1. Aufgabe

a) Aufstellen des Kräftegleichgewichts in z-Richtung:
G := Gewichtskraft
H := Haltekraft
A := Auftriebskraft
$A = G + H$
Bestimme G:

$$G = m_z g + m_p g + V_z \varrho_{He} g$$

Bestimmen von ϱ_{He}:

mit idealem Gas bei Umgebungsbedingung gefüllt folgt: $\Rightarrow \varrho_{He} = \frac{p_a}{R_{He} T_0}$

Bestimmen des Auftriebs:
$A = V_z \varrho_L g = V_z g \frac{p_a}{R_L T_0}$
Einsetzen in Kräftegleichgewicht:
$H = A - G = [-m_z - m_p + V_z(\varrho_L - \varrho_{He})]g$
$= [-m_z - m_p + V_z \frac{p_a}{T_0}(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_{He}})]g \quad [N]$

b) Bestimmen der Anfangsbeschleunigung:

$$[-m_z - m_p + V_z(\varrho_L - \varrho_{He})]g = (m_z + m_p + \varrho_{He} V_z) \cdot a_0$$

$$a_0 = \frac{[-m_z - m_p + V_z(\varrho_L - \varrho_{He})]g}{(m_z + m_p + \varrho_{He} V_z)}$$

$$a_0 = \frac{[-m_z - m_p + V_z(\frac{p_0}{T_0}(\frac{1}{R_L} - \frac{1}{R_{He}})]g}{(m_z + m_p + \frac{p_0}{R_{He} T_o} V_z)} \qquad \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

c) Da nach der maximalen Steighöhe gefragt ist, liegt eine Gleichgewichtsbedingung vor.

$$A = G$$

$$\varrho_L(z_{max}) V_z = m_z + m_p + \varrho_{He} V_z$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_1}{R_L T_0} V_z = m_z + m_p + \varrho_{He} V_z$$

$$\Leftrightarrow p_1 = (m_z + m_p + \varrho_{He} V_z) \frac{R_L T_0}{V_z}$$

über barometrische Höhenformel für isotherme Atmosphäre folgt Zusammenhang zwischen Druck p und Höhe z:
$\frac{dp}{dz} = -\varrho(z) g = -\frac{p}{RT_0} g$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{p} dp = -\frac{1}{RT_0} g dz$$

$$\Leftrightarrow \int_{p_0}^{p_1} \frac{1}{p} dp = \int_0^{z_{max}} -\frac{1}{RT_0} g dz$$

$$\Leftrightarrow p_1 = p_0 exp\left(-\frac{g}{RT_0} z_{max}\right)$$

$$\Rightarrow p_0 exp\left(-\frac{g}{RT_0} z_{max}\right) = (m_z + m_p + \varrho_{He} V_z) \frac{R_L T_0}{V_z}$$

$$\Rightarrow z_{max} = -\frac{R_L T_0}{g} \ln\left[(m_z + m_p) \frac{R_L T_0}{p_0 V_z} + \frac{R_L}{R_{He}}\right]$$

2. Aufgabe

a) Bernoulli von Oberfläche des großen Behälters zu Punkt 1:

$$p_a + \varrho g H = p_a + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 \left(1 + \lambda \frac{h}{D}\right) + \frac{1}{2}\varrho v_0^2 \lambda \frac{L}{D}$$

Bernoulli von Oberfläche des großen Behälters zu Punkt 2:

$$p_a + \varrho g H = p_a + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 \left(1 + \lambda \frac{L+h}{D}\right) + \frac{1}{2}\varrho v_0^2 \lambda \frac{L}{D}$$

Konti:

$$v_0 D^2 = v_1 D^2 + v_2 D^2$$

Gleichsetzen beider Bernoulli-Gleichungen:

$$v_1^2 \left(1 + \lambda \frac{h}{D}\right) = v_2^2 \left(1 + \lambda \frac{L+h}{D}\right)$$

$$\Rightarrow \; v_2 = v_1 \sqrt{\frac{1 + \lambda \frac{h}{D}}{1 + \lambda \frac{h+L}{D}}}$$

$$v_0 = v_1 \left(1 + \sqrt{\frac{1 + \lambda \frac{h}{D}}{1 + \lambda \frac{h+L}{D}}}\right)$$

