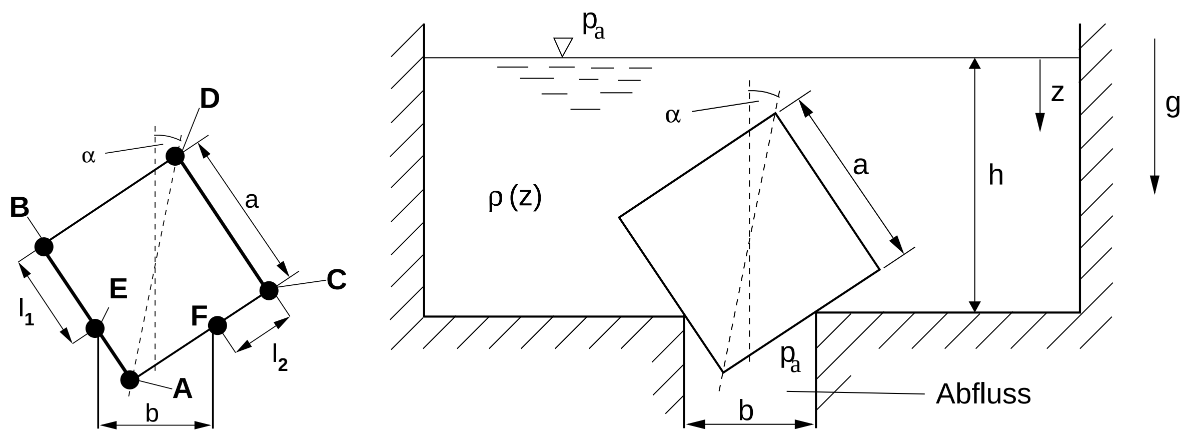
....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

15. 03. 2008

1. Aufgabe (15 Punkte)

Ein Behälter ist mit einem Fluid der Dichte $\varrho(z) = \varrho_0 + kz$ gefüllt (Füllhöhe h). Der rechteckige Abfluss (Breite b, Tiefe a) des Behälters ist durch einen um den Winkel α zur Vertikalen geneigten Würfel (Kantenlänge a, Gewicht G) versperrt.



a) Bestimmen Sie die Größen l_1 und l_2.

b) Führen Sie Variablen für die z-Koordinaten der Eckpunkte des Würfels ein, und bestimmen Sie diese mit Hilfe der gegebenen Größen.

c) Welche Kraft F ist notwendig, um den Abfluss zu öffnen?

Gegeben:

$p_a, \quad \varrho_0, \quad k, \quad h, \quad a, \quad b, \quad G, \quad \alpha, \quad g$

$a > b, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$

Hinweis:

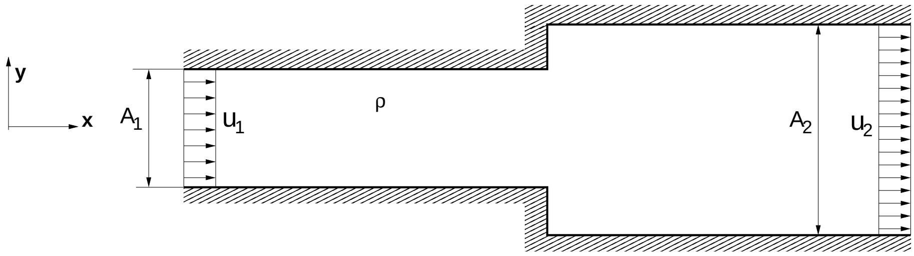
Die in den Aufgabenteilen a) und b) bestimmten Größen können in Aufgabenteil c) als gegeben betrachtet werden und müssen nicht mehr ersetzt werden.

2. Aufgabe (13 Punkte)

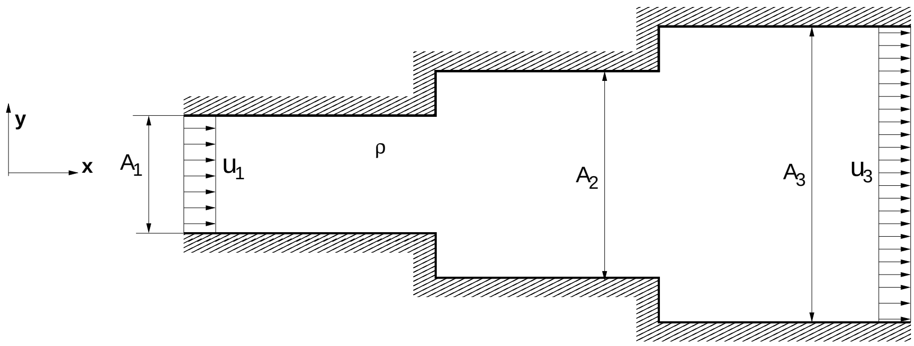
Betrachtet wird die laminare Strömung durch ein Rohr kreisförmigen Querschnitts mit vernachlässigbarer Wandreibung.

