Musterlösung zur Klausur Strömungslehre

Die aufgeführten *Bemerkungen* dienen nur der zusätzlichen Erklärung.

1. Aufgabe (11 Punkte)

a) Hydrostatisches Grundgesetz:

$$\mathrm{d}p = g\rho(z)\mathrm{d}z \quad \Rightarrow \quad p(z) = g\left(\rho_0 z + \frac{C}{2}z^2\right) + \text{const}$$

$$\text{mit RB:} \quad p(0) = p_a \quad \Rightarrow \quad p(z) = p_a + g\left(\rho_0 z + \frac{C}{2}z^2\right)$$

b)

$$W = \int_{h+l/2}^{l/2} -F\mathrm{d}z \qquad \text{mit } l \ll h \quad \text{Grenzen: } \int_h^0 \quad ; \quad F = F_G - F_A$$

$$\Rightarrow \quad W = \int_h^0 \left(-F_G + (\rho_0 + Cz)l^3 g\right)\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \quad W = \left(F_G - \rho_0 g l^3\right)h - \frac{C}{2}g l^3 h^2$$

c)

$$F_G = F_A \quad \Rightarrow \quad \rho_T V_T g = \rho(z_T)(V_T + V_W)g$$

$$\Rightarrow \quad \rho(z_T) = \frac{\rho_T V_T}{V_T + V_W} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 + C z_T = \frac{\rho_T V_T}{V_T + V_W}$$

$$\Rightarrow \quad z_T = \frac{\rho_T V_T}{C(V_T + V_W)} - \frac{\rho_0}{C}$$

d) isotherm $\rightarrow pV = \text{const}$

$$p(z_T)V_W = p(z_{min})2V_W$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(\rho_0 g z_T + \frac{C}{2}g z_T^2 + p_a\right) = \rho_0 g z_{min} + \frac{C}{2}g z_{min}^2 + p_a$$

$$\Rightarrow \quad z_{min}^2 + \frac{2\rho_0}{C}z_{min} + \left(\frac{\rho_0}{C}\right)^2 = \left(\frac{\rho_0}{C}\right)^2 + \underbrace{\frac{z_T^2}{2} + \frac{\rho_0 z_T}{C} - \frac{p_a}{gC}}_{K}$$

$$\Rightarrow \quad z_{min} = -\frac{\rho_0}{C} + \sqrt{\left(\frac{\rho_0}{C}\right)^2 + K}$$

$$\left[z_{min} = -\frac{\rho_0}{C} - \sqrt{\left(\frac{\rho_0}{C}\right)^2 + K} \qquad \text{sinnlos, da } z \geq 0\right]$$

2. Aufgabe (15 Punkte)

a) *Bemerkungen: Bei Einbauten ist ζ mit der Eintrittsgeschwindigkeit definiert.*

Bernoulli von C nach D:

$$p_C + \frac{\rho}{2}v_C^2 + \rho g \frac{h}{4} = p_D + \frac{\rho}{2}v_D^2 + \frac{\rho}{2}v_C^2\zeta \qquad \text{mit } v_D = 2v_C \text{ aus Konti}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{(p_C - p_D)}_{=\rho g h 7/4} + \rho g \frac{h}{4} = -\frac{\rho}{2}v_C^2 + \frac{\rho}{2}v_C^2 2^2 + \frac{\rho}{2}v_C^2\zeta$$

$$\Rightarrow \quad 2\rho g h = \frac{\rho}{2}v_C^2(3+\zeta) \quad \Rightarrow \quad v_C = \sqrt{\frac{4gh}{3+\zeta}}$$

