....

(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

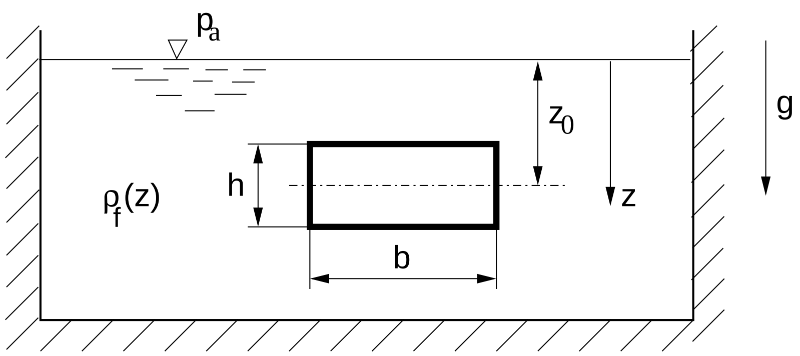
08. 08. 2008

1. Aufgabe (7 Punkte)

a) Erläutern Sie den Satz des Archimedes und geben Sie die entsprechende Gleichung zur Auftriebsberechnung an. Benennen Sie die benutzten Größen.

b) Welche Voraussetzung liegt dem Satz des Archimedes zu Grunde?

Betrachtet wird im Folgenden ein quaderförmiger Körper (Breite b, Höhe h, Tiefe t) in einem Behälter, der mit einem Fluid der Dichte $\varrho_f(z) = \varrho_0 + kz$ gefüllt ist. Der Außendruck sei konstant.



c) Stellen Sie das Druckintegral über die Oberfläche des Körpers auf und bestimmen Sie damit den Auftrieb des Körpers.

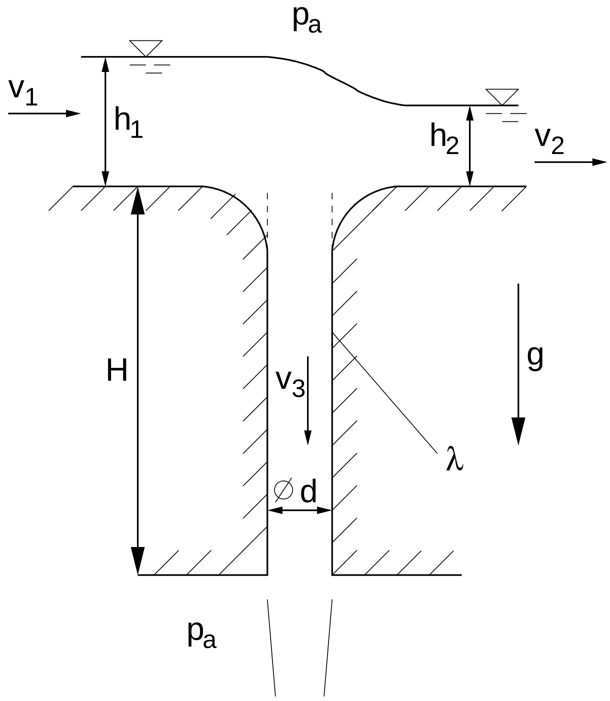
d) Zeigen Sie, dass die aus dem Archimedesschen Prinzip abgeleitete Formel in Teil a) zur Berechnung des Auftriebs F_A des Quaders benutzt werden kann, wenn die in Teil a) verwendete Dichte durch die Größe $\overline{\varrho} = f(\varrho_0, k, z_0)$ ersetzt wird. Geben Sie dazu die Funktion $f(\varrho_0, k, z_0)$ an.

Gegeben:

$\varrho_0 > 0, \quad k > 0, \quad b > 0, \quad h > 0, \quad t > 0, \quad g, \quad z_0$

2. Aufgabe (10 Punkte)

Betrachtet wird ein ebenes, flaches Gewässer der Breite B, an dessen Boden sich ein kreisförmiger Abfluss mit dem Durchmesser d befindet. Der Anströmzustand 1 ist durch die Geschwindigkeit v_1 und die Spiegelhöhe h_1 gegeben. An der Wand des Abflusses treten Reibungsverluste auf, während der Boden des Gewässers reibungsfrei sei.



a) Bestimmen Sie unter Berücksichtigung der Reibung im Abfluss das Verhältnis der beiden Teilvolumenströme $\dot{V}_2/\dot{V}_3$ in Abhängigkeit der gegebenen Größen.

b) Bestimmen Sie v_2 und h_2 mit der Annahme $2g(h_1 - h_2) \ll v_1^2$.

c) Wie groß muss die Spiegelhöhe h_1 sein, damit die gesamte Strömung durch den Abfluss fließt, d.h. $h_2 = 0$? Überprüfen Sie, ob Ihr Ergebnis physikalisch sinnvoll ist.