a) Benennen Sie die physikalischen Größen, deren Erhaltung Sie zur Lösung der Aufgabe formulieren. Leiten Sie eine Gleichung für den Verlustbeiwert $\zeta = \frac{\Delta p_{v1,2}}{\frac{\varrho}{2}u_1^2}$ für eine unstetige Rohrerweiterung in Abhängigkeit des Querschnittsverhältnisses $\frac{A_1}{A_2}$ her.

b) Bestimmen Sie den Wert für ζ für das gegebene Querschnittsverhältnis.



c) Leiten Sie eine Gleichung für den Gesamtverlustbeiwert $\zeta = \frac{\Delta p_{v1,3}}{\frac{\varrho}{2}u_1^2}$ für zwei hintereinandergeschaltete Rohrerweiterungen in Abhängigkeit der Querschnittsverhältnisse $\frac{A_1}{A_2}$ und $\frac{A_1}{A_3}$ her.



d) Bestimmen Sie für diesen Fall den Wert für ζ für die gegebenen Querschnittsverhältnisse.

e) Wie groß müsste im Fall c) das Querschnittsverhältnis $\frac{A_1}{A_2}$ sein, damit der Verlustbeiwert minimal wird? Bei der Bestimmung des Extremwerts muss sowohl die notwendige als auch die hinreichende Bedingung überprüft werden.

Gegeben:

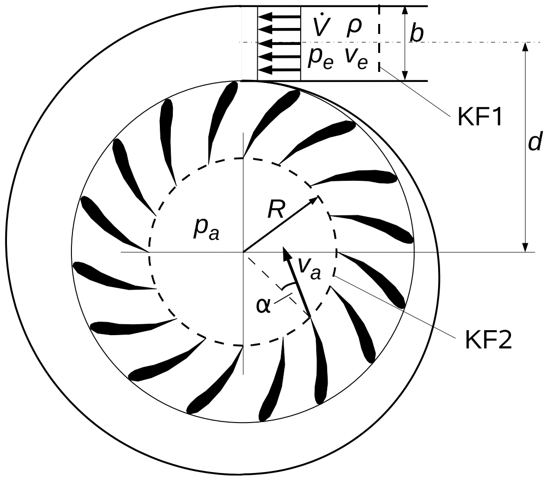
$\varrho, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{3}, \quad \frac{A_1}{A_3} = \frac{1}{2}$

Hinweis:

Definition des Verlustterms $\Delta p_{vi,j} = p_{0i} - p_{0j}, \quad p_0$: Gesamtdruck

3. Aufgabe (8 Punkte)

Der in der Skizze dargestellte Leitapparat einer Wasserturbinenanlage besteht aus einem Spiralgehäuse und einem Leitgitter, die fest miteinander verbunden sind. Das Spiralgehäuse ist so ausgebildet, dass das inkompressible Fluid der Dichte ϱ das Leitgitter mit konstanter Geschwindigkeit unter dem konstanten Austrittswinkel α verlässt. Die Strömung ist stationär und am Austritt unabhängig vom Umfangswinkel.



a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten v_e und v_a sowie die Komponenten von v_a normal und tangential zur Kontrollfläche KF2 als Funktion des Volumenstroms $\dot{V}$.

b) Bestimmen Sie alle Komponenten des Moments, das die Strömung auf den gesamten Leitapparat ausübt, als Funktion der gegebenen Größen. Betrachten Sie dazu die gestrichelt eingezeichneten Kontrollflächen KF1 und KF2.

Gegeben:

