....

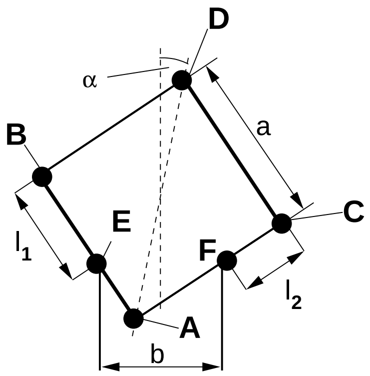
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

15. 03. 2008

1. Aufgabe

a) -b) Geometrie:



$$\alpha^+ = \frac{\pi}{4} + \alpha, \qquad \alpha^- = \frac{\pi}{4} - \alpha,$$

$$l_1 = a - b\cos(\alpha^+), \qquad l_2 = a - b\sin(\alpha^+),$$

$$z_A = h + (a - l_1)\sin(\alpha^+), \qquad z_B = h - l_1\sin(\alpha^+),$$

$$z_C = h - l_2\cos(\alpha^+), \qquad z_D = z_B - a\cos(\alpha^+)$$

c) Druckkraft normal auf die Fläche $a(s_i - s_j)$: $F_{p,n} = \int_{s_i}^{s_j} p(s)ads$

Druck: $p(z) = p_a + \int_0^z \varrho(z)gdz = p_a + \varrho_0 gz + \frac{1}{2}kgz^2$

Koordinatentransformation:

$$\text{E} \rightarrow \text{B}: \quad s_1 = \frac{h-z}{\sin(\alpha^+)} \quad \rightarrow z = h - s_1\sin(\alpha^+), \quad ds_1 = -\frac{dz}{\sin(\alpha^+)}$$

$$\text{F} \rightarrow \text{C}: \quad s_2 = \frac{h-z}{\cos(\alpha^+)} \quad \rightarrow z = h - s_2\cos(\alpha^+), \quad ds_2 = -\frac{dz}{\cos(\alpha^+)}$$

$$\text{B} \rightarrow \text{D}: \quad s_3 = \frac{z_B-z}{\cos(\alpha^+)} \quad \rightarrow z = z_B - s_3\cos(\alpha^+), \quad ds_3 = -\frac{dz}{\cos(\alpha^+)}$$

$$\text{C} \rightarrow \text{D}: \quad s_4 = \frac{z_C-z}{\sin(\alpha^+)} \quad \rightarrow z = z_C - s_4\sin(\alpha^+), \quad ds_4 = -\frac{dz}{\sin(\alpha^+)}$$

Durckkraft in z-Richtung:

$$\overline{EB}: \quad F_{p,z,1} = -F_{p,n,1}\cos(\alpha^+), \qquad \overline{FC}: \quad F_{p,z,2} = -F_{p,n,2}\sin(\alpha^+),$$

$$\overline{BD}: \quad F_{p,z,3} = F_{p,n,3}\sin(\alpha^+), \qquad \overline{CD}: \quad F_{p,z,4} = F_{p,n,4}\cos(\alpha^+)$$

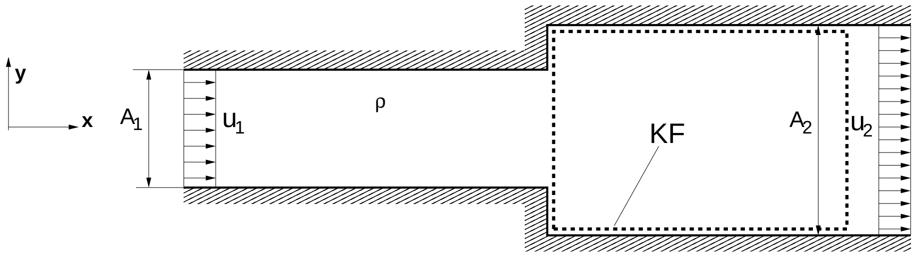
$$\overline{EF}: \quad F_{p,z,5} = -F_{p,n,5}$$

