Klausur Strömungslehre
09.03.11

1. Aufgabe

a) $F_A = F_G + F_S$

$F_A = n \cdot V_P \cdot \rho_W \cdot g$

$F_G = m_B \cdot g + n \cdot m_P \cdot g$

$F_S = (\rho_W \cdot g \cdot H + p_a)A_1$

$\Rightarrow n \cdot V_P \cdot \rho_W \cdot g = m_B \cdot g + n \cdot m_P \cdot g + (\rho_W \cdot g \cdot H + p_a)A_1$

$$\Rightarrow n = \frac{m_B + (\rho_W \cdot H + p_a/g)A_1}{V_P \cdot \rho_W - m_P}$$

b) $F_A = F_G$

$F_A = V_{L,U} \cdot \rho_W \cdot g$, wobei $V_{L,U} =$ Volumen Luft auf Tiefe H-h bzw. unten

$F_G = m_B \cdot g$

$$\Rightarrow V_{L,U} \cdot \rho_W \cdot g = m_B \cdot g \quad \Rightarrow \quad V_{L,U} = \frac{m_B}{\rho_W}$$

Luftmasse (unten-oben) ist konst.: $m_{L,U} = m_{L,O} \quad \Rightarrow \quad V_{L,U} \cdot \rho_{L,U} = V_{L,O} \cdot \rho_{L,O}$ (1)

Druck oben: $p_{L,O} = p_a$ Druck unten: $p_{L,U} = p_a + \rho_W \cdot g \cdot (H - h)$

Dichte Luft ist nicht gegeben: ideale Gasgleichung $p = \rho \cdot R \cdot T$

$$\Rightarrow \rho_{L,O} = \frac{p_{L,O}}{R_L \cdot T_L} = \frac{p_a}{R_L \cdot T_L} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \rho_{L,U} = \frac{p_{L,U}}{R_L \cdot T_L} = \frac{p_a + \rho_W \cdot g \cdot (H - h)}{R_L \cdot T_L} \quad (3)$$

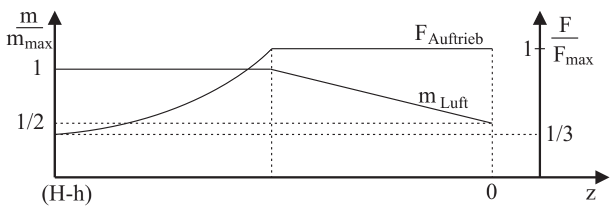
aus (1): $V_{L,O} = V_{L,U} \cdot \frac{\rho_{L,U}}{\rho_{L,O}}$

mit (2), (3) und $V_{L,U}$: $V_{L,O} = \frac{m_B}{\rho_W} \cdot \frac{p_a + \rho_W \cdot g \cdot (H - h)}{p_a}$

Volumenstrom: $\dot{V} = \frac{V_{L,O}}{t}$ mit Verzögerungszeit: $t_X \quad \Rightarrow t_p = \frac{V_{L,O}}{\dot{V}} + t_X$

$$\Rightarrow t_p = \frac{\frac{m_B}{\rho_W} \cdot \frac{p_a + \rho_W \cdot g \cdot (H-h)}{p_a}}{\dot{V}} + t_X$$

c) Die Masse bleibt konstant bis das maximale Volumen des Ballons erreicht ist. Weitere Ausdehnung der Luft führt zum Austritt und reduziert damit linear mit der Steighöhe die Masse.

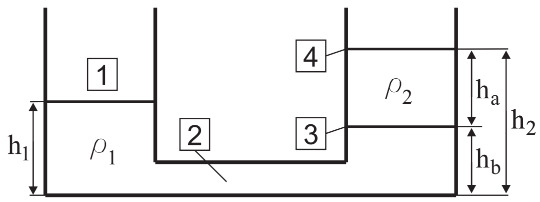


Der Auftrieb nimmt, bis der Ballon vollständig mit Luft gefüllt ist, zu. Danach bleibt das vom Ballon verdrängte Wasservolumen und somit auch der Auftrieb konstant.