Gegeben:

$g, \quad d, \quad v_1, \quad h_1, \quad H, \quad B, \quad \lambda$

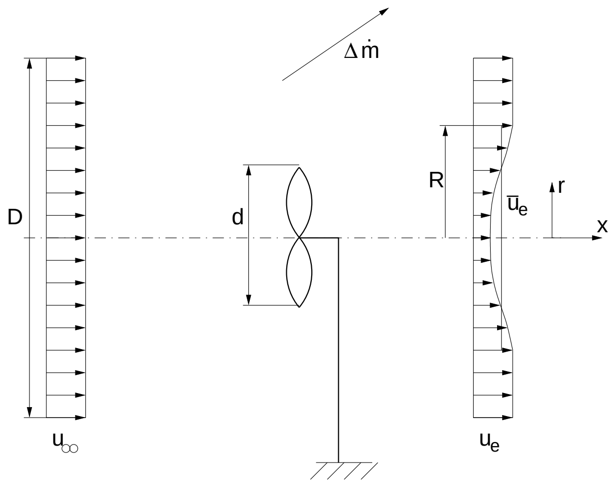
Hinweis:

Nehmen Sie zur Berechnung des Reibungsverlustes im Abfluss an, dass der Rohrquerschnitt über der Höhe H konstant ist, wie in der Zeichnung gestrichelt angedeutet.

3. Aufgabe (13 Punkte)

In einem Umlaufwindkanal mit offener Messstrecke (Durchmesser D) wird die Luftumströmung (Dichte ϱ) eines Windrads (Durchmesser d) untersucht. Bei einer Anströmung mit der Geschwindigkeit u_∞ wird im Nachlauf in einer Schnittebene $x = konst.$ das Geschwindigkeitsfeld $u_e(r,\phi)$ gemessen:

$$u_e(r,\phi) = \begin{cases} u_\infty\left((1-c) - c\,\cos(\pi r/R)\right), & 0 \le r \le R \\ u_\infty, & R < r \le D/2 \end{cases}$$



a) Bestimmen Sie den verdrängten Massenstrom $\Delta\dot{m}$ in der Messstrecke.

b) Das oben angegebene Geschwindigkeitsprofil $u_e(r,\phi)$ soll nun durch das abschnittsweise konstante Profil $u_e(r,\phi) = \overline{u}_e,\ 0 \le r \le R$, und $u_e(r,\phi) = u_\infty,\ R < r \le D/2$, ersetzt werden. Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit $\overline{u}_e$ so, dass der verdrängte Massenstrom $\Delta\dot{m}$ dem in Teil a) berechneten Massenstrom entspricht.

Für die weiteren Teilaufgaben setzen Sie $\overline{u}_e$ als bekannt voraus.

c) Bestimmen Sie die vom Windrad ausgeübte Kraft F aufgrund der angenäherten Geschwindigkeitsverteilung .

d) Leiten Sie einen Ausdruck für d als Funktion der gegebenen Größen her, wobei Sie die Strömung als eindimensional betrachten. Setzen Sie dabei die mittlere Geschwindigkeit u' in der Rotorebene als unbekannt voraus.

e) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit u' in der Rotorebene in Abhängigkeit von u_∞ und $\overline{u}_e$.

Gegeben:

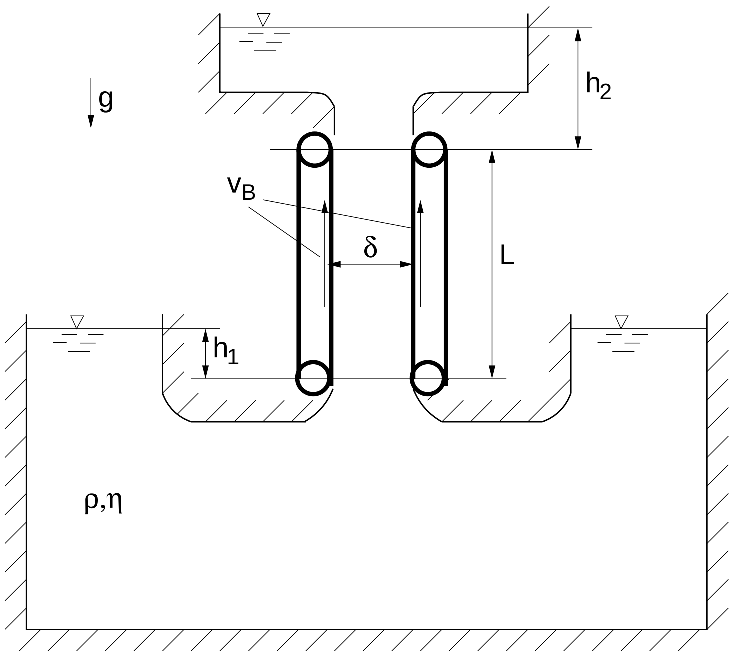
$\varrho,\quad D,\quad u_\infty,\quad u_e(r,\phi),\quad R,\quad c$

Hinweis:

- Reibungskräfte sind zu vernachlässigen.
- $d \ll D,\quad d/2 < R < D/2,\quad 0 < c < 1$
- $\int x\cos(ax)dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$

4. Aufgabe (10 Punkte)

In einem Spalt soll Öl durch Förderbänder, die mit der Geschwindigkeit v_B laufen, von einem niedrigen auf ein höheres Niveau transportiert werden. Der Spalt zwischen den Bändern habe die Höhe δ und die Breite B. Die Strömung zwischen den Förderbändern kann als ausgebildet betrachtet werden. Die Zähigkeit des Öls sei η, die Dichte ϱ.



a) Leiten Sie das Geschwindigkeitsprofil der Strömung zwischen den beiden Förderbändern her. Skizzieren Sie das Geschwindigkeitsprofil und die Schubspannungsverteilung.

b) Bestimmen Sie die nötige Antriebsleistung.

c) Wie ändert sich qualitativ das Aussehen des Geschwindigkeitsprofils bei verschwindendem Druckgradienten (Begründung)?

Gegeben:

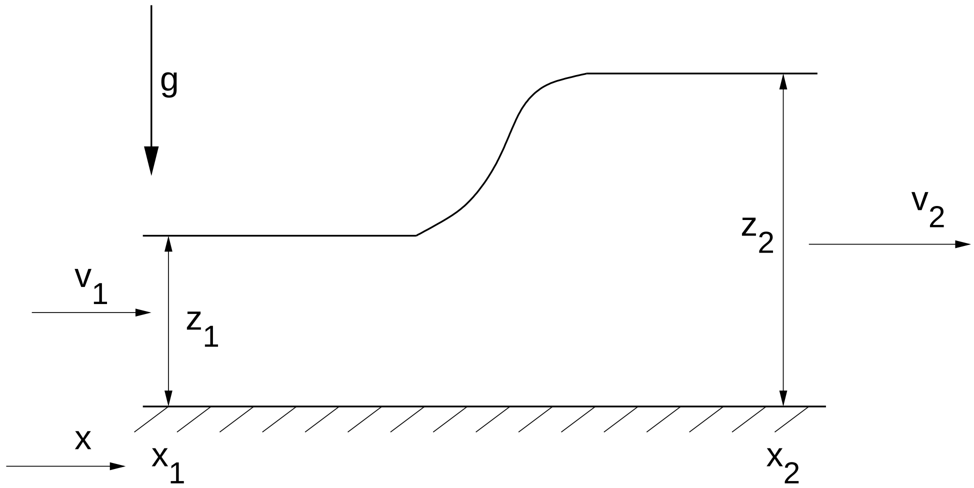
$L, \quad B, \quad h_1, \quad h_2 > h_1, \quad \delta, \quad v_B, \quad \varrho, \quad \eta, \quad g$

Hinweis:

- Die Verluste der Strömung in den Behältern bis zum Eintrittsquerschnitt bzw. ab dem Austrittsquerschnitt der Strömung im Spalt können vernachlässigt werden.
- Beide Behälter sind als groß anzunehmen.