$$
\begin{aligned}
F_{p,z,1} &= \int_h^{z_B} (p_a + \varrho_0 g z + k g z^2) a \cos(\alpha^+) \frac{dz}{\sin(\alpha^+)} \\
&= \frac{a}{\tan(\alpha^+)} \left[p_a (z_B - h) + \frac{\varrho_0 g}{2} (z_B^2 - h^2) + \frac{kg}{6} (z_B^3 - h^3) \right] \\
F_{p,z,2} &= \int_h^{z_C} (p_a + \varrho_0 g z + k g z^2) a \sin(\alpha^+) \frac{dz}{\cos(\alpha^+)} \\
&= a \tan(\alpha^+) \left[p_a (z_C - h) + \frac{\varrho_0 g}{2} (z_C^2 - h^2) + \frac{kg}{6} (z_C^3 - h^3) \right] \\
F_{p,z,3} &= - \int_{z_B}^{z_D} (p_a + \varrho_0 g z + k g z^2) a \sin(\alpha^+) \frac{dz}{\cos(\alpha^+)} \\
&= a \tan(\alpha^+) \left[p_a (z_B - z_D) + \frac{\varrho_0 g}{2} (z_B^2 - z_D^2) + \frac{kg}{6} (z_B^3 - z_D^3) \right] \\
F_{p,z,4} &= - \int_{z_C}^{z_D} (p_a + \varrho_0 g z + k g z^2) a \cos(\alpha^+) \frac{dz}{\sin(\alpha^+)} \\
&= \frac{a}{\tan(\alpha^+)} \left[p_a (z_C - z_D) + \frac{\varrho_0 g}{2} (z_C^2 - z_D^2) + \frac{kg}{6} (z_C^3 - z_D^3) \right] \\
F_{p,z,5} &= -p_a a b
\end{aligned}
$$

Notwendige Kraft F_N zum Abheben: $F_N = \sum_{i=1}^{5} F_{p,z,i} + G$

$$
\begin{aligned}
F_N = G + \frac{a}{\tan(\alpha^+)} \Big\{ \quad & p_a \big[- b \tan(\alpha^+) + z_B + z_C - h - z_D + \\
& \tan^2(\alpha^+)(z_B + z_C - h - z_D) \big] + \\
& \frac{\varrho_0 g}{2} \left[z_B^2 + z_C^2 - h^2 - z_D^2 + \tan^2(\alpha^+)(z_B^2 + z_C^2 - h^2 - z_D^2) \right] + \\
& \frac{kg}{6} \left[z_B^3 + z_C^3 - h^3 - z_D^3 + \tan^2(\alpha^+)(z_B^3 + z_C^3 - h^3 - z_D^3) \right] \Big\}
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe



a) Volumenstrom-, Energie- und Impulserhaltung:

Konti: $u_1 A_1 = u_2 A_2$

IES x: $\frac{dI_x}{dt} = -\varrho u_1^2 A_1 + \varrho u_2^2 A_2 = (p_1 - p_2) A_2 = \varrho u_2 A_2 (u_2 - u_1)$

Bernoulli 1-2:
$$\Delta p_{v1,2} = p_1 + \frac{\varrho}{2} u_1^2 - \left(p_2 + \frac{\varrho}{2} u_2^2\right)$$
$$= \varrho u_1^2 \frac{u_2}{u_1}\left(\frac{u_2}{u_1} - 1\right) + \frac{\varrho}{2} u_1^2 - \frac{\varrho}{2} u_2^2$$

$\longrightarrow$
$$\zeta = 2\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 - 2\left(\frac{u_2}{u_1}\right) + 1 - \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2$$
$$= \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)^2 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

b) $\zeta = \frac{1}{9}$

c) zwei Rohrerweiterungen:

Bernoulli 1-2: $p_1 + \frac{\varrho}{2} u_1^2 = p_2 + \frac{\varrho}{2} u_2^2 + \zeta_1 \frac{\varrho}{2} u_1^2$

