....
(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

14. 08. 2009

1. Aufgabe

a) ohne Ölfilm: $G = A$

$$\pi r^2 \varrho_S g D\pi = \frac{1}{2}\pi r^2 \varrho_W g D\pi$$

$$\rightarrow \varrho_S = \frac{\varrho_W}{2}$$

b) Überlaufen für $0 < \varrho_{Öl}/\varrho_W \leq 0.5$

Druck auf der Unterseite des Schlauches:

$$p_u = p_a + h_{max}\varrho_{Öl} g + (2r - h_{max})\varrho_W g = p_a + r\varrho_W g$$

$$\rightarrow h_{max} = \frac{r}{1 - \frac{\varrho_{Öl}}{\varrho_W}}$$

Alternativ: Unterlaufen für $0.5 < \varrho_{Öl}/\varrho_W \leq 1$

Druck auf der Unterseite des Schlauches:

$$p_u = p_a + h_{max}\varrho_{Öl} g = p_a + r\varrho_W g$$

$$\rightarrow h_{max} = r\varrho_W/\varrho_{Öl}$$

c) Mit $D \gg r$: $V_{Öl} = \dfrac{D^2\pi}{4} h_{max} = \dfrac{m_{Öl}}{\varrho_{Öl}}$

$$\rightarrow D = \sqrt{\frac{m_{Öl}}{\varrho_{Öl}} \frac{4(1 - \frac{\varrho_{Öl}}{\varrho_W})}{\pi r}} \quad \text{für } 0 < \varrho_{Öl}/\varrho_W \leq 0.5$$

Alternativ:

$$\rightarrow D = \sqrt{\frac{m_{Öl}}{\varrho_W} \frac{4}{\pi r}} \quad \text{für } 0.5 < \varrho_{Öl}/\varrho_W \leq 1$$

d) Auftriebskraft und Öldichte: $F_A = \left(\dfrac{\pi r^2}{2}\varrho_{Öl} + \dfrac{\pi r^2}{4}\varrho_W\right) g D\pi$

Gewichtskraft: $G = \pi^2 D r^2 \varrho_S g = \pi^2 D r^2 \dfrac{\varrho_W g}{2}$

Kräftegleichgewicht: $\rightarrow F_A = G \rightarrow \varrho_{Öl} = \dfrac{\varrho_W}{2}$

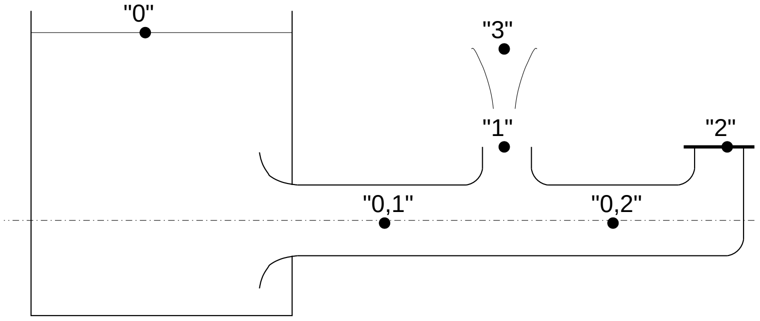
e) Radialkraft:

$$F_R = dl \left\{ \int_0^{2r} (p_a + \varrho_{Öl} g s_1) ds_1 - \int_r^{2r} p_a ds_2 - \int_0^r (p_a + \varrho_W g s_3) ds_3 \right\}$$

$$\rightarrow F_R = dl\left\{\frac{\varrho_{\ddot{O}l}}{2}g4r^2 - \frac{\varrho_W}{2}gr^2\right\}$$

$$\rightarrow F_R = \frac{dl}{2}gr^2\left(4\varrho_{\ddot{O}l} - \varrho_W\right)$$

2. Aufgabe



a) Bernoulli 0-1: $p_a + \varrho g H = p_a + \varrho g H_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2 + \frac{\varrho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D}$

Konti: $v_{0,1} = \frac{v_1}{4}$

$\rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2g(H-H_1)}{1+\frac{\lambda}{16}\frac{L_1}{D}}}$