2. Aufgabe

a) $F = (p_a + \varrho_1 g H_1 - p_a - \varrho_2 g H_2)\dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{\pi d^2 g}{4}(\varrho_1 H_1 - \varrho_2 H_2)$

b) Druckgleichgewicht in 2: $\quad p_a + \varrho_1 g h_1 = p_a + \varrho_2 g h_a + \varrho_1 g h_b \qquad (1)$



gleiches Volumen 1: $\quad \varrho_1 A H_1 = \varrho_1 A h_1 + \varrho_1 A h_b \quad \Rightarrow \quad h_b = H_1 - h_1$

gleiches Volumen 2: $\quad \varrho_2 A H_2 = \varrho_2 A h_a \quad \Rightarrow \quad h_a = H_2$

mit (1): $\quad \varrho_1 g h_1 = \varrho_2 g H_2 + \varrho_1 g (H_1 - h_1)$

$\Rightarrow h_1 = \dfrac{\varrho_2 H_2 + \varrho_1 H_1}{2\varrho_1} \qquad h_2 = H_2 + H_1 - \dfrac{\varrho_2 H_2 + \varrho_1 H_1}{2\varrho_1}$

c) Bernoulli: $3 \to 4$

$$p_3 + \frac{\varrho_2}{2} v_3^2 = p_a + \frac{\varrho_2}{2} v_4^2 + \varrho_2 g h_a$$

Konti:

$$v_3 = v_4 = v_1 \qquad h_a = H_2 \qquad v_2 = v_1 \frac{4A}{\pi d^2} \qquad v_1 = \frac{-dh_1}{dt}$$

Bernoulli: $1 \to 3$

$$p_a + \frac{\varrho_1}{2} v_1^2 + \varrho_1 g h_1 = p_3 + \frac{\varrho_1}{2} v_3^2 + \varrho_1 g h_b + \varrho_1 L \frac{dv_2}{dt}$$

$$\Rightarrow \varrho_1 g h_1 + \varrho_1 L \frac{4A}{\pi d^2} \frac{d^2 h_1}{dt^2} = \varrho_2 g H_2 + \varrho_1 g h_b$$

mit $h_b = H_1 - h_1$

$$\Rightarrow \underbrace{\varrho_1 L \frac{4A}{\pi d^2}}_{a} \frac{d^2 h_1}{dt^2} + \underbrace{2\varrho_1 g}_{b}\, h_1 \underbrace{- g(\varrho_2 H_2 + \varrho_1 H_1)}_{c<0} = 0$$

DGL:

$$a \cdot \ddot{h}_1 + b \cdot h_1 + c = 0$$

d) Hinweis:

$$h(t) = -\frac{c}{b} + C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{b}{a}} t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{a}} t\right)$$

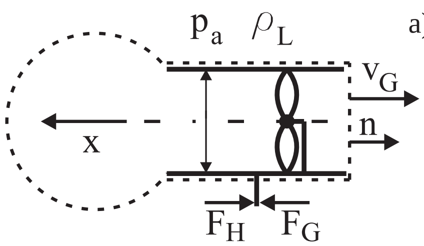
R.B.:

$$h_1(t=0) = H_1 \qquad \sin 0 = 0 \qquad \cos 0 = 1 \qquad \Rightarrow C_2 = H_1 + \frac{c}{b}$$

$$v_1(t=0) = 0 \qquad \Rightarrow C_1 = 0$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{H_1 + H_2}{2} + \frac{H_1 - H_2}{2} \cos\left(\sqrt{\frac{g\pi d^2}{2AL}} t\right)$$