Bernoulli 2-3: $p_2 + \frac{\varrho}{2} u_2^2 = p_3 + \frac{\varrho}{2} u_3^2 + \zeta_2 \frac{\varrho}{2} u_2^2$

mit Hinweis:
$$\Delta p_{v1,3} = p_1 + \frac{\varrho}{2} u_1^2 - \left(p_3 + \frac{\varrho}{2} u_3^2\right)$$
$$= p_2 + \frac{\varrho}{2} u_2^2 + \zeta_1 \frac{\varrho}{2} u_1^2 - \left(p_2 + \frac{\varrho}{2} u_2^2 - \zeta_2 \frac{\varrho}{2} u_2^2\right)$$

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 = \zeta_1 + \zeta_2 \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2$$

aus a): $\zeta_1 = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2, \quad \zeta_2 = \left(1 - \frac{A_2}{A_3}\right)^2$

$$\zeta = \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{A_1}{A_2} - \frac{A_1}{A_3}\right)^2$$

d) $\zeta = 0.139$

e) $m \equiv \frac{A_1}{A_2}, \quad k \equiv \frac{A_1}{A_3}$

$\rightarrow \zeta = (1 - m)^2 + (m - k)^2$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial m} = -2(1-m) + 2(m-k) = 0 \rightarrow m = \frac{k+1}{2}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial m^2} = 4 > 0$$

$\rightarrow$ Minimum bei $m = \dfrac{k+1}{2} = \left(\dfrac{A_1}{A_2}\right)_{min}$

3. Aufgabe

a) $\dot{V} = v_e bh = v_{a,n} 2\pi Rh, \quad v_{a,n} = v_a \cos(\alpha), \quad v_{a,t} = v_a \sin(\alpha)$

$\rightarrow v_e = \dfrac{\dot{V}}{bh}, \quad v_a = \dfrac{\dot{V}}{2\pi Rh\cos(\alpha)}, \quad v_{a,n} = \dfrac{\dot{V}}{2\pi Rh}, \quad v_{a,t} = \dfrac{\dot{V}}{2\pi Rh}\tan(\alpha)$

b) Impulsmomentensatz: Moment $\vec{M}_L$ auf den Leitapparat:

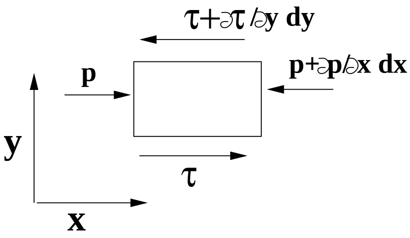
$\vec{M}_L = \vec{M}_{p,e} + \vec{M}_{p,a} - \vec{M}_{k,a} - \vec{M}_{k,e}$

$$\begin{aligned}
\text{Eintritt:} \quad M_{k,z,e} &= -\varrho v_e^2 bhd = -\frac{\varrho \dot{V}^2}{bh} d \\
M_{p,z,e} &= p_e bhd \\
\text{Austritt:} \quad M_{k,z,a} &= \varrho v_{a,n} v_{a,t} 2\pi RhR = \varrho 2\pi R^2 h v_a^2 \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\
&= \frac{\varrho \dot{V}^2}{2\pi h}\tan(\alpha) \\
M_{p,z,a} &= 0
\end{aligned}$$

$\longrightarrow M_{L,z} = \varrho \dot{V}^2 \left(\dfrac{d}{bh} - \dfrac{\tan(\alpha)}{2\pi h} \right) + p_e bhd$

Ebenes Problem in der $x-y$-Ebene, d.h. $M_{L,x} = M_{L,y} = 0$.

