar x} + \frac{\delta u_\infty}{L \delta} \Delta T\, \bar v \frac{\partial \bar T}{\partial \bar y} \right) = \lambda \left(\frac{\Delta T}{L^2} \frac{\partial^2 \bar T}{\partial \bar x^2} + \frac{\Delta T}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar T}{\partial \bar y^2} \right)$$

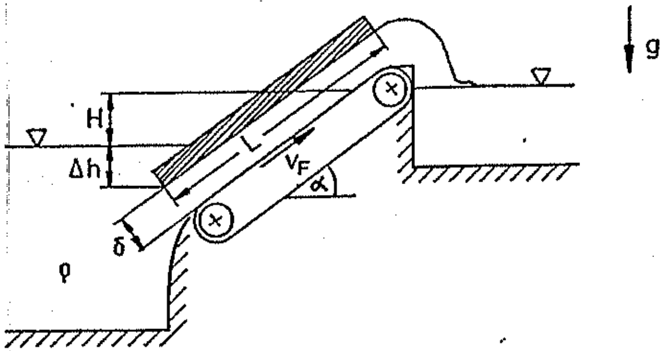
$$\Leftrightarrow \bar u \frac{\partial \bar T}{\partial \bar x} + \bar v \frac{\partial \bar T}{\partial \bar y} = \frac{\lambda L}{\rho u_\infty \delta^2 c_v} \left(\overbrace{\overset{\ll 1}{\frac{\delta^2}{L^2}} \frac{\partial^2 \bar T}{\partial \bar x^2}}^{\to 0} + \frac{\partial^2 \bar T}{\partial \bar y^2} \right)$$

$$\Rightarrow \bar u \frac{\partial \bar T}{\partial \bar x} + \bar v \frac{\partial \bar T}{\partial \bar y} = \frac{\lambda L}{\rho u_\infty \delta^2 c_v} \frac{\partial^2 \bar T}{\partial \bar y^2} \quad (1)$$

4 Sep. 1991

4. Aufgabe (15 Punkte)

Ein Fließband mit der Breite B und Länge L soll, wie in der Skizze dargestellt, Öl von einem niedrigen auf ein höheres Niveau fördern. Die Zähigkeit des Öls sei η, die Dichte sei ρ. Das Fließband ist unter dem Winkel α gegenüber der Horizontalen geneigt.



a) Berechnen Sie das Geschwindigkeitsprofil in dem Spalt. Die Strömung sei ausgebildet.

b) Durch Erhöhung der beiden Ölstände (H bleibt konstant) kann die Höhe Δh verändert werden. Wie verändert sich die Antriebsleistung des Fließbandes bei sonst gleichen Parametern (Begründung)?

c) Geben Sie alle unabhängigen Größen an, die die Leistung beeinflußen und ermitteln Sie mit Hilfe des π-Theorems die Anzahl der Kennzahlen, die dieses Problem beschreiben.

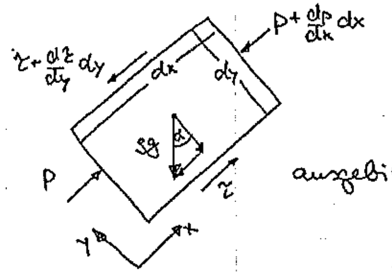
Gegeben: $H, L, B, \Delta h, \delta, \alpha, \rho, g, v_F, \eta$

Hinweis: Es sei $\frac{\rho v_F^2}{2} \ll \rho g \Delta h$

---

4. Aufgabe (2)

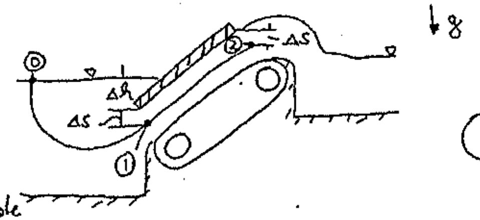
a) Kräftebilanz am Volumenelement: ⇒ $-\frac{dp}{dx} - \frac{d\tau}{dy} - \rho g \sin\alpha = 0$



⇔ $\frac{d\tau}{dy} = -\rho g \sin\alpha - \frac{dp}{dx}$

⇔ $\tau = -\left(\rho g \sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right)y + C_1$

ausgebildete Strömung ⇒ $\frac{dp}{dx}$ = const.



(1)

(1) Bernoulli von ⓪ → ①:

$p_a + \rho g(\Delta h + \Delta s) = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}(1 + \zeta_E)$ Einlaufverluste

$v_1 = O(v_F)$

⇒ $p_1 \approx p_a + \rho g(\Delta h + \Delta s)$ mit $p_2 = p_a + \rho g \Delta s$ ⇒ $\frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{L} = -\frac{\rho g \Delta h}{L}$

(1) ⇒ $\tau = -\left[\rho g\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\right]y + C_1 = -\eta \frac{du}{dy}$

(1) ⇒ $u = \frac{1}{\eta}\left[\rho g\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\frac{y^2}{2} - C_1 y\right] + C_2$

Randbedingungen: $y = 0$ ⇒ $u = v_F$ ⇒ $C_2 = v_F$

$y = \delta$ ⇒ $u = 0$ ⇒ $\frac{1}{\eta}\left[\rho g\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\frac{\delta^2}{2} - C_1\delta\right] + v_F = 0$

(2)

⇔ $C_1 = \rho g\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\frac{\delta}{2} + \frac{v_F \eta}{\delta}$

⇒ $u(y) = \frac{\rho g \delta^2}{2\eta}\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\left(\frac{y^2}{\delta^2} - \frac{y}{\delta}\right) + v_F\left(1 - \frac{y}{\delta}\right)$

(1)

b) Leistung $P = v_F(-\tau_w)BL$, $-\tau_w = \rho g\left(\sin\alpha - \frac{\Delta h}{L}\right)\frac{\delta}{2} + \frac{v_F\eta}{\delta}$.

⇒ Wenn Δh zunimmt, wird der Betrag der Wandschubspannung kleiner

⇒ nötige Leistung nimmt ab (2)

c) $P = f(\rho, g, \delta, \alpha, \Delta h, \eta, v_F, L, B)$ ⇒ 10 Einflußgrößen (2)

− 3 Grunddimensionen (1)

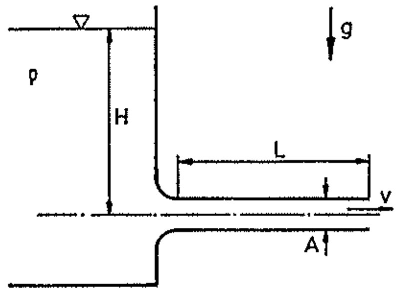
7 Kennzahlen (1)

2

SS 1991

2. Aufgabe (10 Punkte)

Aus einem großen Behälter strömt ein Fluid der Dichte ρ und Zähigkeit η durch ein Rohr mit einem kreisförmigen Querschnitt ins Freie. Bis zum Rohr sei die Strömung verlustfrei, in dem Rohr sei die Strömung laminar.



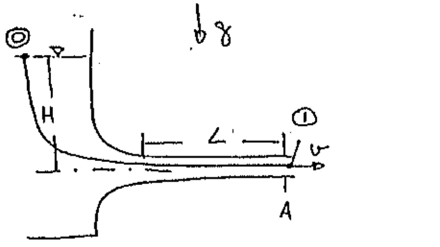
a) Berechnen Sie die mittlere Ausströmgeschwindigkeit v.

b) Wie verändert sich qualitativ die Ausströmgeschwindigkeit v bei Veränderung der Dichte des Fluids und bei Veränderung des Querschnittes des Rohres (Begründung)?

Gegeben: H, A, L, ρ, g, η

Hinweis: Der Rohrreibungsbeiwert λ für laminare Strömungen ist: $\lambda = \frac{64}{Re_D}$

2. Aufgabe



a) Bernoulli mit Verlustterm von 0 → 1:

3 $p_a + \rho g H = p_a + \frac{\rho}{2} v^2 + \Delta p_v$

1 $\Delta p_v = \frac{\rho v^2}{2} \lambda \frac{L}{D} = \frac{\rho v^2}{2} \frac{64 \eta}{\rho v D} \frac{L}{D} = \frac{32 v \eta L}{D^2}$ 1(Re)

$A = \frac{\pi D^2}{4} \Leftrightarrow D^2 = \frac{4A}{\pi}$

$\Rightarrow \rho g H = \frac{\rho}{2} v^2 + \frac{32 \eta L}{D^2} v = \frac{\rho}{2} v^2 + \frac{8 \eta L \pi}{A} v$

$\Leftrightarrow v^2 + \frac{16 \eta L \pi}{\rho A} v - 2gH = 0$

1 $\Leftrightarrow \underline{\underline{v = -\frac{8 \eta L \pi}{\rho A} \oplus \sqrt{\left(\frac{8 \eta L \pi}{\rho A}\right)^2 + 2gH}}}$ $(v > 0\,!)$

b) Mit zunehmender Dichte und Querschnittsfläche wird

1 die Reynoldszahl der Strömung im Rohr größer

1 → Rohrreibungsbeiwert nimmt ab

→ Verhältnis potentielle Energie zu Druckverlust wird größer

1 1 → Geschwindigkeit v wird größer.

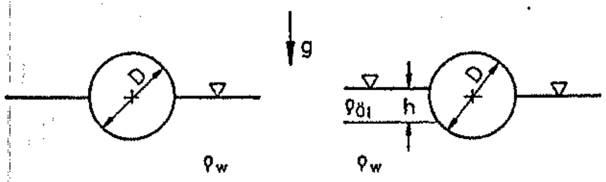
Sep. 1991

Klausur Strömungslehre I+II

2. August 1991

1. Aufgabe (12 Punkte)

Eine Ölbarriere in der Form eines Zylinders mit dem Durchmesser D schwimmt im Meer. Sie taucht in dem Wasser der Dichte ρ_w bis zur Hälfte ein und soll Öl der Dichte $\rho_{Öl}$ aufhalten.

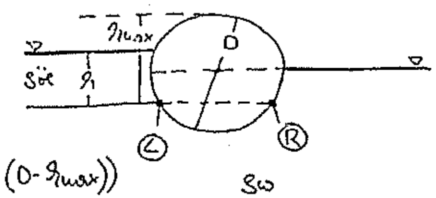


a) Berechnen Sie die maximale Ölfilmdicke h, die von der Barriere aufgehalten werden kann. Begründen Sie, warum die Eintauchtiefe auf der ölabgewandten Seite konstant bleibt.

b) Stellen Sie die auftretenden horizontalen Kräfte graphisch als Flächen dar. Berechnen Sie die horizontale Kraft auf die Barriere der Länge L als Funktion der Ölfilmdicke h.

Gegeben: $D, L, g, \frac{\rho_{Öl}}{\rho_w} = \frac{1}{2}, \rho_w$

1. Aufgabe

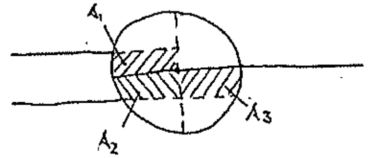


a) Druckgleichheit in den Punkten L und R:

$\Rightarrow p_a + \rho_{öl} g h_{max} = p_a + \rho_w g \left(\frac{D}{2} - (D - h_{max})\right)$

$\Leftrightarrow \rho_{öl} h_{max} = \rho_w \left(h_{max} - \frac{D}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{\rho_{öl}}{\rho_w} = 1 - \frac{D}{2 h_{max}}$

3 $\Leftrightarrow h_{max} = \dfrac{D}{2\left(1 - \frac{\rho_{öl}}{\rho_w}\right)} = D$



Da das Dichteverhältnis $\frac{\rho_{öl}}{\rho_w} = \frac{1}{2}$ ist, sind die Flächen A_1, A_2 und A_3 gleich groß

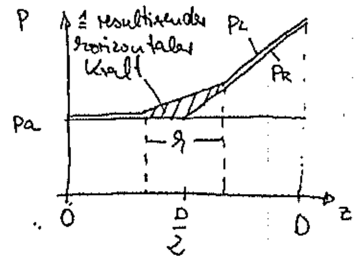
$\Rightarrow$ Auftriebskraft links $= \rho_{öl} g (A_1 + A_2) L$

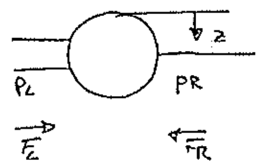
$=$ Auftriebskraft rechts $= \rho_w g (A_3) L$

3 d.h. insgesamt ändert sich die Auftriebskraft nicht und der Wasserstand bleibt auf der ölabgewandten Seite gleich.

b) graphische Darstellung der Druckverläufe:

3





$F_L = \rho_{öl} g \frac{h^2}{2} L + \rho_w g \frac{D^2}{8} L - \rho_w g \left(\frac{\rho_{öl}}{\rho_w} h\right)^2 \frac{L}{2} + p_a L D$

$F_R = \rho_w g \frac{D^2}{8} L + p_a L D$

$\Rightarrow F = F_L - F_R = \rho_{öl} g \frac{h^2}{2} L - \rho_w g \left(\frac{\rho_{öl}}{\rho_w}\right)^2 \frac{h^2}{2} L$

3 $\Leftrightarrow F = \rho_w g \frac{h^2}{2} \frac{\rho_{öl}}{\rho_w} \left(1 - \frac{\rho_{öl}}{\rho_w}\right) = \frac{\rho_w L h^2 g}{8}$

b) Ablösung für θ bei $\left.\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right|_{r=R} = 0$

$$\left.\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{v_\delta a_1}{\delta} + \frac{2 v_\delta a_2}{\delta}\frac{(r-R)}{\delta} = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$a_1 = 1 - a_0 - a_2$ für $\omega = 0 \to a_0 = 0$

$$\Rightarrow 1 - a_2 = 0 = 1 - \frac{\delta^2}{2 v_\delta}\left[-\frac{2\rho u_\infty^2}{R\eta}\, 2\sin\theta\cos\theta - \frac{v_\delta}{R\delta}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{v_\delta}{\delta^2}\left(2 + \frac{\delta}{R}\right) = -\frac{2\rho u_\infty^2}{R\eta}\, 2\sin\theta\cos\theta$$

$\frac{\delta}{R} \ll 1$, $v_\delta = -2u_\infty \sin\theta$ und $\delta = c_2 R \sqrt{\sin\theta}$

$$\Rightarrow \quad -\frac{4 u_\infty \sin\theta}{c_2^2 R^2 \sin\theta} = -\frac{2\rho u_\infty^2}{R\eta}\sin 2\theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \sin 2\theta = \frac{2\eta}{c_2^2 \rho u_\infty R} = \frac{2}{c_2^2}\frac{1}{Re}$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{c_2^2 Re}\right)$$

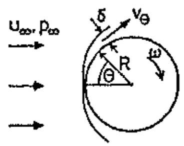
April 1991

nur Strö II

9. Aufgabe (16 Punkte)

Ein Kreiszylinder mit dem Radius R rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω und wird mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt. Es bildet sich eine Grenzschicht aus, in der die Geschwindigkeitsverteilung wie folgt angegeben werden kann:

$$\frac{v_\Theta(r,\Theta)}{v_\Theta(R+\delta,\Theta)} = a_o + a_1\frac{(r-R)}{\delta(\Theta)} + a_2\frac{(r-R)^2}{\delta(\Theta)^2} \quad \text{mit} \quad \frac{\delta}{R} \ll 1$$



Aus potentialtheoretischen Überlegungen ist die Druckverteilung $p(R,\Theta)$ bekannt:

$$p(R,\Theta) - p_\infty = \frac{\rho u_\infty^2}{2}(1-(\omega\cdot c_1 - 2\sin\Theta)^2) \quad mit \quad c_1 = const.$$

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_o, a_1, a_2 des Geschwindigkeitsprofils als Funktion der gegebenen Größen.

<u>Gegeben:</u> $R, p_\infty, u_\infty, \omega, c_1 = const., \delta(\Theta), v_\Theta(R+\delta,\Theta)$

<u>Hinweis:</u> Beachten Sie, daß $\delta(\Theta) \ll R$ gilt!

Die Wandbindungsgleichung in Polarkoordinaten lautet:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\Theta}\right)_{r=R} = \eta\left(\frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\Theta}{\partial r} - \frac{v_\Theta}{r^2}\right)_{r=R}$$

b) Bestimmen Sie den Ablösepunkt für $\omega = 0$ und den Fall, daß die Grenzschichtdicke δ wie folgt dargestellt werden kann:

$$\delta(\Theta) = c_2\cdot R\sqrt{\sin\Theta}, \quad \text{mit} \quad c_2 = const. \ll 1, \quad \text{und} \quad 0<\Theta<\pi$$

<u>Gegeben:</u> $Re = \frac{\rho u_\infty R}{\eta}$, $v_\Theta(R+\delta,\Theta) = -2u_\infty\cdot\sin\Theta$, $c_2 = const.$

Aufgabe 9:

a) Randbedingungen des Geschwindigkeitsprofils in der Grenzschicht:

1) $r = R \rightarrow$ Haftbedingung: $v_\Theta(r=R,\Theta) = \omega R$

2) $r = R+\delta \rightarrow$ $v_\Theta(R+\delta,\Theta) = v_\delta(\Theta)$ $\quad v_\delta(\Theta)$ ist Geschwindigkeit am Grenzschichtrand

3) Wandbindungsgleichung

aus 1) $\Rightarrow$ $a_0 = \frac{\omega R}{v_\delta}$

aus 2) $\Rightarrow$ $1 = a_0 + a_1 + a_2$

für 3): $\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\Theta}\Big|_{r=R} = \frac{\rho u_\infty^2}{2R}2(\omega c_1 - 2\sin\Theta)\cdot 2\cos\Theta$

$= \frac{2\rho u_\infty^2}{R}(\omega c_1 - 2\sin\Theta)\cos\Theta$

$\frac{\partial v_\Theta}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{v_\delta a_1}{\delta} + \frac{2v_\delta a_2}{\delta}\left(\frac{1-R}{\delta}\right)$

$\frac{\partial^2 v_\Theta}{\partial r^2}\Big|_{r=R} = \frac{2v_\delta a_2}{\delta^2}$

$\Rightarrow \frac{2\rho u_\infty^2}{R}(\omega c_1 - 2\sin\Theta)\cos\Theta = \eta\left(\frac{2v_\delta a_2}{\delta^2} + \frac{1}{R}\frac{v_\delta a_1}{\delta} - \frac{v_\delta a_0}{R^2}\right)$

mit: $a_1 = 1 - a_0 - a_2$

$\Rightarrow \frac{2\rho u_\infty^2}{R}(\omega c_1 - 2\sin\Theta)\cos\Theta = \frac{\eta}{\delta^2}\left(2v_\delta a_2 + \frac{\delta}{R}v_\delta(1-a_0-a_2) - \frac{\delta^2}{R^2}v_\delta a_0\right)$

$\frac{\delta}{R} \ll 1 \Rightarrow \frac{2\rho u_\infty^2}{R}(\omega c_1 - 2\sin\Theta)\cos\Theta = \frac{\eta}{\delta^2}\left(2v_\delta a_2 + \frac{\delta}{R}v_\delta - \frac{\delta}{R}v_\delta a_0\right)$

$\Leftrightarrow \frac{2\rho u_\infty^2\delta^2}{R\eta}(\omega c_1 - 2\sin\Theta)\cos\Theta = 2v_\delta a_2 + \frac{\delta}{R}v_\delta - \frac{\delta}{R}\omega R$

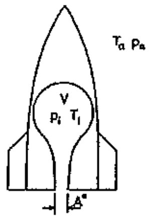
$\Leftrightarrow a_2 = \frac{\delta^2}{2v_\delta}\left[\frac{2\rho u_\infty^2}{R\eta}(\omega c_1 - 2\sin\Theta)\cos\Theta - \frac{v_\delta}{R\delta} + \frac{\omega R}{R\delta}\right]$

April 1991

A75

8. Aufgabe (15 Punkte)

Eine Rakete bestehe aus einem Druckluftbehälter mit dem Volumen V und einer konvergenten Düse mit dem engsten Querschnitt A^*, die zum Zeitpunkt $t = 0$ geöffnet wird. Zu diesem Zeitpunkt herrsche in dem Behälter die Außentemperatur $T_i(t=0) = T_a$ und der Druck $p_i(t=0) = 2\frac{p_o}{p^*}p_a$. Alle räumlichen und zeitlichen Zustandsänderungen seien adiabat, reibungsfrei und quasistationär.



a) Berechnen Sie den Massenstrom $\dot m(t)$, der aus dem Behälter austritt, als Funktion von $p_i(t)$.

b) Berechnen Sie die zeitliche Änderung der Masse $\dot m(t)$ im Behälter als Funktion der zeitlichen Änderung $\dot p_i(t)$.

c) Berechnen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Machzahl am Düsenaustritt kleiner als 1 ist.

