....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

15. 03. 2008

1. Aufgabe

a) Die Auftriebskraft eines Körpers entspricht dem Gewicht des von ihm verdrängten Fluids. $F_A = \varrho_f g V_k$, wobei F_A die Auftriebskraft, ϱ_f die Dichte des den Körper umgebenden Fluids, g die Erdbeschleunigung, und V_k das Volumen des Körpers bezeichnen.

b) Annahme konstanter Dichte.

c) Druckintegral: $\vec{F} = \int\limits_{A_K} p(z)\vec{n}_A dA$ oder $F_A = -\int\limits_{A_K} p(z) n_{z,A} dA$

Anteile der Flächen normal zur $x-$ und $y-$Richtung heben sich gegenseitig auf. Es verbleibt

$$F_A = -F_z = bt\, p(z_0 + h/2) - bt\, p(z_0 - h/2))$$

Allgemein: $p(z) = p_a + \int\limits_0^z \varrho(\tilde{z}) g d\tilde{z}$.

Damit: $F_A = bt\, g \left(\varrho_0 h + \frac{k}{2} \left((z_0 + \frac{h}{2})^2 - (z_0 - \frac{h}{2})^2 \right) \right)$.

$$F_A = bth\, g(\varrho_0 + z_0 k).$$

d) Mit Teil c):

$$\overline{\varrho} g V_k = V_k\, g(\varrho_0 + z_0 k)$$

$$\rightarrow \overline{\varrho} = \varrho_0 + z_0 k$$

2. Aufgabe

a) Konti: $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3, \quad \rightarrow \dfrac{\dot{V}_2}{\dot{V}_3} = \dfrac{\dot{V}_1}{\dot{V}_3} - 1$

$$\rightarrow \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_3} = \frac{v_1 h_1 B}{\frac{d^2\pi}{4} v_3} - 1$$

Bernoulli 1-3: $p_a + \varrho g(H + h_1) + \dfrac{\varrho}{2} v_1^2 = p_a + \dfrac{\varrho}{2} v_3^2 \left(1 + \lambda \dfrac{H}{d}\right)$

$$\rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{2g(h_1 + H) + v_1^2}{1 + \lambda \frac{H}{d}}}$$

$$\rightarrow \frac{\dot{V}_2}{\dot{V}_3} = \frac{v_1 h_1 B}{\frac{d^2\pi}{4}} \sqrt{\frac{1 + \lambda \frac{H}{d}}{2g(h_1 + H) + v_1^2}} - 1$$

b) Bernoulli 1-2: $p_a + \varrho g h_1 + \dfrac{\varrho}{2} v_1^2 = p_a + \varrho g h_2 + \dfrac{\varrho}{2} v_2^2$

$$\rightarrow v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2) + v_1^2} \approx v_1$$

aus a): $\dot{V}_2 = \dot{V}_1 - \dot{V}_3$

$$\rightarrow h_2 = \frac{h_1 v_1}{v_2} - \frac{d^2\pi}{4B} \frac{v_3}{v_2} \qquad \rightarrow h_2 = h_1 - \frac{d^2\pi}{4B} \frac{v_3}{v_1}$$

$$\rightarrow h_2 = h_1 - \frac{d^2\pi}{4Bv_1} \sqrt{\frac{2g(h_1 + H) + v_1^2}{1 + \lambda \frac{H}{d}}}$$

c) Kein Volumenstrom in 2:

$$\dot{V}_2 = 0 \rightarrow h_2 = 0, \quad k_1 \equiv \frac{d^2\pi}{4Bv_1}, \quad k_2 \equiv 1 + \lambda \frac{H}{d}$$

$$h_1^2 = \frac{k_1^2}{k_2}\left(2g(h_1 + H) + v_1^2\right) \qquad \rightarrow h_1^2 = \frac{2gk_1^2}{k_2} h_1 + \frac{k_1^2}{k_2}\left(2gH + v_1^2\right)$$

$$h_{1_{1,2}} = \frac{gk_1^2}{k_2} \pm \frac{k_1^2}{k_2} \sqrt{g^2 + \frac{k_2}{k_1^2}(2gH + v_1^2)}$$