3. Aufgabe

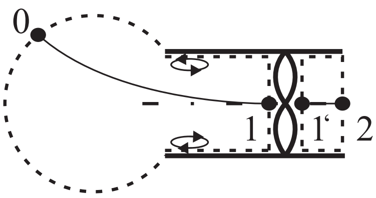


a) Maximale Fahrtgeschwindigkeit bei $\sum F = F_G - F_W = 0$

$F_W = k v_F^2$

x-Impuls: $-\rho_L v_G^2 \frac{\pi d^2}{4} = -F_H = F_G = F_W = k v_F^2$

$\Longrightarrow v_F = \sqrt{\frac{\rho_L \pi d^2}{4k}} \cdot v_G \quad (1)$



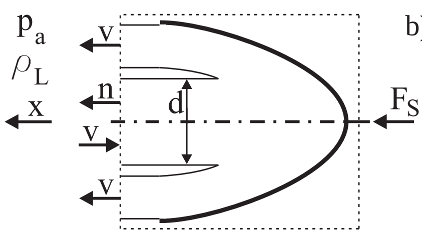
Bernoulli 0 - 1 und 1' - 2: $p_a = p_1 + \frac{1}{2}\rho_L v_1^2 (1+\zeta_E)$ und $p_{1'} = p_a$

$\Delta p_P = p_{1'} - p_1 = p_a - p_a + \frac{1}{2}\rho_L v_1^2 (1+\zeta_E)$

$\Longrightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta p_P}{\rho_L (1+\zeta_E)}} = v_G$ (aus Konti) $\quad (2)$

$P = \dot{V} \Delta p_P \;\Rightarrow\; \Delta p_P = \frac{P}{v_G \cdot \pi \frac{d^2}{4}}$ in (2): $v_G = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot P}{\rho_L (1+\zeta_E) \cdot \pi d^2}}$

in (1): $v_F = \sqrt{\frac{\rho_L \pi d^2}{4k}} \cdot \sqrt[3]{\frac{8 \cdot P}{\rho_L (1+\zeta_E) \cdot \pi d^2}}$



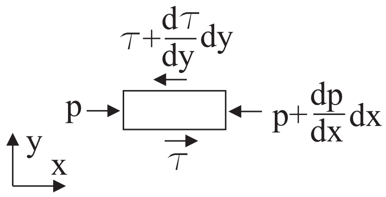
b) $\sum F = F_G - F_S + F_W = 0$

x-Impuls: $\rho_L v_G^2 \frac{\pi d^2}{4} + 2 \cdot \rho_L v_G^2 \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} = F_S$

$F_S = 2 \rho_L v_G^2 \frac{\pi d^2}{4}$

Der Betrag der Geschwindigkeit ist wie bei a). Die Richtung ist entgegengesetzt.

<u>4. Aufgabe</u>



a) Kräftebilanz am Element:

$$\tau dx - (\tau + \frac{d\tau}{dy}dy)dx + pdy - (p + \frac{dp}{dx}dx)dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = -\frac{dp}{dx} \quad \text{mit} \quad \tau = -\eta \frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow \tau = -\frac{dp}{dx}y + C_1 = -\eta\frac{du}{dy}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} - \frac{1}{\eta}C_1 y + C_2$$

$$R.B.:1)\ u(y=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

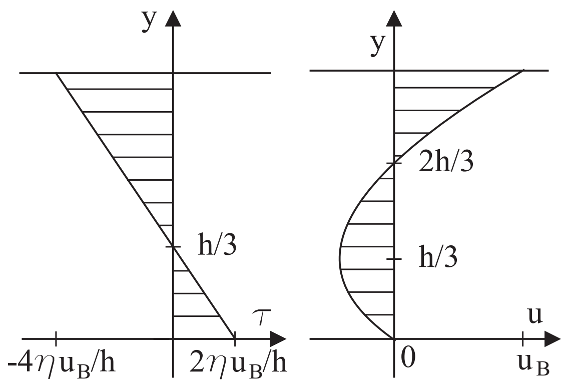
$$2)\ u(y=h) = u_B \quad \Rightarrow \quad u_B = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2} - \frac{1}{\eta}C_1 h \quad \Rightarrow C_1 = -\frac{\eta u_B}{h} + \frac{dp}{dx}\frac{h}{2}$$

$$\Rightarrow u(y) = u_B\frac{y}{h} + \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}(y^2 - hy)$$