Einsetzen in Bernoulli von Oberfläche des großen Behälters zu Punkt 1:

$$p_a + \varrho g H = p_a + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 \left(1 + \lambda \frac{h}{D} + \left(1 + \sqrt{\frac{1 + \lambda \frac{h}{D}}{1 + \lambda \frac{h+L}{D}}}\right)^2 \lambda \frac{L}{D}\right)$$

$$\Rightarrow \; v_1 = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1 + \lambda \frac{h}{D} + \left(1 + \sqrt{\frac{1+\lambda \frac{h}{D}}{1+\lambda \frac{h+L}{D}}}\right)^2 \lambda \frac{L}{D}}}$$

$$\Rightarrow \; v_2 = \sqrt{\frac{1 + \lambda \frac{h}{D}}{1 + \lambda \frac{h+L}{D}}} \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1 + \lambda \frac{h}{D} + \left(1 + \sqrt{\frac{1+\lambda \frac{h}{D}}{1+\lambda \frac{h+L}{D}}}\right)^2 \lambda \frac{L}{D}}}$$

$$v_0 = \left(1 + \sqrt{\frac{1 + \lambda \frac{h}{D}}{1 + \lambda \frac{h+L}{D}}}\right) \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1 + \lambda \frac{h}{D} + \left(1 + \sqrt{\frac{1+\lambda \frac{h}{D}}{1+\lambda \frac{h+L}{D}}}\right)^2 \lambda \frac{L}{D}}}$$

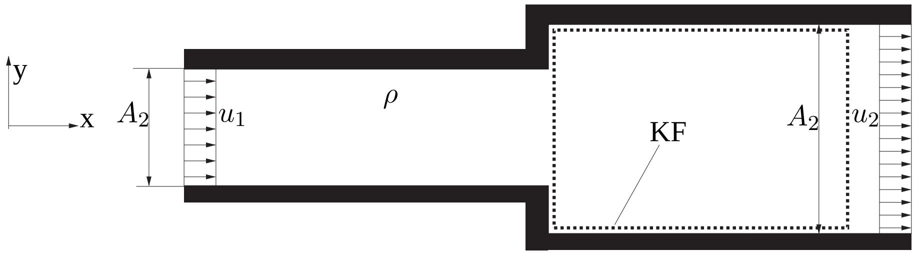
b) Bernoulli von Oberfläche des großen Behälters zu Punkt k:

$$p_a + \varrho g H = p_k + \frac{1}{2}\varrho v_0^2 \lambda \frac{L}{D} + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 \left(1 + \lambda \frac{L}{2D}\right)$$

$$p_k = p_a + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 \left(\lambda \frac{L}{2D} + \lambda \frac{h}{D}\right)$$

$$p_k = p_a + \varrho g h + \frac{1}{2}\varrho \left(\left(\frac{1+\lambda\frac{h}{D}}{1+\lambda\frac{h+L}{D}} \right) \left(\frac{2g(H-h)}{1+\lambda\frac{h}{D} + \left(1+\sqrt{\frac{1+\lambda\frac{h}{D}}{1+\lambda\frac{h+L}{D}}}\right)^2 \lambda\frac{L}{D}} \right) \right) \left(\lambda\frac{L}{2D} + \lambda\frac{h}{D} \right)$$

3. Aufgabe



a) Konti:

$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad (1)$

Impulssatz in x-Richtung:

$$\frac{dI_x}{dt} = -\varrho v_1^2 A_1 + \varrho v_2^2 A_2 = (p_1 - p_2) A_2 = \varrho v_2 A_2 (v_2 - v_1) \quad (2)$$