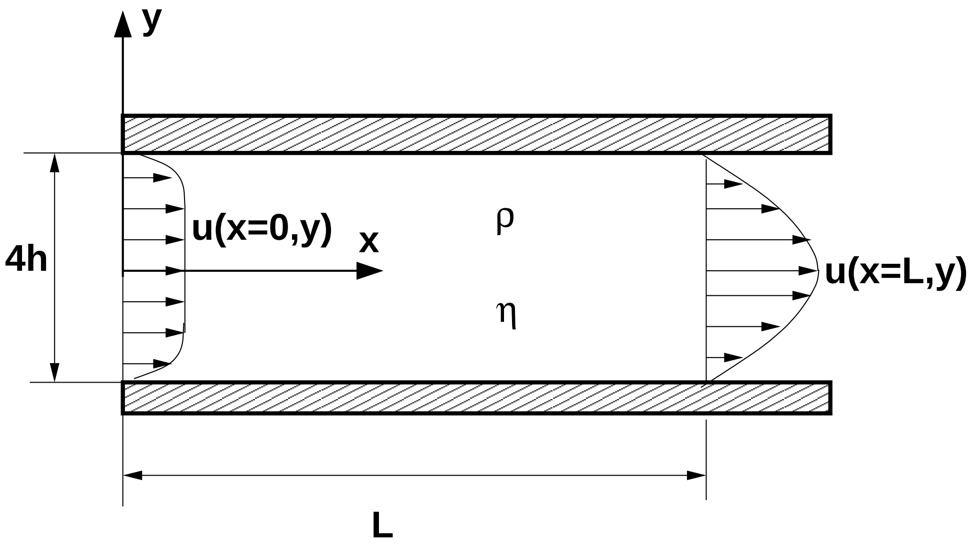
$p_e, \quad p_a, \quad \dot{V}, \quad R, \quad \alpha, \quad b, \quad d, \quad h, \quad \varrho$

Hinweis:

Betrachten Sie das Problem als eben mit der Einheitstiefe h.
Reibungs- und Volumenkräfte sind zu vernachlässigen.

4. Aufgabe (14 Punkte)

Durch einen ebenen Kanal der Höhe $4h$ strömt ein Newtonsches Fluid der Dichte ϱ und der Zähigkeit η. An der Stelle $x = 0$ ist der Verlauf des Geschwindigkeitsprofils $u(y)$ bekannt. Ab der Stelle $x = L$ soll die laminare Strömung stationär und voll ausgebildet sein.



a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x = L, y)$.

b) Bestimmen Sie den Druckverlust Δp zwischen $x = 0$ und $x = L$ unter der Annahme, dass sich die Schubspannung an der Wand linear mit der Koordinate x ändert.

Gegeben:

$h, \quad L, \quad \varrho, \quad \eta, \quad u_m$

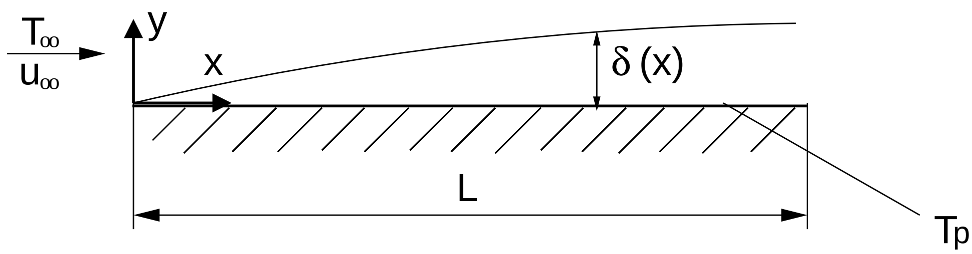
$$u(x=0,y) = \begin{cases} u_m \left(1 - (1 - \frac{y}{h})^2\right) & \text{für} \quad h < y \leq 2h \\ u_m & \text{für} \quad -h \leq y \leq h \\ u_m \left(1 - (1 + \frac{y}{h})^2\right) & \text{für} \quad -2h \leq y < -h \end{cases}$$

Hinweis:

Für $x = konst$ sei $p = konst$.

5. Aufgabe (12 Punkte)

Ein Fluid strömt über eine beheizte Platte. Die Temperatur des Fluids weit entfernt von der Platte sei T_∞, die der Platte T_P.



Die Temperaturverteilung in der Strömung wird durch folgende Erhaltungsgleichung beschrieben:

$$\varrho c_V \frac{dT}{dt} = \lambda \nabla^2 T - p(\nabla \cdot \vec{v})$$

a) Für welche physikalische Größe stellt diese Gleichung die Erhaltungsgleichung dar und für welche Strömungen welcher Fluide (Stoffeigenschaften) ist diese Gleichung gültig?

b) Ermitteln Sie für diese Gleichung Kennzahlen mit der Methode der Differentialgleichung.

c) Vereinfachen Sie die oben angegebene Differentialgleichung für eine zweidimensionale, stationäre, inkompressible Grenzschichtströmung ($\delta \ll L$) mit konstanten Stoffwerten und formulieren Sie diese dimensionslos.