4. Aufgabe



a) Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:

$$\left(p-\left(p+\frac{\delta p}{\delta x}dx\right)\right)dy+$$
$$\left(\tau-\left(\tau+\frac{\delta\tau}{\delta y}dy\right)\right)dx=0$$

$\dfrac{dp}{dx}=-\dfrac{d\tau}{dy}$ 1. Integration $\rightarrow \dfrac{dp}{dx}y+C_1=-\tau$:

1. Randbedingung $\tau(y=0)=0 \quad\Rightarrow\quad C_1=0$

$\tau=-\eta\dfrac{du}{dy}$ 2. Integration $\rightarrow \dfrac{dp}{dx}\dfrac{y^2}{2}+C_2=\eta u$:

2. Randbedingung $u(y=0)=u_{max} \quad\Rightarrow\quad C_2=\eta u_{max}$

$$u(x=L,y)=\frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}+u_{max}(x=L)$$

Bestimmung des Druckgradienten: Randbedingung $y=\pm 2h \Rightarrow u=0$:

$$\frac{dp}{dx}=-\eta\frac{u_{max}(x=L)}{2h^2}$$

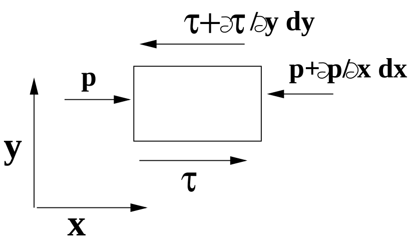
$$u(x=L,y)=u_{max}(x=L)\left(1-\left(\frac{y}{2h}\right)^2\right)$$

$$\dot{V}=const \quad : \quad \int\limits_{-2h}^{2h}u(x=0,y)dy=\int\limits_{-2h}^{2h}u(x=L,y)dy$$

$$\Rightarrow \frac{10}{3}hu_m=\frac{8}{3}hu_{max}(x=L)$$

$$u_{max}(x=L)=\frac{5}{4}u_m \quad\Rightarrow\quad u(x=l,y)=\frac{5}{4}u_m\left(1-\left(\frac{y}{2h}\right)^2\right)$$

================== Alternative 1 ===================



Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:

$$\left(p-\left(p+\frac{\delta p}{\delta x}dx\right)\right)dy+$$
$$\left(\tau-\left(\tau+\frac{\delta\tau}{\delta y}dy\right)\right)dx=0$$

$\dfrac{dp}{dx}=-\dfrac{d\tau}{dy}$ 1. Integration $\rightarrow \dfrac{dp}{dx}y+C_1=-\tau$:

1. Randbedingung $\tau(y=0)=0 \quad\Rightarrow\quad C_1=0$

$\tau=-\eta\dfrac{du}{dy}$ 2. Integration $\rightarrow \dfrac{dp}{dx}\dfrac{y^2}{2}+C_2=\eta u$:

2. Randbedingung: Haftbedingung $u(y=\pm 2h)=0$

$$C_2=-\frac{2}{\eta}\frac{dp}{dx}h^2$$

Bestimmung des Druckgradienten mit Konti

$$\dot{V} = const \quad : \quad \int\limits_{-2h}^{2h} u(x=0,y)dy = \int\limits_{-2h}^{2h} u(x=L,y)dy$$

$$\Rightarrow \frac{10}{3}hu_m = -\frac{16}{3\eta}\frac{dp}{dx}h^3$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{5}{8}\eta\frac{u_m}{h^2} \quad \Rightarrow \quad u(x=l,y) = \frac{5}{4}u_m\left(1-\left(\frac{y}{2h}\right)^2\right)$$

=================== Alternative 2 ====================

ausgebildete Rohrströmung + Newton'sches Fluid $\Rightarrow$ Parabel

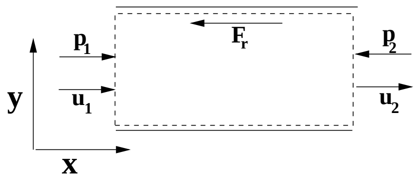
$$u(y) = ay^2 + by + c, \qquad Randbed: u(\pm 2h) + 0, \quad \left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0} = 0$$

$$b = 0, \quad c = -4ah^2$$

Kontinuitätsgleichung: $\dot{V} = const \quad : \quad \int\limits_{-2h}^{2h} u(x=0,y)dy = \int\limits_{-2h}^{2h} u(x=L,y)dy$

$$\Rightarrow \frac{10}{3}hu_m = -\frac{32}{3}ah^3 \Rightarrow a = -\frac{5}{16}\frac{u_m}{h^2} \quad \Rightarrow \quad u(x=l,y) = \frac{5}{4}u_m\left(1-\left(\frac{y}{2h}\right)^2\right)$$

