(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik I“ (Bachelor) & „Technische Strömungslehre“ (Diplom)

06. 03. 2013

1. Aufgabe

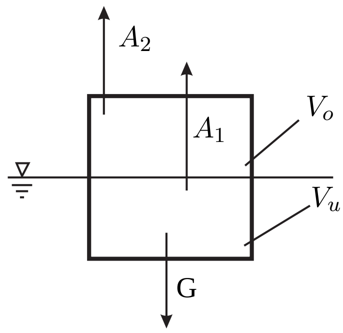
a) Kräftegleichgewicht: Auftrieb = Gewichtskraft

$$A = \rho_W g \pi H \frac{d^2}{4} = m_G g + \rho_W h_{max} \pi g \frac{d^2}{4} + (H - h_{max}) \rho_L \pi g \frac{d^2}{4}$$

$$\Rightarrow h_{max} = \frac{\rho_W - \rho_L}{\rho_W - \rho_L} H - \frac{m_G}{(\rho_W - \rho_L)\pi \frac{d^2}{4}}$$

$$\Rightarrow h_{max} = H - \frac{4 m_G}{(\rho_W - \rho_L)\pi d^2} \quad [h_{max}] = \left[m - \frac{kg}{\frac{kg}{m^3} m^2} \right] = [m]$$

b) $A_1 + A_2 = G_E, \quad V_u + V_o = V$



$A_1 = \rho_W g V_u, \quad A_2 = \rho_L g V_o$

$G_E = \rho_E g V \quad \Rightarrow \rho_W g V_u + \rho_L g V_o = \rho_E g a^3 = \rho_E g (V_u + V_o)$

$(\rho_W - \rho_E) V_u + (\rho_L - \rho_E) V_o = 0$

$$V_u = \frac{\rho_E - \rho_L}{\rho_W - \rho_E}(a^3 - V_u)$$

$$V_u \left(1 + \frac{\rho_E - \rho_L}{\rho_W - \rho_E}\right) = \frac{\rho_E - \rho_L}{\rho_W - \rho_E} a^3$$

$$V_u(\rho_W - \rho_E + \rho_E - \rho_L) = (\rho_E - \rho_L) a^3$$

$$\Rightarrow V_u = \frac{\rho_E - \rho_L}{\rho_W - \rho_L} a^3$$

$$\Rightarrow V_o = \left(1 - \frac{\rho_E - \rho_L}{\rho_W - \rho_L}\right) a^3 \quad [m^3]$$

c) $A = \rho_W g H \pi \frac{d^2}{4}$

$$\sum G = m_G g + \rho_W g \left(h_{max} \pi \frac{d^2}{4} - V_u\right) + \rho_L g \left[(H - h_{max}) \pi \frac{d^2}{4} - V_o\right] + \rho_E g (V_u + V_o) =$$

$$m_G g + \rho_W g h_{max} + \rho_L g (H - h_{max}) \pi \frac{d^2}{4} + \underbrace{\rho_E g (V_u + V_o) - \rho_W g V_u - \rho_L g V_o}_{=0\text{, siehe Aufgabenteil b)}}$$

$$\Rightarrow h_{max} = H - \frac{4 m_G}{(\rho_W - \rho_L)\pi d^2} \quad [m]$$

d) Masse bleibt gleich: $\quad \Rightarrow \Delta V_{Glas} = \pi \frac{d^2}{4} \Delta h = V \frac{\rho_E}{\rho_W} - V_u$

$$V_u = \frac{\rho_E - \rho_L}{\rho_W - \rho_L} V$$

$$\Rightarrow \pi \frac{d^2}{4} \Delta h = V \left(\frac{\rho_E}{\rho_W} - \frac{\rho_E - \rho_L}{\rho_W - \rho_L}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta h = a^3 \frac{4}{\pi d^2} \left(\frac{\rho_E}{\rho_W} - \frac{\rho_E - \rho_L}{\rho_W - \rho_L}\right) \quad [m]$$

2. Aufgabe

a) Konti:

$$v_3 = v_4 \frac{A_4}{A_3}$$

verlustfreier Bernoulli $0 \to 4$:

$$p_a + \varrho g(L+h) = p_4 + \frac{\varrho}{2} v_4^2$$

mit $p_4 = p_a$:

$$\Rightarrow v_4 = \sqrt{2g(L+h)}$$

verlustfreier Bernoulli $0 \to 3$:

$$p_a + \varrho g(L+h) = p_3 + \frac{\varrho}{2} v_3^2$$

für gerade kein Ansaugen:

$$p_3 = p_a - \varrho g h$$

$$\Rightarrow \varrho g(L+h) = -\varrho g h + \frac{\varrho}{2} v_4^2 (\frac{A_4}{A_3})^2$$