Gegeben: $p_a, T_a, V, \kappa, R, A^*$

Hinweis: Isentropenbeziehungen:

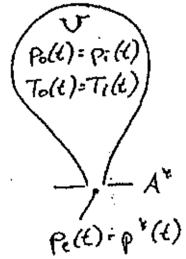
$$\frac{p}{p_o} = \left(\frac{\rho}{\rho_o}\right)^\kappa = \left(\frac{T}{T_o}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

Kritisches Druckverhältnis für $Ma = 1$:

$$\frac{p^*}{p_o} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

Aufgabe 8: Im betrachteten Zeitraum gilt: $Ma_e = 1$, $p_e(t) = p^*(t)$

a) Massenstrom: $\dot m = \rho^*(t)\, a^*(t)\, A^*$



$$\Leftrightarrow \quad \dot m = \frac{\rho^*}{\rho_0}\,\rho_0(t)\sqrt{\kappa R \frac{T^*}{T_0}}\sqrt{T_0(t)}\,A^*$$

mit: $\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{p^*}{p_0}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$; $\frac{T^*}{T_0} = \left(\frac{p^*}{p_0}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$

isentrope Zustandsänderung im Behälter:

$$\frac{p_0(t)}{p_0(t=0)} = \left(\frac{T_0(t)}{T_0(t=0)}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} \Rightarrow T_0(t) = T_0(t=0)\left(\frac{p_0(t)}{p_0(t=0)}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

mit: $T_0(t=0) = T_a$, $p_0(t=0) = 2\frac{p_0}{p^*}p_a$

$$\frac{p_0(t)}{p_0(t=0)} = \left(\frac{\rho_0(t)}{\rho_0(t=0)}\right)^{\kappa} \Rightarrow \rho_0(t) = \rho_0(t=0)\left(\frac{p_0(t)}{p_0(t=0)}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

mit: $\rho_0(t=0) = 2\frac{p_0}{p^*}\frac{p_a}{RT_a}$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot m(t) = C_1\, p_0(t)^{\frac{\kappa+1}{2\kappa}}}}$$

mit: $C_1 = \frac{\rho^*}{\rho_0}\sqrt{\kappa R\frac{T^*}{T_0}}\,\rho_0(t=0)\sqrt{T_0(t=0)}\,A^*\,p_0(t=0)^{-\frac{\kappa+1}{2\kappa}}$

b) $$\dot m(t) = -\dot\rho(t)\,V = -\rho_0(t=0)\,V\,\frac{d}{dt}\left(\frac{p_0(t)}{p_0(t=0)}\right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\dot m(t) = C_2\, p_0(t)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\frac{dp_0(t)}{dt}}}$$

mit: $C_2 = -\frac{1}{\kappa}\rho_0(t=0)\,V\,p_0(t=0)^{-\frac{1}{\kappa}}$

c) $$\dot m(t) = C_1\, p_0(t)^{\frac{\kappa+1}{2\kappa}} = C_2\, p_0(t)^{\frac{1-\kappa}{\kappa}}\frac{dp_0(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad dt = \frac{C_2}{C_1}\,p_0(t)^{\frac{1-3\kappa}{2\kappa}}\,dp_0(t)$$

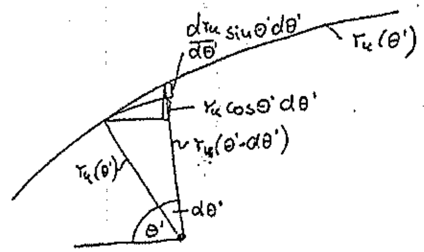
Integration:

$$\int_0^{t^*} dt = \frac{C_2}{C_1}\int_{p_0(t=0)}^{p_a\frac{p_0}{p^*}} p_0(t)^{\frac{1-3\kappa}{2\kappa}}\,dp_0(t) = \frac{C_2}{C_1}\,\frac{2\kappa}{1-\kappa}\,p_0(t)^{\frac{1-\kappa}{2\kappa}}\Big|_{p_0(t=0)}^{p_a\frac{p_0}{p^*}}$$

$$\Rightarrow \quad t^* = \frac{C_2}{C_1}\,\frac{2\kappa}{1-\kappa}\left[\left(p_a\frac{p_0}{p^*}\right)^{\frac{1-\kappa}{2\kappa}} - \left(2p_a\frac{p_0}{p^*}\right)^{\frac{1-\kappa}{2\kappa}}\right]$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{t^* = \frac{C_2}{C_1}\,\frac{2\kappa}{1-\kappa}\left(p_a\frac{p_0}{p^*}\right)^{\frac{1-\kappa}{2\kappa}}\left(1 - 2^{\frac{1-\kappa}{2\kappa}}\right)}$$

c) Kraft auf den Randte-Rohr:



Vorderseite:

$$\frac{dF_{x_V}}{B} = 2p\left(r_k\cos\theta' + \frac{dr_k}{d\theta'}\sin\theta'\right)d\theta'$$

mit $\frac{dr_k}{d\theta'}\sin\theta' = \frac{H}{2\pi}\left(\frac{\sin\theta' - \theta'\cos\theta'}{\sin^2\theta'}\right)\sin\theta' = \frac{H}{2\pi}\left(1 - \frac{\theta'\cos\theta'}{\sin\theta'}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dF_{x_V}}{B} = \left[p_\infty + p_{stau}\left(\frac{\sin 2\theta'}{\theta'} - \frac{\sin^2\theta'}{\theta'^2}\right)\right]\left[\frac{H}{2\pi}\frac{\theta'\cos\theta'}{\sin\theta'} + \frac{H}{2\pi} - \frac{H}{2\pi}\frac{\theta'\cos\theta'}{\sin\theta'}\right]d\theta'$$

Rückseite:

Hier wirkt Druck an der Ablösestelle $\rightarrow p(\theta' \approx \pi) = p_\infty$

$\Rightarrow$ Einfluß von p_∞ fällt heraus

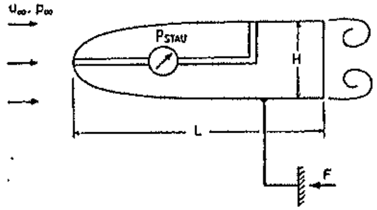
$$\Rightarrow \frac{dF_x}{B} = \frac{2H}{2\pi} p_{stau}\left(\frac{\sin 2\theta'}{\theta'} - \frac{\sin^2\theta'}{\theta'^2}\right)d\theta'$$

$$\Rightarrow \frac{F_x}{B} = \int_0^\pi \frac{H}{\pi} p_{stau}\left(\frac{\sin 2\theta'}{\theta'} - \frac{\sin^2\theta'}{\theta'^2}\right)d\theta' = 0$$

April 1991

7. Aufgabe (14 Punkte)

Zur Bestimmung des Staudruckes p_{stau} einer Strömung wird ein Prandtlsches Staurohr in der Form eines zweidimensionalen Halbkörpers verwendet:



Die Druckkraft auf das Prandtlsche Staurohr soll näherungsweise mit der Potentialtheorie ermittelt werden, dabei soll eine zweidimensionale Strömung angenommen werden.

a) Bestimmen Sie den Druckverlauf im Strömungsfeld.

b) Bestimmen Sie den Druckverlauf auf der Oberfläche des Prandtlschen Staurohres.

c) Bestimmen Sie die resultierende Kraft pro Breiteneinheit auf das Prandtlsche Staurohr als Funktion des Staudruckes p_{stau}.

Verwenden Sie $c_p = \frac{\sin(2\hat\Theta)}{\hat\Theta} - \frac{\sin^2\hat\Theta}{\hat\Theta^2}$, falls Sie kein Ergebnis für b) erhalten. $\hat\Theta$ ist der Winkel gemessen vom vorderen Staupunkt.

Gegeben: $H, L, L \gg H, p_{stau}, p_\infty$

$$z = r\exp(i\Theta), \qquad v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\Theta}, \qquad v_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\Theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$2\sin x\cos x = \sin(2x), \qquad \int\cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x), \qquad \int_0^\pi \frac{\sin(2x)}{2x}dx \approx \frac{\pi}{4}$$

Aus folgenden komplexen Strömungsfunktionen sind die erforderlichen zu wählen:

Parallelströmung: $F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$
Potentialwirbel: $F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
Quelle/Senke: $F(z) = \frac{E}{2\pi}\ln z$
Dipol: $F(z) = \frac{M}{2\pi z}$

Hinweis: Nehmen Sie an, daß sich hinter dem Staurohr ein Rückstromgebiet ausbildet, in dem der Druck konstant über der Höhe H und gleich dem Druck an der Ablösestelle ist.

Falls die Kraft nicht vollständig bestimmt werden kann, reicht die Formulierung des Integrals über den Druck aus (die Integration selbst ist nicht erforderlich.)

7. Aufgabe:

a) Strömung wird simuliert durch Quelle + Parallelströmung:

$$F(z) = u_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln z = u_\infty x + i u_\infty y + \frac{E}{2\pi}(\ln r + i\Theta)$$

$$= \underbrace{u_\infty x + \frac{E}{2\pi}\ln r}_{\phi} + i\,(\underbrace{u_\infty y + \frac{E}{2\pi}\Theta}_{\psi}) \Rightarrow \psi = u_\infty r\sin\Theta + \frac{E}{2\pi}\Theta$$

$$\phi = u_\infty r\cos\Theta + \frac{E}{2\pi}\ln r$$

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = u_\infty\cos\Theta + \frac{E}{2\pi r}\ ; \quad v_\Theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -u_\infty\sin\Theta$$

Bernoulli (gilt im gesamten Strömungsfeld):

$$p(r,\Theta) + \frac{\rho}{2}\vec v^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 \Rightarrow p(r,\Theta) = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left(u_\infty^2 - \left(u_\infty\cos\Theta + \frac{E}{2\pi r}\right)^2 - u_\infty^2\sin^2\Theta\right)$$

$$\Leftrightarrow p(r,\Theta) = p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2\left(1 - 1 - \frac{2\cos\Theta}{u_\infty}\frac{E}{2\pi r} - \frac{E^2}{u_\infty^2 4\pi^2 r^2}\right) \quad \text{mit } \frac{E}{2u_\infty} = \frac{H}{2},$$

$$p_{stau} = \frac{\rho}{2}u_\infty^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{p(r,\Theta) = p_\infty - \frac{p_{stau}}{\pi r^2}\frac{H}{2}\left(2r\cos\Theta + \frac{H}{2\pi}\right)}}$$

b) Konturgleichung: Staupunkt für $\Theta = \pi$, $v_r = 0$

$$v_r(\Theta=\pi) = 0 = -u_\infty + \frac{E}{2\pi r} \Leftrightarrow r = \frac{E}{2\pi u_\infty} = \frac{H}{2\pi} \Rightarrow \psi_{stau} = \frac{E}{2} = u_\infty r_K\sin\Theta + \frac{E}{2\pi}\Theta$$

$$\Rightarrow r_K = \frac{E}{2\pi u_\infty}\frac{\pi-\Theta}{\sin\Theta} = \frac{H}{2\pi}\frac{\pi-\Theta}{\sin\Theta} = \frac{H}{2\pi}\frac{\Theta'}{\sin\Theta'} \quad \text{mit } \Theta' = \pi - \Theta$$

Einsetzen in $p(r,\Theta)$:

$$p(r_K,\Theta) = p_\infty - \frac{p_{stau}2H}{\pi}\frac{\pi^2}{H^2}\frac{\sin^2\Theta'}{\Theta'^2}\left(-\frac{2H}{2\pi}\frac{\Theta'}{\sin\Theta'}\cos\Theta' + \frac{H}{2\pi}\right)$$

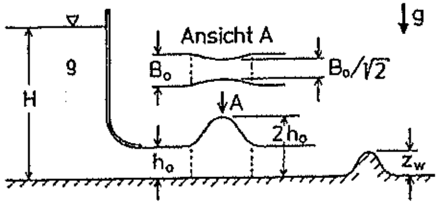
$$\Leftrightarrow p(r_K,\Theta) = p_\infty + p_{stau}\left(2\frac{\sin\Theta'\cos\Theta'}{\Theta'} - \frac{\sin^2\Theta'}{\Theta'^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{p(r_K,\Theta) = p_\infty + p_{stau}\left(\frac{\sin 2\Theta'}{\Theta'} - \frac{\sin^2\Theta'}{\Theta'^2}\right)}}$$

April 1991

3. Aufgabe (12 Punkte)

Aus einem großen Reservoir strömt Wasser in einen offenen Kanal der Breite B_o. In dem Kanal beträgt die Höhe des Wasserspiegels h_o. Der Kanal verengt sich an einer Stelle auf $\frac{B_o}{\sqrt{2}}$. An dieser Stelle wird die Höhe $2h_o$ gemessen. Nach der Verengung folgt eine Bodenwelle der Höhe z_w.



a) Bestimmen Sie die Höhe H des Wasserspiegels in dem Reservoir.

b) Skizzieren Sie sorgfältig den Verlauf der Spiegelhöhe nach der Verengung bis hinter die Bodenwelle (4 Möglichkeiten!)

c) Bestimmen Sie die Grenzhöhe z_{gr} der Bodenwelle, wenn zwischen der Verengung und der Bodenwelle ein Wassersprung steht.

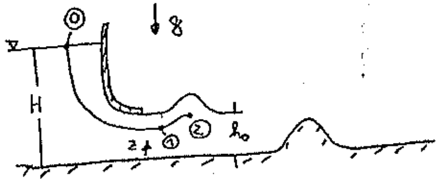
Gegeben: h_o, ~~$z_{gr} = \frac{3}{2} H_{min}$~~ $h_{gr} = \frac{2}{3} H_{min} = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g B^2}}$

Hinweis: Das Verhältnis der Spiegelhöhen über einen Wassersprung ist:

$$\frac{h_1}{h_o} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2Fr_o^2} - \frac{1}{2}$$

wenn der Index 'o' den Zustand vor dem Sprung und '1' den Zustand nach dem Sprung bezeichnet, und Fr die Froude-Zahl ist.

Aufgabe 3:



a) Bernoulli von 0 → 1:

$p_a + \rho g H = p_1 + \rho g z_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2$

mit: $p_1 = p_a + \rho g (h_0 - z_1)$

$\Rightarrow p_a + \rho g H = p_a + \rho g (h_0 - z_1) + \rho g z_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \Leftrightarrow \rho g (H - h_0) = \frac{\rho}{2} v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(H-h_0)}$ (1)

Konti: $v_2\, 2h_0 \frac{B_0}{\sqrt{2}} = v_1 h_0 B_0 \Leftrightarrow v_2 = v_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$

Bernoulli von 1 → 2: $\rho g h_0 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = \rho g 2h_0 + \frac{\rho}{2} v_2^2$

$\Big\}\ g h_0 = \frac{v_1^2}{4}$ (2)

aus (1) + (2): $\underline{\underline{H = 3h_0}}$

b) $Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{2g(H-h_0)}{g h_0}} = 2 > 1 \Rightarrow$ schießender Zustand

Verlauf 1: nur schießend

Verlauf 2: Wassersprung zwischen Verengung und Bodenwelle

Verlauf 3: Wassersprung nach der Bodenwelle

Verlauf 4: wie Verlauf 2 + Übergang zum schießenden Zustand

c) Die Energiehöhe H_1 nach dem Wassersprung ist:

$H_1 = H_{min} + z_{gr}$ mit $H_{min} = \frac{3}{2} h_{gr} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\dot{Q}^2}{g B^2}}$; $\dot{Q} = v_1 h_0 B_0 = \sqrt{4 g h_0}\, h_0 B$

$H_1 = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_1 + \frac{\dot{Q}^2}{2 h_1^2 B_0^2 g} = h_1 + \frac{4 g h_0^3 B_0^2}{2 h_1^2 B_0^2 g} = h_1 + 2h_0 \left(\frac{h_0}{h_1}\right)^2$

$h_1 = h_0 \sqrt{\frac{1}{4} + 2 Fr_0^2} - \frac{1}{2} = \left(\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2}\right) h_0$

$H_{min} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{4 g h_0^3 B_0^2}{g B_0^2}} = \frac{3}{2} h_0 \sqrt[3]{4}$

$\Rightarrow \underline{\underline{z_{gr} = H_1 - H_{min} = h_0 \left[\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2} + \frac{2}{\left(\sqrt{\frac{33}{4}} - \frac{1}{2}\right)^2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \right]}}$

April 1991

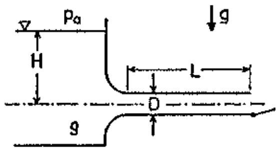
3/4/3

- April 1991

2. Aufgabe (12 Punkte)

Aus einem großen Reservoir strömt Wasser durch ein Rohr mit der Länge L und dem Durchmesser D ins Freie. Am Ende des Rohres befindet sich eine Klappe, die ab dem Zeitpunkt $t = 0$ so schließt, daß die Geschwindigkeit wie folgt abnimmt:

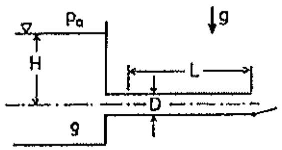
$$\frac{v}{v_o} = \frac{T_o}{t + T_o}, \quad \text{mit} \quad T_o > 0, \quad \text{und} \quad v_o = v(t = 0)$$



a) Skizzieren Sie den Druckverlauf im Rohr als Funktion der <u>Zeit</u> für $T_{o1} \ll 1, T_{o2} \gg 1$ sowie für T_{o3} mit $T_{o1} < T_{o3} < T_{o2}$.

b) Bestimmen Sie die Zeitkonstante T_o so, daß der Druck im Rohr p_{max} gerade nicht überschreitet.

c) Der gut gerundete Rohreinlauf wird durch einen scharfkantigen ersetzt:



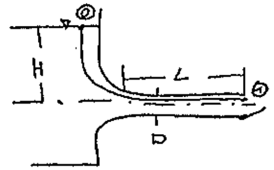
Wie muß nun die Zeitkonstante T_o verändert werden, damit im Rohr der Druck p_{max} wieder erreicht wird (Begründung)?

<u>Gegeben:</u> $H, L, D, g, p_{max} = p_a + 2\rho g H$

<u>Hinweis:</u> Der Durchmesser des Rohres D ist gegenüber der Höhe H vernachlässigbar.

<u>Aufgabe 2:</u>

a) instationärer Bernoulli: ⓪ → ①



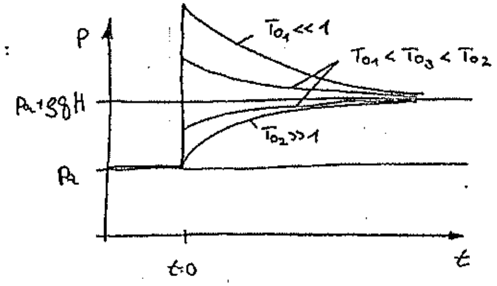
$$p_a + \rho g H = p(t) + \frac{\rho}{2} v^2(t) + \rho \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{v_0 T_0}{(t + T_0)^2}$$

$$\Rightarrow p(t) = p_a + \rho g H - \frac{\rho}{2} v_0^2 \left(\frac{T_0}{t + T_0}\right)^2 + \rho \frac{v_0}{T_0} \left(\frac{T_0}{t + T_0}\right)^2 \left(L + \frac{D}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow p(t) = p_a + \rho g H + \rho v_0 \left(\frac{T_0}{t + T_0}\right)^2 \left(\frac{L + D/\sqrt{2}}{T_0} - \frac{v_0}{2}\right)$$

$p(t)$:



b) p_{max} bei $t = 0$ und am Rohrende:

$$\Rightarrow p_{max} = p_a + 2\rho g H = p_a + \rho g H + \rho v_0 \left(\frac{L + D/\sqrt{2}}{T_0} - \frac{v_0}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \rho g H = \rho v_0 \left(\frac{L + D/\sqrt{2}}{T_0} - \frac{v_0}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow T_0 = \frac{L + D/\sqrt{2}}{\frac{v_0}{2} + \frac{gH}{v_0}} \qquad \text{Toricelli: } v_0 = \sqrt{2gH}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T_0 = \frac{(L + D/\sqrt{2})}{\sqrt{2gH}}}}$$

c) v_0 wird nun $\sqrt{gH}$ $\Rightarrow$ $T_{0_{c)}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{(L + D/\sqrt{2})}{\sqrt{2gH}}$

$\Rightarrow \underline{\underline{T_{0_{c)}} < T_{0_{b)}}}}$

Da v_0 kleiner wird, nimmt auch die Beschleunigung ab. Daher kann $T_{0_{c)}}$ kleiner als $T_{0_{b)}}$ gewählt werden.