==



b) Impulssatz in x-Richtung:

$$-\varrho\int\limits_{-2h}^{2h} u^2(x=0,y)dy + \varrho\int\limits_{-2h}^{2h} u^2(x=L,y)dy =$$

$$-2\int\limits_{0}^{L}\tau(x)dx + (p_1-p_2)4h$$

$$\int\limits_{0}^{L}\tau(x)dx = \frac{\tau(x=0)+\tau(x=L)}{2}L$$

$$\left.\begin{aligned} \tau(x=0) &= -\eta\tfrac{du}{dy}|_{x=0,y=2h} &= 2\eta\tfrac{u_m}{h} \\ \tau(x=L) &= -\eta\tfrac{du}{dy}|_{x=L,y=2h} &= \tfrac{5}{4}\eta\tfrac{u_m}{h} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \int\limits_{0}^{L}\tau(x)dx = \frac{13}{8}\eta u_m\frac{L}{h}$$

$$\int\limits_{-2h}^{2h}\varrho u_1^2(y)dy = \frac{46}{15}\varrho h u_m^2, \qquad \int\limits_{-2h}^{2h}\varrho u_2^2(y)dy = \frac{10}{3}\varrho h u_m^2$$

$$\Delta p = p_1 - p_2 = -\frac{23}{30}\varrho u_m^2 + \frac{5}{6}\varrho u_m^2 + \frac{13}{16}\eta u_m\frac{L}{h^2} = \frac{13}{16}\eta u_m\frac{L}{h^2} + \frac{1}{15}\varrho u_m^2$$

5. Aufgabe

a)
- Energieerhaltungsgleichung für kompressible Strömungen unter Vernachlässigung von Reibungseffekten.
- Gültig für ein ideales Gas mit konstanter spezifischer Wärmekapazität und Temperaturleitfähigkeit.

b) Dimensionslose Größen:

$$\bar{\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho_\infty}, \bar{T} = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T}, \bar{t} = \frac{t}{\Delta t}, \bar{p} = \frac{p}{\Delta p}, \bar{v} = \frac{v}{u_\infty}, \bar{\nabla} = \nabla L.$$

$$\begin{aligned}
\varrho_\infty c_V \bar{\varrho} \left(\frac{\Delta T}{\Delta t} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \frac{u_\infty}{L} \Delta T \vec{\bar{v}} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} \right) &= \frac{\lambda}{L^2} \Delta T \bar{\nabla}^2 \bar{T} - \frac{\Delta p u_\infty}{L} \bar{p} (\bar{\nabla} \cdot \vec{\bar{v}}) \\
\frac{\varrho_\infty u_\infty c_V \Delta T}{L} \left(\frac{L}{u_\infty \Delta t} \bar{\varrho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{\varrho} \vec{\bar{v}} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} \right) &= \frac{\lambda}{L^2} \Delta T \bar{\nabla}^2 \bar{T} - \frac{\Delta p u_\infty}{L} \bar{p} (\bar{\nabla} \cdot \vec{\bar{v}}) \\
\underbrace{\frac{L}{u_\infty \Delta t}}_{K_1} \bar{\varrho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} + \bar{\varrho} \vec{\bar{v}} \cdot \bar{\nabla} \bar{T} &= \underbrace{\frac{\lambda}{\varrho_\infty u_\infty L c_V}}_{K_2} \bar{\nabla}^2 \bar{T} - \underbrace{\frac{\Delta p}{\varrho_\infty c_V \Delta T}}_{K_3} \bar{p} (\bar{\nabla} \cdot \vec{\bar{v}})
\end{aligned}$$

c) inkompressible Strömung: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, stationäre Strömung: $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$