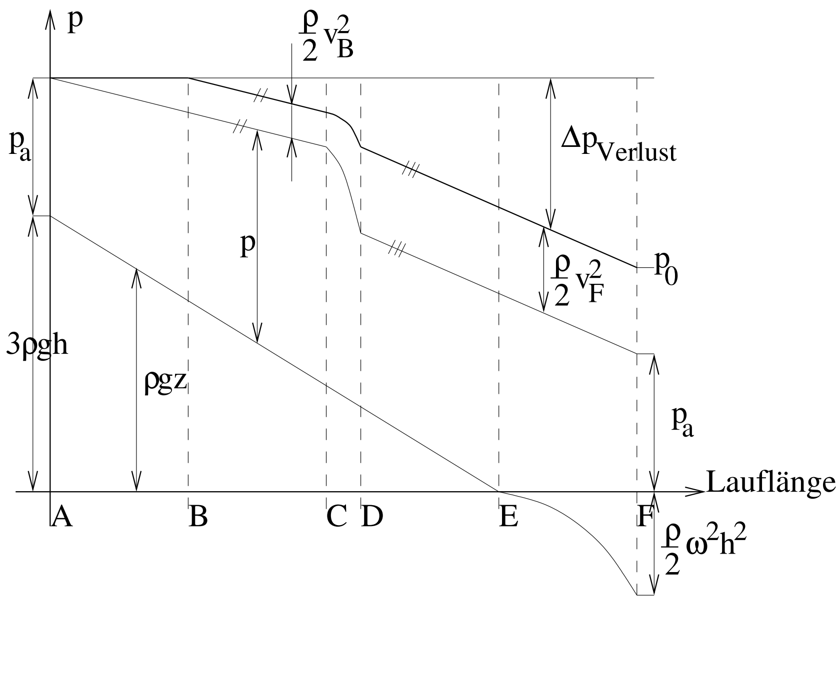
b) Bedingung: $p_F = p_i = p_a (= p_A)$ und $\omega h = v_F$!
Bernoulli von A nach F:

$$p_A + 3\rho g h = p_F + \frac{\rho}{2}v_F^2 - \frac{\rho}{2}\omega^2 h^2 + \frac{\rho}{2}v_B^2\left(\frac{\lambda_1 h}{d\sqrt{2}} + \zeta\right) + \frac{\rho}{2}v_F^2\lambda_2\frac{2h}{d}$$

$$\Rightarrow \quad 3\rho g h = \frac{\rho}{2}v_F^2 \underbrace{\left(\frac{\lambda_1 h}{4d\sqrt{2}} + \frac{\zeta}{4} + \frac{\lambda_2 2h}{d}\right)}_{K} \qquad \text{mit } v_B = v_F/2 \text{ aus Konti}$$

$$\Rightarrow \quad v_F = \sqrt{\frac{6gh}{K}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{6g}{hK}}$$

c)



d) Bedingung: $p_F = p_a + 3\rho g h$
„instationärer" Bernoulli von A nach F:

$$p_A + 3\rho g h = p_F + \frac{\rho}{2}v_F^2 + \rho\int_A^F \frac{\partial v}{\partial t}\mathrm{d}s \qquad \text{mit } \partial v_B = \partial v_F/2 \text{ aus Konti}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = v_F^2 + \int_A^C \frac{\partial v_F}{\partial t}\mathrm{d}s + \underbrace{2\int_C^D \frac{\partial v(s)}{\partial t}\mathrm{d}s}_{\text{zu vernachlässigen}} + 2\int_D^F \frac{\partial v_F}{\partial t}\mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow \quad 0 = v_F^2 + \Big(\underbrace{\frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}_{\approx 0,\text{ da } d \ll h} + h\Big)\frac{\mathrm{d}v_F}{\mathrm{d}t} + 4h\frac{\mathrm{d}v_F}{\mathrm{d}t} \qquad (1)$$

$$Q = A\int_{t=0}^{t_{0.01v_0}} v_F \mathrm{d}t \qquad \text{mit } A = \pi d^2/4$$

$$\Rightarrow \quad Q = A\int_{v_0}^{0.01v_0} v_F \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}v_F}\mathrm{d}v_F = -5hA\int_{v_0}^{0.01v_0}\frac{\mathrm{d}v_F}{v_F} \qquad \text{mit } (1)$$

$$\Rightarrow \quad Q = -\frac{5\pi d^2 h}{4}\ln\left(\frac{0.01v_0}{v_0}\right) = \frac{5}{4}\pi d^2 h \ln 100$$