$$3)\ \frac{\dot{V}}{B} = 0 = \int_0^h u(y)\,dy = \left[u_B\frac{y^2}{2h} + \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{hy^2}{2}\right)\right]_0^h \quad \Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_B}{h^2}$$

$$\Rightarrow u(y) = u_B\left(3\frac{y^2}{h^2} - 2\frac{y}{h}\right)$$

$$\Rightarrow \tau(y) = \eta u_B\left(\frac{2}{h} - \frac{6y}{h^2}\right)$$



b) Extremwerte:

$$\tau_{max} = \tau(y=0) = 2\frac{\eta u_B}{h}$$

$$\tau_{min} = \tau(y=h) = -4\frac{\eta u_B}{h}$$

$$\tau(y=h/3) = 0 \quad \Rightarrow u_{min}$$

$$u_{max} = u(y=h) = u_B$$

$$u(y=0) = u(y=2/3h) = 0$$

$$u_{min} = u(y=h/3) = -\frac{u_B}{3}$$

c) $P_S = F_W \cdot u_B \quad \text{mit} \quad F_W = \tau_W BL$

$$P_S = 4\eta\frac{u_B}{h}BLu_B = 4\eta\frac{BL}{h}u_B^2$$

$$P_A = P_S + 2F_B u_B = u_B(4\eta BL\frac{u_B}{h} + 2F_B)$$

5. Aufgabe

a) konstanter Querschnitt, inkompressibel, Hinweis: $\dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

In (1): $\dfrac{\partial (r v_r)}{\partial r} = 0 \quad \Rightarrow r v_r = const.$ mit $v_r(r = D/2) = 0 : \quad v_r = 0$

Damit für (2): $-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial r} = 0$

Und (3): $\dfrac{\partial v_z}{\partial t} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\nu}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right)$

b) Einführen der Referenzgrößen:

$\overline{z} = \dfrac{z}{D},\ \overline{r} = \dfrac{r}{D},\ \overline{p} = \dfrac{p}{\Delta p},\ \overline{t} = t \cdot \omega,\ \overline{v_z} = \dfrac{v_z}{U}$ mit $U = U_{Kolben}$

Einsetzen in (3): $U\,\omega \dfrac{\partial \overline{v_z}}{\partial \overline{t}} = -\dfrac{\Delta p}{\rho\, D}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\nu\, U}{D^2 \overline{r}}\dfrac{\partial}{\partial \overline{r}}\left(\overline{r}\dfrac{\partial \overline{v_z}}{\partial \overline{r}}\right) \Bigg| : U\omega$

$$\frac{\partial \overline{v_z}}{\partial \overline{t}} = -\frac{\Delta p}{\rho\, D U \omega}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{z}} + \frac{\nu}{D^2 \omega}\frac{1}{\overline{r}}\frac{\partial}{\partial \overline{r}}\left(\overline{r}\frac{\partial \overline{v_z}}{\partial \overline{r}}\right)$$

$$\Pi_1 = \frac{\Delta p}{U \omega \rho D} = \frac{\Delta p}{\rho U^2}\frac{U}{\omega D} = \frac{Eu}{Sr}$$

$$\Pi_2 = \frac{\nu}{D^2 \omega} = \frac{\nu}{DU}\frac{U}{\omega D} = \frac{1}{Re}\frac{1}{Sr}$$

c) Es werden 3 Gleichungen benötigt:

$$Sr = \frac{D\omega}{U}$$
$$Re = \frac{U\,D}{\nu}$$
$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho\, U^2}$$