Einzige physikalisch sinnvolle Lösung:

$$h_1 = \frac{k_1^2}{k_2} \left(g + \sqrt{g^2 + \frac{k_2}{k_1^2}(2gH + v_1^2)} \right) > 0$$

3. Aufgabe

a) Massenstrom:

$$\varrho u_\infty \pi R^2 = \Delta \dot{m} + \varrho \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^R u_e(r,\phi) r dr d\phi$$

$$\rightarrow \Delta \dot{m} = \varrho u_\infty \pi R^2 - 2\pi \varrho u_\infty \int\limits_0^R \left[(1-c)r - cr\ \cos(\pi r/R)\right] dr$$

$$\rightarrow \Delta \dot{m} = \varrho u_\infty \pi R^2 - 2\pi \varrho u_\infty \left[(1-c)\frac{r^2}{2} - c\frac{\cos(\pi r/R)}{\left(\frac{\pi}{R}\right)^2} - c\frac{r\sin(\pi r/R)}{\left(\frac{\pi}{R}\right)}\right]_0^R$$

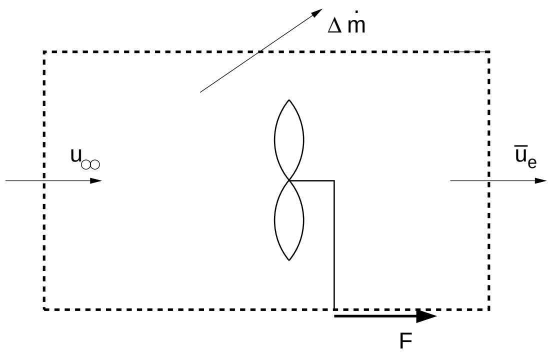
$$\rightarrow \Delta \dot{m} = \varrho u_\infty \pi R^2 c \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)$$

b) $\overline{u}_e$:

$$\Delta \dot{m} = \varrho u_\infty \pi R^2 - \varrho \overline{u}_e \pi R^2$$

$$\rightarrow \overline{u}_e = u_\infty \left(1 - c\left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right)\right)$$

c) Bestimmung der Kraft:

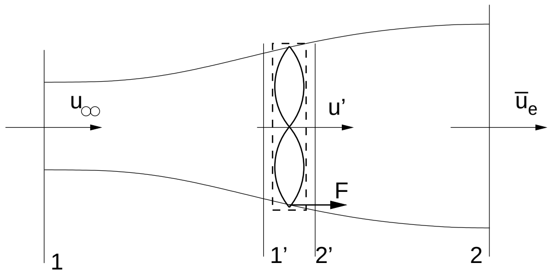


$$\Delta \dot{m} = \varrho(u_\infty - \overline{u}_e)\pi R^2$$

Impulssatz: $-\varrho u_\infty^2 \pi R^2 + \Delta \dot{m} u_\infty + \varrho \overline{u}_e^2 \pi R^2 = F$

$$F = (\overline{u}_e - u_\infty)\overline{u}_e \varrho \pi R^2$$

d) Bestimmung des Windraddurchmessers d:



Bernoulli $1-1'$: $p_a + \frac{\varrho}{2}u_\infty^2 = p_1' + \frac{\varrho}{2}u'^2$

Bernoulli $2-2'$: $p_2' + \frac{\varrho}{2}u'^2 = p_a + \frac{\varrho}{2}\overline{u}_e^2$

Impulssatz, KF um das Windrad herum: $F = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 (p_2' - p_1')$

$\rightarrow p_2' - p_1' = \frac{\varrho}{2}\left(\overline{u}_e^2 - u_\infty^2\right)$

$\rightarrow d^2 = \frac{8(\overline{u}_e - u_\infty)\overline{u}_e R^2}{(\overline{u}_e - u_\infty)(\overline{u}_e + u_\infty)}$

$\rightarrow d = 2R\sqrt{\frac{2\overline{u}_e}{\overline{u}_e + u_\infty}}$

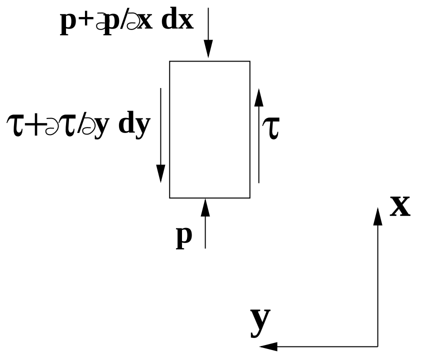
e) Mittlere Geschwindigkeit:

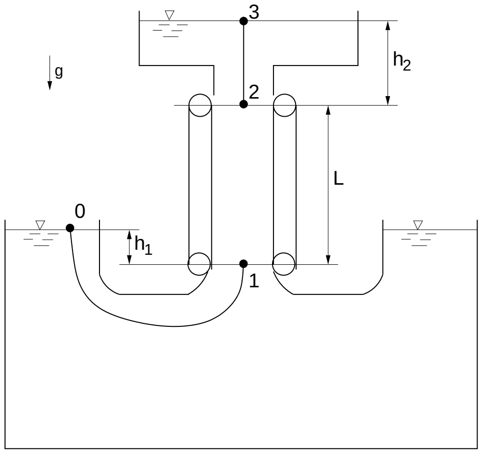
Konti: $\overline{u}_e \pi R^2 = u'\pi\frac{d^2}{4}$

Mit d aus d): $u' = \frac{\overline{u}_e + u_\infty}{2}$

4. Aufgabe

a) Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:





$$\left(p-\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)\right)dy+\left(\tau-\left(\tau+\frac{d\tau}{dy}dy\right)\right)dx-\varrho g dx dy=0$$

$$\frac{d\tau}{dy}=-\varrho g-\frac{dp}{dx}$$

$$\rightarrow \tau=-\left(\varrho g+\frac{dp}{dx}\right)y+c_1$$

Bernoulli 0-1:

$$p_a+\varrho g h_1=p_1+\frac{\varrho}{2}v_{1'}^2 \;\rightarrow\; p_1=p_a+\varrho g h_1-\frac{\varrho}{2}v_{1'}^2$$

Bernoulli 2-3:

$$p_a+\varrho g h_2=p_2+\frac{\varrho}{2}v_{2'}^2 \;\rightarrow\; p_2\approx p_a+\varrho g h_2-\frac{\varrho}{2}v_{2'}^2$$

Ausgebildete Strömung: $v_{1'}=v_{2'}$

$$\rightarrow \frac{dp}{dx}=\frac{p_2-p_1}{L}=\frac{\varrho g(h_2-h_1)}{L}$$

$$\tau=-\left[\varrho g\left(1+\frac{h_2-h_1}{L}\right)\right]y+c_1=-\eta\frac{du}{dy}$$

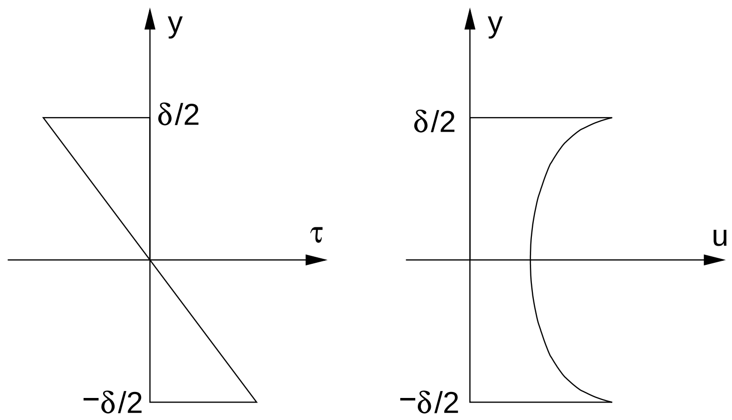
$$\rightarrow u=\frac{1}{\eta}\left[\varrho g\left(1+\frac{h_2-h_1}{L}\right)\frac{y^2}{2}-c_1 y\right]+c_2$$

Randbedingungen:

$\tau(y=0)=0$ (Symmetrie) $\rightarrow\; c_1=0$

$$u\left(y=\pm\frac{\delta}{2}\right)=v_B \;\rightarrow c_2=-\frac{1}{\eta}\left[\varrho g\left(1+\frac{h_2-h_1}{L}\right)\frac{\delta^2}{8}\right]+v_B$$

$$u(y)=\frac{\varrho g\delta^2}{2\eta}\left(1+\frac{h_2-h_1}{L}\right)\left(\frac{y^2}{\delta^2}-\frac{1}{4}\right)+v_B \quad \text{für} \quad |y|\leq\frac{\delta}{2}$$



