....

(Name, Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungslehre

11. 03. 2009

1. Aufgabe

a) Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum F \\
0 &= -F_A + F_G + F_W \\
0 &= -\rho(z=0\text{m})V_B g + m_B g + \rho(z=0\text{m})V_W g \\
V_W &= V_B - \frac{m_B}{\rho(z=0)} = 0.768\text{m}^3
\end{aligned}$$

b) Kräftegleichgewicht:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum F \\
0 &= -F_A + F_G + F_W + F_S \\
0 &= -\rho(z)V_B g + m_B g + \rho(z=0\text{m})V_W g + F_S \\
\rho(z) &= \frac{m_B g + \rho(z=0\text{m})V_W g + F_S}{V_B g} \\
\varrho_0 + \varrho_1 z &= \frac{m_B g + \rho(z=0)V_W g + F_S}{V_B g} \\
z &= \frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{m_B g + \rho(z=0\text{m})V_W g + F_S}{V_B g} - \varrho_0\right) \\
z &= 2071\text{m}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dz} &= \rho(z)g \\
dp &= (\varrho_0 + \varrho_1\, z)\, g dz \\
\int\limits_{p(z=0)}^{p(z)} dp &= \int\limits_{z=0}^{z} (\varrho_0 + \varrho_1\, z)\, g dz \\
p(z) &= \left(\varrho_0\, z + \varrho_1\, \frac{z^2}{2}\right) g + p_a \\
400000\frac{\text{N}}{\text{m}^2} &= \left(\varrho_0\, z + \varrho_1\, \frac{z^2}{2}\right) 9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} + 100000\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \\
z_1 &= -792030.9\text{m} \\
z_2 &= 30.89\text{m}
\end{aligned}$$

Physikalisch sinnvolle Lösung ist $z_2 = 30.89$m.

d)

$$
\begin{aligned}
pV &= mRT = const. \\
p_a V_i &= (p_a + \Delta p)\, V_{i2} \\
V_{i2} &= 0.99\text{m}^3 \\
\\
\rho(z = 30.89\text{m}) &= 990\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} + 0.0025\frac{\text{kg}}{\text{m}^4}\ 30.89\text{m} = 990.08\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
\\
m_{W2} &= (V_i - V_{i2})\, \rho(z = 30.89\text{m}) = 9.9\text{kg} \\
0 &> -F_A + F_G + F_W + F_W 2 - F_S \\
0 &> -\rho(z = 0\text{m}) V_B g + m_B g + \rho(z = 0\text{m}) V_W g + m_{W2} g - F_S \\
0 &> -103\text{N}
\end{aligned}
$$

Der Taucher kann die Oberfläche erreichen.

2. Aufgabe

a) Bernoulli 0-1: $$\varrho\int\limits_0^1 \frac{\partial v}{\partial t}ds + p_1 + \frac{\varrho}{2}v_1^2(1+\zeta) = p_0 + \frac{\varrho}{2}v_0^2 + \varrho g(h-h_1), \quad h = h(t)$$

$$\varrho\int\limits_0^1 \frac{\partial v}{\partial t}ds + p_1 - p_0 + \frac{\varrho}{2}\left(v_1^2(1+\zeta) - v_0^2\right) = \varrho g(h-h_1)$$

$$2\int\limits_0^1 \frac{\partial v}{\partial t}ds + \frac{2(p_1-p_0)}{\varrho} + v_1^2(1+\zeta) - v_0^2 = 2g(h-h_1)$$

Der größte Teil der Stromlinie befindet sich in der Wasserflasche:

$$\int\limits_0^1 \frac{\partial v}{\partial t}ds = \frac{dv_0}{dt}(h-h_1)$$

Konti: $v_0A_0 = v_1A_1 \quad \rightarrow \quad \dfrac{dv_0}{dt} = \dfrac{dv_1}{dt}\dfrac{A_1}{A_0}$