Bernoulli 1-3: $\frac{\varrho}{2} v_1^2 = \varrho g h_1$

$\rightarrow h_1 = \frac{H-H_1}{1+\frac{\lambda}{16}\frac{L_1}{D}}$

b) siehe a): Bernoulli 0-1: $p_a + \varrho g H = p_a + \varrho g H_1 + \frac{\varrho}{2} \bar{v}_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} + \frac{\varrho}{2} v_{1,b}^2 \quad (*)$

Bernoulli 0-2: $p_a + \varrho g H = p_a + \varrho g H_1 + \frac{\varrho}{2} \bar{v}_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} + \frac{\varrho}{2} v_2^2 + \frac{\varrho}{2} v_{0,2}^2 \lambda \frac{L_2}{D} \quad (**)$

Mit Konti: $v_{0,2} = \frac{v_2}{4}$

$(*) - (**)$: $v_2 = v_{1,b} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\lambda}{16}\frac{L_2}{D}}}$

Konti: $\bar{v}_{0,1} = \frac{v_{1,b} + v_2}{4}$

In $(*)$: $\varrho g (H - H_1) = \frac{\varrho}{2} v_{1,b}^2 \left(1 + \frac{\lambda}{16}\frac{L_1}{D}\left(1+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{\lambda}{16}\frac{L_2}{D}}}\right)^2\right)$

$\rightarrow v_{1,b} = \sqrt{2g(H-H_1) \Big/ \left(1 + \frac{\lambda}{16}\frac{L_1}{D}\left(1+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{\lambda}{16}\frac{L_2}{D}}}\right)^2\right)}$

c) instat. Bernoulli 0-2: $p_a + \varrho g H = p_a + \varrho g H_1 + \frac{\varrho}{2} v_2^2 + \frac{\varrho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} + \frac{\varrho}{2} v_{0,2}^2 \lambda \frac{L_2}{D} + \varrho \int_0^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$

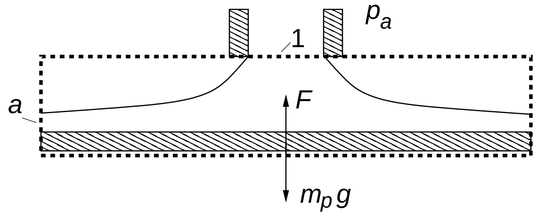
$\rightarrow p_a + \varrho g H = p_a + \varrho g H_1 + \frac{\varrho}{2} v_2^2 + \frac{\varrho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} + \frac{\varrho}{2} v_{0,2}^2 \lambda \frac{L_2}{D} + \varrho L_1 \frac{dv_{0,1}}{dt} + \varrho L_2 \frac{dv_{0,2}}{dt}$

instat. Bernoulli 0-1: $p_a + \varrho g H = p_a + \varrho g H_1 + \frac{\varrho}{2} v_1^2 + \frac{\varrho}{2} v_{0,1}^2 \lambda \frac{L_1}{D} + \varrho L_1 \frac{dv_{0,1}}{dt}$

DGL: $\frac{dv_2}{dt} + \underbrace{\frac{2}{L_2}(1 + \lambda \frac{L_2}{16D})}_{=k_2} v_2^2 - \underbrace{\frac{2}{L_2}}_{=k_1} v_1^2 = 0$

3. Aufgabe

a) Impulsbilanz in z-Richtung:



$$-\rho v_1^2 \pi R_S^2 = m_P g - F \qquad \left(\text{Druck } p_a \text{ herrscht überall} \quad \Rightarrow \quad \sum F_P = 0\right)$$

Bernoulli von 1 nach a (Potentialdruck laut Hinweis vernachlässigt):

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_a^2 \qquad \text{mit } p_1 = p_a \ \rightarrow \quad \Rightarrow \quad v_1 = v_a$$

Konti:

$$v_1 \pi R_S^2 = \frac{\dot{m}}{\rho} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{\dot{m}}{\rho \pi R_S^2} \quad \Rightarrow \quad F = m_P g + \frac{\dot{m}^2}{\rho \pi R_S^2} \quad \text{(mit Impuls)}$$

$$v_1 \pi R_S^2 = v_a 2\pi R_P h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{R_S^2}{2R_P} \quad \text{(mit Bernoulli)}$$

b) Konti:

$$\dot{m} = \rho 2\pi R_P H v(R_P) = \rho 2\pi r H v(r) \quad \text{für} \quad R_S \leq r \leq R_P$$