Bernoulli 1-2:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p_{V_{1,2}}$$

$$\Rightarrow \Delta p_{V_{1,2}} = p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2 - \left(p_2 + \frac{\varrho}{2} v_2^2\right) \quad (3)$$

mit Impulssatz und Konti:

$$\Delta p_{V_{1,2}} = \varrho v_1^2 \frac{v_2}{v_1} \left(\frac{v_2}{v_1} - 1\right) + \frac{\varrho}{2} v_1^2 - \frac{\varrho}{2} v_2^2 \quad (4)$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{\Delta p_{V_{1,2}}}{\frac{\varrho}{2} v_1^2} = 2\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 - 2\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + 1 - \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \quad [-]$$

b) zwei Rohrerweiterungen:

Bernoulli 1-2: $p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2} v_2^2 + \zeta_1 \frac{\varrho}{2} v_1^2$

Bernoulli 2-3: $p_2 + \frac{\varrho}{2} v_2^2 = p_3 + \frac{\varrho}{2} v_3^2 + \zeta_2 \frac{\varrho}{2} v_2^2$

mit Hinweis:
$$\begin{aligned} \Delta p_{v1,3} &= p_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2 - \left(p_3 + \frac{\varrho}{2} v_3^2\right) \\ &= p_2 + \frac{\varrho}{2} v_2^2 + \zeta_1 \frac{\varrho}{2} v_1^2 - \left(p_2 + \frac{\varrho}{2} v_2^2 - \zeta_2 \frac{\varrho}{2} v_2^2\right) \end{aligned}$$

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = \zeta_1 + \zeta_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

aus a): $\zeta_1 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2, \quad \zeta_2 = \left(1 - \frac{A_2}{A_3}\right)^2$

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{A_1}{A_2} - \frac{A_1}{A_3}\right)^2 \quad [-]$$

4. Aufgabe

a) $\dot{V} = z_1 \, v_1 \, B$

Energiegleichung ($\widehat{=}$ Bernoulli) Beckenoberfläche $\rightarrow$ Abwasserkanaloberfläche:

$H = \frac{v_1^2}{2g} + z_1$

$\Rightarrow v_1 = \sqrt{2g(H - z_1)}$

$\Rightarrow \dot{V} = \sqrt{2g(H - z_1)} \cdot z_1 \, B \quad \left[\frac{m^3}{s}\right]$

b) Es gilt:

$v_{gr} = \sqrt{z_{gr} g}$ und $\dot{V} = z_{gr} v_{gr} B = z_{gr} \sqrt{z_{gr} g} B$

$\Rightarrow z_{gr} = \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}}$

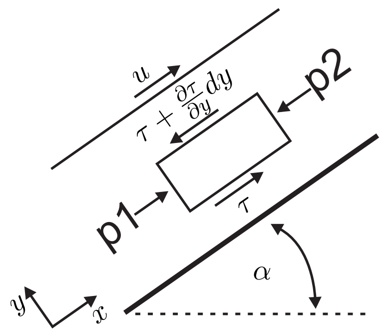
$H + \Delta H = \frac{v_{gr}^2}{2g} + z_{gr} + z_W$

$\Rightarrow H + \Delta H = \frac{3}{2} z_{gr} + z_W$

$\Rightarrow \Delta H = z_W - H + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{\dot{V}^2}{B^2 g}} \quad [m]$

5. Aufgabe

a) ausgebildete Strömung:



Kräftegleichgewicht am Volumenelement:

$$\tau dxdz - \left(\tau + \frac{\partial\tau}{\partial y}dy\right)dxdz + pdydz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz - \varrho g\sin(\alpha)dxdydz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\tau}{dy} = -\varrho g\sin\alpha - \frac{dp}{dx}$$

1. Integration: $\tau(y) = -\left(\varrho g\sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right)y + c_1$

Newtonsches Fluid: $\tau(y) = -\eta\frac{du}{dy}$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{1}{\eta}\left(\varrho g\sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right)y - \frac{c_1}{\eta}$$

2. Integration: $u(y) = \frac{1}{2\eta}\left(\varrho g\sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right)y^2 - \frac{c_1}{\eta}y + c_2$