Einsetzen: $$2(h-h_1)\frac{A_1}{A_0}\frac{dv_1}{dt} + 2\frac{p_1-p_0}{\varrho} + v_1^2\left(1+\zeta-\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2\right) = 2g(h-h_1)$$

Druck an der Oberfläche: $p_0(h) = p_a\dfrac{V_0}{V(h)}, \quad \rightarrow \quad p_0(h) = p_a\dfrac{V_0}{V_0+A_0(h_0-h)}$

$$\rightarrow 2(h-h_1)\frac{A_1}{A_0}\frac{dv_1}{dt} + \frac{2p_a}{\varrho}\left(1-\frac{V_0}{V_0+A_0(h_0-h)}\right) + v_1^2\left(1+\zeta-\left(\frac{A_1}{A_0}\right)^2\right) = 2g(h-h_1)$$

b) Quasi-stationär ($A_1 \ll A_0$):

$$\frac{2p_a}{\varrho}\left(1-\frac{V_0}{V_0+A_0(h_0-h)}\right) + v_1^2\,(1+\zeta) = 2g(h-h_1)$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}}\sqrt{2g(h-h_1) - \frac{2p_a}{\varrho}\left(1-\frac{V_0}{V_0+A_0(h_0-h)}\right)}$$

c) Vereinfachen:

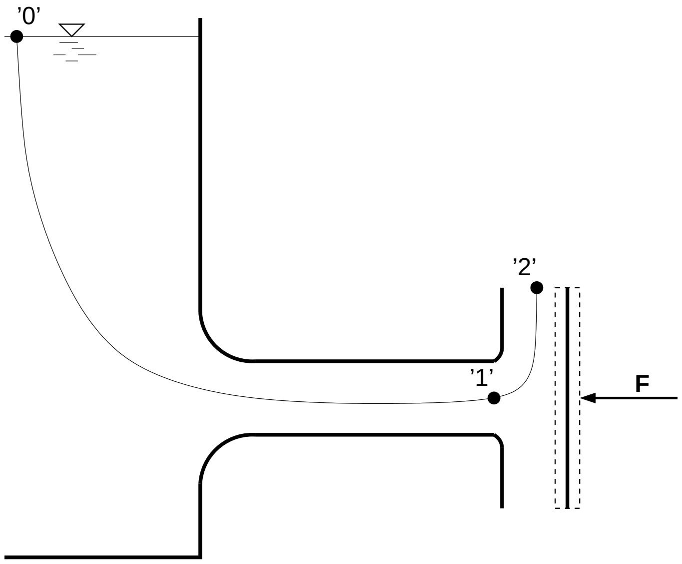
$$v_1 = \sqrt{\frac{2g(h-h_1)}{1+\zeta}}$$

d) Integration:

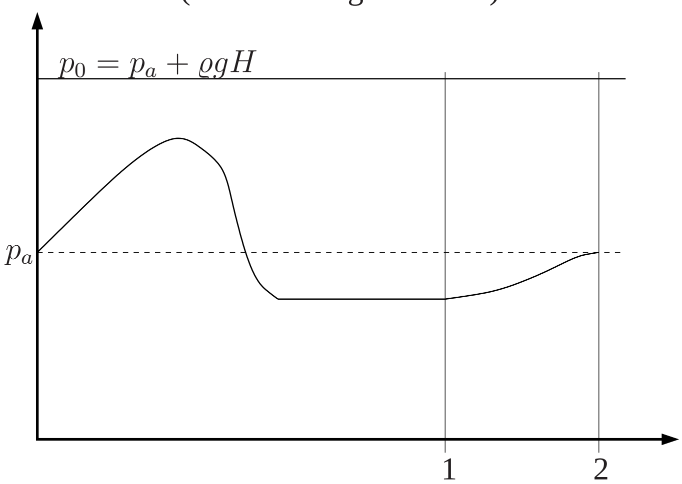
$$\frac{dh}{dt} = -v_0 = -v_1\frac{A_1}{A_0} = -\sqrt{\frac{2g(h-h_1)}{1+\zeta}}\frac{A_1}{A_0} \quad \rightarrow \quad \frac{dh}{\sqrt{h-h_1}} = -\sqrt{\frac{2g}{1+\zeta}}\frac{A_1}{A_0}dt$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2(h_0-h_1)(1+\zeta)}{g}}\frac{A_0}{A_1}$$