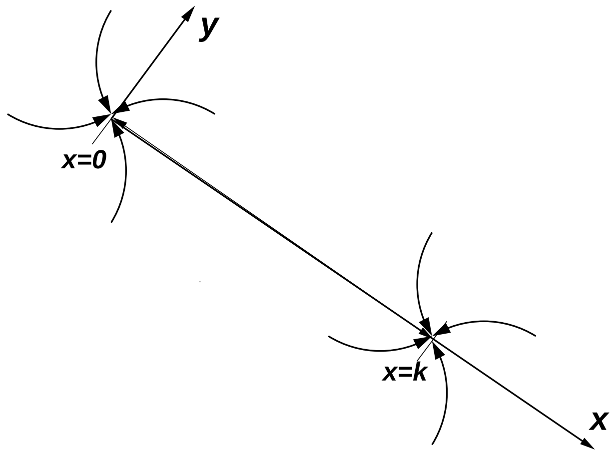
$$\longrightarrow \varrho c_V \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Einführen dimensionsloser Größen:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}, \bar{y} = \frac{y}{\delta}, \bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \bar{v} = \frac{v}{\frac{\delta u_\infty}{L}}, \bar{T} = \frac{T - T_\infty}{\Delta T},$$

$$\begin{aligned}
\varrho c_V \left(\frac{u_\infty \Delta T}{L} \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \frac{\delta}{L} \frac{u_\infty}{\delta} \Delta T \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \right) &= \lambda \left(\frac{\Delta T}{L^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\Delta T}{\delta^2} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\
\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\lambda L}{\varrho u_\infty \delta^2 c_V} \left(\underbrace{\frac{\delta^2}{L^2}}_{\approx 0} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) \\
\bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} &= \frac{\lambda L}{\varrho u_\infty \delta^2 c_V} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2}
\end{aligned}$$

6. Aufgabe



a) $F(z)$ setzt sich aus zwei Potentialwirbeln und zwei Senken zusammen:

$$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z - \frac{E}{2\pi}\ln z - \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln(z-k) - \frac{E}{2\pi}\ln(z-k)$$

$\Gamma > 0, \quad E > 0$

b) Wirbel gleicher Stärke und gleichen Drehsinns: Es existiert ein Staupunkt auf der Verbindungslinie zwischen beiden Wirbeln, d.h. bei $x = \frac{k}{2}$.

c) Symmetrisches Problem; Winkelgeschwindigkeit um das Zentrum bei $x = \frac{k}{2}$:

$$\omega = \frac{v}{k/2} = \frac{2v}{k}$$

Betrachte den Wirbelsturm bei $(x, y) = (k, 0)$:

$$\overline{w} = u - iv = \frac{dF}{dz} = -\frac{i\Gamma + E}{2\pi}\frac{x - iy}{x^2 + y^2} - \frac{i\Gamma + E}{2\pi}\frac{x - k - iy}{(x-k)^2 + y^2}$$

$$v(x = k, y = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi k} \longrightarrow \omega = \frac{2v}{k} = \frac{\Gamma}{\pi k^2}$$

d) Die Winkelgeschwindigkeit wird größer, da der Abstand k der beiden Wirbelstürme aufgrund der Senken kleiner wird.

e) $\Gamma_A = \Gamma, \quad \Gamma_B = -2\Gamma, \quad \Gamma_C = 0$

7. Aufgabe

a) Randbedingungen:

(a) $\frac{y}{\delta} = 0 \rightarrow \frac{u}{u_a} = 0 \rightarrow a_0 = 0$

(b) $\frac{y}{\delta} = 1 \rightarrow \frac{u}{u_a} = 1 \rightarrow a_1 + a_2 = 1$

(c) Wandbindung: $v(x,0) \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\eta}{\varrho} \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0}$

$\rightarrow v(x,0) \frac{u_a}{\delta} \left.\frac{\partial \frac{u}{u_a}}{\partial \frac{y}{\delta}}\right|_{y=0} = \frac{\eta}{\varrho} \frac{u_a}{\delta^2} \left.\frac{\partial^2 \frac{u}{u_a}}{\partial \left(\frac{y}{\delta}\right)^2}\right|_{y=0}$