2/7

April 1991

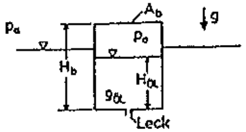
April 1991

Klausur Strömungslehre I + II

25. März 1991

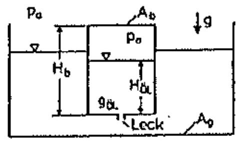
1. Aufgabe (12 Punkte)

Ein zylindrischer Druckbehälter der Höhe H_b und Masse m_b ist mit einem Öl der Dichte $\rho_{Öl}$ bis zur Höhe $H_{Öl}$ gefüllt. Darüber befindet sich Luft unter dem Druck p_o. Der Behälter schwimmt im Meer, es entsteht plötzlich ein Leck im Boden.



a) Bestimmen Sie das Ölvolumen, das bis zu dem Druckausgleich aus dem Druckbehälter austritt.

b) Der Druckbehälter schwimmt in einem Gefäß mit der Fläche A_g, bevor das Leck entsteht. Wie verändert sich das austretende Ölvolumen (Begründung)?



Gegeben: $H_b, H_{Öl}, A_b, A_g, p_o, m_b, g, p_a$

Hinweis: Die Luftmasse ist in dem Druckbehältergewicht enthalten, die Temperatur der Luft bleibt konstant und es gilt: $\frac{p_o A_b}{m_b g + p_a A_b} > 1$

Ein Ballon mit der Gesamtmasse m_B hat eine geschlossene Hülle, die ideal schlaff bis zum Erreichen des Volumens V_{max} ist. Ab dem Volumen V_{max} ist die Hülle ideal starr. Der Ballon steigt in einer Atmosphäre auf, in der die Temperaturverteilung

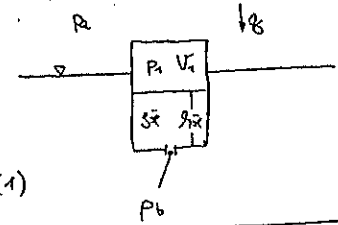
$$\frac{T}{T_o} = c \cdot z + 1, \quad \text{mit} \quad c = const.$$

herrscht.

c) Bestimmen Sie die maximale Steighöhe.

Gegeben: $m_B, R_L, T_o = T(z=0), p_o = p(z=0), V_{max}, g, c = const.$

Aufgabe 1:



a) Behälter schwimmt nach dem Druckausgleich:

$\Rightarrow p_b A_b = m_b g + \rho_{ö} h_{ö} A_b g + p_a A_b \quad (1)$

HGG im Behälter:

$\Rightarrow p_b = p_1 + \rho_{ö} h_{ö} g \quad (2)$

$m_L = const., T_L = const.$:

$\Rightarrow p_0 V_0 = p_1 V_1 \Leftrightarrow p_1 = p_0 \frac{H_b - H_{ö}}{H_b - h_{ö}} \quad (3)$

aus (1) – (3):

$\Rightarrow p_0 \frac{H_b - H_{ö}}{H_b - h_{ö}} + \rho_{ö} h_{ö} g = \frac{m_b g}{A_b} + \rho_{ö} h_{ö} g + p_a$

$\Leftrightarrow p_0 (H_b - H_{ö}) = \left(\frac{m_b g}{A_b} + p_a\right)(H_b - h_{ö})$

$\Rightarrow h_{ö} = H_b - \frac{p_0 A_b (H_b - H_{ö})}{m_b g + p_a A_b} \Rightarrow V_{ö} = (H_{ö} - h_{ö}) A_b = (H_b - H_{ö})\left(\frac{p_0 A_b}{m_b g + p_a A_b} - 1\right) A_b$

b) Das austretende Ölvolumen bleibt gleich:

- da $V_{ö}$ unabhängig von der Dichte des umgebenden Mediums ist
- da der Verlauf des Bodendruckes p_b beim Ölaustritt gleich bleibt (Behälter schwimmt!).

c) Druckverlauf $p(z)$:

HGG in differentieller Form: $\frac{dp}{dz} = -\rho g$

ideale Gasgleichung: $\frac{p}{\rho} = RT$

Temperaturverlauf: $T = T_0 (c \cdot z + 1)$

$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{-g\,dz}{R T_0 (c \cdot z + 1)} \Leftrightarrow \ln p \Big|_{p_0}^{p} = \frac{-g}{R T_0 c} \ln(c \cdot z + 1) \Big|_0^z$

$\Leftrightarrow \frac{p}{p_0} = (c \cdot z + 1)^{\frac{-g}{R T_0 c}}$

Gleichgewicht bei $V = V_{max}$: $\rho V_{max} g = m_B g$; $\rho = \frac{p}{RT}$

$\Rightarrow \frac{p}{RT} V_{max} = m_B \Leftrightarrow \frac{p_0 (c \cdot z_{max} + 1)^{\frac{-g}{R T_0 c}}}{R T_0 (c \cdot z_{max} + 1)} = \frac{m_B}{V_{max}}$

$\Leftrightarrow z_{max} = \frac{1}{c} \left[\left(\frac{V_{max} p_0}{m_B R T_0}\right)^{\frac{R T_0 c}{g + R T_0 c}} - 1 \right]$

April 1991

1/74

$$\eta \frac{v_a}{\delta}(-1) = \eta \frac{v_a}{\delta(y)} \quad \tau(x=0)$$

$$\frac{v}{v_a})dx = \delta \int_0^{-1} \left(1+\frac{x}{\delta}\right) d\left(\frac{x}{\delta}\right) = -\frac{\delta}{2}$$

$$-\frac{v}{v_a})dx = \delta \int_0^{-1} \left(-\frac{x}{\delta}\right)\left(1+\frac{x}{\delta}\right) d\left(\frac{x}{\delta}\right) = -\frac{\delta}{6}$$

$$-\frac{1}{6}\frac{d\delta}{dy}$$

$$\frac{-yh^2}{\sqrt{3-\frac{h^2}{h^2-y^2}}\,(h^2-y^2)^2}$$

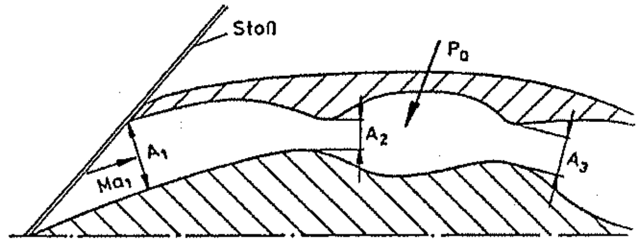
$$+\frac{-yh^2}{\left(3-\frac{h^2}{h^2-y^2}\right)(h^2-y^2)^2}\left(-\frac{2}{6}\delta-\frac{\delta}{2}\right)+$$

$$+\frac{\eta}{\rho v_a} = 0$$

$$\frac{5yh^2}{\left(3-\frac{h^2}{h^2-y^2}\right)(h^2-y^2)^2}\delta+\frac{6\eta}{\left(\rho u_\infty\sqrt{3-\frac{h^2}{h^2-y^2}}\right)\delta}$$

8. Aufgabe (13 Punkte)

Ein Staustrahltriebwerk wird mit Überschall angeströmt. Am Einla... schräger Verdichtungsstoß. Hinter dem Stoß werden die Machzahl Ma_1... und die Temperatur T_1 im Querschnitt A_1 gemessen. In der Brennka... Gas isobar und verlustfrei die Wärmeleistung P_Q zugeführt. Die Änder... schen Größen R und κ wird vernachlässigt. Die Strömung soll eindimens... werden.



Gegeben: $p_1, T_1, Ma_1, A_1, \kappa, R, P_Q, A_4$

a) Wie groß muß der Querschnitt A_2 sein, damit dort der kritische ... wird?

b) Wie groß muß der Querschnitt A_3 sein, damit dort ebenfalls der k... erreicht wird?

c) Geben Sie eine Iterationsgleichung für Ma_4 im Querschnitt A_4 an.

Hinweis: Die Schallgeschwindigkeit a ist: $a = \sqrt{\kappa R T}$

Isentropenbeziehungen:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\kappa} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

Y-Impuls:

$$\rho_\infty \cancel{\beta}\left(\frac{u_\infty^2 h_1}{L^2}\,\bar u \frac{\partial \bar v}{\partial \bar x} + \frac{u_\infty^2 h_1^2}{L^2 \cancel{h_1}}\,\bar v \frac{\partial \bar v}{\partial \bar y}\right) =$$

$$= -\frac{\Delta p}{h_1}\frac{\partial \bar p}{\partial \bar y} + \eta_\infty \cancel{\eta}\left(\frac{u_\infty h_1}{L^3}\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar x^2} + \frac{u_\infty \cancel{h_1}}{L h_1}\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar p}{\partial \bar y} = -\frac{\rho_\infty u_\infty^2 h_1^2}{\Delta p L^2}\left(\bar u \frac{\partial \bar v}{\partial \bar x} + \bar v\frac{\partial \bar v}{\partial \bar y}\right) + \frac{\eta_\infty h_1^2 u_\infty}{\Delta p L^3}\left(\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar x^2} + \frac{L^2}{h_1^2}\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar p}{\partial \bar y} = \frac{1}{Eu\,Re}\left[-Re\,\frac{h_1^2}{L^2}\left(\bar u\frac{\partial \bar v}{\partial \bar x} + \bar v\frac{\partial \bar v}{\partial \bar y}\right) + \frac{h_1^2}{L^2}\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar x^2} + \frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar y^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar p}{\partial \bar y} \cong \frac{1}{Eu\,Re}\underbrace{\frac{\partial^2 \bar v}{\partial \bar y^2}}_{O(1)}$$ nach Abschätzung

Vergleich der Kennzahlen:

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar p}{\partial \bar x} >> \frac{\partial \bar p}{\partial \bar y}$$

$$\Rightarrow \underline{\frac{dp}{dx} = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

c) Integration in y-Richtung (zweimal)

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

Randbedingungen:

1) $y=0$: $u = u_\infty$ $\Rightarrow$ $C_2 = u_\infty$

2) $y = h(x)$: $u = 0$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{u_\infty}{h(x)} - \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{h(x)}{2}$$

$$\Rightarrow u(x,y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(y^2 - hy\right) + u_\infty\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$$= \frac{h^2}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(\left(\frac{y}{h}\right)^2 - \frac{y}{h}\right) + u_\infty\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

$$\dot Q = h\int_0^1 u(x,y)\, d\left(\frac{y}{h}\right)$$

$$\Rightarrow \dot Q = \frac{h^3}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{y}{h}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2\right]_0^1 + u_\infty h\left(\frac{y}{h} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \dot Q = \frac{u_\infty h(x)}{2} - \frac{h(x)^3}{12\eta}\frac{dp}{dx}$$

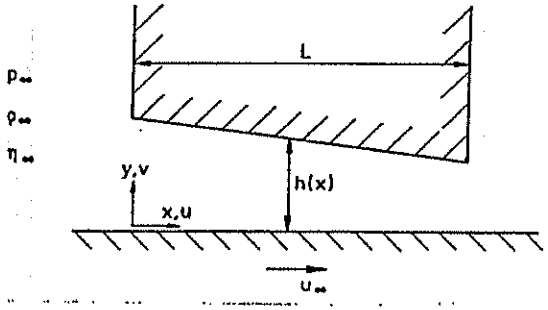
d) $$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_\infty}{h(x)^2} - \frac{12\eta \dot Q}{h(x)^3}$$

$$\int_{p_\infty}^{p} dp = \int_0^x \left(\frac{6\eta u_\infty}{h(x)^2} - \frac{12\eta \dot Q}{h(x)^3}\right) dx$$

$$\Rightarrow p(x) = p_\infty + 6\eta u_\infty \int_0^x \frac{dx'}{h^2(x')} - 12\eta \dot Q \int_0^x \frac{dx'}{h^3(x')}$$

9. Aufgabe (16 Punkte)

In einem unendlich ausgedehnten Gleitlager wird der Gleitschuh durch ein Schmiermittel von der Wand entfernt gehalten. Die Wand bewegt sich mit u_∞ relativ zum Gleitschuh. Die Strömung sei inkompressibel, und die Temperatur bleibt konstant.



Gegeben: $u_\infty, \varrho_\infty, \eta_\infty, p_\infty, h(x), L, \frac{dp}{dx}; h(x) << L$

a) Nennen Sie die Kennzahlen des Problems.

b) Leiten Sie aus den beiden Impulsgleichungen die vereinfachte Differentialgleichung für eine schleichende Spaltströmung mittels einer Größenordnungsabschätzung der einzelnen Terme her. Machen Sie dafür sämtliche Größen dimensionslos.

c) Bestimmen Sie daraus die Geschwindigkeit $u(x,y)$ und den Volumenstrom $\dot{Q}$ in Abhängigkeit von $h(x)$ und $\frac{dp}{dx}$.

d) Bestimmen Sie den Druckverlauf $p(x)$ in Abhängigkeit von $h(x)$ und $\dot{Q}$.

Hinweis: Impulsgleichungen in x- und y-Richtung

$$\varrho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$\varrho\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Aufgabe 9

a) $K_1 = \frac{h}{L}$, $K_2 = Re\left(\frac{h}{L}\right)^2$ oder $K_2 = Re$

b) $\frac{h}{L} \ll 1$, $Re\left(\frac{h}{L}\right)^2 \ll 1$ $\quad K_3 = Eu$

⇒ dimensionslose Größen mit $O(1)$:

$\bar{x} = \frac{x}{L}$, $\bar{y} = \frac{y}{h_1}$, $\bar{u} = \frac{u}{u_\infty}$, $\bar{v} = \frac{v}{u_\infty}\frac{L}{h_1}$,

$\bar{p} = \frac{p}{\Delta p}$, $\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty} = 1$, $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_\infty} = 1$

x-Impuls: $\rho_\infty \cancel{\bar{\rho}}\left(\frac{u_\infty^2}{L}\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{u_\infty^2 \cancel{h_1}}{L\cancel{h_1}}\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) =$

$$= -\frac{\Delta p}{L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \eta_\infty \cancel{\bar{\eta}}\left(\frac{u_\infty}{L^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{u_\infty}{h_1^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\cancel{L}\rho_\infty u_\infty^2}{\Delta p \cancel{L}}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) + \frac{\eta_\infty \cancel{L} u_\infty}{\Delta p L^{\cancel{2}}}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{h_1^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{Eu\,Re}\frac{L^2}{h_1^2}\left[-Re\frac{h_1^2}{L^2}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) + \frac{h_1^2}{L^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \cong \frac{1}{Eu\,Re}\frac{L^2}{h_1^2}\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}}_{O(1)}$$

nach Größenordnungsabschätzung der einzelnen Terme

März 1992

15

Aufgabe 8,

a) maximaler Massendurchsatz wird erreicht, wenn im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit auftritt

$$\Rightarrow \quad \dot m_{max} = \rho^* u^* A_D$$

$$\rho^* = \frac{p^*}{R T^*} = \frac{\frac{p^*}{p_0}}{R \frac{T^*}{T_0}} \frac{p_0}{T_0}$$

$$u^* = a^* = \sqrt{\kappa R T^*} = \sqrt{\kappa R \frac{T^*}{T_0}} \sqrt{T_0}$$

Energiesatz: $c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$

$$c_p = \frac{\kappa R}{\kappa - 1} \quad \Rightarrow \quad \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\kappa - 1}{2} Ma^2$$

kritischer Zustand: $Ma = Ma^* = 1$

$$\Rightarrow \quad \frac{T^*}{T_0} = \left(1 + \frac{\kappa - 1}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{\kappa + 1}$$

Isentropenbeziehung:

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

$$\Rightarrow \quad \dot m_{max} = \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1} - 1} \frac{p_0}{R T_0} \sqrt{\kappa R \frac{2}{\kappa+1} T_0} \; A_D$$

$$\dot m_{max} = A_D \frac{p_0}{\sqrt{R T_0}} \sqrt{\kappa} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}$$

b)

$$\dot m_{max} = \rho_1 v_1 A_1 \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{\dot m_{max}}{\rho_1 v_1}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}, \quad v_1 = Ma_1 \sqrt{\kappa R T_1}$$

$$\Rightarrow \quad \rho_1 = \frac{p_0}{R T_0} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{1}{\kappa-1}}$$

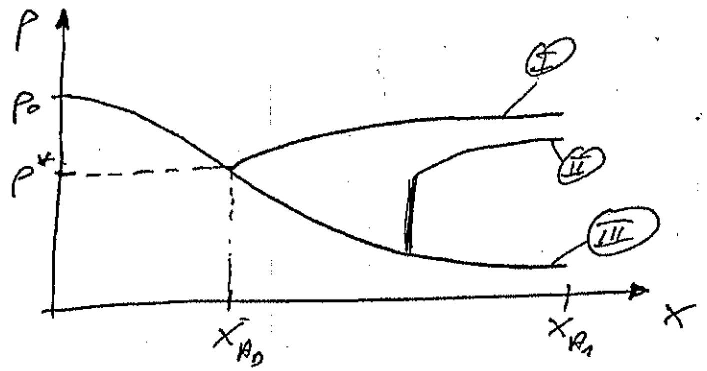
$$\Rightarrow \quad A_1 = A_D \frac{\cancel{\frac{p_0}{\sqrt{R T_0}}} \sqrt{\kappa} \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}}{\cancel{\frac{p_0}{R T_0}} \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{1}{\kappa-1} - \frac{1}{2}} \sqrt{\kappa R T_0}\, Ma_1}$$

$$\Rightarrow \quad A_1 = A_D \frac{1}{Ma_1} \left[\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)\left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2\right)\right]^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}$$

c)

$$v_1 = \sqrt{\kappa R T_0}\, Ma_1 \left(1 + \frac{\kappa-1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

d)



I: $Ma_1 = 0.2$ wie oben berechnet (Unterschall)

II: $0.2 < Ma_1 < 1$: Drucksprung wird durch Verdichtungsstoß verursacht

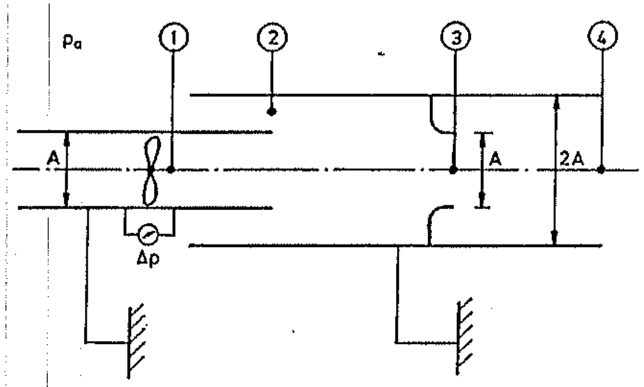
III: $Ma_1 > 1$: Überschall-Lösung

März 1992

14

3. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Strahlapparat wird mit einem Gebläse angetrieben und saugt den Volumenstrom $\dot{Q}_2$ durch einen ringförmigen, scharfkantigen Einlauf an. Im hinteren Teil des Strahlapparates befindet sich eine Blende. Am Austritt beträgt der Volumenstrom $\dot{Q}_4$.



Gegeben: $\dot{Q}_2, \dot{Q}_4, A, \varrho, p_a$

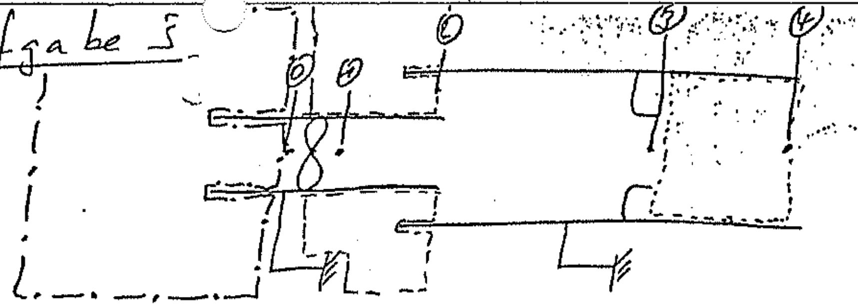
a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_2 und den Druck p_2.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten v_1 und v_3 und den Druck p_3.

c) Wie groß ist die Druckdifferenz Δp und die Gebläseleistung P?

d) Bestimmen Sie die Haltekräfte des Gebläses F_G und des Strahlapparates F_S.