3. Aufgabe



a) Druckverlauf (mehrere Möglichkeiten):



b) Bernoulli $0 \rightarrow 2$ $(D \ll H)$

$$p_a + \rho g H = p_a + \frac{\rho}{2}{v_2}^2 \quad \rightarrow \quad v_2 = \sqrt{2gH}$$

Konti: $\quad v(r)2\pi r B = v_2 2\pi \frac{D}{2} B \quad \rightarrow \quad v(r) = \sqrt{2gH}\frac{D}{2r}$

Bernoulli 'r' $\rightarrow$ 2: $\left(r \geq \frac{d}{2}\right)$

$$p(r) + \frac{\rho}{2}v^2(r) = p_a + \frac{\rho}{2}{v_2}^2 \quad \rightarrow \quad p\left(r\right) = p_a + \rho g H\left(1 - \frac{D^2}{4r^2}\right) \quad \frac{d}{2} \leq r \leq \frac{D}{2}$$

aus der Aufgabenstellung und mit $v(r = d/2) = \sqrt{2gH}D/d$:

$$p\left(r\right) = p_a + \rho g H\left(1 - \frac{2r}{d}\frac{D^2}{d^2}\right), \qquad 0 \leq r \leq \frac{d}{2}$$

Impulssatz um die Platte (x-Richtung):

$$\int\limits_0^{\frac{d}{2}} \left(p(r) - p_a\right) 2\pi r \, dr + \int\limits_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \left(p(r) - p_a\right) 2\pi r \, dr = -F$$

$$\rightarrow \int\limits_0^{\frac{d}{2}} 2\pi \rho g H\left(1 - \frac{2rD^2}{d^3}\right) r \, dr + \int\limits_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} 2\pi \rho g H\left(1 - \frac{D^2}{4r^2}\right) r \, dr = -F$$

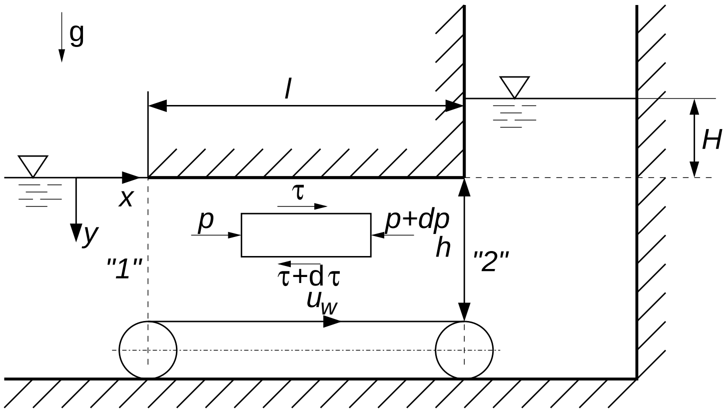
$$\rightarrow -F = \frac{\pi}{2}\rho g H\left(\frac{d^2}{2} - \frac{D^2}{3}\right) + \frac{\pi}{2}\rho g H\left(\frac{D^2}{2} - \frac{d^2}{2} - D^2 \ln\frac{D}{d}\right) = \frac{\pi D^2}{2}\rho g H\left(\frac{1}{6} - \ln\frac{D}{d}\right)$$

$\rightarrow F = \dfrac{\pi D^2}{2}\rho g H\left(\ln\dfrac{D}{d} - \dfrac{1}{6}\right)$ d.h. für $\ln\frac{D}{d} > \frac{1}{6}$ wird die Platte angesaugt.