$$\Rightarrow (\frac{A_4}{A_3})^2 = \frac{2g(L+2h)}{v_4^2}$$

$$\frac{A_4}{A_3} = \sqrt{\frac{L+2h}{L+h}} = f(L,h) \quad [-]$$

b) verlustbehafteter Bernoulli $0 \to 4$:

$$p_a + \varrho g(L+h) = p_4 + \frac{\varrho}{2} v_4^2 + \Delta p_v$$

mit $\Delta p_v = \frac{\varrho}{2} v_4^2 \lambda \frac{3L}{D}$ und $p_4 = p_a$:

$$\Rightarrow \varrho g(L+h) = \frac{\varrho}{2} v_4^2 (1 + \lambda \frac{3L}{D})$$

$$v_4^2 = \frac{2g(L+h)}{1+\lambda\frac{3L}{D}}$$

verlustbehafteter Bernoulli $0 \to 3$:

$$p_a + \varrho g(L+h) = p_3 + \frac{\varrho}{2} v_4^2 (\frac{A_4}{A_3})^2 + \frac{\varrho}{2} v_4^2 \lambda \frac{2L}{D}$$

mit $p_3 = p_a - \varrho g h$:

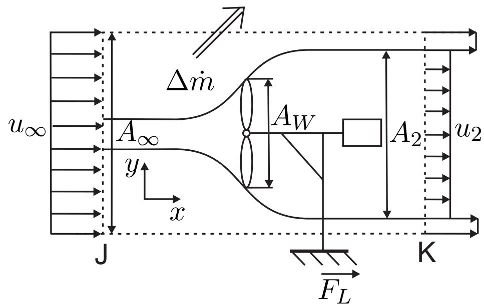
$$\Rightarrow 2g(L+2h) = v_4^2 ((\frac{A_4}{A_3})^2 + \lambda \frac{2L}{D})$$

$$\frac{A_4}{A_3} = \sqrt{\frac{2g(L+2h)}{v_4^2} - \lambda \frac{2L}{D}}$$

$$\frac{A_4}{A_3} = \sqrt{\frac{(L+2h)(1+\lambda\frac{3L}{D})}{(L+h)} - \lambda \frac{2L}{D}} \quad [-]$$

3. Aufgabe

a) Massenstrom:



$$-\rho_L u_\infty A_\infty + \rho_L u_\infty (A_\infty - A_2) + \rho_L u_2 A_2 + \triangle\dot{m} = 0$$

$$\Rightarrow \triangle\dot{m} = \rho_L A_2 (u_\infty - u_2)$$

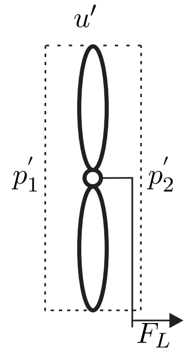
Impulssatz in x-Richtung (Zu- und Abströmebene weit stromauf und stromab):

$$-\rho_L u_\infty^2 A_\infty + \rho_L u_\infty^2 (A_\infty - A_2) + \rho_L A_2 u_2^2 + \triangle\dot{m} u_\infty = F_L$$

mit $\triangle\dot{m} = ...$

$$\Rightarrow \rho_L A_2 u_2 (u_2 - u_\infty) = F_L \quad (*)$$

Impulssatz um Windrad (Zu- und Abströmebene direkt stromauf und stromab): $-\rho_L u'^2 A_W + \rho_L u'^2 A_W = (p_1' - p_2') A_W + F_L$



Bernoulli: $p_1' - p_2' = \left(p_\infty + \frac{\rho_L}{2}(u_\infty^2 - u'^2)\right) - \left(p_\infty + \frac{\rho_L}{2}(u_2^2 - u'^2)\right)$

$\Rightarrow F_L = -\frac{\rho_L}{2}(u_\infty^2 - u_2^2) A_W (**)$

(*) und (**) gleichsetzen: $-\frac{\rho_L}{2}(u_\infty^2 - u_2^2) A_W = \rho_L A_2 u_2 (u_2 - u_\infty)$

Konti: $\rho_L A_W u' = \rho_L A_2 u_2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(u_\infty + u_2) A_W = A_2 u_2 = A_W u'$$

$$\Rightarrow u' = \frac{u_\infty + u_2}{2} [\frac{m}{s}]$$

b) $P_L = -F_L u' = \frac{\rho_L}{4} u_\infty^3 \left[1 - \left(\frac{u_2}{u_\infty}\right)^2\right] \left(1 + \frac{u_2}{u_\infty}\right) A_W; \quad \frac{u_2}{u_\infty} = \xi$

$$= \frac{\rho_L}{4} u_\infty^3 A_W (1 - \xi^2)(1 + \xi)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = 0 = \frac{\rho_L}{4} u_\infty^3 A_W \left((1+\xi)(-2\xi) + 1 - \xi^2\right)$$