Sinusschwingung:

$$s(t) = s_{max}\, sin(\omega\, t)$$
$$U(t) = s_{max}\, \omega\, cos(\omega\, t)$$

$$\Rightarrow \quad U_{max} = s_{max}\, \omega_{max}$$

Einsetzen:

$$Sr_R = \frac{D\omega_{max}}{U_{max}} = \frac{D\omega_{max}}{s_{max}\omega_{max}} = \frac{D}{s_{max}} \Rightarrow \quad \Rightarrow D = Sr_R\, s_{max}$$

$$Re_R = \frac{U_{max} D}{\nu} = \frac{s_{max}\omega_{max} Sr_R\, s_{max}}{\nu} \quad \Rightarrow \quad \nu = \frac{Sr_R \omega_{max} s_{max}^2}{Re_R}$$

$$Eu_R = \frac{\Delta p}{\rho U_{max}^2} = \frac{\Delta p}{\rho s_{max}^2 \omega_{max}^2} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\Delta p}{Eu_R s_{max}^2 \omega_{max}^2}.$$

$$\Rightarrow \quad \eta = \nu\rho = \frac{Sr_R}{Re_R Eu_R} \frac{\Delta p}{\omega_{max}}.$$

6. Aufgabe

a) komplexes Potential:

Parallelströmung + Dipol bei $(a, 0)$ + Dipol bei $(-a, 0)$:

$$F(z) = u_\infty z + \frac{R^2 u_\infty}{z-a} + \frac{R^2 u_\infty}{z+a}$$
$$= u_\infty z + \frac{R^2 u_\infty (x-a-iy)}{(x-a)^2+y^2} + \frac{R^2 u_\infty (x+a-iy)}{(x+a)^2+y^2}$$

b) Da sich die beiden Dipole gegenseitig beeinflussen müssen Sie sehr weit von einander entfernt sein, also $\frac{a}{R} \to \infty$ oder $\frac{R}{a} \ll 1$, damit die umströmten Körper tatsächlich zwei Kreiszylindern entsprechen. Je weiter sich die Körper annähern, desto stärker verzerrend wirkt der Einfluss des jeweils anderen Körpers und die Körperform weicht vom Kreiszylinder ab.

c) Staupunkte auf der x-Achse $\Leftrightarrow y = 0$:

$$\Phi(x,y) = u_\infty x + \frac{R^2 u_\infty (x-a)}{(x-a)^2+y^2} + \frac{R^2 u_\infty (x+a)}{(x+a)^2+y^2}$$
$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_\infty + R^2 u_\infty \frac{y^2-(x-a)^2}{\left((x-a)^2+y^2\right)^2} + R^2 u_\infty \frac{y^2-(x+a)^2}{\left((x+a)^2+y^2\right)^2}$$
$$\Rightarrow \quad v(x,y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -R^2 u_\infty \frac{2y(x-a)}{\left((x-a)^2+y^2\right)^2} - R^2 u_\infty \frac{2y(x+a)}{\left((x+a)^2+y^2\right)^2}$$

$y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v(x, y=0) = 0$ überall auf der x-Achse erfüllt

$$u(x, y=0) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad u_\infty - R^2 u_\infty \frac{1}{(x-a)^2} - R^2 u_\infty \frac{1}{(x+a)^2} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow \quad R^2 \left(\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x-a)^2} \right) - 1 = 0$$

$\Rightarrow \quad x^4 - x^2(2R^2+2a^2) - 2R^2a^2 + a^4 = 0$ Polynom 4. Grades von x, also max. 4 Nullstellen

ersetze $x^2 = p$:

$$p^2 - 2p\left(R^2+a^2\right) + a^4 - 2R^2a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1/2} = R^2 + a^2 \pm \sqrt{R^4 + 4a^2R^2}$$
$$x_{s_{1/2/3/4}} = \pm\sqrt{R^2 + a^2 \pm \sqrt{R^4 + 4a^2R^2}}$$

d) Es soll gelten $x_{s_i} = 0$ für zwei x_{s_i}. Wähle $x = \pm\sqrt{R^2 + a^2 - \sqrt{R^4 + 4a^2R^2}}$ (alle Summanden unter der Wurzel positiv)