4. Aufgabe

a) Couette-Strömung (mit Druckgradient).

b) Kräftebilanz am Volumenelement in x-Richtung:



$$\left(p-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)\right)dy+\left(\tau-\left(\tau+\frac{d\tau}{dy}dy\right)\right)dx=0$$

$$\frac{d\tau}{dy}=-\frac{\partial p}{\partial x}\,,\quad\rightarrow\frac{\partial p}{\partial x}=\eta\frac{d^2u}{dy^2}$$

Bernoulli/Hydrostatik :

$$p_2=p_1+\varrho gH\,,\quad\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\varrho gH}{l}$$

$$\rightarrow\frac{\varrho gH}{l}=\eta\frac{d^2u}{dy^2}$$

$$\rightarrow u(y)=\frac{\varrho gH}{2\eta l}y^2+c_1y+c_2$$

Randbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} y=0: & u=0 \\ \\ y=h: & u=u_w \end{array}\right\}\rightarrow u(y)=\frac{\varrho gH}{2\eta l}\left(y^2-yh\right)+y\frac{u_w}{h}$$

Maximale Höhe $\rightarrow\quad\dot{V}=0$

$$\rightarrow 0=\int\limits_0^h\left[\frac{\varrho gH}{2\eta l}\left(y^2-yh\right)+y\frac{u_w}{h}\right]dy$$

$$\rightarrow 0=\frac{\varrho gH}{2\eta l}\left(-\frac{h^3}{6}\right)+\frac{hu_w}{2}$$

$$\rightarrow H=\frac{6\eta lu_w}{\varrho gh^2}$$

5. Aufgabe

a) Anzahl der Kennzahlen:

8 Parameter: $\lambda, T, \eta, c_p, u, \varrho, D, f$

4 Grunddimensionen: kg, m, s, K

$\rightarrow$ 4 Kennzahlen

b) Wiederkehrende Variable: ϱ, u, D, T

1. Kennzahl: $\Pi_1 = \lambda \varrho^\alpha u^\beta D^\gamma T^\delta$

$$\begin{aligned}
[\text{kg}]: \quad -1 &= \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = -1 \\
[\text{m}]: \quad -1 &= -3\alpha + \beta + \gamma \quad \rightarrow \quad \gamma = -1 \\
[\text{s}]: \quad 3 &= -\beta \quad \rightarrow \quad \beta = -3 \\
[\text{K}]: \quad 1 &= \delta \quad \rightarrow \quad \delta = 1
\end{aligned}$$

$$\Pi_1 = \frac{\lambda T}{\varrho u^3 D}$$

2. Kennzahl: $\Pi_1 = \eta \varrho^\alpha u^\beta D^\gamma T^\delta$

$$\begin{aligned}
[\text{kg}]: \quad -1 &= \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = -1 \\
[\text{m}]: \quad 1 &= -3\alpha + \beta + \gamma \quad \rightarrow \quad \gamma = -1 \\
[\text{s}]: \quad 1 &= -\beta \quad \rightarrow \quad \beta = -1 \\
[\text{K}]: \quad 0 &= \delta \quad \rightarrow \quad \delta = 0
\end{aligned}$$

$$\Pi_2 = \frac{\eta}{\varrho u D}$$

3. Kennzahl: $\Pi_1 = c_p \varrho^\alpha u^\beta D^\gamma T^\delta$

$$\begin{aligned}
[\text{kg}]: \quad 0 &= \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = 0 \\
[\text{m}]: \quad -2 &= -3\alpha + \beta + \gamma \quad \rightarrow \quad \gamma = -1 \\
[\text{s}]: \quad 2 &= -\beta \quad \rightarrow \quad \beta = -2 \\
[\text{K}]: \quad 1 &= \delta \quad \rightarrow \quad \delta = 1
\end{aligned}$$