$$\left((1+\xi)(-2\xi) + 1 - \xi^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow \xi_{1,2} = -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{3}{9}} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \xi = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{u_2}{u_\infty} = \frac{1}{3} \quad [-]$$

c) $P_{L,opt} = -F_{L,opt}u'_{opt} = -F_{L,opt}\frac{2}{3}u_\infty = \frac{8}{27}\rho_L u_\infty^3 A_W$

$$F_{opt} = -F_{L,opt} = \frac{4}{9}\rho_L u_\infty^2 A_W \quad [F_{opt}] = \left[\frac{kg}{m^3}\frac{m^2}{s^2}m^2\right] = \left[\frac{kgm}{s^2}\right] = [N]$$

4. Aufgabe

a) $Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}} = \frac{1}{8}$

$v_1 = \frac{1}{8}\sqrt{gh_1}$

$\frac{\dot{V}}{B} = h_1 v_1 = z_{gr}\sqrt{gz_{gr}}$

$H_{min} = \frac{3}{2} z_{gr}$

$z_{gr} = \frac{\dot{V}}{Bv_{gr}} = \frac{h_1 v_1}{\sqrt{gz_{gr}}} = \frac{h_1\sqrt{gh_1}}{8\sqrt{gz_{gr}}}$

$\sqrt{z_{gr}^3} = \frac{1}{8}\sqrt{h_1^3} \Rightarrow z_{gr} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} h_1$

$H = H_{min} + y_W = konst.$

$H_1 = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = h_1 + \frac{gh_1}{128g}$

$H_1 = h_1 + \frac{1}{128}h_1 = y_W + \frac{3}{2}z_{gr} = y_W + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{2}{3}} h_1$

$y_W = \left(1 + \frac{1}{128} - \frac{3}{8}\right) h_1$

$y_W = \frac{81}{128}h_1$

Alternativ:

$Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}} \quad \Rightarrow \quad Fr_1 = \frac{v_1}{\sqrt{gh_1}} = \frac{1}{8}, \quad Fr_2 = \frac{v_2}{\sqrt{gh_2}} = 1$

$\Rightarrow v_1^2 = \frac{gh_1}{64}, \quad v_2^2 = gh_2$

Konti: $h_2^2 = \frac{v_1^2 h_1^2}{v_2^2}$

$\Rightarrow h_2^3 = \frac{h_1^3}{64} \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{h_1}{4}$

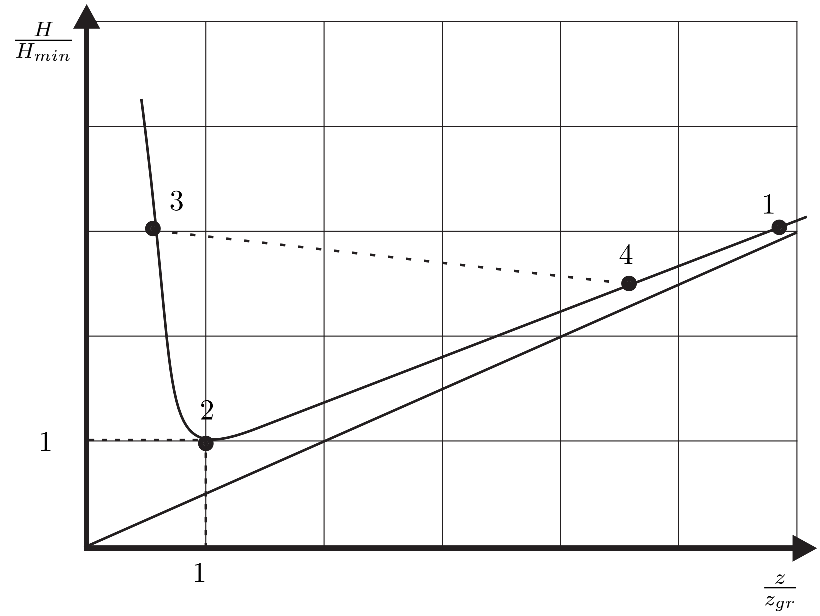
Bernoulli von 1⇒2: $\rho g h_1 + \frac{\rho}{2}v_1^2 = \rho g(h_2 + y_W) + \frac{\rho}{2}v_2^2$

Einsetzen von v_1, v_2, und h_2: $2gh_1 + \frac{gh_1}{64} = 2gh_2 + gh_2 + 2gy_W$