Aufgabe 3



a) $\dot{Q}_2 = A v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{\dot{Q}_2}{A}$

Impuls: (-----) $\rho v_2^2 A = (p_a - p_2) A$

$\Rightarrow p_2 = p_a - \rho \left(\frac{\dot{Q}_2}{A}\right)^2$

b) $\dot{Q}_4 = v_1 A + v_2 A \Rightarrow v_1 = \frac{\dot{Q}_4 - \dot{Q}_2}{A}$

Konti: $v_3 A = v_4 2A$ $\quad \dot{Q}_4 = v_4 2A$

$\Rightarrow v_3 = \frac{\dot{Q}_4}{A}$

Impuls: (.........) $-\rho v_3^2 A + \rho v_4^2 2A = (p_3 - p_a) 2A$

$\Rightarrow p_3 = p_a - \frac{\rho}{4} \frac{\dot{Q}_4^2}{A^2}$

c) Impuls: (-·-·-) $\rho v_0^2 A = (p_a - p_0) A$

Konti: $v_0 = v_1$ $\quad$ Bernoulli: $p_1 = p_2$

$p_0 = p_1 - \Delta p$

$\Rightarrow \rho \left(\frac{\dot{Q}_4 - \dot{Q}_2}{A}\right)^2 = \cancel{p_a} - \left(\cancel{p_a} - \rho\left(\frac{\dot{Q}_2}{A}\right)^2 - \Delta p\right)$

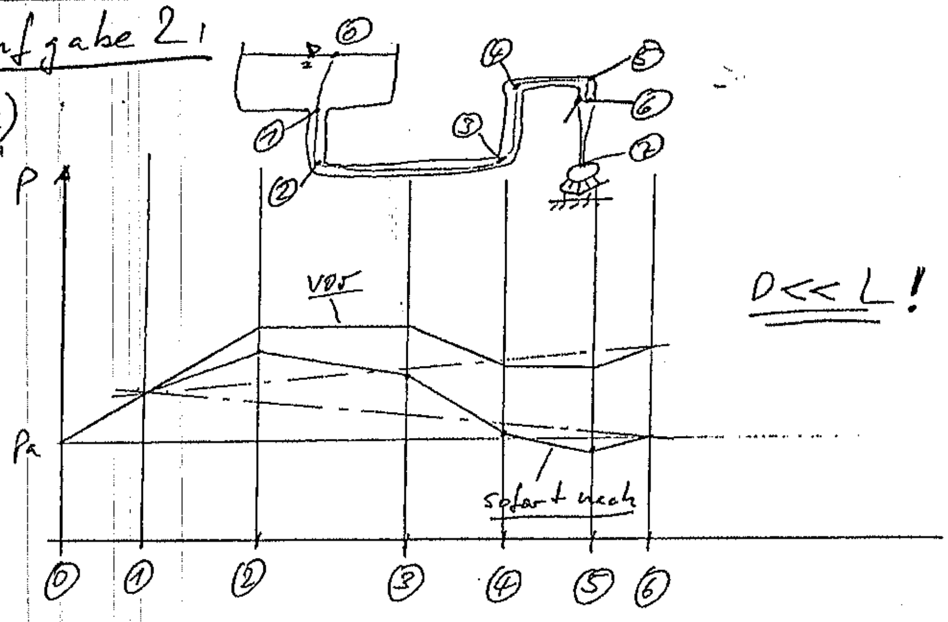
$\Rightarrow \Delta p = \rho \frac{(\dot{Q}_4 - \dot{Q}_2)^2 - \dot{Q}_2^2}{A^2}$

März 1992

6

Aufgabe 21

a)



$D \ll L$!

b) instationärer Bernoulli: 0 — 6

$$p_a = p_a + \frac{\rho}{2} V_{stationär}^2 + \rho g(-h_1 + h_2 - h_3)$$

$$\Rightarrow V_{stat.} = \sqrt{2g(h_1 - h_2 + h_3)}$$

instationärer Bernoulli: 0 − 6

$$p_a = p_a + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g(-h_1 + h_2 - h_3) + \rho \int \frac{\partial v}{\partial t}\, ds$$

mit: $\int \frac{\partial v}{\partial t}\, ds = \frac{dv}{dt} L$ wegen $D \ll L$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{2g(h_1 - h_2 + h_3) - v^2}{2L} = \frac{V_{stat}^2 - V^2}{2L}$$

$$\Rightarrow \int_0^{0.99 V_{stat}} \frac{dv}{V_{stat}^2 - v^2} = \int_0^{\Delta T} \frac{dt}{2L}$$

$$\Rightarrow \Delta T = \frac{L}{V_{stat}} \ln\left(\frac{1 + \frac{V}{V_{stat}}}{1 - \frac{V}{V_{stat}}}\right)\Bigg|_0^{0.99}$$

$$\underline{\Delta T = \frac{L}{V_{stat}} \ln\left(\frac{1.99}{0.01}\right) = 5.293 \frac{L}{V_{stat}}}$$

c) $V_{stat} = V_{max}$ ⇒ stationärer Bernoulli:

6 − 7: $p_a + \rho g \Delta h + \frac{\rho}{2} V_{stat}^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_7^2$

Konti: $\frac{\pi D^2}{4} V_{stat} = \frac{\pi d^2}{4} v_7 \Rightarrow v_7 = \frac{D^2}{d^2} V_{stat}$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{v_7^2 - V_{stat}^2}{2g} = \frac{V_{stat}^2}{2g}\left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \underline{\Delta h = (h_1 - h_2 + h_3)\left(\frac{D^4}{d^4} - 1\right)}$$

d) p_{min} wird bei stationärer Strömung zwischen 4 und 5 erreicht!

Bernoulli: 0 − 4

$$p_a + \rho g h_1 = p_4 + \frac{\rho}{2} V_{stat}^2 + \rho g h_2$$

$$p_{4min} = p_D, \quad V_{stat}^2 = 2g(h_1 - h_2 + h_3)$$

$$\Rightarrow \frac{p_a - p_D}{\rho g} = h_3$$

⇒ h_2 ist beliebig wählbar

$$h_{3max} = \frac{p_a - p_D}{\rho g}$$

März 1992

11 Sep. 1992

Punkteverteilung in den Prüfungen

Die nachfolgende Tabelle zeigt die Punkteverteilung in den Aufgaben der einzelnen Prüfungen.

Aufgabe	Klausur I+II		Klausur II		Schein I+II		Schein I		Schein II	
	Nr.	Punkte	Nr.	Punkte	Nr.	Punkte	Nr.	Punkte	Nr.	Punkte
1 a)	1 a)	3	-	-	1 a)	3	1 a)	3	-	-
1 b)	1 b)	2	-	-	1 b)	2	1 b)	2	-	-
1 c)	1 c)	3	-	-	-	-	-	-	-	-
2 a)	2 a)	2	-	-	2 a)	2	2 a)	2	-	-
2 b)	2 b)	3	-	-	2 b)	3	2 b)	3	-	-
2 c)	2 c)	3	-	-	-	-	-	-	-	-
2 d)	2 d)	3	-	-	2 c)	3	2 c)	3	-	-
3 a)	3 a)	2	-	-	3 a)	2	3 a)	2	-	-
3 b)	3 b)	3	-	-	3 b)	3	3 b)	3	-	-
3 c)	3 c)	4	-	-	3 c)	4	3 c)	4	-	-
3 d)	3 d)	4	-	-	3 d)	4	3 d)	4	-	-
3 e)	3 e)	4	-	-	-	-	-	-	-	-
3 f)	3 f)	1	-	-	-	-	-	-	-	-
4 a)	4 a)	5	-	-	4 a)	5	4 a)	5	-	-
4 b)	4 b)	2	-	-	-	-	-	-	-	-
4 c)	4 c)	3	-	-	-	-	-	-	-	-
4 d)	4 d)	2	-	-	4 b)	2	4 b)	2	-	-
5 a)	5 a)	7	1 a)	7	5)	7	-	-	1)	7
5 b)	5 b)	3	1 b)	3	-	-	-	-	-	-
6 a)	6 a)	2	3 a)	2	6 a)	2	-	-	2 a)	2
6 b)	6 b)	3	3 b)	3	6 b)	3	-	-	2 b)	3
6 c)	6 c)	3	3 c)	3	6 c)	3	-	-	2 c)	3
6 d)	6 d)	2	3 d)	2	-	-	-	-	-	-
6 e)	6 e)	5	3 e)	5	-	-	-	-	-	-
7 a)	7 a)	3	4 a)	3	-	-	-	-	-	-
7 b)	7 b)	3	4 b)	3	7 a)	3	-	-	3 a)	3
7 c)	7 c)	2	4 c)	2	7 b)	2	-	-	3 b)	2
7 d)	7 d)	4	4 d)	4	7 c)	4	-	-	3 c)	4
8 a)	8 a)	4	5 a)	4	8 a)	4	-	-	4 a)	4
8 b)	8 b)	5	5 b)	5	8 b)	5	-	-	4 b)	5
8 c)	8 c)	4	5 c)	4	-	-	-	-	-	-
9)	-	-	2)	16	-	-	-	-	-	-

Division durch: $\frac{\rho_0 u_\varphi^2}{h_0}$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar p}{\partial \bar r} = -\left[\cancel{\frac{h_0^2}{d^2}\bar v_r \frac{\partial \bar v_r}{\partial \bar r}} + \cancel{\frac{h_0}{2\pi d}\frac{\bar v_\theta}{\bar r}\frac{\partial \bar v_r}{\partial \bar\theta}} - \frac{\bar v_\theta^2}{\bar r}\right] +$$

$$+ \frac{\eta_0}{\rho_0 u_\varphi d}\left[\frac{\partial^2 \bar v_r}{\partial \bar r^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar v_r}{\partial \bar r} + \cancel{\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial^2 \bar v_r}{\partial \bar\theta^2}} - \frac{\bar v_r}{\bar r^2} - \frac{d}{h_0\pi}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar p}{\partial \bar r} = \frac{\bar v_\theta^2}{\bar r} + \frac{1}{Re}\left[\frac{\partial^2 \bar v_r}{\partial \bar r^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar v_r}{\partial \bar r} - \frac{\bar v_r}{\bar r^2}\right] -$$

$$- \frac{1}{Re}\frac{d}{h_0\pi}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar\theta}$$

mit: $\frac{d}{Re\, h_0 \pi} \gg \frac{1}{Re}$ und $\frac{d}{Re\, h_0} \gg 1$

$$\Rightarrow \frac{\partial \bar p}{\partial \bar r} = -\frac{1}{Re}\frac{d}{h_0\pi}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar\theta}$$

$\rightarrow$ θ-Impuls-Gl.:

$$\rho_0\left[\frac{u_\varphi^2 h_0}{h_0 d}\bar v_r \frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar r} + \frac{u_\varphi^2}{h_0 2\pi}\frac{\bar v_\theta}{\bar r}\frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar\theta} - \frac{u_\varphi^2 h_0}{h_0 d}\frac{\bar v_r \bar v_\theta}{\bar r}\right] =$$

$$= -\frac{\rho_0 u_\varphi^2}{h_0 2\pi}\frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar p}{\partial \bar\theta} + \eta_0\left[\frac{u_\varphi}{h_0^2}\frac{\partial^2 \bar v_\theta}{\partial \bar r^2} + \frac{u_\varphi}{h_0^2}\frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar r} +\right.$$

$$\left. + \frac{u_\varphi}{h_0^2 4\pi^2}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial^2 \bar v_\theta}{\partial \bar\theta^2} + \frac{u_\varphi h_0}{h_0^2 d 2\pi}\frac{2}{\bar r^2}\frac{\partial \bar v_r}{\partial \bar\theta} - \frac{u_\varphi}{h_0^2}\frac{\bar v_\theta}{\bar r^2}\right]$$

Division durch: $\frac{\rho_0 u_\varphi^2}{h_0 2\pi}$

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar p}{\partial \bar\theta} = -\left[\cancel{\frac{2\pi h_0}{d}\bar v_r \frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar r}} + \frac{\bar v_\theta}{\bar r}\frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar\theta} - \cancel{\frac{2\pi h_0}{d}\frac{\bar v_r \bar v_\theta}{\bar r}}\right]$$

$$+ \frac{\eta_0}{\rho_0 u_\varphi d}\left[2\pi\frac{d}{h_0}\left(\frac{\partial^2 \bar v_\theta}{\partial \bar r^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar r} - \frac{\bar v_\theta}{\bar r^2} + \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial^2 \bar v_\theta}{\partial \bar\theta^2}\right) + \frac{2}{\bar r^2}\frac{\partial \bar v_r}{\partial \bar\theta}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar p}{\partial \bar\theta} = -\frac{\bar v_\theta}{\bar r}\frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar\theta} + \frac{1}{Re}\frac{2}{\bar r^2}\frac{\partial \bar v_r}{\partial \bar\theta} +$$

$$+ \frac{2\pi}{Re}\frac{d}{h_0}\left[\frac{\partial^2 \bar v_\theta}{\partial \bar r^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar r} - \frac{\bar v_\theta}{\bar r^2} + \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{\bar r^2}\frac{\partial^2 \bar v_\theta}{\partial \bar\theta^2}\right]$$

mit: $\frac{2\pi}{Re}\frac{d}{h_0} \gg \frac{1}{Re}$, $\frac{2\pi d}{Re\, h_0} \gg 1$ und

$\frac{1}{4\pi^2} \ll 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar p}{\partial \bar\theta} = \frac{2\pi}{Re}\frac{d}{h_0}\left(\frac{\partial^2 \bar v_\theta}{\partial \bar r^2} + \frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar v_\theta}{\partial \bar r} - \frac{\bar v_\theta}{\bar r^2}\right)$$

Abschätzung: $\dfrac{\frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar p}{\partial \bar\theta}}{\frac{\partial \bar p}{\partial \bar r}} = \dfrac{\frac{2\pi d}{Re\, h_0}}{\frac{d}{Re\, h_0}\frac{1}{\pi}} = 2\pi^2 \gg 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar r}\frac{\partial \bar p}{\partial \bar\theta} \gg \frac{\partial \bar p}{\partial \bar r}$$

$\Rightarrow$ vereinfachte Impulsgleichung:

$$\frac{1}{r}\frac{dp}{d\theta} = \eta\left(\frac{d^2 v_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dv_\theta}{dr} - \frac{v_\theta}{r^2}\right)$$

Sep. 1992

9. Aufgabe (16 Punkte)

In einem unendlich tief ausgedehnten Wälzlager rollen die Wälzrollen bezogen auf ihre Drehachse auf der Außenwand ab. Die Wälzrollen haben die konstante Drehgeschwindigkeit ω und den Durchmesser d. Der Außendurchmesser ist D und der Durchmesser der Wälzrollenmittelpunkte D_W. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im schmalen Spalt zwischen den Wälzrollen und der Außenwand ist sehr klein. Es gilt:

$$\frac{h}{d} << 1 \qquad Re\frac{h}{d} << 1$$

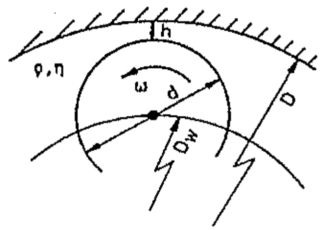
Die Flüssigkeit sei inkompressibel, und die Temperatur sei konstant.
Die Impulsgleichungen in Polarkoordinaten lauten:

$$\varrho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r}\right) =$$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right)$$

$$\varrho\left(v_r\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \frac{v_r v_\theta}{r}\right) =$$

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right)$$



Gegeben: $D, d, D_W, (D-(D_W+d) << d), \omega, \varrho, \eta$

- Leiten Sie aus den beiden Impulsgleichungen die vereinfachte Differentialgleichung für eine schleichende Spaltströmung mittels einer Größenordnungsabschätzung der einzelnen Terme her. Machen Sie dafür sämtliche Größen dimensionslos.

Hinweis:

$$\bar{\theta} = \frac{\theta}{2\pi} \qquad Re = \frac{\varrho v d}{\eta}$$

9. Aufgabe   Voraussetzungen:

$Re = \frac{\varrho v d}{\eta}$, $\frac{h}{d} << 1$, $Re\frac{h}{d} << 1$

bezogen auf Wälzrolle: stationäre Strömung

$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ (ω = konst.)

unendlich tief: $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial z} \equiv 0$, $v_z = 0$

$O(h) = \frac{D-(D_w+d)}{2} \Rightarrow \frac{h}{d} << 1$

Definition: $u_\infty = \omega\frac{d}{2}$

$\frac{v_r}{v_\theta} = O\left(\frac{h}{d}\right) << 1 \Rightarrow \frac{v_r}{v_\theta}\frac{d}{h} = O(1)$

dimensionslose Größen:

$\bar{v}_\theta = \frac{v_\theta}{u_\infty}$, $\bar{v}_r = \frac{v_r}{u_\infty}\frac{d}{h_0}$, $\bar{r} = \frac{r}{h_0}$, $\bar{\theta} = \frac{\theta}{2\pi}$

$\bar{\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho_0} = 1$, $\bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_0} = 1$, $\bar{p} = \frac{p}{\varrho u_\infty^2}$

$\rightarrow$ r-Impuls-Gl.:

$$\varrho_0\left[\frac{u_\infty^2}{h_0}\frac{h_0^2}{d^2}\bar{v}_r\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \bar{r}} + \frac{u_\infty^2 h_0}{h_0 d 2\pi}\frac{\bar{v}_\theta}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \bar{\theta}} - \frac{u_\infty^2}{h_0}\frac{\bar{v}_\theta^2}{\bar{r}}\right] =$$

$$= -\frac{\varrho_0 u_\infty^2}{h_0}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \eta_0\left[\frac{u_\infty h_0}{h_0^2 d}\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial \bar{r}^2} + \frac{u_\infty h_0}{h_0^2 d}\frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \bar{r}}\right.$$

$$\left. + \frac{u_\infty h_0}{h_0^2 d\, 4\pi^2}\frac{1}{\bar{r}^2}\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial \bar{\theta}^2} - \frac{u_\infty h_0}{h_0^2 d}\frac{\bar{v}_r}{\bar{r}^2} - \frac{u_\infty}{h_0^2 2\pi}\frac{2}{\bar{r}^2}\frac{\partial \bar{v}_\theta}{\partial \bar{\theta}}\right]$$

Sep. 1992

$$\Rightarrow \frac{T_{03}}{T_{02}} = 1 + \frac{P_a}{\frac{\varkappa}{\varkappa-1} \rho_1 \sqrt{\varkappa R T_1}\, A_1 Ma_1 \left(1+\frac{\varkappa-1}{2} Ma_1^2\right)}$$

$$\Rightarrow A_3 = A_2 \frac{T_{03}}{T_{02}} \sqrt{\frac{T_{02}}{T_{03}}}$$

$$\Rightarrow A_3 = A_2 \sqrt{1+ \frac{P_a}{\frac{\varkappa}{\varkappa-1} \rho_1 \sqrt{\varkappa R T_1}\, A_1 Ma_1 \left(1+\frac{\varkappa-1}{2} Ma_1^2\right)}}$$

$$c_p T_{03} = c_p T_4 + \frac{u_4^2}{2} \qquad \text{(Energie)}$$

$$\Rightarrow \frac{T_4}{T_{03}} = \left(1+\frac{\varkappa-1}{2} Ma_4^2\right)^{-1}$$

$$\dot m = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_4 u_4 A_4$$

$$u_4 = Ma_4 \sqrt{\varkappa R T_4} = u_1 \frac{\rho_1}{\rho_4} \frac{A_1}{A_4}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_4} = \frac{\rho_1}{\rho_{01}} \frac{\rho_{01}}{\rho_{04}} \frac{\rho_{04}}{\rho_4} \qquad u_1 = Ma_1 \sqrt{\varkappa R T_1}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_{01}} = \left(1+\frac{\varkappa-1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}$$

$$\frac{\rho_{04}}{\rho_4} = \left(1+\frac{\varkappa-1}{2} Ma_4^2\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}$$

$$\frac{\rho_{01}}{\rho_{04}} = \frac{\rho_{02}}{\rho_{03}} = \frac{T_{03}}{T_{02}}$$

$$\Rightarrow Ma_4 = Ma_1 \sqrt{\frac{T_1}{T_4}} \frac{A_1}{A_4} \frac{\rho_1}{\rho_4}$$

$$\frac{T_1}{T_4} = \frac{T_1}{T_{01}} \frac{T_{02}}{T_{03}} \frac{T_{04}}{T_4}$$

$$\sqrt{\frac{T_1}{T_{01}}} \frac{\rho_1}{\rho_{01}} = \left(1+\frac{\varkappa-1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{\varkappa-1}}$$

$$\Rightarrow Ma_4 = Ma_1 \frac{A_1}{A_4} \left(\frac{1+\frac{\varkappa-1}{2} Ma_4^2}{1+\frac{\varkappa-1}{2} Ma_1^2}\right)^{\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}} \sqrt{\frac{T_{03}}{T_{02}}}$$