3. Aufgabe (13 Punkte)

Bemerkungen: Die Betragsstriche wurden nur verwendet, um etwaige Irritationen mit den Vorzeichen/Richtungen der Geschwindigkeiten auszuschließen.

a)

$$\dot{m}_W = \rho_W BT|v_{1r}|$$
$$\dot{m}_E = \rho_E HTu$$

b) Impulsbilanz
in x'-Richtung:

$$F_{x'} = -\dot{m}_W|v_{1r}| - \dot{m}_3|v_{3r}|\cos\beta - \dot{m}_2|v_{2r}|\cos\alpha + \dot{m}_E u\cos\alpha$$

in y'-Richtung:

$$F_{y'} = \dot{m}_3|v_{3r}|\sin\beta - \dot{m}_2|v_{2r}|\sin\alpha + \dot{m}_E u\sin\alpha$$

c) zusätzlich zu den beiden Impulsgleichungen aus b)

$$\dot{m}_W + \dot{m}_E = \dot{m}_2 + \dot{m}_3$$
$\Rightarrow$ 3 Gleichungen für 3 Unbekannte $(\dot{m}_2, \dot{m}_3, \beta)$

d) *Bemerkungen: Das vorher „einströmende" Erdreich bewegt sich in diesem System mit einer Geschwindigkeit von $u_E = 0$; deshalb taucht $\dot{m}_E$ nur noch implizit in $\dot{m}_2$ und $\dot{m}_3$ auf.*

mit $\alpha = 0$ und $\beta < 90^o$

$$v_{1absx} = |v_{1r}| + u \quad , \quad v_{1absy} = 0$$
$$v_{2absx} = -|v_{2r}| + u \quad , \quad v_{2absy} = 0$$
$$v_{3absx} = -|v_{3r}|\cos\beta + u \quad , \quad v_{3absy} = |v_{3r}|\sin\beta$$

Impulsbilanz
in x-Richtung:

$$F_x = -v_{1absx}\dot{m}_W + v_{2absx}\dot{m}_2 + v_{3absx}\dot{m}_3$$

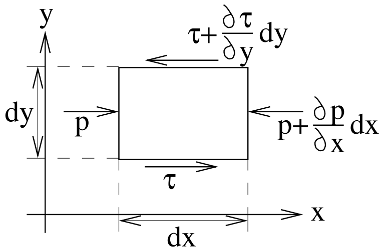
in y-Richtung:

$$F_y = v_{3absy}\dot{m}_3$$

Bemerkungen: Für $u < |v_{2r}|$ und $u < |v_{3r}|\cos\beta$ sind alle Terme der Impulsbilanz in x-Richtung negativ.

4. Aufgabe (9 Punkte für a) und b))

a) Kräftegleichgewicht in x-Richtung:



$$p\mathrm{d}y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \tau\mathrm{d}x - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y}\mathrm{d}y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

mit $\tau = -\eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ und aus $p(x,y)$: $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p_a}{L}\left(1 + \frac{2ky}{H}\right)$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}\tau = \left(\frac{2p_a}{L}\left(1 + k\frac{y}{H}\right) - \frac{p_a}{L}\right)\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \quad \tau = \frac{p_a H}{L}\left(C_1 + \frac{y}{H} + k\frac{y^2}{H^2}\right) \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}u = -\frac{\tau}{\eta}\mathrm{d}y = \left(-\frac{p_a H}{\eta L}\left(C_1 + \frac{y}{H} + k\frac{y^2}{H^2}\right)\right)\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow \quad u = -\frac{p_a H^2}{\eta L}\left(C_1\frac{y}{H} + \frac{y^2}{2H^2} + k\frac{y^3}{3H^3}\right) + C_2$$