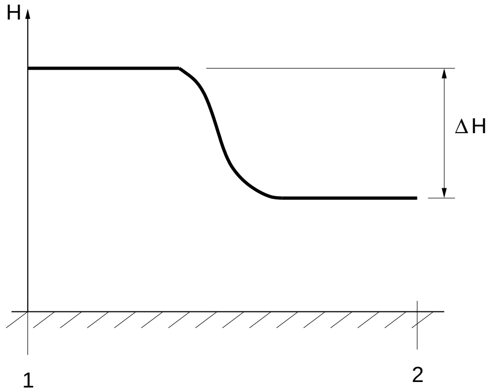
b) Antriebsleistung

$$P = F_W v_B = v_B BL \left(-\tau \left(y = \frac{\delta}{2} \right) + \tau \left(y = -\frac{\delta}{2} \right) \right) = v_B \varrho g \left(1 + \frac{h_2 - h_1}{L} \right) \delta BL$$

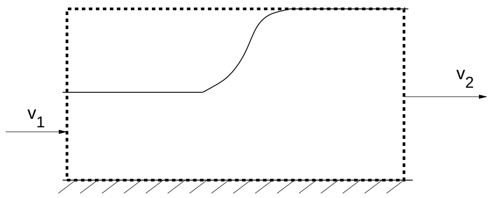
c) Qualitativ keine Änderung. Das Minimum der Parabel relativ zu v_B wird kleiner, da der Druckgradient wie die Volumenkraft entgegen der Strömung wirkt.

5. Aufgabe

a) Skizze des Verlustes an Energiehöhe:



b) x-Impulssatz: $\dfrac{dI_x}{dt} = \sum F_x$



$$-\varrho v_1^2 z_1 b + \varrho v_2^2 z_2 b = b p_a (z_2 - z_1) + b \left(\int_0^{z_1} p_a + \varrho g z \mathrm{d}z - \int_0^{z_2} p_a + \varrho g z \mathrm{d}z \right)$$

$$\rightarrow \; \frac{1}{g} \left(v_2^2 z_2 - v_1^2 z_1 \right) = \left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} \right)$$

Konti: $v_1 z_1 = v_2 z_2$

$$\rightarrow \; \frac{1}{g} \left(\frac{v_1^2 z_1^2}{z_2} - v_1^2 z_1 \right) = \frac{1}{2}(z_1^2 - z_2^2)$$

$$\rightarrow \; \frac{v_1^2 z_1}{g z_2} (z_1 - z_2) = \frac{1}{2}(z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$$

$$\rightarrow \; \frac{v_1^2 z_1}{g z_2} = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

$$\rightarrow \; z_2^2 + z_1 z_2 - 2\frac{v_1^2 z_1}{g} = 0, \quad \text{mit } Fr = \frac{v}{\sqrt{gz}}$$

$$\rightarrow \; z_2^2 + z_1 z_2 - 2 Fr_1^2 z_1^2 = 0$$

$$\rightarrow \; z_{2_{1,2}} = -\frac{z_1}{2} \pm \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + 2 Fr_1^2 z_1^2}$$

Einzige physikalisch sinnvolle Lösung: $z_2 = \dfrac{z_1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8 Fr_1^2} \right)$

c) Energiesatz: $z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{12}$

$$\rightarrow z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_1^2 z_1^2}{2g z_2^2} + \Delta H_{12}$$

$$\rightarrow \Delta H_{12} = z_1 \left(1 - \frac{z_2}{z_1} + \frac{Fr_1^2}{2}\left(1 - \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2\right)\right)$$

6. Aufgabe

a) Parallelströmung + Quelle in $(x = -a, y = 0)$ + Senke in $(x = a, y = 0)$.

$$\phi(x,y) = u_\infty x + \frac{E}{2\pi}\left[\ln\left[(x+a)^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}} - \ln\left[(x-a)^2 + y^2\right]^{\frac{1}{2}}\right]$$

b) $v = 0 \quad \rightarrow y\left[(x-a)^2 + y^2 - \left((x+a)^2 + y^2\right)\right] = 0$