Sep. 1992

16

8. Aufgabe:

a) Konti: $\rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2 = \rho^* u^* A^*$

$A_2 = A^* \qquad u^* = a^*$

$$\Rightarrow A_2 = A^* = A_1 \frac{\rho_1}{\rho^*} \frac{u_1}{u^*} = A_1 \frac{\rho_1}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\rho^*} \frac{u_1}{a_0} \frac{a_0}{a^*}$$

Energie: $c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2} \qquad c_p = \frac{\varkappa R}{\varkappa - 1}$

$$\Rightarrow \frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\varkappa - 1}{2} Ma^2$$

$$\Rightarrow \frac{T_0}{T^*} = \frac{\varkappa+1}{2} = \left(\frac{\rho_0}{\rho^*}\right)^{\varkappa - 1} \qquad \frac{a_0}{a^*} = \sqrt{\frac{\varkappa R T_0}{\varkappa R T^*}}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho^*} = \left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \qquad \frac{a_0}{a^*} = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{2}}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} = \left(1 + \frac{\varkappa-1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{1}{\varkappa-1}}$$

$$\frac{u_1}{a_0} = Ma_1 \frac{a_1}{a_0} = Ma_1 \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} = Ma_1 \left(1 + \frac{\varkappa-1}{2} Ma_1^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow A_2 = A_1 \frac{Ma_1}{\left[\frac{2}{\varkappa+1}\left(1 + \frac{\varkappa-1}{2} Ma_1^2\right)\right]^{\frac{\varkappa+1}{2(\varkappa-1)}}}$$

b) Energie: $c_p T_{03} = c_p T_{02} + \frac{P_Q}{\dot m} \qquad (*)$

$$c_p T_{03} = c_p T_3 + \frac{u_3^2}{2} = c_p T_3 + \frac{a_3^{*2}}{2}$$

$$A_3 = A_3^* = A_2 \frac{\rho_2}{\rho_3} \frac{u_2}{u_3}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_3} = \frac{\rho_2}{\rho_{02}} \frac{\rho_{02}}{\rho_{03}} \frac{\rho_{03}}{\rho_3} \qquad p = \rho R T$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_{02}} = \frac{\rho_3}{\rho_{03}} = \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}$$

$$\rho_0 = \frac{p_0}{R T_0}, \quad \Rightarrow \frac{\rho_{02}}{\rho_{03}} = \underbrace{\cancel{\frac{p_{02}}{p_{03}}}}_{=1 \text{ (isobar)}} \frac{T_{03}}{T_{02}}$$

$$\frac{u_2}{u_3} = \frac{a_2^*}{a_3^*} = \sqrt{\frac{\varkappa R T_2}{\varkappa R T_3}} = \sqrt{\frac{T_2}{T_{02}} \frac{T_{02}}{T_{03}} \frac{T_{03}}{T_3}}$$

$$\frac{T_2}{T_{02}} = \frac{T_3}{T_{03}} = \frac{2}{\varkappa+1}$$

$$\dot m = \rho_1 A_1 v_1 = \frac{p_1}{R T_1} A_1 Ma_1 \sqrt{\varkappa R T_1}$$

in (*) einsetzen:

$$\frac{T_{03}}{T_{02}} = 1 + \frac{P_Q}{\dot m c_p T_{02}}$$

$$T_{02} = T_{01} = T_1 \left(1 + \frac{\varkappa-1}{2} Ma_1^2\right)$$

$$\tau = -\eta \frac{v_a}{\delta}(-1) = \eta \frac{v_a}{\delta(y)} \quad \tau(x=0)$$

$$\delta_1 = \int_0^{-\delta}\left(1-\frac{v}{v_a}\right)dx = \delta \int_0^{-1}\left(1+\frac{x}{\delta}\right)d\left(\frac{x}{\delta}\right) = -\frac{\delta}{2}$$

$$\delta_2 = \int_0^{-\delta}\frac{v}{v_a}\left(1-\frac{v}{v_a}\right)dx = \delta \int_0^{-1}\left(-\frac{x}{\delta}\right)\left(1+\frac{x}{\delta}\right)d\left(\frac{x}{\delta}\right) = -\frac{\delta}{6}$$

$$\frac{d\delta_2}{dy} = -\frac{1}{6}\frac{d\delta}{dy}$$

$$\frac{dv_a}{dy} = u_\infty \frac{-y h^2}{\sqrt{3-\frac{h^2}{h^2-y^2}}\,(h^2-y^2)^2}$$

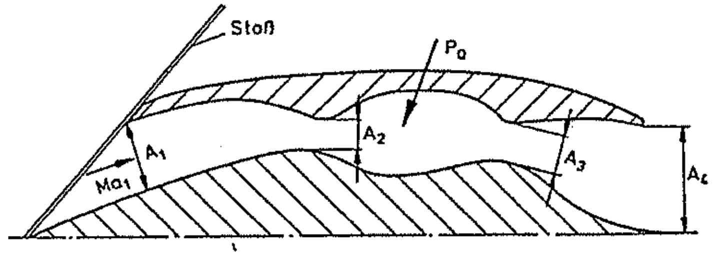
In (*) einsetzen:

$$\Longrightarrow -\frac{1}{6}\frac{d\delta}{dy} + \frac{-y h^2}{\left(3-\frac{h^2}{h^2-y^2}\right)(h^2-y^2)^2}\left(-\frac{2}{6}\delta - \frac{\delta}{2}\right) + \frac{\eta}{\rho v_a} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{d\delta}{dy} = \frac{5 y h^2}{\left(3-\frac{h^2}{h^2-y^2}\right)(h^2-y^2)^2}\,\delta + \frac{6\eta}{\left(\rho u_\infty \sqrt{3-\frac{h^2}{h^2-y^2}}\right)\delta}$$

8. Aufgabe (13 Punkte)

Ein Staustrahltriebwerk wird mit Überschall angeströmt. Am Einlaß bildet sich ein schräger Verdichtungsstoß. Hinter dem Stoß werden die Machzahl Ma_1, der Druck p_1 und die Temperatur T_1 im Querschnitt A_1 gemessen. In der Brennkammer wird dem Gas isobar und verlustfrei die Wärmeleistung P_Q zugeführt. Die Änderung der thermischen Größen R und κ wird vernachlässigt. Die Strömung soll eindimensional betrachtet werden.



Gegeben: $p_1, T_1, Ma_1, A_1, \kappa, R, P_Q, A_4$

a) Wie groß muß der Querschnitt A_2 sein, damit dort der kritische Zustand erreicht wird?

b) Wie groß muß der Querschnitt A_3 sein, damit dort ebenfalls der kritische Zustand erreicht wird?

c) Geben Sie eine Iterationsgleichung für Ma_4 im Querschnitt A_4 an.

Hinweis: Die Schallgeschwindigkeit a ist: $a = \sqrt{\kappa R T}$

Isentropenbeziehungen:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\kappa} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

Sep. 1992

7. Aufgabe:

a) Eine Grenzschicht tritt nur auf der Vorderseite (angeströmte Seite) in einiger Entfernung vom Staupunkt auf.

Voraussetzungen:

$$O\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) << O\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$$

$$\delta << h$$

$$Re >> 1 \quad (Re \to \infty)$$

b) $$\frac{dp}{dy} = -\rho V_a \frac{dv_a}{dy} = -\frac{\rho}{2}\frac{d(v_a^2)}{dy} \quad (*)$$

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \frac{y^2}{h^2 - y^2}$$

$$\Rightarrow p = p_\infty + \frac{\rho}{2} u_\infty^2 \left(1 - \frac{y^2}{h^2-y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dy} = -\frac{\rho}{2} u_\infty^2 \frac{2yh^2}{(h^2-y^2)^2}$$

in (*) einsetzen und integrieren

$$\Rightarrow \int d(V_a^2) = u_\infty^2 \int \frac{2yh^2}{(h^2-y^2)^2}\,dy$$

R.B.: $c_p \to 0 \Rightarrow V_a = u_\infty$

$$\Rightarrow 1 - \frac{y^2}{h^2-y^2} = 0 \Rightarrow y = \pm\frac{h}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V_a^2 = u_\infty^2\left(-\frac{h^2}{h^2-y^2}\right) + C.$$

$$V_a\left(y = \pm\frac{h}{\sqrt{2}}\right) = u_\infty \Rightarrow C = 3u_\infty^2$$

$$\Rightarrow \underline{V_a(y) = u_\infty\sqrt{3 - \frac{h^2}{h^2-y^2}}}$$

c) $$\frac{V(x,y)}{V_a(y)} = a_0 + a_1\frac{x}{\delta(y)}$$

R.B.: 1) $x = 0$ $\quad V = 0 \quad \Rightarrow a_0 = 0$
2) $x = -\delta$ $\quad V = V_a \quad \Rightarrow a_1 = -1$

$$\Rightarrow \frac{V}{V_a} = -\frac{x}{\delta}$$

$$\Rightarrow \underline{V(x,y) = -u_\infty\sqrt{3 - \frac{h^2}{h^2-y^2}}\;\frac{x}{\delta(y)}}$$

d) von Kármán'sche Integralbeziehung:

$$\frac{d\delta_2}{dy} + \frac{1}{V_a}\frac{dV_a}{dy}(2\delta_2 + \delta_1) + \frac{\tau(x=0)}{\rho V_a^2} = 0 \quad (*)$$

$$\tau = -\eta\frac{dv}{dx} = -\eta\frac{V_a}{\delta}\frac{d\left(\frac{v}{V_a}\right)}{d\left(\frac{x}{\delta}\right)}$$

13. Sep. 1992

6. Aufgabe:

a) $F(z) = \phi(x,y) + i\,\psi(x,y)$

$z = x + iy = r e^{i\theta} = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi(x,y) = ax(x^2 - 3y^2) + \frac{E}{2\pi} \ln\sqrt{x^2+y^2} \\ \psi(x,y) = ay(3x^2 - y^2) + \frac{E}{2\pi} \arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \phi(r,\theta) = a r^3 \cos(3\theta) + \frac{E}{2\pi} \ln r \\ \psi(r,\theta) = a r^3 \sin(3\theta) + \frac{E}{2\pi}\theta \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 3a(x^2-y^2) + \frac{E}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \\ v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = -6axy + \frac{E}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 3ar^2\cos(3\theta) + \frac{E}{2\pi r} \\ v_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -3ar^2\sin(3\theta) \end{cases}$$

c) Staupunkt: $\Rightarrow v_r = v_\theta = 0$

$v_\theta = 0 \Rightarrow \sin(3\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \ldots$

$v_r = 0 \Rightarrow \cos(3\theta) = -\frac{E}{2\pi}\frac{1}{3ar^3} < 0$

$\cos x < 0$ für $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$

$\Rightarrow \frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta_{st} = \frac{\pi}{3} \ldots$

$\Rightarrow \theta_{st} = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{7}{3}\pi, \ldots$

$\Rightarrow \cos(3\theta_{st}) = -1$

$\Rightarrow r_{st} = \sqrt[3]{\frac{E}{a\,6\pi}} = 1$

$\Rightarrow \underline{E = 6\pi a}$

d) $\psi(r,\theta) = \psi_K(r_K,\theta_K) = \psi_{st}$

$\Rightarrow a r_K^3 \sin(3\theta) + \frac{E}{2\pi}\theta = \psi_{st}$

$\psi_{st} = a\,1^3 \underbrace{\sin(3\theta_{st})}_{\to 0} + \frac{E}{2\pi}\theta_{st} = 3a\theta_{st}$

$$\Rightarrow r_K(\theta) = \sqrt[3]{\frac{3(\theta_{st} - \theta)}{\sin(3\theta)}}$$

für: $\theta_{st} - \frac{\pi}{6} < \theta < \theta_{st} + \frac{\pi}{6}$

e) Asymptoten:

$v_\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi, \ldots$

$\Rightarrow v_r > 0, < 0, > 0, < 0, \ldots$

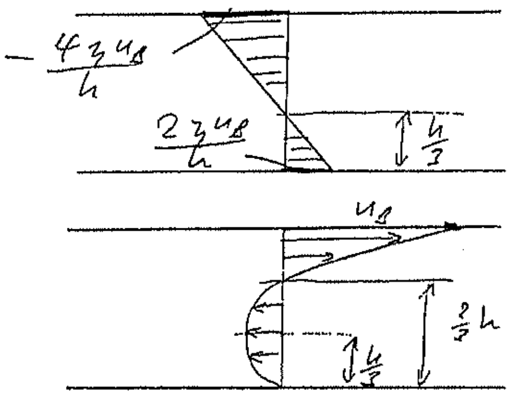
Jan. 1992

$$\Rightarrow u(y) = u_B \left(3\frac{y^2}{h^2} - 2\frac{y}{h}\right)$$

$$\Rightarrow \tau(y) = \eta u_B \left(\frac{2}{h} - \frac{6y}{h^2}\right)$$

b) $\tau(y)$

$u(y)$



$u_{max} = u(y=h) = u_B$

$u(y=0) = u(y=\frac{2}{3}h) = 0$

$u_{min} = u(y=\frac{h}{3}) = -\frac{u_B}{3}$

$\tau_{max} = \tau(y=0) = 2\frac{\eta u_B}{h}$

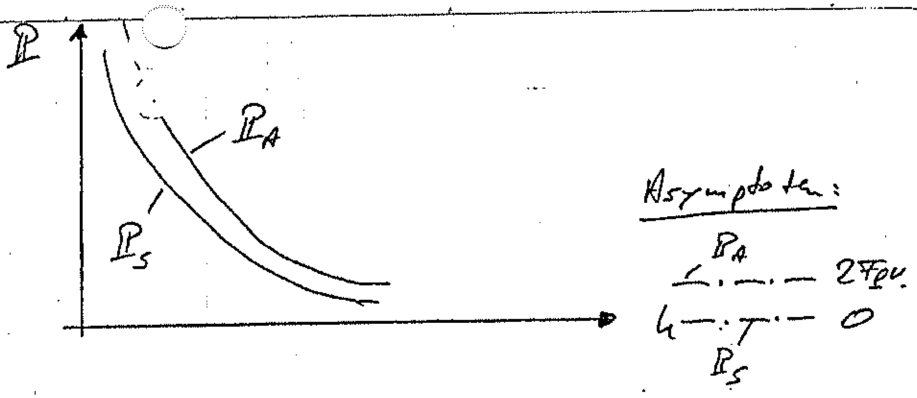
$\tau_{min} = \tau(y=h) = -4\frac{\eta u_B}{h}$

$\tau(y=\frac{h}{3}) = 0 \Rightarrow u_{min}$

c) $P_S = F_W \cdot u_B \qquad F_W = \tau_w B L$

$\Rightarrow P_S = 4\eta \frac{u_B}{h} B L u_B = 4\eta \frac{BL}{h} u_B^2$

$P_A = P_S + 2F_R u_B = \left(4\eta BL\frac{u_B}{h} + 2F_R\right) u_B$



d) $f(P_S, \rho, \eta, h, L, B, u_B) = 0$

$\Rightarrow 7 - 3 = 4$ Kennzahlen

Bezugsgrößen: $\rho, u_B, h \;\hat{=}\; 3$ Grunddimensionen

$\Rightarrow K_i = i^{\alpha_i} \rho^{\beta_i} u_B^{\gamma_i} h^{\delta_i}$

wähle: $\alpha_i = 1$

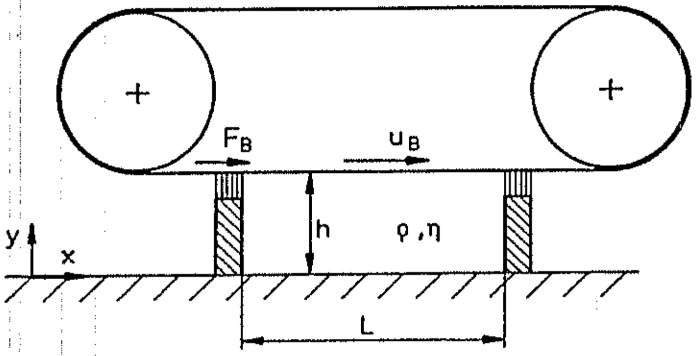
$\Rightarrow K_1 = \frac{L}{h}, \quad K_2 = \frac{B}{h}, \quad K_3 = \frac{\eta}{\rho u_B h},$

$K_4 = \frac{P_S}{\rho u_B^3 h^2}$

8 Sep. 1992

4. Aufgabe (12 Punkte)

Zur Reinigung eines Fließbandes befindet sich in einem Spalt der Höhe h eine zähe Newtonsche Flüssigkeit, die durch zwei Bürsten an den Rändern am Auslaufen gehindert wird. An den Bürsten, die im Abstand L angeordnet sind, entsteht jeweils eine Reibkraft F_B. Das Band bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_B und hat die Breite B.



Gegeben: $\varrho, \eta, u_B, h, L, B, F_B$

a) Bestimmen Sie die Schubspannungs- $\tau(y)$ und die Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$ im Spalt.

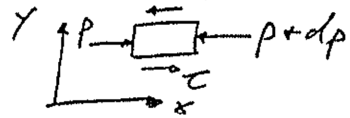
b) Skizzieren Sie die Schubspannungs- und die Geschwindigkeitsverteilung und bestimmen Sie deren Extremwerte.

c) Bestimmen Sie die Leistung P_S, die an die Strömung abgegeben wird, sowie die Antriebsleistung des Bandes P_A. Skizzieren Sie diese in Abhängigkeit von der Höhe h.

d) Bestimmen Sie die Kennzahl(en) dieses Strömungsproblems.

Hinweis: Die Strömung sei ausgebildet und über der Fließbandbreite konstant. Die Geschwindigkeiten quer zur Bandgeschwindigkeit seien vernachlässigbar.