mit RB1: $u(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

mit RB2: $u(H) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{p_a H^2}{\eta L}\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{3} + C_1\right) \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{1}{2} - \frac{k}{3}$

$$\Rightarrow \quad u(y) = \frac{p_a H^2}{\eta L}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{3}\right)\left(\frac{y}{H}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{H}\right)^2 - \frac{k}{3}\left(\frac{y}{H}\right)^3\right]$$

b) aus (1) mit $\tau = 0$:

$$0 = \frac{p_a H}{L}\left(-\frac{1}{2} - \frac{k}{3} + \left(\frac{y}{H}\right) + \left(k\frac{y}{H}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y}{H}\right)^2 + \frac{1}{k}\left(\frac{y}{H}\right) + \frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y}{H}\right) = -\frac{1}{2k} + \sqrt{\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{3}}$$

$$\left[\left(\frac{y}{H}\right) = -\frac{1}{2k} - \sqrt{\frac{1}{4k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{3}} \qquad \text{sinnlos, da } (y/H) \geq 0\right]$$

für $k = 0.2 \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{H} = 0.514$

c) **Teilaufgabe c) kam nur in der Kombi-Klausur Wärmeübertragung/Strömungslehre vor (3 Punkte)**

u_{max} liegt an der Stelle, an der auch $\tau = 0$ ist:

$$u_{max} = u(\frac{y}{H} = 0.514)$$
$$u_{max} = \frac{p_a H^2}{\eta L}\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{0.2}{3}\right)0.514 - \frac{1}{2}0.514^2 - \frac{0.2}{3}0.514^3\right)$$
$$u_{max} = 0.15\frac{p_a H^2}{\eta L}$$

5. Aufgabe (11 Punkte)

a) Die Reynoldszahl $Re := \rho u l/\eta$ beschreibt das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften.

b) 5 Einflußgrößen $(W, u_\infty, \eta, \rho, D)$, 3 Grunddimensionen (kg, m, s) $\Rightarrow$ 2 Kennzahlen

$$K_1 = W u_\infty^{\beta_1} \rho^{\gamma_1} D^{\delta_1}$$
$$1 = \left(\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\right)\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{\beta_1}\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^{\gamma_1}(\text{m})^{\delta_1}$$
$$\text{kg} \quad : \quad 0 = 1 + \gamma_1 \quad \Rightarrow \quad \gamma_1 = -1$$
$$\text{s} \quad : \quad 0 = -2 - \beta_1 \quad \Rightarrow \quad \beta_1 = -2$$
$$\text{m} \quad : \quad 0 = 1 + \beta_1 - 3\gamma_1 + \delta_1 \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = -2$$
$$\Rightarrow \quad K_1 = \frac{W}{\rho u_\infty^2 D^2} \qquad [= c_w]$$

$$K_2 = \eta u_\infty^{\beta_2} \rho^{\gamma_2} D^{\delta_2}$$
$$1 = \left(\frac{\text{kg}}{\text{m s}}\right)\left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^{\beta_2}\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)^{\gamma_2}(\text{m})^{\delta_2}$$
$$\text{kg} \quad : \quad 0 = 1 + \gamma_2 \quad \Rightarrow \quad \gamma_2 = -1$$
$$\text{s} \quad : \quad 0 = -1 - \beta_2 \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = -1$$
$$\text{m} \quad : \quad 0 = -1 + \beta_2 - 3\gamma_2 + \delta_2 \quad \Rightarrow \quad \delta_2 = -1$$
$$\Rightarrow \quad K_2 = \frac{\eta}{\rho u_\infty D} \qquad \left[= \frac{1}{Re}\right]$$

c) *Bemerkungen: Reibungsfrei bedeutet $\eta = 0$ und generell auch $\lambda = 0$ (es sei denn, es wird gesondert erwähnt), da Reibung und Wärmeleitung auf denselben molekularen Effekten beruhen.*