$\rightarrow$ 1. Fall: $y = 0$, 2. Fall: $(x-a)^2 = (x+a)^2 \;\rightarrow x = 0$

$$u = 0: \quad u_\infty + \frac{3}{2}au_\infty\left[\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\right] = 0$$

$x = 0$: keine Lösung

$$y = 0: \quad u_\infty + \frac{3}{2}au_\infty\left[\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x-a}\right] = 0$$

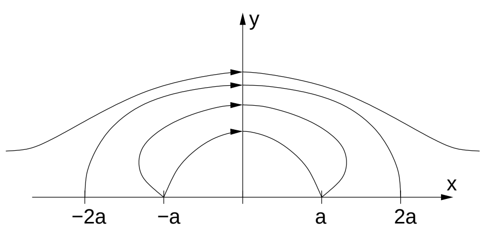
$\rightarrow u_\infty(x^2 - a^2) - 3a^2 u_\infty = 0$

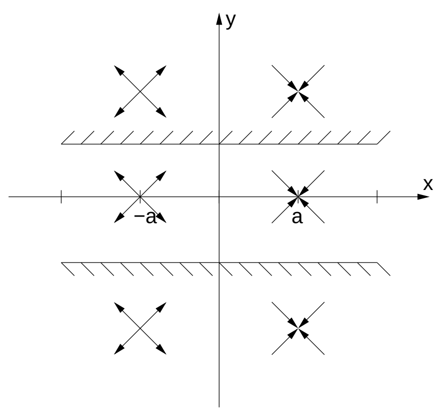
$\rightarrow x^2 = 4a^2 \quad \rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 2a$

Staupunkt 1: $(x_{St,1}, y_{St,1}) = (-2a, 0)$

Staupunkt 2: $(x_{St,2}, y_{St,2}) = (2a, 0)$

c) Links: Stromlinienbild der Strömung aus a).
Rechts: Kanalströmung mit 2-facher Spiegelung der Quellen und Senken an den Kanalwänden.





d) Taylorreihenentwicklung:

$$u = \underbrace{u_{St}}_{=0} + \frac{\partial u}{\partial x}(x - x_{St}) + \frac{\partial u}{\partial y}(y - y_{St})$$

$$v = \underbrace{v_{St}}_{=0} + \frac{\partial v}{\partial x}(x - x_{St}) + \frac{\partial v}{\partial y}(y - y_{St})$$

e) Staupunktströmung:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{St,2} = \frac{3}{2}au_\infty \left[\frac{y^2-(x+a)^2}{((x+a)^2+y^2)^2} - \frac{y^2-(x-a)^2}{((x-a)^2+y^2)^2}\right]_{St,2} = \frac{4}{3}\frac{u_\infty}{a}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{St,2} = \frac{3}{2}au_\infty \left[\frac{-2y(x+a)}{((x+a)^2+y^2)^2} - \frac{-2y(x-a)}{((x-a)^2+y^2)^2}\right]_{St,2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{St,2} = \frac{3}{2}au_\infty \left[\frac{-2y(x+a)}{((x+a)^2+y^2)^2} - \frac{-2y(x-a)}{((x-a)^2+y^2)^2}\right]_{St,2} = 0$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{St,2} = \frac{3}{2}au_\infty \left[\frac{(x+a)^2-y^2}{((x+a)^2+y^2)^2} - \frac{(x-a)^2-y^2}{((x-a)^2+y^2)^2}\right]_{St,2} = -\frac{4}{3}\frac{u_\infty}{a}$$

Einsetzen: $u = \frac{4}{3}\frac{u_\infty}{a}(x-2a), \quad v = -\frac{4}{3}\frac{u_\infty}{a}y$

$\rightarrow$ Ebene Staupunktströmung

7. Aufgabe

a) Konti: $u_0 H_0 = u_a(x) H(x)$

$$\rightarrow u_a(x) = \frac{u_0 H_0}{H(x)} = \frac{u_0 H_0}{H_0 - \frac{Cx}{L}}$$

$$\frac{du_a}{dx} = \frac{u_0 H_0 C}{(H_0 - \frac{Cx}{L})^2 L}$$

Euler: $\frac{dp}{dx} = -\varrho u_a \frac{du_a}{dx}$

$$\rightarrow \frac{dp}{dx} = -\frac{\varrho u_0^2 H_0^2 C}{L(H_0 - \frac{Cx}{L})^3}$$

b) Koeffizienten:

1. R.B.: $y_1 = 0: \; u(x, y_1) = 0 \rightarrow a_0(x) = 0$

2. R.B.: $y_2 = \delta: \; u(x, y_2) = u_a(x) \rightarrow a_1(x) + a_2(x) = 1$

3. R.B.: $y_3 = 0: \; \eta \frac{u_a}{\delta^2} \left. \frac{\partial^2 (u/u_a)}{\partial (y/\delta)^2} \right|_{y=0} = \frac{dp}{dx}$

$$\rightarrow \eta \frac{u_a}{\delta^2} 2 a_2(x) = -\frac{\varrho u_0^2 H_0^2 C}{L(H_0 - \frac{Cx}{L})^3}$$

$$\rightarrow a_2(x) = -\frac{\varrho u_0 H_0 C \delta^2}{2\eta L(H_0 - \frac{Cx}{L})^2}$$

$$\rightarrow a_1(x) = 1 + \frac{\varrho u_0 H_0 C \delta^2}{2\eta L(H_0 - \frac{Cx}{L})^2}$$

c) Verdrängungsdicke:

$$\frac{\delta_1(x)}{\delta(x)} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u(x,y)}{u_a(x)}\right) d\frac{y}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - a_1(x)\frac{y}{\delta} - a_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right) d\frac{y}{\delta}$$

$$\rightarrow \left[\frac{y}{\delta} - \frac{a_1(x)}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{a_2(x)}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]_0^1 = 1 - \frac{a_1(x)}{2} - \frac{a_2(x)}{3}$$

d) Die Strömung kann nicht ablösen, da der Druckgradient über der gesamten Lauflänge negativ ist.

e) Der Reibungswiderstand wird vergrößert, da $\frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$ an der Wand in turbulenter Strömung größer ist als in laminarer.

8. Aufgabe

a) $u_1 = Ma_1 c_1 = Ma_1\sqrt{\gamma R T_1} = 583,7 m/s$

Energiegleichung: $c_p T_0 = c_p T_1 + \dfrac{u_1^2}{2}$

$\rightarrow T_{01} = T_1 + \dfrac{u_1^2}{2c_p} = T_1 + \dfrac{u_1^2}{2\gamma R}(\gamma - 1) = 381,6K$

b) Mit Hinweis: $(Ma_1^\star)^2 = \dfrac{\gamma+1}{\gamma - 1 + 2/Ma_1^2} \quad \rightarrow Ma_1^\star = 1.63$

Über den senkrechten Verdichtungsstoß gilt: $Ma_2^\star = \dfrac{1}{Ma_1^\star} = 0.61$

$\rightarrow u_2 = Ma_2^\star c^\star = Ma_2^\star \dfrac{u_1}{Ma_1^\star} = 218,4 m/s$

$T_2 = T_{01} - \dfrac{u_2^2}{2\gamma R}(\gamma - 1) = 357,9K$

c) Konti: $\varrho_2 u_2 A_2 = \varrho_3 u_3 A_3 \quad \rightarrow \quad A_3 = A_2 \dfrac{u_2}{u_3}\dfrac{\varrho_2}{\varrho_3}$

Energiegleichung: $\dfrac{u_3^2}{2} + c_p T_3 = \dfrac{u_2^2}{2} + c_p T_2$

Mit $A_2 = A_1$ und $\dfrac{u_3}{u_2} = 0,9$: $\dfrac{T_3}{T_2} = 1 + (1 - 0,9^2)\dfrac{u_2^2}{2\gamma R T_2}(\gamma - 1)$

Mit $\dfrac{\varrho_3}{\varrho_2} = \left(\dfrac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$: $A_3 = A_2\left[1 + 0,19\dfrac{\gamma-1}{\gamma}\dfrac{u_2^2}{2RT_2}\right]^{-\frac{1}{\gamma-1}} \dfrac{1}{0,9} = 0,1077m^2$

$T_3 = T_{01} - \dfrac{0,9^2 u_2^2}{2\gamma R}(\gamma - 1) = 362,4K$