4. Aufgabe:



a)

Kräftebilanz am Element:

$$\tau\, dx - \left(\tau + \frac{d\tau}{dy} dy\right) dx + p\, dy - \left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = -\frac{dp}{dx} \qquad \tau = -\eta \frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{dp}{dx} y + C_1' = -\eta \frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \frac{y^2}{2} - C_1 y + C_2$$

R.B.: 1) $u(y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

2) $u(y=h) = u_B \Rightarrow u_B = \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \frac{h^2}{2} - C_1 h$

$$\Rightarrow C_1 = -\frac{u_B}{h} + \frac{1}{\eta} \frac{dp}{dx} \frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow u(y) = u_B \frac{y}{h} + \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} (y^2 - hy)$$

3. R.B.: $\frac{\dot{Q}}{B} = 0 = \int_0^h u(y)\, dy$

$$\Rightarrow 0 = \left[u_B \frac{y^2}{2h} + \frac{1}{2\eta} \frac{dp}{dx} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{hy^2}{2}\right)\right]_0^h$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{6 \eta u_B}{h^2}$$

7. Sep. 1992

Bernoulli 0 – 4

$$p_a + \rho g h = p_a + \frac{\rho}{2} u_m^2 \left(1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_v + \zeta_T\right) + \rho \int_0^L \frac{\partial u_m}{\partial t}\, ds$$

$$\int_0^L \frac{\partial u_m}{\partial t}\, ds = L \frac{d u_m}{dt} = g h - \frac{u_m^2}{2} K$$

$$\Rightarrow \int_0^{u_m(T)} \frac{d u_m}{\frac{2gh}{K} - u_m^2} = \int_0^T \frac{K}{2L}\, dt$$

$$\Rightarrow \underline{T = \frac{L}{\sqrt{2ghK}} \ln\left(\frac{1+0.9}{1-0.9}\right) = 2.94 \frac{L}{\sqrt{2ghK}}}$$

c) Druckminimum an der Stelle 1:

⇒ Bernoulli 0 – 1

$$p_a + \rho g h = p_1 + \rho g (h - h_s) + \frac{\rho}{2} u_m^2$$

$$\Rightarrow p_1 = p_a + \rho g h_s - \frac{\rho}{2} u_m^2 \geq p_D$$

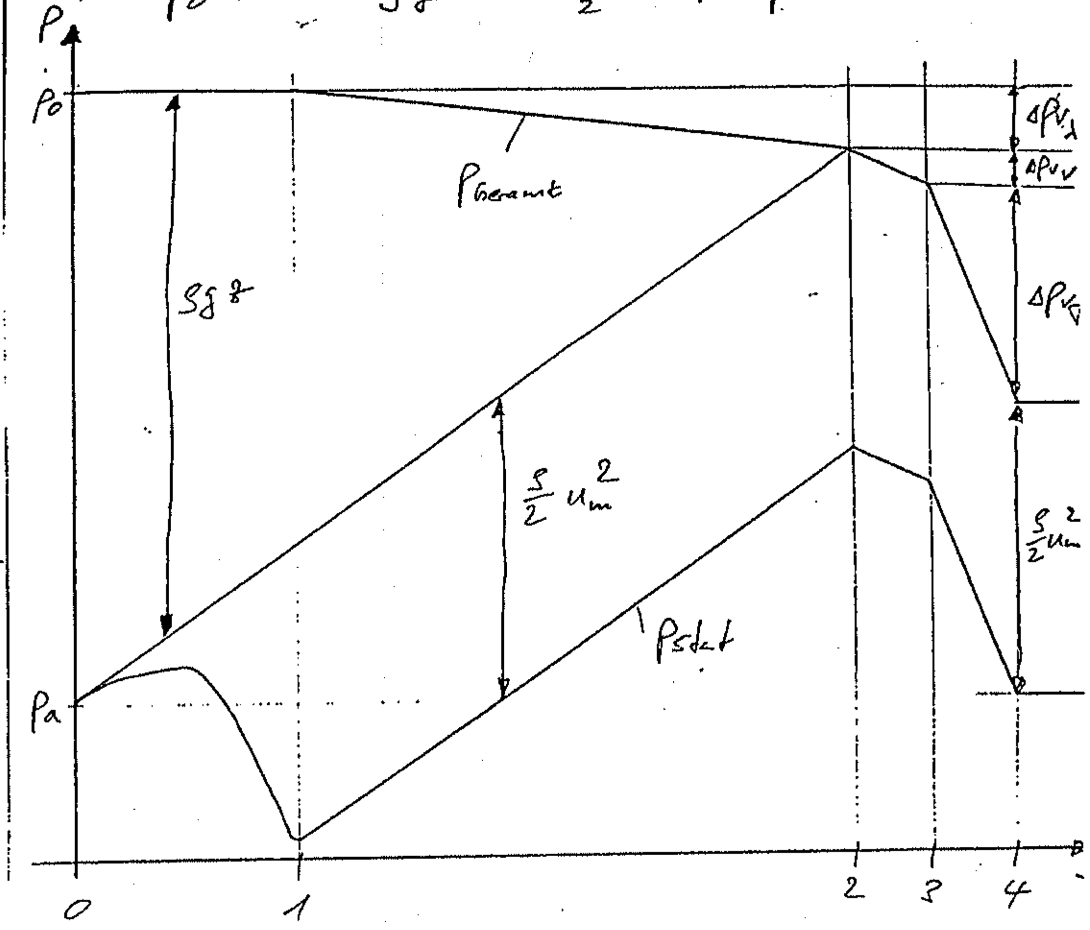
$$\Rightarrow \underline{h_s \geq \frac{p_D - p_a}{\rho g} + \frac{h}{1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_v + \zeta_T}}$$

Lösung nur sinnvoll für $h_s > 0$.

⇒ Nebenbedingung für h:

$$\underline{h > \frac{p_a - p_D}{\rho g} \left(1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_v + \zeta_T\right)}$$

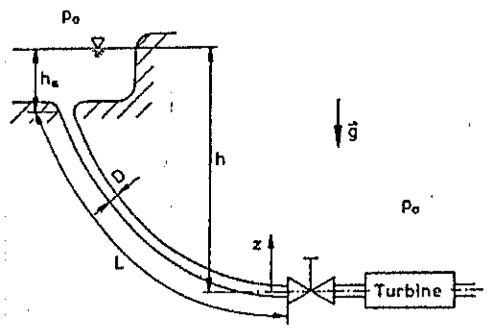
d) $p_0 = \quad + \rho g z + \frac{\rho}{2} v^2 + \Delta p_v$



Sep. 1992

2. Aufgabe (11 Punkte)

Eine Turbine wird aus einem großen See gespeist, dessen Spiegel in der Höhe h über ihr liegt. Die Zuleitung hat die Länge L, den Durchmesser D und den Rohrreibungskoeffizienten λ. Die Strömung im See und im Einlauf wird bis zur Tiefe h_S als verlustfrei betrachtet. Vor der Turbine liegt ein Ventil mit dem Verlustkoeffizienten ζ_V. Der Druckverlust der Turbine beim Betrieb wird durch den konstanten Verlustkoeffizienten ζ_T ausgedrückt. Die kurzen Rohrleitungen hinter dem Ventil und hinter der Turbine werden ebenfalls als verlustfrei betrachtet. Hinter der Turbine strömt das Wasser ins Freie. Der Dampfdruck des Wassers sei p_D.



Gegeben: $h, g, D, L, \lambda, \zeta_V, \zeta_T, \varrho, p_a, p_D$

a) Welche maximale Leistung gibt die Turbine ab?

b) Die Zuleitung wird plötzlich geöffnet. Wie lange dauert es, bis die Turbine 72.9% ihrer maximalen Leistungsabgabe erreicht hat?

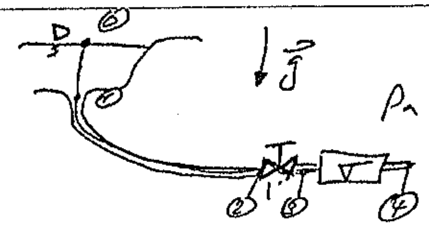
c) Wie groß ist die minimale Stauseehöhe h_S, damit sich keine Dampfblasen bilden? Geben Sie die Nebenbedingung für die Höhe h an.

d) Skizzieren Sie den Verlauf des Gesamt-, des statischen und des Staudruckes über einer Stromlinie vom Spiegel des Sees zum Ausfluß.

Hinweis:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \qquad \text{für} \quad |x| < a$$

2. Aufgabe:



a) $\mathbb{P}_T = \dot{Q}\, \Delta p_T$

$\dot{Q} = u_m \frac{\pi}{4} D^2$

$\Delta p_T = p_4 - p_3$

Bernoulli von 0 – 4

$p_a + \rho g h = p_4 + \frac{\rho}{2} u_m^2 + \Delta p_V$

$p_4 = p_a \qquad \Delta p_V = \frac{\rho}{2} u_m^2 \left(\lambda \frac{L}{D} + \zeta_V + \zeta_T\right)$

$\Rightarrow u_m = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_V + \zeta_T}}$

$\Delta p_T = \zeta_T \frac{\rho}{2} u_m^2$ aus Bernoulli 3 – 4

$$\Rightarrow \mathbb{P}_T = \frac{\pi}{8} \rho D^2 \zeta_T \left[\frac{2gh}{1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_V + \zeta_T}\right]^{\frac{3}{2}}$$

b) $\mathbb{P}_{T_{max}} = \mathbb{P}_{T a)} = \frac{\pi}{8} \rho D^2 \zeta_T \left[\frac{2gh}{K}\right]^{\frac{3}{2}}$

mit $K = 1 + \lambda \frac{L}{D} + \zeta_V + \zeta_T$

$\mathbb{P}_{T b)} = 0.729\, \mathbb{P}_{T a)} = \frac{\pi}{8} \rho D^2 \zeta_T u_{m b)}^3$

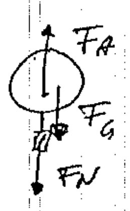
$\Rightarrow u_{b)} = \sqrt[3]{0.729} \sqrt{\frac{2gh}{K}} = 0.9 \sqrt{\frac{2gh}{K}}$

Sep. 1992

3

Aufgabe 1:

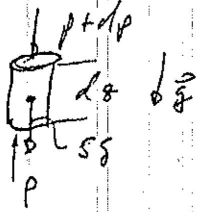
a)



$$F_A - F_G - F_N = 0$$

$$F_A = \rho_L g \tau \qquad (\tau_N \ll \tau)$$

$$F_G + F_N = (m_G + m_N) g \quad (*)$$



$$-\rho g A\, dz - (p+dp)A + pA = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad \xRightarrow{T\ \text{konst}} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{p}{p_0}$$

$$\Rightarrow \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = \int_{z=0}^{z} \frac{g}{RT}\, dz \Rightarrow \rho = \rho_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT_0}\right)$$

$$(*) \Rightarrow \rho_L = \frac{m_G + m_N}{\tau} = \rho(z = z_{max})$$

$$\Rightarrow \underline{z_{max} = \frac{R_L T_0}{g} \ln\left(\frac{\rho_0 \tau}{m_G + m_N}\right)}$$

b) 2 Fälle:

$p_i > p_a \Rightarrow m_G$ sinkt $\Rightarrow z_{max}$ steigt

$p_i < p_a \Rightarrow m_G$ steigt $\Rightarrow z_{max}$ sinkt

c) $F_A - F_{G_{Loch}} - F_N = 0$ für $p_i = p_a$

$$F_G = m_G g \qquad m_G = \rho_G \tau$$

$$\rho_G = \frac{p_i}{R_G T_0} = \frac{m_G}{\tau}$$

$$\rho_{G_{Loch}} = \frac{p_a}{R_G T_0} \qquad p_a = R_L T_0 \rho_L$$

$$\Rightarrow \rho_L g \tau - \rho_{G_{Loch}} g \tau - m_N g = 0$$

$$\Rightarrow \rho_L \left(1 - \frac{R_L}{R_G}\right) = \frac{m_N}{\tau}$$

$$\Rightarrow \underline{h_{max\,Loch} = \frac{R_L T_0}{g} \ln\left(\frac{\tau \rho_0}{m_N} \frac{R_G - R_L}{R_G}\right)}$$

2 Sep. 2007

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen

Direktor: Univ.-Prof. E. Krause, Ph.D.

Klausur Strömungslehre I + II

7. 8. 1992

Name: ....

Matr.-Nr.: ....

Unterschrift: ....

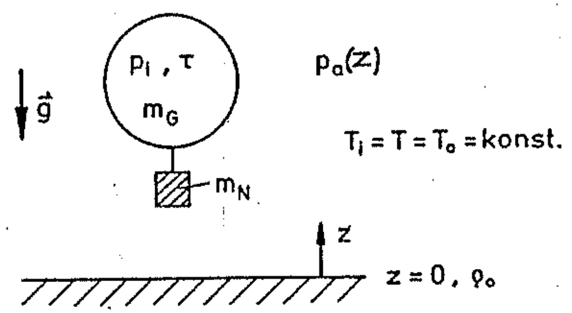
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Σ	

Klausur Strömungslehre I+II

7. August 1992

1. Aufgabe (8 Punkte)

Ein starrer, geschlossener Ballon mit der Masse m_N (einschließlich der Nutzmasse) enthält die Gasmasse m_G. Das Gasvolumen sei τ und der Innendruck im Ballon ist p_i. Das Volumen der Nutzlast τ_N sei gegenüber τ vernachlässigbar. Der Ballon befindet sich in einer isothermen Atmospäre mit der Temperatur T_0. Die Temperatur des Gases(R_G) ist gleich der Temperatur in der umgebenden Luft (R_L).



Gegeben: $g, \tau, \tau_N << \tau, m_G, m_N, \varrho_0, T_i = T = T_0 = konst., R_L, R_G$

a) Wie groß ist die maximale Steighöhe des Ballons, wenn der Ballon am Boden festgehalten werden muß?

b) Nach einer Kollision mit einem Vogel hat die Ballonhülle ein Loch. Wird der Ballon nun steigen oder sinken? (Begründung)

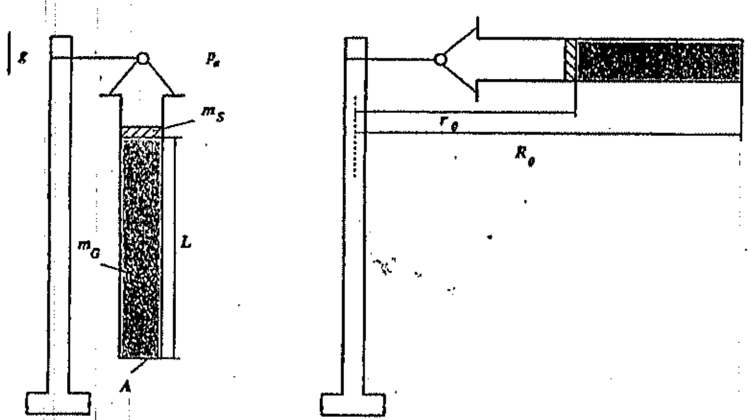
c) Bestimmen Sie die neue maximale Steighöhe h_{max} für $p_i > p_a(h_{max})$.

Klausur Strömungslehre I + II

21. März 1994

1. Aufgabe (13 Punkte)

Der zylindrische Behälter einer Zentrifuge ist mit einem idealen Gas der Masse m_G gefüllt und durch eine reibungsfrei gleitende dünne Scheibe der Masse m_S verschlossen (siehe Skizze). Der Behälter ist drehbar gelagert und richtet sich bei Betrieb der Zentrifuge mit der Winkelgeschwindigkeit ω horizontal aus. Außerhalb des Behälters herrsche der Umgebungsdruck p_a.



a) Bestimmen Sie die Länge L der Gassäule vor Betrieb der Zentrifuge.

b) Bestimmen Sie den maximalen Druck im Behälter bei Betrieb der Zentrifuge.

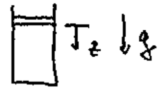
c) Bestimmen Sie den maximalen Druck im Behälter bei Betrieb der Zentrifuge für konstante Dichte ρ^* (Abmessung der Gassäule $R_0 - r_0^*$).

Gegeben: m_G, m_S, p_a, allgemeine Gaskonstante $R, T_0, g, \omega, A, r_0, R_0, \rho^*, r_0*$

Hinweis: Die Volumenkraft der Luft im Behälter sei vernachlässigbar, die Temperatur sei konstant $T = T_0$. Für den Druck $p(r,z)$ gilt mit $\rho(r,z)$ allgemein:

$$dp = \frac{\partial p}{\partial r}dr + \frac{\partial p}{\partial z}dz \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\omega^2 r \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad \text{für } \uparrow z \downarrow g$$

Aufg 1 a) Massen ... z, ideales Gas, HGG



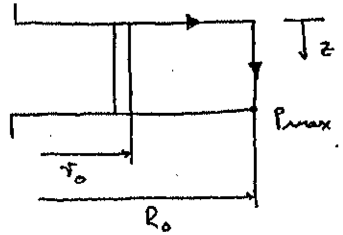
$$m_G = \int_0^L \rho(z) A\, dz \quad , \quad p(z) = \rho(z) R T_0 \quad , \quad \frac{dp(z)}{dz} = \rho(z) g$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{RT_0} dz \quad , \quad \frac{p(z)}{p_0} = e^{\left(\frac{gz}{RT_0}\right)} \quad , \quad \frac{\rho(z)}{\rho_0} = e^{\left(\frac{gz}{RT_0}\right)} \; ; \; \rho_0 = \frac{p_a + \frac{m_s g}{A}}{RT_0}$$

$$m_G = \rho_0 \frac{RT_0}{g}\left(e^{\left(\frac{gL}{RT_0}\right)} - 1\right) A \Rightarrow \underline{L = \frac{RT_0}{g} \ln\left(\frac{m_G}{\frac{p_a A}{g} + m_s} + 1\right)}$$

b)

$$\frac{dp}{\rho} = \omega^2 r\, dr + g\, dz \quad , \quad \rho = \frac{p}{RT_0}$$



$$\int_{p_0}^{p_{max}} \frac{dp}{p} = \int_{r_0}^{R_0} \frac{\omega^2}{RT_0} r\, dr + \int_0^{\sqrt{\frac{4A}{\pi}}} \frac{g}{RT_0} dz \; ,$$

$$p_0 = p_a + \frac{m_s \omega^2 r_0}{A} \; ; \quad \ln \frac{p_{max}}{p_0} = \frac{\omega^2}{2RT_0}(R_0^2 - r_0^2) + \frac{g\sqrt{\frac{4A}{\pi}}}{RT_0}$$

$$\underline{p_{max} = \left(p_a + \frac{m_s \omega^2 r_0}{A}\right) e^{\left(\frac{\omega^2}{2RT_0}(R_0^2 - r_0^2)\right)} e^{\left(\frac{g\sqrt{\frac{4A}{\pi}}}{RT_0}\right)}}$$

c)

$$dp = \rho^* \omega^2 r\, dr + \rho^* g\, dz$$

$$\underline{p_{max} = p_a + \frac{m_s \omega^2 r_0}{A} + \frac{\rho^*}{2}\omega^2 (R_0^2 - r_0^{*2}) + \rho^* g \sqrt{\frac{4A}{\pi}}}$$

- April 1994 - 1 -

$$\frac{w \cdot h(x)}{2} - \frac{h^3(x)}{12\eta}\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_w}{h^2(x)} - \frac{12\eta \dot{Q}}{h^3(x)}$$

$$\int_{p_1}^{p} dp' = \int_0^x \left(\frac{6\eta u_w}{h^2(x')} - \frac{12\eta \dot{Q}}{h^3(x')} \right) dx' \quad \text{mit } h(x) = h_1 e^{-\frac{x}{5L}}$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = p_1 + \frac{6\eta u_w}{h_1^2} \int_0^x e^{\frac{2x'}{5L}}\, dx' - \frac{12\eta \dot{Q}}{h_1^3} \int_0^x e^{\frac{3x'}{5L}}\, dx'$$

$$p(x) = p_1 + \frac{5L}{2}\frac{6\eta u_w}{h_1^2}\left[e^{\frac{2x'}{5L}} \right]_0^x - \frac{5L}{3}\frac{12\eta \dot{Q}}{h_1^3}\left[e^{\frac{3x'}{5L}} \right]_0^x$$

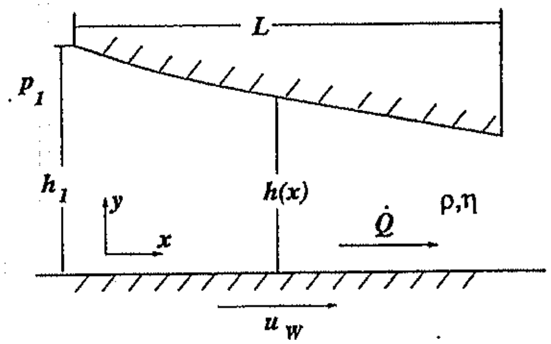
$$\Rightarrow \quad p(x) = p_1 + \frac{15\eta u_w L}{h_1^2}\left(e^{\frac{2x}{5L}} - 1 \right) - \frac{20\eta L \dot{Q}}{h_1^3}\left(e^{\frac{3x}{5L}} - 1 \right)$$

- April 1994

13

2. Aufgabe (16 Punkte)

In einem Gleitlager strömt ein Schmiermittel der Dichte ρ und Zähigkeit η. Die Wand bewegt sich mit der Geschwindigkeit u_W relativ zum Gleitschuh. Der Verlauf der Spalthöhe ist als Exponentialfunktion $h(x) = h_1 e^{-\frac{x}{5L}}$ gegeben.



Für eine stationäre inkompressible Strömung eines Fluids mit konstanter Dichte ρ und Zähigkeit η ist die x-Impulsgleichung in dimensionsbehafteter Form gegeben.

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

a) Vereinfachen Sie die x-Impulsgleichung für eine schleichende Spaltströmung mittels einer Größenordnungsabschätzung der einzelnen Terme. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis zusammen mit der vereinfachten y-Impulsgleichung, die in dimensionsloser Form lautet:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \simeq \frac{1}{Eu\,Re}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}$$

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $u(x,y)$ und den Volumenstrom $\dot{Q}$ in Abhängigkeit von $h(x)$ und $\frac{dp}{dx}$.

c) Bestimmen Sie den Druckverlauf $p(x)$ in dem Gleitlager.