$\rightarrow a_1 = -2a_2 \frac{\eta}{\varrho k}$

$\rightarrow a_2 = \frac{1}{1 - 2\frac{\eta}{\varrho k}}, \quad a_1 = 1 - \frac{1}{1 - 2\frac{\eta}{\varrho k}}$

b) Verlauf der Grenzschichtdicke:

$$\left.\frac{\tau}{\varrho u_a^2}\right|_{y=0} = -\frac{\eta}{\varrho u_a^2} \frac{u_a}{\delta} \left.\frac{\partial \frac{u}{u_a}}{\partial \frac{y}{\delta}}\right|_{y=0} = -\frac{\eta}{\varrho u_a \delta} a_1$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{u_a}\left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\xi = \frac{y}{\delta} \rightarrow \frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \left(a_1\xi + (1-a_1)\xi^2\right) - \left(a_1\xi + (1-a_1)\xi^2\right)^2 d\xi$$

$$\rightarrow \frac{\delta_2}{\delta} = \frac{2}{15} + \frac{1}{15}a_1 - \frac{1}{30}a_1^2$$

v. Kármán-Polhausen: $\frac{\delta_2}{\delta}\frac{d\delta}{dx} + \left.\frac{\tau}{\varrho u_a^2}\right|_{y=0} = \frac{v(x,0)}{u_a}$

eingesetzt: $\left(\frac{2}{15} + \frac{1}{15}a_1 - \frac{1}{30}a_1^2\right)\frac{d\delta}{dx} + \left(-\frac{\eta}{\varrho u_a \delta}a_1\right) = -\frac{k}{u_a \delta}$

$$\rightarrow \frac{\delta^2}{2} = \frac{\frac{1}{u_a}\left(\frac{\eta}{\varrho}a_1 - k\right)}{\frac{2}{15} + \frac{1}{15}a_1 - \frac{1}{30}a_1^2} x + c$$

Anfangsbedingung: $x = x_0 \rightarrow \delta(x_0) = \delta_0$

$$c = \frac{\delta_0^2}{2} - \frac{\frac{1}{u_a}\left(\frac{\eta}{\varrho}a_1 - k\right)}{\frac{2}{15} + \frac{1}{15}a_1 - \frac{1}{30}a_1^2} x_0$$

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\frac{2}{u_a}\left(\frac{\eta}{\varrho}a_1 - k\right)}{\frac{2}{15} + \frac{1}{15}a_1 - \frac{1}{30}a_1^2}(x - x_0) + \delta_0^2}$$

8. Aufgabe

a) Massenerhaltung (Kontinuitätsgleichung):

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot (\varrho \vec{v}) = 0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla \cdot \begin{pmatrix} \varrho u \\ \varrho v \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} = 0$$

$$u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \varrho\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y} + \varrho\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

In inkompressibler Strömung gilt $\nabla \varrho = 0$, d.h. $\varrho = konst.$.

$$\varrho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \vec{v} = \mathrm{div}\vec{v} = 0$$

b) Eindimensionale Eulergleichung: $u\,\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}p}{\varrho}$

Mit $\mathrm{d}p = c^2 \mathrm{d}\varrho$: $\quad u\,\mathrm{d}u = -c^2 \frac{\mathrm{d}\varrho}{\varrho}$

$$\rightarrow \frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}u} = -\frac{\varrho u}{c^2}$$

Mit $\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{u}\left(\frac{\mathrm{d}(\varrho u)}{\mathrm{d}u} - \varrho\right)$: $\qquad \frac{\mathrm{d}(\varrho u)}{\mathrm{d}u} = \varrho\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \varrho\left(1 - M^2\right)$

$$\longrightarrow \mathrm{d}(\varrho u) = \varrho\left(1 - M^2\right)\mathrm{d}u$$

Diskussion: Im Unterschall wird die Stromdichte mit zunehmender Geschwindigkeit größer. Im Überschall nimmt sie mit zunehmender Geschwindigkeit ab.