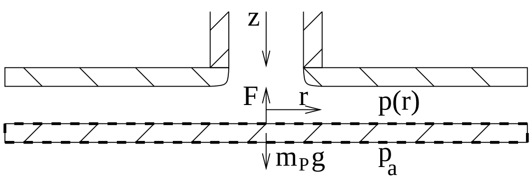
$$\Rightarrow \qquad v(r) = \frac{\dot{m}}{\rho 2\pi H r} \quad ; \quad v(R_P) = \frac{\dot{m}}{\rho 2\pi H R_P}$$

Bernoulli:

$$p(r) + \frac{\rho}{2} v^2(r) = p_a + \frac{\rho}{2} v^2(R_P) \quad \text{für} \quad R_S \leq r \leq R_P$$

$$\Rightarrow \qquad p(r) = p_a + \frac{\rho}{2}\left(v^2(R_P) - v^2(r)\right) \quad \Rightarrow \quad p(r) = p_a + \frac{\dot{m}^2}{\rho 8\pi^2 H^2}\left(\frac{1}{R_P^2} - \frac{1}{r^2}\right)$$

c) Impulsbilanz in z-Richtung um die Platte:

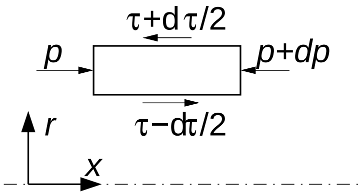


$$
\begin{aligned}
& & 0 &= -F + m_P g + \int_0^{R_P} \left(p(r) - p_a\right) 2\pi r \mathrm{d}r \\
&\Rightarrow & F &= m_P g + \int_0^{R_S} (c_1 - 1) p_a 2\pi r \mathrm{d}r + \int_{R_S}^{R_P} \left(c_3 - 1 - c_2 \frac{R_P^4}{H^2 r^2} \right) p_a 2\pi r \mathrm{d}r \\
&\Rightarrow & F &= \underbrace{m_P g + (c_1 - 1) p_a \pi R_S^2 + (c_3 - 1) p_a \pi (R_P^2 - R_S^2)}_{K_1} - \frac{1}{H^2} \underbrace{2 c_2 p_a \pi R_P^4 \ln \frac{R_P}{R_S}}_{K_2} \\
&\Rightarrow & F &= 0 = K_1 - K_2 \frac{1}{H^2} \\
&\Rightarrow & H &= \sqrt{\frac{2 c_2 p_a \pi R_P^4 \ln \frac{R_P}{R_S}}{m_P g + (c_1 - 1) p_a \pi R_S^2 + (c_3 - 1) p_a \pi (R_P^2 - R_S^2)}}
\end{aligned}
$$

4. Aufgabe

a) Der Geschwindigkeitsgradient besitzt ein negatives Vorzeichen.

b) Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:



$$\left(p-\left(p+\frac{dp}{dx}dx\right)\right)2\pi r dr+\left(2\pi(r-\frac{dr}{2})dx\right)\left(\tau-\frac{d\tau}{dr}\frac{dr}{2}\right)-$$
$$\left(2\pi(r+\frac{dr}{2})dx\right)\left(\tau+\frac{d\tau}{dr}\frac{dr}{2}\right)=0$$
$$-\frac{dp}{dx}-\frac{d\tau}{dr}-\frac{\tau}{r}=0$$
$$-\frac{dp}{dx}-\frac{1}{r}\frac{d(\tau r)}{dr}=0$$
$$\rightarrow \tau r=-\int_0^r\frac{dp}{dx}rdr$$
$$\rightarrow \tau=-\frac{dp}{dx}\frac{r}{2}+\frac{k_1}{r}$$

Symmetrie: $\tau(r=0)=0, \quad \rightarrow k_1=0, \quad \rightarrow \tau=-\frac{dp}{dx}\frac{r}{2}$

Randbedingung für die Geschwindigkeit: $u(r=R)=0$

Einsetzen der Beziehung für die Schubspannung:

$$c\sqrt{\left|\frac{du}{dr}\right|}=\frac{dp}{dx}\frac{r}{2}$$
$$\left|\frac{du}{dr}\right|=\left(\frac{dp}{dx}\right)^2\frac{r^2}{4c^2}$$

Für $\frac{dp}{dx}<0$ ist $\frac{du}{dr}<0$.