Masse (Konti):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad \text{mit } \rho = \text{const} \quad \text{(inkompressibel)}$$

y-Impuls:

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u v)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \text{mit } \lambda, \eta = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \qquad \text{mit } \rho = \text{const}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + v\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ (Konti)}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

Energie:

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u E)}{\partial x} + \frac{\partial(up)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v E)}{\partial y} + \frac{\partial(vp)}{\partial y} = 0 \qquad \text{mit } \lambda, \eta = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial(uE)}{\partial x} + \frac{\partial(vE)}{\partial y} + \frac{u}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{p}{\rho}\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ (Konti)}} = 0 \qquad \text{mit } \rho = const$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial E}{\partial t} + u\frac{\partial E}{\partial x} + v\frac{\partial E}{\partial y} + \frac{u}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + E\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0 \text{ (Konti)}} = 0$$

6. Aufgabe (14 Punkte)

a) Die Stromlinie verläuft immer tangential zum Geschwindigkeitsvektor. (oder: Die Stromlinie zeigt immer in Richtung des Geschwindigkeitsvektors. o. ä.)

b) Strom- und Äquipotentiallinien stehen senkrecht aufeinander.

c) *Bermerkungen: Ein rotierender, angeströmter Kreiszylinder wird durch eine Parallelströmung, einen Dipol und einen Potentialwirbel dargestellt. Durch die ebene Wand, die in der Potentialtheorie eine Stromlinie darstellt, werden der Dipol und der Potentialwirbel gespiegelt, wobei dieser Potentialwirbel in entgegen gesetzter Richtung zum ersteren drehen muß.*

$$F(z) = u_\infty z + \underbrace{\frac{M}{2\pi(z-ih)} - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z-ih)}_{\text{Anteil über der Wand}} + \underbrace{\frac{M}{2\pi(z+ih)} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z+ih)}_{\text{gespiegelter Anteil}}$$

d)

$$z = (x+iy) = re^{i\theta} \quad \text{mit} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{und} \quad \theta = \arctan\frac{y}{x}$$
$$y_+ = y+h\ , \quad r_+ = \sqrt{x^2+y_+^2}\ , \quad \theta_+ = \arctan\frac{y_+}{x}$$
$$y_- = y-h\ , \quad r_- = \sqrt{x^2+y_-^2}\ , \quad \theta_- = \arctan\frac{y_-}{x}$$

$$F(z) = \Phi + i\Psi$$
$$F(z) = u_\infty x + iu_\infty y + \frac{M(x-iy_+)}{2\pi(x+iy_+)(x-iy_+)} + \frac{M(x-iy_-)}{2\pi(x+iy_-)(x-iy_-)}$$
$$-\frac{i\Gamma}{2\pi}(\ln r_- + i\theta_- - \ln r_+ - i\theta_+)$$
$$\Rightarrow \quad F(z) = \underbrace{u_\infty x + \frac{Mx}{2\pi(x^2+y_+^2)} + \frac{Mx}{2\pi(x^2+y_-^2)} + \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\arctan\frac{y_-}{x} - \arctan\frac{y_+}{x}\right)}_{\Phi}$$
$$+\, i\underbrace{\left(u_\infty y - \frac{My_+}{2\pi(x^2+y_+^2)} - \frac{My_-}{2\pi(x^2+y_-^2)} - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\sqrt{\frac{x^2+y_-^2}{x^2+y_+^2}}\right)\right)}_{\Psi}$$

e) $h = 0!$

$$F(z) = u_\infty z + \frac{2M}{2\pi}\frac{1}{z}$$
$$\overline{w} = u - iv = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z}$$
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}z} = u_\infty - \frac{M}{\pi}\frac{1}{z^2}$$
$$\Rightarrow \quad \overline{w} = \underbrace{u_\infty - \frac{M}{\pi}\frac{(x^2-y^2)}{((x^2-y^2)^2+4x^2y^2)}}_{u} \quad + i \; \underbrace{\frac{M}{\pi}\frac{2xy}{((x^2-y^2)^2+4x^2y^2)}}_{-v}$$