Gegeben:

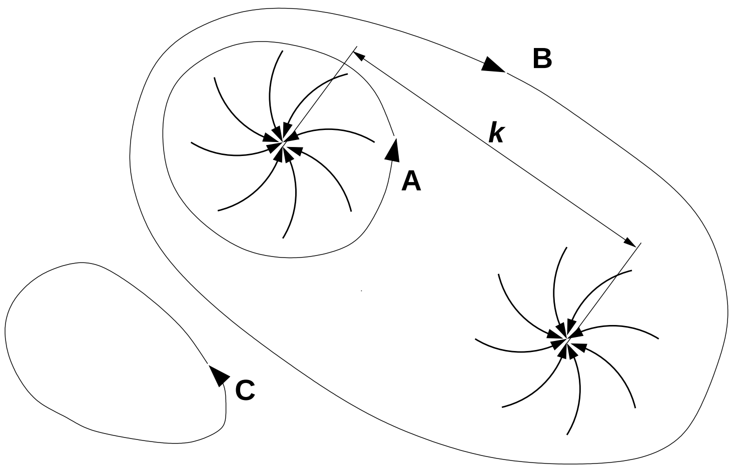
Alle nötigen Referenzgrößen.

Hinweis:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T$$

6. Aufgabe (12 Punkte)

Das ebene Strömungsfeld zweier gleichstarker Wirbelstürme, die sich umeinander drehen, soll mittels der Potentialtheorie untersucht werden. Der Abstand der beiden Wirbelstürme beträgt k.



a) Bestimmen Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ mit Hilfe der gegebenen Elementarfunktionen. Geben Sie das Vorzeichen der Konstanten explizit an.

b) Hat diese Strömung Staupunkte? Begründen Sie kurz (ohne Rechnung) Ihre Antwort.

c) Bestimmen Sie zum Zeitpunkt der Abbildung in Abhängigkeit von den angegeben Konstanten die Winkelgeschwindigkeit ω, mit der sich die beiden Wirbelstürme umeinander drehen. Betrachten Sie hierfür die induzierten Geschwindigkeiten in den Mittelpunkten der beiden Wirbelstürme.

d) Wie ändert sich ω qualitativ mit der Zeit (kurze Begründung).

e) Bestimmen Sie ohne Rechnung für die angegebenen Kurven A, B und C jeweils die Zirkulation.

Gegeben:

k, Konstanten der Elementarfunktionen

Elementarfunktionen:

Parallelströmung:	$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$
Potentialwirbel:	$F(z) = \dfrac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$
Quelle/Senke :	$F(z) = \dfrac{E}{2\pi} \ln z$
Staupunktströmung:	$F(z) = az^2$
Dipol:	$F(z) = \dfrac{M}{2\pi z}$

7. Aufgabe (8 Punkte)

In der Grenzschicht einer mit der Geschwindigkeit u_a längs angeströmten ebenen Platte wird für $x \geq x_0$ durch die Plattenoberfläche mit der Geschwindigkeit $v(x,0) = -\frac{k}{\delta(x)}$ abgesaugt. Das Profil der Tangentialkomponente der Geschwindigkeit soll durch ein Polynom 2. Grades angenähert werden.

$$\frac{u}{u_a} = a_0 + a_1 \frac{y}{\delta} + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

Bestimmen Sie

a) die Koeffizienten a_0, a_1 und a_2.

b) den Verlauf der Grenzschichtdicke $\delta(x)$ für $x \geq x_0$ als Funktion der gegebenen Größen und der Koeffizienten a_0, a_1 und a_2.

Gegeben:

$k, \quad x_0, \quad \delta(x = x_0) = \delta_0, \quad u_a, \quad \varrho, \quad \eta$

Hinweise:

- von Kármánsche Integralbeziehung:
  $$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_a}\frac{du_a}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) = \frac{\tau_W}{\rho u_a^2} + \frac{v(x,0)}{u_a}$$
- x-Impulsgleichung der Grenzschichtgleichungen:
  $$\varrho(\vec{v} \cdot \nabla)u = -\frac{dp}{dx} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

8. Aufgabe (8 Punkte)

a) Zeigen Sie ausgehend von der Erhaltungsgleichung der Masse für stationäre kompressible Strömungen, dass das Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Strömung divergenzfrei ist.

b) Leiten Sie für eine isentrope Strömung ausgehend von der eindimensionalen stationären Eulergleichung eine Beziehung für die differentielle Änderung der Stromdichte ϱu mit der Geschwindigkeit her, so dass $\frac{\mathrm{d}(\varrho u)}{\mathrm{d}u} = f(\varrho, M)$. Diskutieren Sie diese Gleichung für den Über- und Unterschall.

Gegeben:

Stationäre Eulergleichung: $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\varrho}$