$$\rightarrow \frac{du}{dr}=-\left(\frac{dp}{dx}\right)^2\frac{r^2}{4c^2}$$
$$\rightarrow u=-\left(\frac{dp}{dx}\right)^2\frac{r^3}{12c^2}+k_2$$

Mit der Randbedingung $u(r=R)=0$: $\rightarrow u=\left(\frac{dp}{dx}\right)^2\frac{1}{12c^2}(R^3-r^3)$

c) Volumenstrom:

$$\dot{V} = \int\limits_0^R 2\pi r u(r) dr = \frac{2\pi}{12c^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 \int\limits_0^R R^3 r - r^4 dr = \frac{\pi}{20c^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 R^5$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{\pi R^2} = \frac{1}{20c^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 R^3$$

Maximale Geschwindigkeit:

$$u_{max} = u(r=0) = \frac{1}{12c^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 R^3$$

$$\frac{u_{max}}{\bar{u}} = \frac{5}{3}$$

d) Mittlere Viskosität:

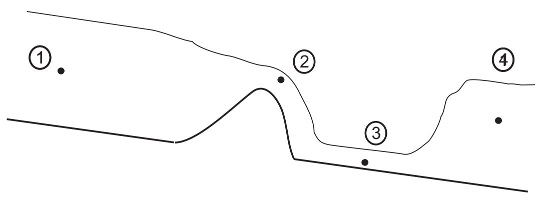
$$\bar{\eta} = \frac{1}{\pi R^2}\int\limits_0^R 2\pi r \eta(r) dr$$

$$\frac{du}{dr} = -\frac{1}{4c^2}\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 r^2$$

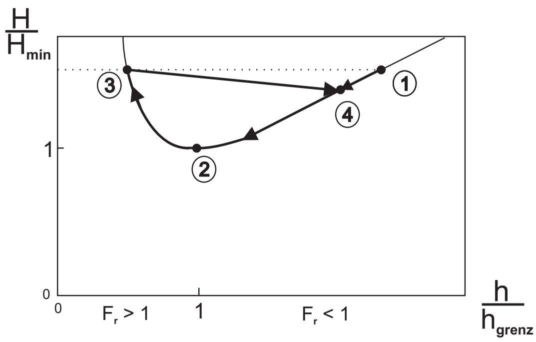
$$\eta = -\frac{2c^2}{\frac{dp}{dx} r}$$

$$\bar{\eta} = \frac{-1}{\pi R^2}\int\limits_0^R \frac{4\pi c^2}{\frac{dp}{dx}} dr = \frac{-4c^2}{R}\frac{1}{\frac{dp}{dx}}$$

5. Aufgabe



a) Zustandsänderungen:



b) Es gilt $H_1 = H_3$, da keine Energiehöhenverluste auftreten

$$H = z + \frac{v^2}{2g} \quad \text{mit} \quad v = \frac{\dot{V}}{Bz}$$

$$\rightarrow \quad H_3 = z_1 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2{z_1}^2 g}$$

$$H_1 = H_3 \quad \rightarrow \quad z_1 + \frac{{v_1}^2}{2g} = z_3 + \frac{v_3^2}{2g}$$

$$\rightarrow z_1 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2{z_1}^2 g} = z_3 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2{z_3}^2 g}$$

$$\rightarrow z_1 - z_3 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2 g}(\frac{1}{{z_3}^2} - \frac{1}{{z_1}^2})$$

$$\rightarrow z_1 - z_3 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2 g}(\frac{(z_1 + z_3)(z_1 - z_3)}{{z_1}^2{z_3}^2})$$

$$\rightarrow {z_1}^2{z_3}^2 = \frac{\dot{V}^2}{2B^2 g}(z_1 + z_3)$$

$$\rightarrow {z_3}^2 - \frac{\dot{V}^2}{2B^2{z_1}^2 g} z_3 - \frac{\dot{V}^2}{2B^2 z_1 g} = 0$$

$$\rightarrow z_3 = \frac{\dot{V}^2}{4B^2{z_1}^2 g} \pm \sqrt{\left(\frac{\dot{V}^2}{4B^2{z_1}^2 g}\right)^2 + \frac{\dot{V}^2}{2B^2 z_1 g}} \quad \text{(nur pos. Höhen sind sinnvoll} \rightarrow +)$$

$$Fr_3 = \frac{v_3}{\sqrt{g z_3}} \quad \text{mit} \quad v_3 = \frac{\dot{V}}{B z_3} \quad \rightarrow \quad Fr_3 = \frac{\dot{V}}{B\sqrt{g{z_3}^3}}$$

c) Wenn kein Wassersprung auftritt, muss die Energiehöhe konstant bleiben; mit Konti folgt $\rightarrow z_1 = z_4$