Staupunkt bedeutet $u = 0$ und $v = 0$

$v = 0 \quad \Rightarrow \quad xy = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee y = 0$ (bei $x = 0 \wedge y = 0$ liegt Singularität)

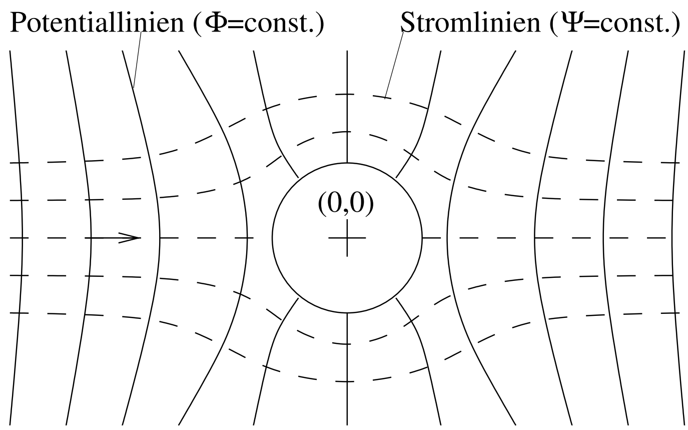
$$u = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\infty \pi((x^2-y^2)^2 + \underbrace{4x^2y^2}_{=0}) = M(x^2-y^2)$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - y^2 = \frac{M}{u_\infty \pi}$$

1.) $x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm\, i\sqrt{\frac{M}{u_\infty\pi}}$ geht nicht, da $y \in \Re$!

2.) $y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{M}{u_\infty\pi}} \quad \Rightarrow$ 2 Staupunkte!

f) beachte b)



7. Aufgabe (13 Punkte)

a) Grenzschicht bedeutet $Re \gg 1$ und Wandbindung bedeutet $u = 0$, $v = 0$:

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad \text{Wandbindungsgl. ist dimensionslos!}$$

b)

$$\text{RB:} \quad \frac{y}{\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{u}{u_a} = 0 \quad \text{ist durch den Ansatz erfüllt}$$

$$\eta \frac{u_a}{\delta^2} \frac{\partial^2 (u/u_a)}{\partial (y/\delta)^2}\bigg|_{y/\delta=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \qquad (1) \quad \text{Wandbindungsgl. ist dimensionsbehaftet!}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\rho u \frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}x} \qquad (2) \quad \text{diff. Bernoulli} \quad \text{mit} \quad \frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}x} = \frac{u_\infty}{2L} \cos\frac{x}{L}$$

$$\text{aus (1) und (2)} \quad \Rightarrow \quad 2a_2 = -\frac{\delta^2}{\nu}\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad a_2 = -\frac{u_\infty \delta^2(x)\cos(x/L)}{4\nu L}$$

$$\text{RB'en:} \quad \frac{y}{\delta} = 1 \; : \quad \frac{u}{u_a} = 1 \, , \quad \frac{\partial (u/u_a)}{\partial (y/\delta)} = 0 \, , \quad \frac{\partial^2 (u/u_a)}{\partial (y/\delta)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{rcrrrr} -\frac{u_\infty \delta^2(x)\cos(x/L)}{4\nu L} & = & & a_2 & & \\ 1 & = & a_1 & +a_2 & +a_3 & +a_4 \\ 0 & = & a_1 & +2a_2 & +3a_3 & +4a_4 \\ 0 & = & & 2a_2 & +6a_3 & +12a_4 \end{array} \right|$$