5. Aufgabe (11 Punkte)

In einem Gerinne der Breite B steht ein Wassersprung.



a) Skizzieren Sie den Verlauf der Energiehöhe als Funktion von x im Bereich $x_1 \leq x \leq x_2$.

b) Die Spiegelhöhe z_2 hinter dem Wassersprung beträgt $z_2 = \frac{z_1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 8Fr_1^2})$. Leiten Sie diesen Zusammenhang her. (Die Froude-Zahl Fr_1 ist mit den Einströmgrößen in Zustand 1 zu bilden.)

c) Bestimmen Sie den Energiehöhenverlust ΔH_{12} über den Wassersprung als Funktion der Spiegelhöhen z_1 und z_2 und der Froude-Zahl Fr_1 im Zustand 1.

Gegeben:

$z_1, \quad v_1, \quad g, \quad B$

6. Aufgabe (17 Punkte)

Gegeben ist ein zweidimensionales Strömungsfeld in kartesischen Koordinaten mit den Geschwindigkeitskomponenten

$$u(x,y) = u_\infty + \frac{E}{2\pi}\left(\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\right)$$
$$v(x,y) = \frac{E}{2\pi}\left(\frac{y}{(x+a)^2+y^2} - \frac{y}{(x-a)^2+y^2}\right)$$

a) Aus welchen Elementarströmungen setzt sich die Strömung zusammen? Geben Sie die Potentialfunktion der Strömung an.

b) Berechnen Sie die Staupunkte des Strömungsfelds, wobei $E/u_\infty = 3a\pi$.

c) Zeichnen Sie das Stromlinienbild. Wie kann man durch die Anordnung weiterer Singularitäten die Umströmung eines geschlossenen Körpers in einem Kanal beschreiben? Zeichnen Sie die Anordnung.

d) Im Folgenden soll die Strömung in einem Staupunkt näher untersucht werden. Geben Sie zunächst die Taylor-Reihenentwicklung der Geschwindigkeitskomponenten $u(x,y)$ und $v(x,y)$ in der $x-y$-Ebene um einen beliebigen Staupunkt (x_s, y_s) an. Brechen Sie die Entwicklung nach dem linearen Term ab.

e) Führen Sie nun die Taylor-Reihenentwicklung für den in Teil b) berechneten Staupunkt $x_s > 0$ durch. Welche Strömung wird mit diesen Geschwindigkeitskomponenten beschrieben?

Gegeben:

$E, \quad u_\infty, \quad a$

Hinweis:

- Elementarfunktionen:

Parallelströmung:	$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$	Potentialwirbel:	$F(z) = \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z$
Quelle/Senke :	$F(z) = \frac{E}{2\pi}\ln z$	Staupunktströmung:	$F(z) = az^2$
Dipol:	$F(z) = \frac{M}{2\pi z}$		

- Taylor-Reihenentwicklung: $\phi = \phi_0 + \sum_{q=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{q} \frac{(x-x_0)^{q-r}(y-y_0)^r}{r!((q-r)!)} \frac{\partial^q \phi}{\partial x^{q-r}\partial y^r}$

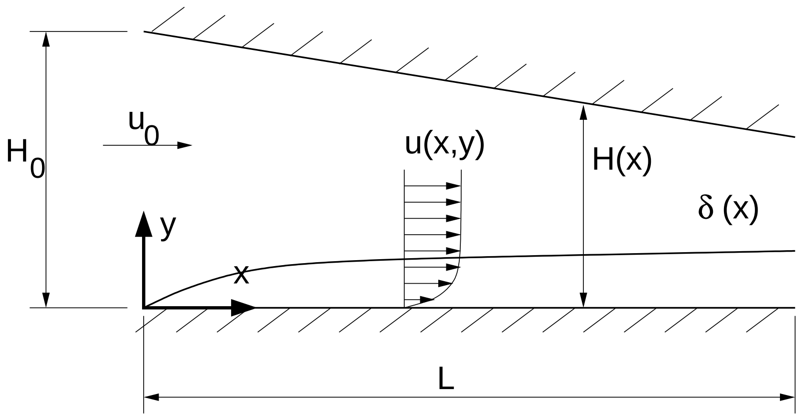
- $\frac{\partial}{\partial \hat{x}}\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}\right) = \frac{\tilde{y}^2-\tilde{x}^2}{(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)^2}, \quad$ mit $\tilde{x} = \hat{x}+c, \quad \tilde{y} = \hat{y}+d, \quad c,d =$ konst.