Gegeben: $u_W, \eta, h_1, L, h(x) = h_1 e^{-\frac{x}{5L}}, p_1, \dot{Q}$

Aufg. 1 a) $\frac{h}{L} \ll 1$: ... $\left(\frac{1}{L}\right) \ll 1$

$$\bar{x} = \frac{x}{L},\ \bar{y} = \frac{y}{h_1},\ \bar{u} = \frac{u}{u_W},\ \bar{v} = \frac{v}{u_W}\frac{L}{h_1},\ \bar{p} = \frac{p}{\Delta p},\ \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty} = 1,\ \bar{\eta} = \frac{\eta}{\eta_\infty} = 1$$

x-Impuls: $\rho\left(\frac{u_W^2}{L}\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{u_W^2 h_1}{L h_1}\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\Delta p}{L}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \eta\left(\frac{u_W}{L^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{u_W}{h_1^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{\rho u_W^2}{\Delta p}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) + \frac{\eta u_W}{\Delta p L}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{L^2}{h_1^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{Eu\,Re}\frac{L^2}{h_1^2}\left[-Re\frac{h_1^2}{L^2}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) + \frac{h_1^2}{L^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \simeq \frac{1}{Eu\,Re}\frac{L^2}{h_1^2}\underbrace{\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}}_{O(1)},\quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \simeq \frac{1}{Eu\,Re}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \quad \text{(gegeben)}$$

- Reibungskräfte sind sehr viel größer als Trägheitskräfte ($Re\frac{h_1^2}{L^2} \ll 1$)
- die Änderung der Schubspannung in y-Richtung ist sehr viel größer als die Änderung der Normalspannung in x-Richtung ($\frac{h_1^2}{L^2} \ll 1$)
- die Änderung des Druckes in y-Richtung kann gegenüber der Änderung des Druckes in x-Richtung vernachlässigt werden.

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

b) Integration in y-Richtung

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}y + C_1 \rightarrow u(y) = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

RB.: $u(y=0) = u_W \rightarrow C_2 = u_W$; $u(y=h(x)) = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{h(x)}\left(\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{h^2(x)}{2} + u_W\right)$

$$u(x,y) = u_W\left(1 - \frac{y}{h(x)}\right) - \frac{h^2(x)}{2\eta}\left(\frac{y}{h(x)} - \frac{y^2}{h^2(x)}\right)\frac{dp}{dx}$$

$$\dot{Q} = h(x)\int_0^1 u(x,y)\, d\left(\frac{y}{h(x)}\right)$$

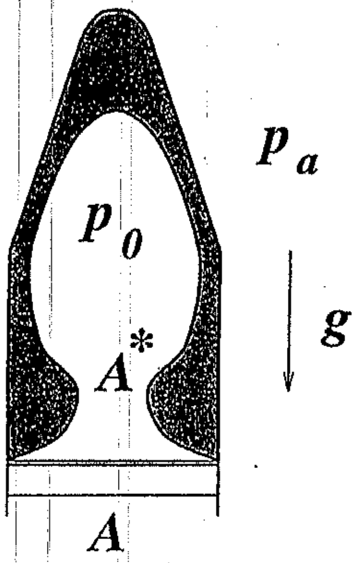
$$\dot{Q} = u_W h(x)\left[\frac{y}{h(x)} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h(x)}\right)^2\right]_0^1 + \frac{h^3(x)}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{y}{h(x)}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{h(x)}\right)^2\right]_0^1$$

12

- April 1994

8. Aufgabe (13 Punkte)

Eine Rakete besteht aus einem Druckbehälter und einer Lavaldüse mit dem Austrittsquerschnitt A. Die Startmasse der Rakete sei m. Durch isentropes Ausströmen der Luft aus dem Druckbehälter kann erreicht werden, daß die Rakete schwebt. Der Vorgang sei stationär.



a) Bestimmen Sie das minimal mögliche Flächenverhältnis A^*/A, so daß bei gerade noch isentroper Strömung in der Düse die Rakete in der Schwebe gehalten wird.

b) Bestimmen Sie den notwendigen Ruhedruck im Druckbehälter, falls die Rakete bei einem Flächenverhältnis von $A^*/A = 0.85$ in der Schwebe gehalten werden soll.

c) Skizzieren Sie qualitativ den Druckverlauf auf der Düsenachse für den Fall, daß das minimal mögliche Flächenverhältnis aus a) unterschritten wird. Begründen Sie Ihre Darstellung.

Gegeben: $m = 2. * 10^6 kg, g = 10 m/s^2, A = 50 m^2, \kappa = 1.4, p_a = 10^5 N/m^2$.

p/p_0	.90	.84	.78	.72	.66	.59	.53	.47	.41	.36	.31	.27	.24	.20	.17
A^*/A	.63	.75	.85	.91	.96	.99	1.0	.99	.97	.94	.90	.85	.80	.75	.70

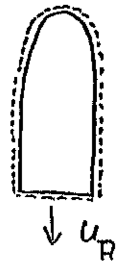
Hinweis: Verwenden Sie die Werte der Tabelle ohne Interpolation.

Isentropenbeziehungen:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\kappa} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}$$

a) minimales Flächenverhältnis bei $p_A = p_\infty$.

Impuls: $\rho_A u_A^2 A = F_S = G \cdot g \rightarrow \frac{\rho_A}{\rho_0} \frac{u_A^2}{a_A^2} \frac{a_A^2}{a_0^2} \rho_0 a_0^2 = \frac{G g}{A}$



$\rightarrow \frac{p_A}{p_0} Ma_A^2 \cdot \kappa p_0 = \frac{G \cdot g}{A}$ (*)

Energie: $\frac{\kappa}{\kappa-1} R T_0 = \frac{\kappa}{\kappa-1} R T_A + \frac{1}{2} u_A^2$

$\rightarrow \frac{u_A^2}{\kappa R T_A} = Ma_A^2 = \frac{2}{\kappa-1}\left(\frac{T_0}{T_A} - 1\right) = \frac{2}{\kappa-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_A}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right]$

einsetzen in (*): $\frac{2\kappa}{\kappa-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_A}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] p_A = \frac{G \cdot g}{A}$; $p_A = p_\infty$

$\rightarrow \frac{p_A}{p_0} = \left[\frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{G g}{A \cdot p_A} + 1\right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = 0.21 \rightarrow \frac{A^*}{A} = 0.75$ (Tabelle)

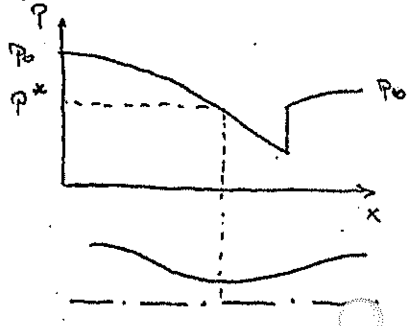
b) Ausströmen mit Überschallgeschwindigkeit

Impuls: $\rho_A u_A^2 A + (p_A - p_\infty) A = G \cdot g$

$\rightarrow \frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_A}{p_0}\left[\left(\frac{p_0}{p_A}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] p_0 + \frac{p_A}{p_0} p_0 = \frac{G \cdot g}{A} + p_\infty$; $\frac{p_A}{p_0} = 0.27$ (Tabelle)

$p_0 = \frac{\frac{G \cdot g}{A} + p_\infty}{\frac{p_A}{p_0}\left\{\frac{2\kappa}{\kappa-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_A}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1\right] + 1\right\}} = \frac{\frac{G \cdot g}{A} + p_a}{1.127} = 4.43$ bar

c)

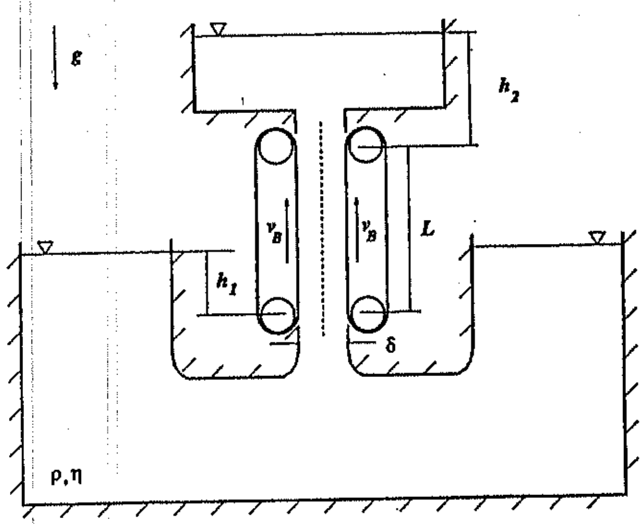


Bei verkleinertem Flächenverhältnis ist der Umgebungsdruck größer als der Austrittsdruck der Düse. Der Umgebungsdruck kann bei isentroper Düsenströmung nicht erreicht werden. Daher muß ein Verdichtungsstoß in der Düse stehen.

April 1994

4. Aufgabe (10 Punkte)

In einem Spalt soll Öl durch Förderbänder von einem niedrigeren auf ein höheres Niveau transportiert werden. Der Spalt habe die Höhe δ und die Breite B. Die Spaltströmung kann auf der Länge L zwischen den Förderbändern als ausgebildet betrachtet werden. Die Zähigkeit des Öls sei η, die Dichte ρ.



a) Leiten Sie das Geschwindigkeitsprofil der Spaltströmung her. Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsprofil und die Schubspannungsverteilung.

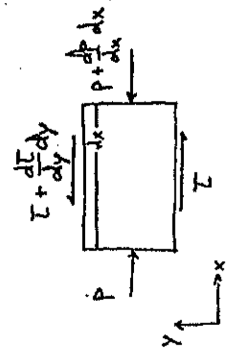
b) Bestimmen Sie die nötige Antriebsleistung.

c) Wie ändert sich qualitativ das Aussehen des Geschwindigkeitsprofils bei verschwindendem Druckgradienten (Begründung).

Gegeben: $L, B, h_1, h_2 > h_1, \delta, v_B, \rho, \eta, g$

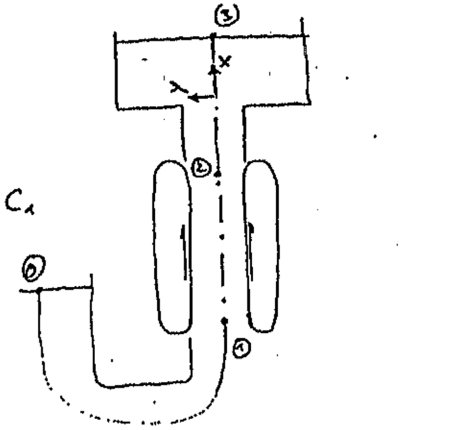
Hinweis: Die Verluste der Strömung in den Behältern bis zum Eintrittsquerschnitt bzw. ab dem Austrittsquerschnitt der Spaltströmung können vernachlässigt werden. Es sei $\rho \frac{v_B^2}{2} \ll \rho g h_1$

Aufg 4 a) Kräftebilanz am Volumenelement



$$-\frac{dp}{dx} - \frac{d\tau}{dy} - \rho g = 0$$

$$\tau = -\left(\rho g + \frac{dp}{dx}\right) y + C_1$$



Bernoulli von 0 – 1 verlustbehaftet

$$p_a + \rho g h_1 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 (1 + \underbrace{\cancel{\zeta_e}}_{\approx 0}) \;,\; v_1 = O(v_B) \Rightarrow p_1 \approx p_a + \rho g h_1$$

Bernoulli von 2 – 3 verlustbehaftet

$$p_a + \rho g h_2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 (1 + \zeta_a) \;,\; v_2 = O(v_B) \Rightarrow p_2 \approx p_a + \rho g h_2$$

mit Hinweis

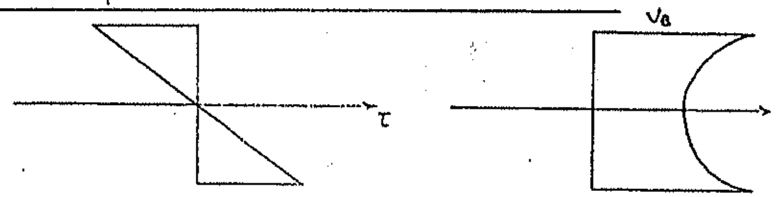
$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p_2 - p_1}{L} = \frac{\rho g (h_2 - h_1)}{L} \;;\quad \tau = -\left[\rho g \left(1 + \frac{(h_2 - h_1)}{L}\right)\right] y + C_1 = -\eta \frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\eta}\left[\rho g \left(1 + \frac{(h_2 - h_1)}{L}\right) \frac{y^2}{2} - C_1 y\right] + C_2$$

Randbedingungen: $y = 0$: $\tau = 0$ (Symmetrie) $\Rightarrow C_1 = 0$

$y = \frac{\delta}{2}$: $u = v_B \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{\eta}\left[\rho g \left(1 + \frac{(h_2 - h_1)}{L}\right) \frac{\delta^2}{8}\right] + v_B$

$$u(y) = \frac{\rho g \delta^2}{2\eta} \left(1 + \frac{(h_2 - h_1)}{L}\right)\left(\frac{y^2}{\delta^2} - \frac{1}{4}\right) + v_B \quad \text{für } |y| \leq \frac{\delta}{2}$$



b) $\mathbb{P} = v_B (-\tau_w) B L = \underline{v_B \rho g \left(1 + \frac{(h_2 - h_1)}{L}\right) \frac{\delta}{2} B L}$

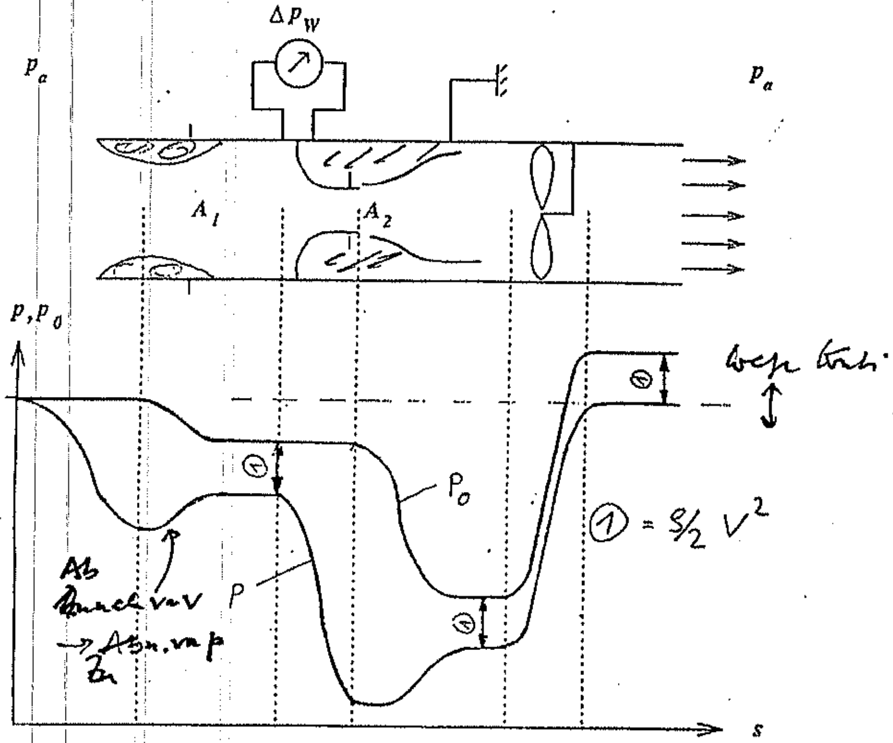
c) qualitativ keine Änderung; das Maximum der Parabel relativ zum Wert der Bandgeschwindigkeit wird kleiner. Begründung:

April 1994

3. Aufgabe (13 Punkte)

$p_0 = p + \frac{\rho}{2} v^2 + \cancel{\rho g z} + \Delta p_V$

Der Volumenstrom eines Lüftungsgebläses wird mit einer Düse gemessen.



a) Skizzieren Sie den Verlauf des statischen und des Gesamtdrucks längs der Rohrachse in das vorgegebene Diagramm.

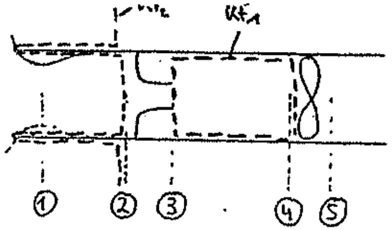
b) Bestimmen Sie den Volumenstrom $\dot{Q}$.

c) Bestimmen Sie den statischen Druck p_4 vor dem Gebläse.

d) Bestimmen Sie die Haltekraft und die Gebläseleistung.

Gegeben: $\rho, p_a, \Delta p_W > 0, A_1, A_2$.

Aufg 3 b) Bernoulli, verlustl. 2 → 3



$$\dot{Q} = u_2 A_1 = u_3 A_2 \; ; \; p_2 + \frac{\rho}{2} u_2^2 = p_3 + \frac{\rho}{2} u_3^2$$

$$\Delta p_W = p_2 - p_3 = \frac{\rho}{2} u_3^2 \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)$$

$$u_3 = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)} \frac{2 \Delta p_W}{\rho}} \; , \quad \underline{\dot{Q} = \sqrt{\frac{1}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)} \frac{2 \Delta p_W}{\rho}} \; A_2}$$

c) Impulssatz für das Totwassergebiet 3 → 4 KF_1

$$-\rho u_3^2 A_2 + \rho u_4^2 A_1 = (p_3 - p_4) A_1$$

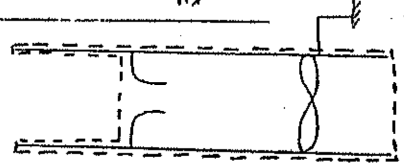
Impulssatz für Einströmseite 0 → 2 unendlich große KF_2

$$\rho u_2^2 A_1 = (p_a - p_2) A_1 \Rightarrow p_2 = p_a - \rho u_2^2 \; , \; p_3 = p_2 - \Delta p_W$$

$$\Rightarrow \quad p_4 = p_a - \rho u_2^2 - \Delta p_W + \rho u_3^2 \frac{A_2}{A_1} - \rho u_4^2$$

$$\underline{p_4 = p_a - \Delta p_W - \left(2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\right) \frac{2 \Delta p_W}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}}$$

d) Impulssatz f. Haltekraft KF_3



$$-\rho u_2^2 A_1 + \rho u_5^2 A_1 = (p_2 - p_a) A_1 + F_s$$

$$\Rightarrow \quad F_s = \rho u_2^2 A_1 = \underline{\frac{2 \Delta p_W}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)} \frac{A_2^2}{A_1}}$$

$$P = \dot{Q} (p_{05} - p_{04}) = \dot{Q} \left(p_a + \frac{\rho}{2} u_5^2 - p_4 - \frac{\rho}{2} u_4^2\right)$$

$$\underline{P = \Delta p_W \left(1 + \left(2\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)\right) \frac{2}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right)}\right) \sqrt{\frac{2 \Delta p_W}{\left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2\right) \rho}} \; A_2}$$

- April 1994

4

[Auf]gabe

a) Kräftegleichgewicht

vorher: $F_G = \rho_W g A h_1$ ① (1)

nachher: $F_G - \rho_{\ddot{O}l} \tau_{\ddot{O}l} g = \rho_W g A (h_2 - h_{\ddot{O}l}) + \rho_{\ddot{O}l} g A h_{\ddot{O}l}$ (2) ①

Ölvolumen: $\tau_{\ddot{O}l} = (A_S - A) h_{\ddot{O}l}$ ①

①

(1) − (2): $\rho_{\ddot{O}l} g (A_S - A) h_{\ddot{O}l} = \rho_W g A (h_1 - h_2) + (\rho_W - \rho_{\ddot{O}l}) g A h_{\ddot{O}l}$

$\Rightarrow h_2 = h_1 + h_{\ddot{O}l}\left[1 - \frac{\rho_{\ddot{O}l}}{\rho_W} - \left(\frac{A_S}{A} - 1\right)\frac{\rho_{\ddot{O}l}}{\rho_W}\right]$

$\Rightarrow \underline{\underline{h_2 = h_1 + h_{\ddot{O}l}\left(1 - \frac{\rho_{\ddot{O}l}}{\rho_W}\frac{A_S}{A}\right)}}$ (3) ①

b) Wasservolumen = konstant

① $\Rightarrow A_S H_1 - A h_1 = A_S (H_2 - h_{\ddot{O}l}) - A (h_2 - h_{\ddot{O}l})$ ①

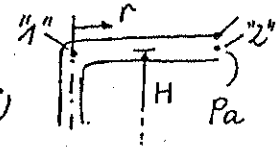
$\Rightarrow H_2 - H_1 = \frac{A}{A_S}(h_2 - h_1) + h_{\ddot{O}l}\left(1 - \frac{A}{A_S}\right)$

$\overset{(3)}{\Rightarrow} H_2 - H_1 = \frac{A}{A_S} h_{\ddot{O}l}\left(1 - \frac{\rho_{\ddot{O}l}}{\rho_W}\frac{A_S}{A}\right) + h_{\ddot{O}l}\left(1 - \frac{A}{A_S}\right)$