6. Aufgabe

a) 2 Halbkörper: 2 Quellen im Abstand b + Parallelströmung
Symmetrisches Strömungsfeld: Quellen gleicher Stärke ⇒ komplexe Potentialfunktion:

$$F(z) = F_{Parallel} + F_{Quelle} + F_{Quelle_2}$$

$$\Rightarrow F(z) = u_\infty z + \frac{E}{2\pi} \ln z + \frac{E}{2\pi} \ln(z - ib)$$

komplexe Geschwindigkeit w :

$$w = \frac{dF}{dz} = u_\infty + \frac{E}{2\pi z} + \frac{E}{2\pi(z - ib)}$$

mit $\quad z = x + iy, \quad \frac{1}{z} == \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$

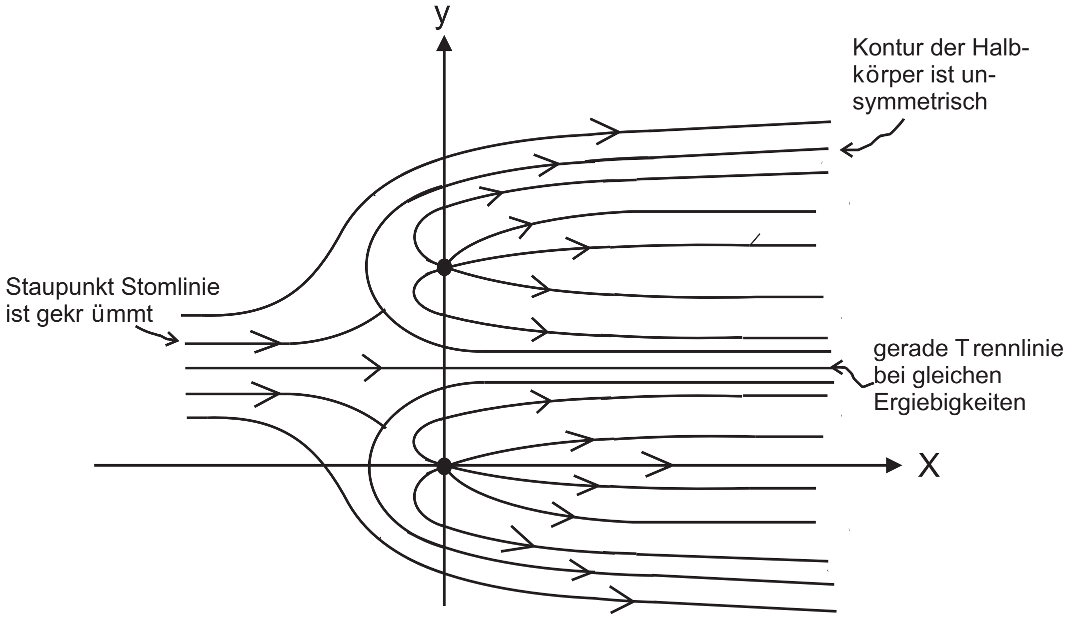
$$\frac{1}{z - ib} = \frac{x - i(y - b)}{x^2 + (y - b)^2}$$

$$w = u - iv$$

$$\Rightarrow u = u_\infty + \frac{E}{2\pi} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + (y - b)^2} \right)$$

$$v = \frac{E}{2\pi} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y - b}{x^2 + (y - b)^2} \right)$$

b) Skizze:



c) Quelle in der Nähe einer Wand $\rightarrow$ Simulation durch 2 Quellen gleicher Ergiebigkeit $\rightarrow$ Symmetrielinie kann als Wand interpretiert werden:
$F(z) = \frac{E}{2\pi}(\ln(z-a) + \ln(z+a))$

7. Aufgabe

a) Randbedingungen:

1. R.B.:	$y/\delta = 0$	:	$u/u_\infty = 0,2$	(1)
2. R.B.:	$y/\delta = 1$	:	$u/u_\infty = 1$	(2)
3. R.B.:	$y/\delta = 0$	:	$\partial^2 u/\partial y^2 = 0$	(3)
4. R.B.:	$y/\delta = 1$	:	$\partial u/\partial y = 0$	(4)

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{lllll} 0,2 & = a_0 & & & \\ 1 & = a_0 & +a_1 & +a_2 & +a_3 \\ 0 & = & & 2a_2 & \\ 0 & = & a_1 & +2a_2 & +3a_3 \end{array} \right|$$

$$\cdots \quad \Rightarrow \left| \begin{array}{lcl} a_0 & = & 0,2 \\ a_1 & = & 1,2 \\ a_2 & = & 0 \\ a_3 & = & -0,4 \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{u}{u_\infty} = 0,2 + 1,2\frac{y}{\delta} - 0,4\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

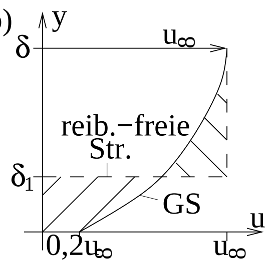
b)

$$\delta_1 := \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) \mathrm{d}\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\delta_1}{\delta} = \left[0,8\frac{y}{\delta} - \frac{1,2}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + \frac{0,4}{4}\left(\frac{y}{\delta}\right)^4\right]_0^1$$

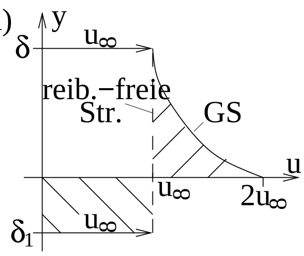
$$\Rightarrow \quad \frac{\delta_1}{\delta} = 0,3$$

zu b)



schraffierte
Bereiche
sind jeweils
gleich gross

zu d)



c) δ_1/δ wird kleiner, hier sogar negativ

8. Aufgabe

a) Temperaturverhältnis:

$$c_pT_0 = c_pT + \frac{u^2}{2}$$

$$c_pT_0 = c_pT + \frac{M^2\gamma RT}{2}$$

mit $\quad c_P = \frac{\gamma}{\gamma-1}R$

$$c_pT_0 = c_pT\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)$$

$$\frac{T_0}{T} = 1+\frac{\gamma-1}{2}M^2$$

b) Energiegleichung:

$$P_Q = \dot{m}c_p(T_{02}-T_{01}) = \dot{m}c_pT_{01}(\frac{T_{02}}{T_{01}}-1)$$

$$T_{01} = T_1\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2\right)$$

Massenstrom: $\quad \dot{m} = \rho_1 u_1 A_1 = \frac{p_1}{RT_1}A\,M_1\sqrt{\gamma RT_1}$

$$\rightarrow P_Q = \frac{p_1A}{RT_1}M_1\sqrt{\gamma RT_1}\frac{\gamma RT_1}{\gamma-1}(1+\frac{\gamma-1}{2}{M_1}^2)(\frac{T_{02}}{T_{01}}-1)$$

$$\rightarrow P_Q = p_1AM_1\sqrt{\gamma RT_1}\frac{\gamma}{\gamma-1}(1+\frac{\gamma-1}{2}{M_1}^2)(\frac{T_{02}}{T_{01}}-1)$$

c) $\frac{T_{02}}{T_{01}} = 1.$

6. Aufgabe

a) Der Reynoldssche Ansatz, in dem die Strömungsgrößen als Summe der gemittelten und der Schwankungsanteile ausgedrückt werden, und die anschließende zeitliche Mittelung rufen aufgrund der Nichtlinearität der physikalischen Zusammenhänge eine neue Unbekannte, die turbulente Schubspannung $-\varrho\overline{u'v'}$, die auch als scheinbare Schubspannung bezeichnet wird, hervor. Boussinesq schreibt die zusätzliche oder scheinbare Schubspannung analog zum Newtonschen Reibungsgesetz in der Form $\tau_t = \eta_t \frac{d\bar{u}}{dy}$, wobei der Koeffizient η_t als turbulente Viskosität bezeichnet wird.

b) Die viskose Unterschicht ist eine sehr dünne, wandnahe Schicht, in der die laminaren Schubspannungen über die turbulenten Schubspannungen dominieren.