$$\cdots \Rightarrow \left| \begin{array}{rcl} a_1 & = & 2 + \frac{u_\infty \delta^2(x)\cos(x/L)}{12\nu L} \\ a_2 & = & -\frac{u_\infty \delta^2(x)\cos(x/L)}{4\nu L} \\ a_3 & = & -2 + \frac{u_\infty \delta^2(x)\cos(x/L)}{4\nu L} \\ a_4 & = & 1 - \frac{u_\infty \delta^2(x)\cos(x/L)}{12\nu L} \end{array} \right|$$

c)

$$\delta_2 \; := \; \delta \int_0^1 \frac{u}{u_\delta}\left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) \mathrm{d}\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

d)

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_\delta}\right) \mathrm{d}\left(\frac{y}{\delta}\right) \qquad \text{mit} \quad \cos(\pi/2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \left(2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right)\right) \mathrm{d}\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \delta_1 = \delta\left(\frac{\pi L}{2}\right)\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)\right) \; = \; \frac{3}{10}\delta\left(\frac{\pi L}{2}\right)$$

8. Aufgabe (13 Punkte)

a)

$$u = 252\frac{\text{km}}{\text{h}} = 70\frac{\text{m}}{\text{s}}\ ; \quad a = \sqrt{\gamma R T_L} \approx 340\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$\Rightarrow \quad Ma = \dfrac{u}{a} = 0.206 \quad \Rightarrow$ bei $Ma < 0.3$ kann noch inkompr. gerechnet werden!

b) *Bemerkungen: σ wird durch senkrechten Verdichtungsstoß (90^o) und Mach'sche Linie (die sich aus $\alpha = \arcsin 1/Ma$) ergibt) begrenzt!*

$90^o \ \geq \ \sigma \ \geq \ 30^o$ auch aus $\sigma - \beta -$ Diagramm abzulesen

c) *Bemerkungen: Die Ruhetemperatur bleibt auch über einen Stoß konstant!*

$$\left(\frac{p_{01}}{p_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2 \quad \Rightarrow \quad Ma_1 = 3.208$$

$$u_1 = Ma_1 a_1 = Ma_1\sqrt{\gamma R T_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 154.8\text{K}$$

$$T_{01} = T_1\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2\right) \quad \Rightarrow \quad T_{01} = 473.4\text{K}$$

d)

$$T_1 = T_{01}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}Ma_1^2\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = 178.6\text{K}$$

$$Ma_2 = \sqrt{\left(\frac{T_{01}}{T_1} - 1\right)\frac{2}{\gamma-1}} \quad \Rightarrow \quad Ma_2 = 2.236$$

$\dfrac{T_2}{T_1} = 1.399$ aus Diagramm $\rightarrow \quad Ma_1 \sin\sigma = 1.6 \quad \Rightarrow \quad \sigma \approx 32^o$

e)

$Ma_1 = 3\ , \quad \sigma = 32^o$ aus Diagramm $\rightarrow \quad \beta \approx 15^o$

f)

Konti: $\rho u = (\rho + \Delta\rho)(u - \Delta u) \qquad (1)$

$\Rightarrow \quad \rho\Delta u = \Delta\rho u \qquad (2)$

Impuls: $-\rho u^2 + (\rho + \Delta\rho)(u - \Delta u)^2 = p - (p + \Delta p)$

$\Rightarrow \quad -\rho u^2 + \rho u(u - \Delta u) = -\Delta p$ mit (1)

$\Rightarrow \quad \Delta\rho u^2 = \Delta p$ mit (2)

$$\Rightarrow \quad u^2 = \frac{\Delta p}{\Delta\rho}$$

$\Rightarrow \quad u^2 = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}$ mit Δp , $\Delta\rho$ infinitesimal klein

$\Rightarrow \quad (a =)\ u = \sqrt{\gamma\dfrac{p}{\rho}}$ mit Hinweis zu f)