$\Rightarrow \underline{\underline{H_2 - H_1 = h_{\ddot{O}l}\left(1 - \frac{\rho_{\ddot{O}l}}{\rho_W}\right)}}$ ①

2. Aufgabe

a) Bernoulli (rotierendes Bezugssystem):



$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z - \frac{1}{2}\rho \omega^2 r^2 = const.$ ①

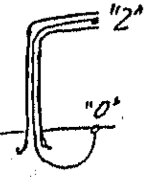
Rohr mit konstantem Querschnitt $\Rightarrow v = const.$ ①

$\Rightarrow p_{min} \overset{①}{=} p(r=0; z=H) \overset{①}{=} p_D$

Bernoulli "1" → "2": $p_D + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g H = p_a + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g H - \frac{1}{2}\rho \omega_{max}^2 R^2$

$\Rightarrow \underline{\underline{\omega_{max} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2}{\rho}(p_a - p_D)}}}$ ①

b) Bernoulli, instationär "0" → "2"



$\rho \int_L \frac{\partial v}{\partial t} ds + p_a + \rho g H + \frac{1}{2}\rho v^2 - \frac{1}{2}\rho \omega^2 R^2 = p_a$ ①

$L^2 \gg A$; $v = v(t)$ $\Rightarrow \int_L \frac{\partial v}{\partial t} ds = L \frac{dv}{dt}$

$\Rightarrow L\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}v^2 + gH - \frac{1}{2}\omega^2 R^2 = 0$ (1)

$t = 0: v = 0$ ①; Bedingung für Fördern: $\frac{dv}{dt} > 0$ ①

$\Rightarrow \frac{1}{2}\omega^2 R^2 - gH > 0 \Rightarrow \underline{\underline{\omega_{min} = \frac{1}{R}\sqrt{2gH}}}$ ①

c) (1) $\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2L}(\omega^2 R^2 - 2gH - v^2)$

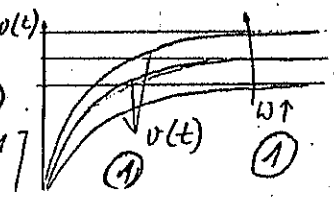
stationäre Endgeschwindigkeit: $\frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v_{Stat} = \sqrt{\omega^2 R^2 - 2gH}$

$\Rightarrow \frac{dv}{v_{Stat}^2 - v^2} = \frac{dt}{2L}$ ①; Integration: $\frac{1}{2 \cdot v_{Stat}} \ln \frac{v_{Stat} + \tilde{v}}{v_{Stat} - \tilde{v}}\Big|_0^{v(t)} = \frac{t}{2L}$

$\Rightarrow \ln \frac{v_{Stat} + v(t)}{v_{Stat} - v(t)} = \ln\left[\frac{2 v_{Stat}}{v_{Stat} - v(t)} - 1\right] = \frac{v_{Stat}}{L} t$ ①

$\Rightarrow \frac{2 v_{Stat}}{v_{Stat} - v(t)} = \exp\left(\frac{v_{Stat}}{L} \cdot t\right) + 1$ ①

$\Rightarrow v(t) = v_{Stat}\left[1 - 2\left(\exp\left(\frac{v_{Stat} t}{L}\right) + 1\right)^{-1}\right]$

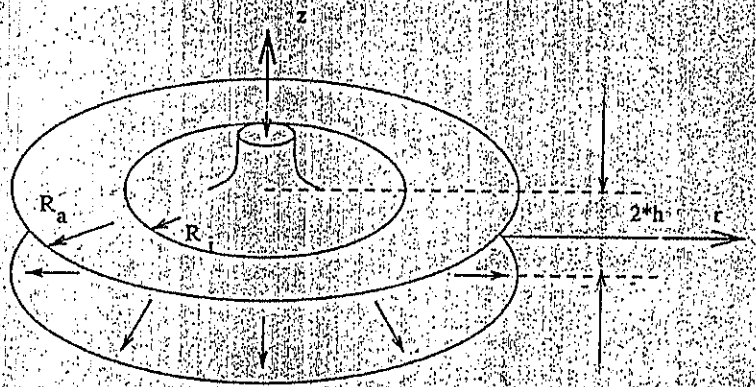


3. Aufgabe (16 Punkte)

Zwischen zwei horizontalen Platten mit dem Abstand $2h$ strömt ein inkompressibles (Dichte ρ), zähes (Zähigkeit η) Fluid stationär radial nach außen. Der Druck ändere sich vom Radius R_i bis zum Radius R_a um Δp. Die Kontinuitätsgleichung und die radiale Impulsgleichung lauten:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho r v_r)}{\partial r}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0$$

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial r}+\eta\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right)$$



a) Vereinfachen Sie die Gleichungen für die betrachtete Strömung für den Fall der schleichenden Strömung ($Re(\frac{h}{R_a-R_i})^2 \ll 1$). Die charakteristische Länge in der Reynoldszahl ist die Differenz der Radien.

b) Skizzieren Sie den Druckverlauf als Funktion von r.

c) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsverlauf $v_r(r,z)$.

Gegeben: $R_i, R_a, h, \eta, \Delta p$, alle notwendigen Referenzgrößen

---

9. Aufgabe a) $v_z = 0$; $\rho = \text{const}$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r v_r)}{\partial r} = 0$$

$$\rho\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}$$

$$\bar{v}_r = \frac{v_r}{v_{ref}};\ \bar{r} = \frac{r}{R_a-R_i};\ \bar{z} = \frac{z}{h};\ \bar{p} = \frac{p}{\Delta p}$$

$$\rho\frac{v_{ref}^2}{R_a-R_i}\bar{v}_r\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \bar{r}} = -\frac{\Delta p}{R_a-R_i}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \eta\frac{v_{ref}}{h^2}\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial \bar{z}^2}$$

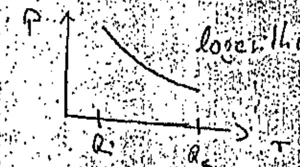
$$\bar{v}_r\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \bar{r}} = -\frac{\Delta p}{\rho v_{ref}^2}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{r}} + \frac{\eta}{\rho v_{ref}}\frac{R_a-R_i}{h^2}\frac{\partial^2 \bar{v}_r}{\partial \bar{z}^2}$$

$O(1)$ $\qquad O(?)$ $\qquad \gg 1$ (A.S.)

$$\rightarrow \frac{\partial p}{\partial r} = \eta\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} = \frac{\eta}{r}\frac{\partial^2 v_r r}{\partial z^2} = \frac{\eta}{r}\frac{d^2 v_r r}{dz^2}$$

b) $dp = C\frac{dr}{r}$ Fluid strömt radial nach außen

$$\frac{d^2(v_r r)}{dz^2} < 0$$



logarithmischer Verlauf

$$p(r) = p(R_i) + \eta\frac{\partial^2 r v_r}{\partial z^2}\ln\frac{r}{R_i}$$

c) $\int_{R_i}^{R_a} dp = \Delta p = \eta\frac{d^2(r v_r)}{dz^2}\ln\frac{R_a}{R_i}$; 1. Integration: $\frac{d(r v_r)}{dz} = \frac{\Delta p}{\eta\ln\frac{R_a}{R_i}}z + C_1$

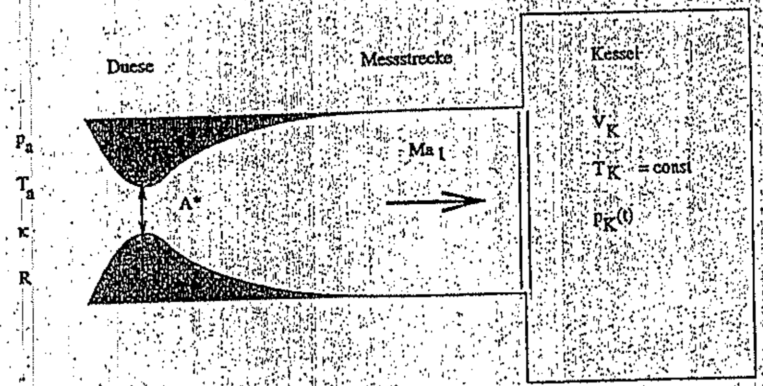
2. Integration: $r v_r = \frac{\Delta p}{2\eta\ln\frac{R_a}{R_i}}z^2 + C_1 z + C_2$

R.B.: $\left.\begin{array}{l} z=h \\ z=-h \end{array}\right\} \rightarrow v_r = 0 \rightarrow C_1 = 0;\ C_2 = -\frac{\Delta p\, h^2}{2\eta\ln\frac{R_a}{R_i}}$

$v(r,z) = \frac{\Delta p}{\ldots}\ \frac{1}{r}(z^2-h^2)$

8. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Überschallwindkanal besteht aus einer Lavaldüse, einer Meßstrecke und einem großen Kessel mit dem Volumen V_K. Die Luft wird aus der Umgebung (p_a, T_a) durch die Lavaldüse und die Meßstrecke in den Kessel angesaugt. Die Machzahl in der Meßstrecke während der Meßzeit beträgt Ma_1. Der Kessel sei zu Beginn eines Versuches evakuiert $(p_K(t=0) \ll p_a)$. Am Ende der Meßzeit (Δt) steht am Übergang von der Meßstrecke zum Kessel ein Verdichtungsstoß. Bis dahin ist die Strömung ungestört.



a) Bestimmen Sie den Massenstrom $\dot m$ während der Meßzeit Δt.

b) Berechnen Sie die Meßzeit Δt.

Gegeben: $p_a, T_a, \kappa, R, A^*, Ma_1, V_K, T_K = const., p_k(t=0) \ll p_a$

Hinweis:

Isentropenbeziehungen

$$\frac{T_a}{T_b} = \left(\frac{\rho_a}{\rho_b}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{p_a}{p_b}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Druckverhältnis über den senkrechten Verdichtungsstoß

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\kappa}{\kappa+1}(Ma_1^2 - 1)$$

8. Aufgabe

a) $\dot m = \rho^* a^* A^* = \frac{\rho^*}{\rho_a}\rho_a \sqrt{\kappa R T_a \frac{T^*}{T_a}}\, A^*$

Energiesatz: $c_p T_a = c_p T + \frac{1}{2}u^2 \rightarrow \frac{T_a}{T} = 1 + \frac{1}{2}(\kappa-1)M^2$

$c_p = \frac{\kappa}{\kappa-1}R$

$M = M^* = 1 \rightarrow \frac{T_a}{T^*} = 1 + \frac{1}{2}(\kappa-1) = \frac{\kappa+1}{2} \rightarrow \frac{\rho_a}{\rho^*} = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^{1/\kappa-1}$

$$\dot m = \frac{p_a}{RT_a} A^* \sqrt{\kappa R T_a}\cdot\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}+\frac{1}{2}} = \frac{p_a}{RT_a} A^* \sqrt{\kappa R T_a}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}$$

b) $\Delta m = \dot m \Delta t = V_K\,(\rho(1) - \rho(0))$

$= \frac{V_K}{RT_K}(p(1) - p(0))$

$p(1)$ nach dem Stoß

Vor dem Stoß: $p_1(1) = p_a\left(\frac{T_1}{T_a}\right)^{\kappa/\kappa-1} = \frac{p_a}{\left(1+\frac{1}{2}(\kappa-1)M^2\right)^{\kappa/\kappa-1}}$

$$p(1) = p_1(1)\frac{p_2}{p_1} = p_a\frac{1+\frac{2\kappa}{\kappa+1}(M_1^2-1)}{\left[1+\frac{1}{2}(\kappa-1)M_1^2\right]^{\kappa/\kappa-1}}$$

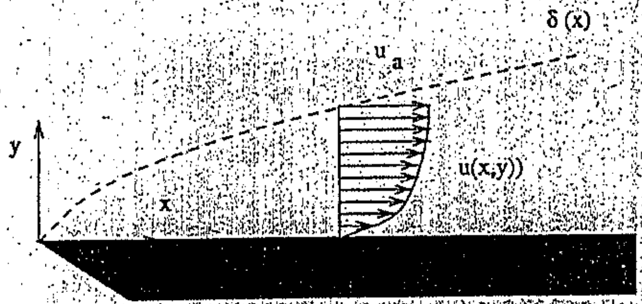
$$\rightarrow \Delta t = \frac{V_K/RT_K}{\frac{p_a}{RT_a}A^*\sqrt{\kappa R T_a}\left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)}}}\left(p_a\frac{1+\frac{2\kappa}{\kappa+1}(M_1^2-1)}{\left(1+\frac{1}{2}(\kappa-1)M_1^2\right)^{\kappa/\kappa-1}} - p(0)\right)$$

7. Aufgabe (13 Punkte)

An einer parallel angeströmten ebenen Platte kann das Profil der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit mit dem Fourieransatz

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0 + a_1 \sin(a_2 \frac{y}{\delta})$$

beschrieben werden.



Bestimmen Sie

a) die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2.

b) die Verdrängungsdicke δ_1 in Abhängigkeit von der Grenzschichtdicke δ.

c) die Grenzschichtdicke δ als Funktion von x mit der Integralbeziehung von Kármán-Pohlhausen.

d) den Reibungswiderstand auf der Plattenoberseite einer Platte der Länge L und der Breite B.

Gegeben: η, ρ, u_a, B, L

Hinweis:

Die Integralbeziehung nach von Kármán-Pohlhausen lautet:

$$\frac{d\delta_2(x)}{dx} + \frac{(2\delta_2(x) + \delta_1(x))}{u_a(x)} \frac{du_a(x)}{dx} - \frac{\tau_w(x)}{\rho u_a^2(x)} = 0$$

$$\int \sin^2(ax)dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a}\sin(2ax)$$

7. Aufgabe

a) R.B.: $y=0$: $\frac{u}{u_a} \to a_0 = 0$

$\frac{y}{\delta}=1$: $\frac{u}{u_a} = 1 \to a_1 \sin a_2 = 1$

Wandbdg. $\frac{y}{\delta}=0$: $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \to$ identisch erfüllt

$\frac{y}{\delta}=1$: $\frac{\partial u/u_a}{\partial y/\delta} = 0 \to a_2 = \frac{\pi}{2} \to a_1 = 1 \to \frac{u(x,y)}{u_a(x)} = \sin(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta})$

b) $\delta_1 = \delta \int_0^1 1 - \sin(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}) \, d(\frac{y}{\delta}) = \delta \left[\frac{y}{\delta} + \frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}) \right]_0^1$

$= \delta \left[1 - \frac{2}{\pi} \right]$

c) $\frac{\tau_w}{\rho u_a^2} = \frac{\eta \frac{\partial u}{\partial y}\big|_{y=0}}{\rho u_a^2} = \frac{\eta \frac{u_a}{\delta}}{\rho u_a^2} \frac{\partial(u/u_a)}{\partial(y/\delta)}\Big|_0 = \frac{\pi}{2}\eta \frac{u_a}{\delta}\frac{1}{\rho u_a^2} = \frac{\pi \eta}{2\rho u_a \delta}$

$\delta_2 = \delta \int_0^1 \frac{u}{u_a}(1 - \frac{u}{u_a}) \, d\frac{y}{\delta} = \delta \int_0^1 \sin(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}) - \sin^2(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}) \, d\frac{y}{\delta}$

$= \delta \left[-\frac{2}{\pi}\cos(\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}) - \frac{1}{2}\frac{y}{\delta} + \frac{2}{\pi}\sin(\pi \frac{y}{\delta}) \right]_0^1 = (\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2})\delta$

$\frac{du_a}{dx} = 0 \to (\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2})\frac{d\delta}{dx} = \frac{\pi \eta}{2\rho u_a \delta} \to \delta d\delta = \frac{\pi}{2}\frac{2\pi}{4-\pi}\frac{\eta}{\rho u_a}dx$

$\to \frac{1}{2}\delta^2 = \frac{\pi^2}{4-\pi}\frac{\eta}{\rho u_a}x \to \delta = \sqrt{\frac{2\pi^2}{4-\pi}}\frac{x}{\sqrt{Re_x}}$

d) $F_w = B \int_0^L \eta \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_0 dx$

$F_w = B \int_0^L \frac{\pi}{2}\eta\frac{u_a}{\delta}dx = \frac{\pi}{2}B\eta u_a \sqrt{\frac{4-\pi}{2\pi^2}} \int_0^L \sqrt{\frac{\rho u_a x}{\eta}}\frac{1}{x}dx$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4-\pi}{2}} B \eta u_a \sqrt{\frac{\rho u_a}{\eta}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \sqrt{\frac{4-\pi}{2}} B \eta u_a \sqrt{\frac{\rho u_a}{\eta}} \sqrt{x}\Big|_0^L$

$= \sqrt{\frac{4-\pi}{2}} B \eta u_a \sqrt{Re_L}$

6. Aufgabe (13 Punkte)

Untergehende Schiffe drehen sich häufig um die vertikale Achse. Dadurch wird dem nachfließenden Wasser an der Oberfläche eine Rotation überlagert. In genügendem Abstand der Unglücksstelle kann das horizontale Geschwindigkeitsfeld potentialtheoretisch beschrieben werden.

a) Wählen Sie aus den gegebenen komplexen Strömungsfunktionen (die Konstanten seien bekannt) diejenigen aus, die die betrachtete Strömung beschreiben. Skizzieren Sie die Stromlinien dieser Strömung.

b) Wird die oben betrachtete Strömung durch eine Parallelströmung ($u = u_\infty$, $v = 0$) überlagert, die ein zweites herannahendes Schiff beschreiben soll, so ergibt sich ein Staupunkt. Berechnen Sie dessen Lage. Stellen Sie eine Bedingung auf, sodaß der Staupunkt auf der Geraden $y = x$ liegt.

c) Berechnen Sie den Wasserlinienverlauf für die Strömung in b) auf der x-Achse. Die Wasserhöhe in großem Abstand sei H_∞.

Gegeben: u_∞, g, H_∞

Bekannte komplexe Strömungsfunktionen:

Parallelströmung: $F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$

Potentialwirbel: $F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$

Quelle/Senke: $F(z) = \frac{E}{2\pi}\ln z$

Staupunktströmung: $F(z) = az^2$

Hinweis:

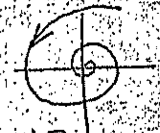
$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \qquad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r}$$

6. Aufgabe

a) Senke ($E<0$) – Potentialwirbel

$$F(z) = \frac{E}{2\pi}\ln z - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$$

$\Gamma > 0$: linksdrehende, nach innen gerichtete, logarithmische Spiralen



b) $$F(z) = u_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln z - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$$

$$z = x + iy = re^{i\Theta}, \quad x = r\cos\Theta, \quad y = r\sin\Theta$$

$$\psi = \text{imag}(F) = u_\infty r\sin\Theta + \frac{E\Theta}{2\pi} - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\Theta} = u_\infty\cos\Theta + \frac{E}{2\pi r} = 0 \to \cos\Theta = -\frac{E}{2\pi r u_\infty}$$

$$v_\Theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -u_\infty\sin\Theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0 \to \sin\Theta = \frac{\Gamma}{2\pi r u_\infty}$$

$$\sin^2\Theta + \cos^2\Theta = 1 \to \frac{E^2+\Gamma^2}{(2\pi r u_\infty)^2} = 1 \to r = \frac{\sqrt{E^2+\Gamma^2}}{2\pi u_\infty}$$

$$\Theta = \arccos\left(\frac{-E}{\sqrt{E^2+\Gamma^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{\Gamma}{\sqrt{E^2+\Gamma^2}}\right)$$

$$y = x \to \sin\Theta = \cos\Theta \to E = -\Gamma$$

c) Bernoulli: $p_a + \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 + \rho g H_\infty = p_a + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g H$

$$\to H = H_\infty + \frac{u_\infty^2 - u^2}{2g} = H_\infty + \frac{u_\infty^2 - (v_r^2 + v_\Theta^2)}{2g}$$

$$= H_\infty + \frac{1}{2g}\Big[u_\infty^2 - \left(u_\infty^2\cos^2\Theta + \frac{E u_\infty\cos\Theta}{\pi r} + \frac{E^2}{(2\pi r)^2}\right) - \left(u_\infty^2\sin^2\Theta - \frac{\Gamma u_\infty\sin\Theta}{\pi r} + \frac{\Gamma^2}{(2\pi r)^2}\right)\Big]$$

x-Achse: $\sin\Theta = 0$, $r = |x|$, $\frac{\cos\Theta}{r} = \frac{1}{x}$

" " 1 / $E u_\infty$ $E^2 + \Gamma^2$