- $\frac{\partial}{\partial \hat{y}}\left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2}\right) = \frac{-2\tilde{x}\tilde{y}}{(\tilde{x}^2+\tilde{y}^2)^2}, \quad$ mit $\tilde{x} = \hat{x}+c, \quad \tilde{y} = \hat{y}+d, \quad c,d =$ konst.

7. Aufgabe (10 Punkte)

Durch einen konvergenten Kanal der Länge L strömt eine inkompressible Flüssigkeit der Dichte ϱ und der Zähigkeit η. An der unteren Kanalwand bildet sich eine laminare Grenzschicht aus. Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht läßt sich durch einen Polynomansatz darstellen:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0(x) + a_1(x)\frac{y}{\delta} + a_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$



a) Bestimmen Sie den Verlauf der Außengeschwindigkeit $u_a(x)$ und des Druckgradienten dp/dx. Betrachten Sie dabei die Außenströmung als reibungsfrei und eindimensional.

b) Bestimmen Sie die Koeffizienten $a_0(x)$, $a_1(x)$ und $a_2(x)$.

c) Bestimmen Sie die Verdrängungsdicke $\delta_1(x)$ in Abhängigkeit von der Grenzschichtdicke $\delta(x)$ und den Koeffizienten $a_0(x)$, $a_1(x)$ und $a_2(x)$.

d) Kann die Grenzschicht ablösen? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

e) Durch Anbringung eines Stolperdrahtes an der unteren Wand wird der Umschlag laminar/turbulent frühzeitig erzwungen. Wird der Reibungswiderstand an dieser Wand damit verkleinert oder vergrößert? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Gegeben:

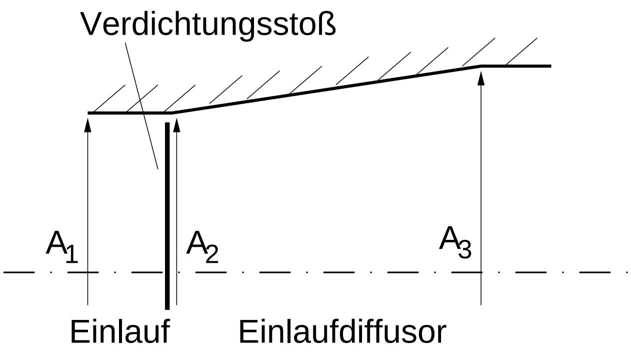
$u_0, \quad \varrho, \quad \eta, \quad L, \quad H_0, \quad H(x) = H_0 - C\frac{x}{L}, \quad C > 0, \quad \delta(x)$

Hinweis:

- Die Strömung ist als eben zu betrachten.
- Die Grenzschicht an der oberen Kanalwand ist zu vernachlässigen.
- $\delta(x) \ll H(x)$.

8. Aufgabe (12 Punkte)

Für die Auslegung eines Staustrahltriebwerkes sollen die in den Triebwerkskomponenten herschenden Strömungsgrößen für verschiedene Betriebszustände ermittelt werden.
Im vorliegenden Fall tritt im Einlaufbereich des Triebwerks ein senkrechter Verdichtungsstoß auf. Im Querschnitt (1) unmittelbar vor dem Stoß werden dabei die statische Temperatur T_1 und der statische Druck p_1 gemessen. Die Machzahl wird dort zu $Ma_1 = 2$ bestimmt.



a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit u_1 und die Totaltemperatur T_{01}.

b) Ermitteln Sie die Geschwindigkeit u_2 und die Temperatur T_2 im Querschnitt (2), d.h. unmittelbar nach dem Verdichtungsstoß.

c) Bestimmen Sie die Querschnittsfläche A_3, so dass die Geschwindigkeit u_3 im Endquerschnitt des Diffusors nur um 10% gegenüber u_2 verkleinert wird. Wie groß ist die Temperatur T_3?

Gegeben:

- Geometrie: $A_1 = A_2 = 0.1m^2$
- Konstanten: $R = 287m^2/s^2K, \quad \gamma = 1.4$
- Anströmmachzahl: $Ma_1 = 2$
- Luftwerte (Umgebung/Einlauf): $T_1 = 212K, \quad p_1 = 0.25bar$

Hinweis:

- Für isentrope Strömungen gilt: $\dfrac{T}{T_0} = \left(\dfrac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$
- $(Ma_1^\star)^2 = \dfrac{\gamma+1}{\gamma-1+2/Ma_1^2}$