$1.RB: \qquad u(y=0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

$2.RB: \qquad u(y=\delta) = u_B \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}\left(\varrho g\sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right)\delta - \frac{u_B\eta}{\delta}$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\eta}\left(\varrho g\sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right)\left(y^2 - y\delta\right) + u_B\frac{y}{\delta}$$

$$\tau(y) = -\eta\frac{u_B}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\varrho g\sin\alpha + \frac{dp}{dx}\right)(\delta - 2y)$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\Delta p}{L} = \frac{p_2 - p_1}{L};$$

mit: $\qquad p_2 = p_a + \varrho g h_2, \quad p_1 = p_a + \varrho g h_1$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \varrho g\frac{h_2 - h_1}{L}$$

$$\Rightarrow u(y) = \frac{1}{2\eta}\left(\varrho g\sin\alpha + \varrho g\frac{h_2 - h_1}{L}\right)\left(y^2 - y\delta\right) + u_B\frac{y}{\delta}$$

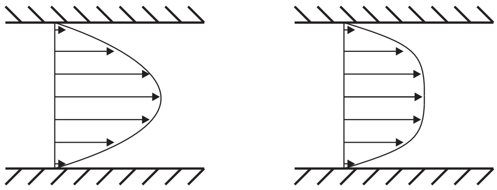
$$\tau(y) = -\eta\frac{u_B}{\delta} + \frac{1}{2}\left(\varrho g\sin\alpha + \varrho g\frac{h_2 - h_1}{L}\right)(\delta - 2y)$$

b) $$\frac{\dot{V}}{B} = \int_0^\delta u(y)dy = -\frac{\varrho g}{12\eta}\left(\sin\alpha + \frac{h_2 - h_1}{L}\right)\delta^3 + \frac{u_B\delta}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow u_B \geq \frac{\varrho g}{6\eta}\left(\sin\alpha + \frac{h_2 - h_1}{L}\right)\delta^2$$

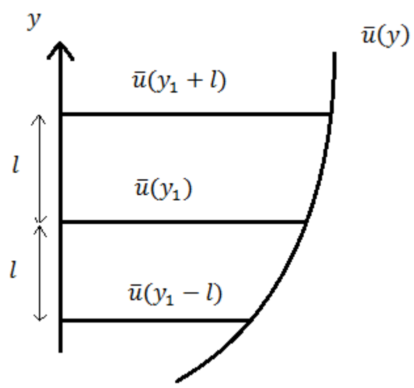
6. Aufgabe

a) Laminares (links) und turbulentes (rechts) gemitteltes Geschwindigkeitsprofil:



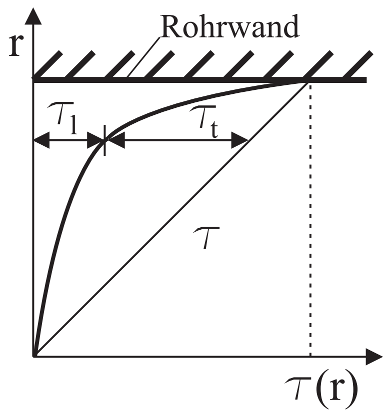
Das turbulente Geschwindigkeitsprofil ist völliger als das Laminare, da der Impulsaustausch in radialer Richtung größer ist.

b) Der Prandtl'sche Mischungsweg beschreibt den Weg, den bewegte Stömungsballen senkrecht zur Wand im Mittel zurücklegen, bevor sie sich vermischen und ihre Individualität verlieren.



c) Die viskose Unterschicht ist eine sehr dünne, wandnahe Schicht, in der die laminaren Schubspannungen die turbulenten Schubspannungen dominieren. Die Verteilung der tangentialen Geschwindigkeitskomponente verändert sich linear mit dem Abstand normal zur Wand.

d) Skizze



e) $\tau_t = -\rho\overline{u'v'} = \eta_t \frac{d\overline{u}}{dy}$

Die Größe η_t ist die scheinbare bzw. turbulente Viskosität. Sie ist keine Stoffgröße, sondern abhängig vom Fluid und von den Strömungsbedingungen. Die Größe $\overline{u}$ ist die zeitlich gemittelte Hauptströmungsgeschwindigkeit.