$\Rightarrow 2h_1 + \frac{h_1}{64} = \frac{2h_1}{4} + \frac{h_1}{4} + 2y_W$

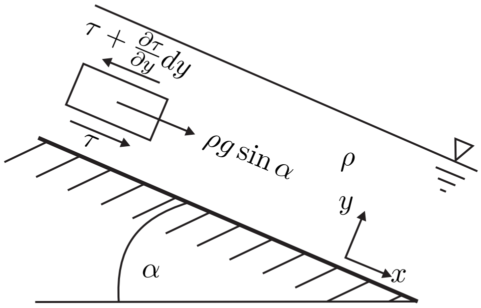
$\Rightarrow y_W = \frac{81}{128}h_1$

b)



5. Aufgabe

a) $\tau dxdz \quad - \quad \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} dy\right) dxdz \quad +$
$\varrho g \sin(\alpha) dxdydz = 0$



$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = \varrho g \sin \alpha$$

b) Integration: $\tau = \varrho g \sin \alpha \cdot y + C_1$

R.B.: $\tau(y = d) = 0 \Rightarrow C_1 = -\varrho g \sin \alpha d$
$\Rightarrow \tau(y) = \varrho g \sin \alpha (y - d)$

Aus Hinweis: $\tau = -K\sqrt{\frac{du}{dy}}$

$$\Rightarrow -K\sqrt{\frac{du}{dy}} = \varrho g \sin \alpha (y-d) \Rightarrow \sqrt{\frac{du}{dy}} = -\frac{\varrho g}{K} \sin \alpha (y-d)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = \left(\frac{\rho g \sin \alpha (d-y)}{K}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K}\right)^2 (d^2 - 2dy + y^2)$$

Integration: $u(y) = \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K}\right)^2 \left(d^2 y - dy^2 + \frac{y^3}{3}\right) + C_2$

R.B.: u(y=0)=0 $\Rightarrow C_2 = 0$

$$\Rightarrow u(y) = \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K}\right)^2 y \left(\frac{y^2}{3} - dy + d^2\right)$$

c) $\frac{\dot{V}}{B} = \int_0^d u(y) dy = \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K}\right)^2 (\frac{y^4}{12} - \frac{dy^3}{3} + \frac{d^2 y^2}{2})$

$$\frac{\dot{V}}{B} = \frac{d^4}{4} \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K}\right)^2$$

$$\bar{u} = \frac{\frac{\dot{V}}{B}}{d} = \frac{d^3}{4} \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K}\right)^2$$

$$u_{max} = u(y = d) = \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K}\right)^2 \left(\frac{d^3}{3} - d^3 + d^3\right)$$

$$u_{max} = \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{K}\right)^2 \left(\frac{d^3}{3}\right)$$

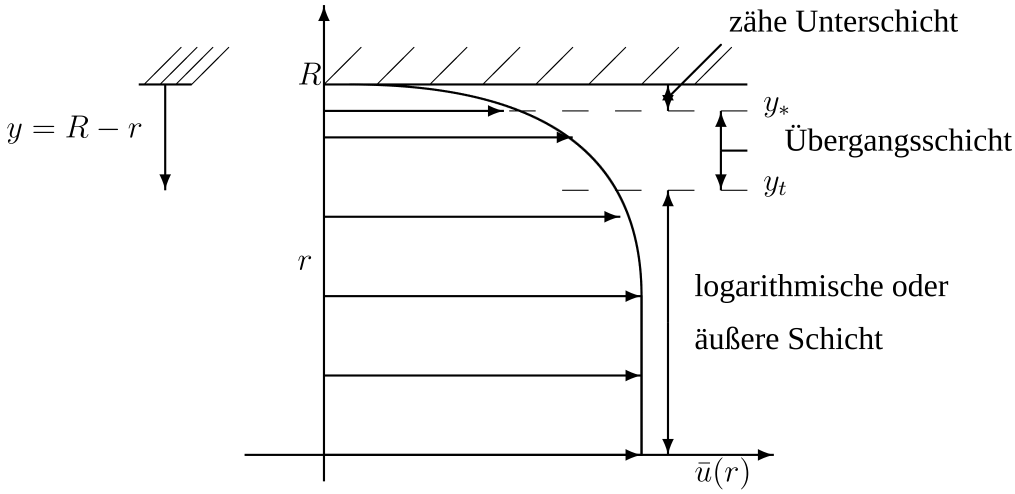
6. Aufgabe

a) Reynoldszahl, mit dem Rohrdurchmesser bzw. den hydraulischen Durchmesser, der Dichte des Fluids, der Anströmgeschwindigkeit sowie der dynamischen Viskosität.

$$Re = \frac{\rho u_\infty D}{\eta}$$

b) Rohrvibration, Oberflächenbeschaffenheit, Geometrie des Einlaufs, etc.

c) Skizze



d) Der Turbulenzgrad ist eine Zahl, mit welcher die Güte der Anströmung beschrieben werden kann (Windkanal). Je kleiner der Turbulenzgrad, desto turbulenzärmer die Strömung.

$$Tu = \frac{1}{u_\infty}\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}$$