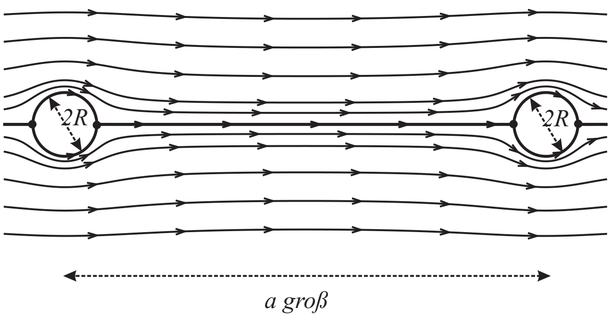
$$\Rightarrow 0 = R^2 + a^2 - \sqrt{R^4 + 4a^2R^2}$$
$$R^4 + 4a^2R^2 = R^4 + 2a^2R^2 + a^4 \quad \Rightarrow \quad a^2\left(2R^2 - a^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow a_{1,2} = 0, a_{3,4} = \pm\sqrt{2}R$$

Für $a = 0$ fallen beide Dipole in einem Punkt zusammen $\Leftrightarrow$ 1 Körper

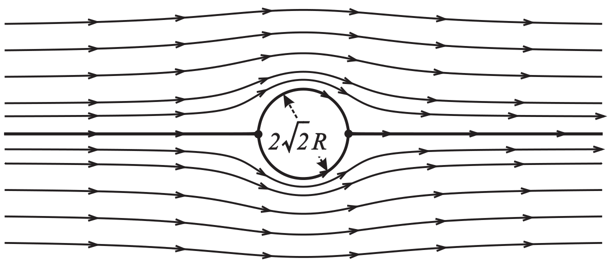
Da $a < 0$ nicht sinnvoll ist, ist $a = \sqrt{2}R$ der gesuchte Abstand für den sich beide Körper in einem Punkt berühren.

e) Berührpunkt ist Staupunkt $\Rightarrow c_p = 1$

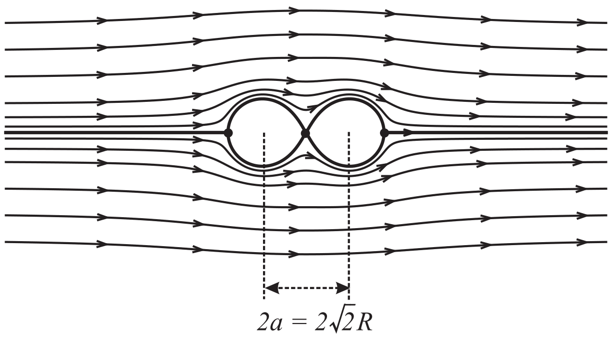
f) $\frac{R}{a} \ll 1$



$a \to 0$



a wie in Aufgabenteil d) berechnet (Körper berühren sich gerade)



7. Aufgabe

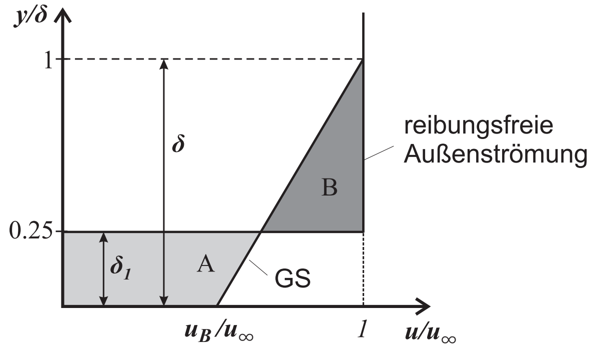
a) $\dfrac{u_1(y)}{u_\infty} = a_0 + a_1(\dfrac{y}{\delta})$

1. RB.: $y = 0 : u = u_B \quad \Rightarrow \quad a_0 = \dfrac{u_B}{u_\infty} = K$

2. RB.: $y = \delta : u = u_\infty \quad \Rightarrow \quad a_0 + a_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1 - K$

$\Rightarrow \quad \dfrac{u(\frac{y}{\delta})}{u_\infty} = K + (1-K)\dfrac{y}{\delta}$

b) $K = 0.5$



$$\frac{\delta_1}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$
$$= 0.5 \int_0^1 \left(1 - \frac{y}{\delta}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$
$$= 0.25$$

c) Ebene Grenzschichtströmung: $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$

mit Euler-Gleichung $\quad u_a \dfrac{du_a}{dx} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du_a}{dx} = 0$

$\Rightarrow \quad u_a = u_\infty =$ const.

v. Kármán Int.-bez.: $\quad \dfrac{d\delta_2}{dx} + \cancelto{0}{\dfrac{1}{u_a}\dfrac{du_a}{dx}(2\delta_2 + \delta_1)} - \dfrac{\tau_w}{\rho u_a^2} = 0$ **(*)**

$$\tau_w = -\tau(y=0) = \eta \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \eta \frac{u_\infty}{\delta} \left.\frac{\partial(\frac{u}{u_\infty})}{\partial(\frac{y}{\delta})}\right|_{\frac{y}{\delta}=0} = \eta\frac{u_\infty}{\delta}(1-K)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \left[\frac{u}{u_\infty}(1 - \frac{u}{u_\infty})\right] d(\frac{y}{\delta})$$
$$= \int_0^1 \left[K - K^2 + (2K^2 - 3K + 1)\frac{y}{\delta} - (1-K)^2(\frac{y}{\delta})^2\right] d(\frac{y}{\delta})$$
$$\rightarrow \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}K - \frac{1}{3}K^2 = \frac{1}{6}\left(1 + K - 2K^2\right)$$

einsetzen in (*) : $\quad \dfrac{1}{6}\left(1 + K - 2K^2\right)\dfrac{d\delta}{dx} - \eta\dfrac{u_\infty}{\delta}\dfrac{(1-K)}{\rho u_\infty^2} = 0$

$$\Rightarrow \quad \delta d\delta = \frac{6\eta(1-K)}{\rho u_\infty(1 + K - 2K^2)} dx$$

Integration: $\quad \dfrac{1}{2}\delta^2(x) = \dfrac{6\eta x(1-K)}{\rho u_\infty(1 + K - 2K^2)} + C_1 \quad$ mit RB: $\quad x \rightarrow 0$: $\delta \rightarrow 0 \quad \Rightarrow$ $C_1 = 0$

$$\rightarrow \delta(x) = \sqrt{\frac{12\eta(1-K)x}{\rho u_\infty(1 + K - 2K^2)}}$$

8. Aufgabe

a) Energiegleichung:

$$h_1 + \frac{1}{2}u_1^2 = h_2 + \frac{1}{2}u_2^2$$

$$c_p T_1 + \frac{1}{2}\gamma R T_1 M_1^2 = c_p T_2 + \frac{1}{2}\gamma R T_2 M_2^2$$

$$c_p T_1 + \frac{c_p}{2}\left(\gamma - 1\right) T_1 M_1^2 = c_p T_2 + \frac{c_p}{2}\left(\gamma - 1\right) T_2 M_2^2$$

$$\frac{T_1}{T_2} + \frac{\gamma - 1}{2}\frac{T_1}{T_2}M_1^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_2^2$$

$$M_2^2 = \left(\frac{T_1}{T_2}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_1^2\right) - 1\right)\frac{2}{\gamma - 1}$$

mit $\quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$ (Isentropenbeziehung)

$$\Rightarrow \quad M_2 = \sqrt{\left(\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_1^2\right) - 1\right)\frac{2}{\gamma - 1}}$$

b) Massenstrom $\dot{m}$:

$$\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1$$

$$\rho_1 = \frac{p_1}{R T_1}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{m} = A_1 \frac{p_1}{R T_1} M_1 c_1 = A_1 \frac{p_1}{R T_1} M_1 \sqrt{\gamma R T_1}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{m} = A_1 M_1 p_1 \sqrt{\frac{\gamma}{R T_1}}$$

c) Konti:

$$\dot{m} = \rho_1 u_1 A_1 = \rho_2 u_2 A_2$$

$$A_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{u_1}{u_2}A_1 = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\frac{M_1}{M_2}\frac{c_1}{c_2}A_1$$

$$= A_1 \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} = A_1 \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

$$= A_1 \frac{M_1}{M_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}$$