$$\Pi_3 = \frac{c_p T}{u^2}$$

4. Kennzahl: $\Pi_4 = f \varrho^\alpha u^\beta D^\gamma T^\delta$

$$\begin{aligned}
[\mathrm{kg}]: \quad 0 &= \alpha \quad \rightarrow \quad \alpha = 0 \\
[\mathrm{m}]: \quad 0 &= -3\alpha + \beta + \gamma \quad \rightarrow \quad \gamma = 1 \\
[\mathrm{s}]: \quad 1 &= -\beta \quad \rightarrow \quad \beta = -1 \\
[\mathrm{K}]: \quad 0 &= \delta \quad \rightarrow \quad \delta = 0
\end{aligned}$$

$$\Pi_4 = \frac{fD}{u}$$

c) Bekannte Kennzahlen:

$$\Pi_1 = \frac{\eta}{\varrho u D} \frac{\lambda}{\eta c_p} \frac{c_p T}{u^2} = \frac{1}{\text{Re Pr}} \Pi_3 = \frac{1}{(\gamma - 1)\text{Re Pr M}^2}$$

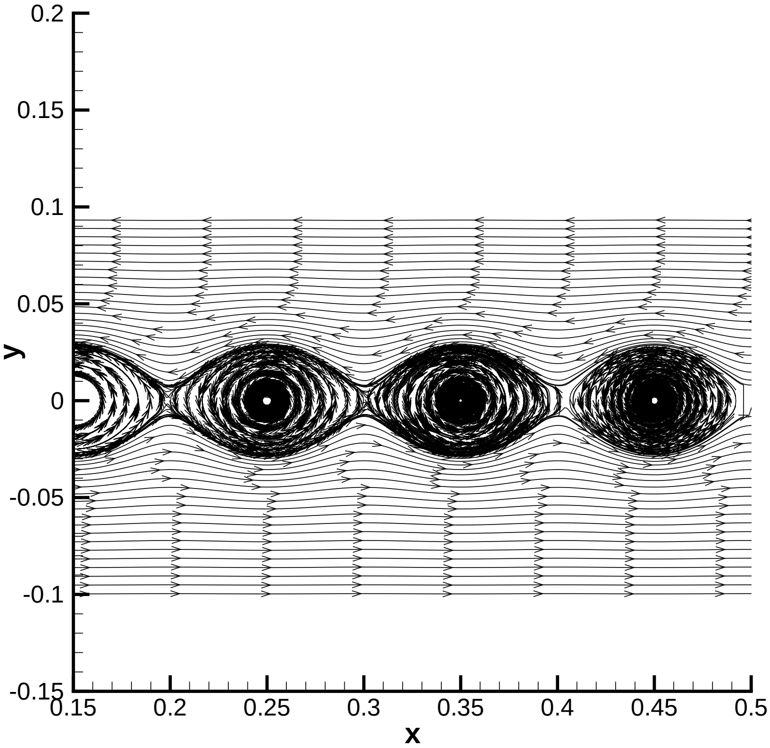
$$\Pi_2 = \frac{1}{\text{Re}}$$

$$\Pi_3 = \frac{\gamma R T}{(\gamma - 1) u^2} = \frac{c^2}{(\gamma - 1) u^2} = \frac{1}{(\gamma - 1)\text{M}^2}$$

$$\Pi_4 = \text{Sr}$$

6. Aufgabe

a) Zeichnung:



b) Der k-te Wirbel befindet sich an der Position $(x = ka, y = 0)$. Sei $\Gamma > 0$.

$$\rightarrow \psi_k = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x-ka)^2 + y^2}$$

$$\rightarrow u_k = \frac{\partial \psi_k}{\partial y} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{(x-ka)^2 + y^2}$$

$$\rightarrow v_k = -\frac{\partial \psi_k}{\partial x} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x-ka}{(x-ka)^2 + y^2}$$

c) Superpositionsprinzip:

$$\rightarrow \psi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x-ka)^2+y^2} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \ln \sqrt{(x-ka)^2+y^2}$$

d) Geschwindigkeitskomponenten:

$$\begin{aligned}
\rightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left[\frac{1}{2}\left(\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right)-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)\right]\right\} \\
&= -\frac{1}{2}\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right)-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)}\frac{1}{2}\sinh\left(\frac{2\pi y}{a}\right)\frac{2\pi}{a} \\
&= -\frac{\Gamma}{2a}\frac{1}{\left(\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right)-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)}\sinh\left(\frac{2\pi y}{a}\right) \\
\rightarrow v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left[\frac{1}{2}\left(\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right)-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{2}\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right)-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)}\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\frac{2\pi}{a} \\
&= \frac{\Gamma}{2a}\frac{1}{\left(\cosh\left(\frac{2\pi y}{a}\right)-\cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\right)}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)
\end{aligned}$$

e) Zirkulation: $\Gamma_K = \Gamma$

7. Aufgabe

a) Randbedingungen für das Geschwindigkeitsprofil:

1. Haftbedingung: $u\left(\frac{y}{\delta}=0\right)=0 \rightarrow a_0=0$

2. Grenzschichtrand: $\frac{u(\frac{y}{\delta}=1)}{u_a}=1 \rightarrow a_1+a_2+a_3=1$

3. Wandbindungsgleichung:

$\eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0}=\frac{dp}{dx}$, $\quad \frac{dp}{dx}$ aus reibungsfreier Außenströmung

$\frac{dp}{d\xi}=-\rho u_a\frac{\partial u_a}{\partial \xi}$, $\quad u_a$ aus Kontiuitätsgl.:

Konti: $u_a(\xi)H(\xi)=u_0H_0$ mit $H(\xi)=H_0+2\xi\tan\alpha$

$$\rightarrow u_a(\xi)=\frac{u_0H_0}{(H_0+2\xi\tan\alpha)}$$

$$\rightarrow \frac{dp}{d\xi}=-\rho u_a\frac{\partial u_a}{\partial \xi}=\frac{\rho u_a u_0 H_0 2\tan\alpha}{(H_0+2\xi\tan\alpha)^2} \quad \text{mit} \quad \xi=x\cos\alpha$$

$$\rightarrow \frac{dp}{dx}=\frac{2\rho u_a u_0 H_0\sin\alpha}{(H_0+2x\sin\alpha)^2}$$

$$\text{mit} \quad \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0}=\eta\frac{u_a}{\delta^2}\frac{\partial^2\left(\frac{u}{u_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2}\Big|_{\frac{y}{\delta}=0}=\eta\frac{u_a}{\delta^2}2a_2$$

$$\rightarrow a_2=\frac{\rho\delta^2u_0H_0\sin\alpha}{\eta(H_0+2x\sin\alpha)^2}$$

4. Grenzschichtrand: $\tau=0 \;\rightarrow\; \frac{\partial\frac{u}{u_a}}{\partial\frac{y}{\delta}}\Big|_{\frac{y}{\delta}=1}=0 \;\rightarrow\; a_1+2a_2+3a_3=0$

$$a_3=-\frac{1+a_2}{2}, \quad a_1=\frac{3-a_2}{2}$$

mit a_2 s.o.

b) Ablösestelle: $\tau_w=0,$ d.h. $\frac{\partial\frac{u}{u_a}}{\partial\frac{y}{\delta}}\Big|_{\frac{y}{\delta}=0}=0$

d.h. $\quad a_1=0=\frac{3-a_2}{2} \quad \rightarrow \quad a_2=3$

$$\rightarrow \frac{H_0\rho u_0\delta^2(x)\sin\alpha}{\eta(H_0+2x\sin\alpha)^2}=3$$

$$x_{AB}=\frac{\sqrt{\frac{H_0\rho u_0\delta^2(x)\sin\alpha}{3\eta}}-H_0}{2\sin\alpha}$$ für geg. $\delta(x)$ muss diese Gl. gelöst werden

c) Berücksichtigung der Verdrängung durch die Grenzschicht:

(a) Berechnung von $\delta_1 = \int_0^1 (1 - \frac{u(y)}{u_a}) d\frac{y}{\delta}$ aus der Lösung

(b) Einsetzen in die Konti-Gleichung: $u_a(x) = \frac{u_0 H_0}{H_0 + 2(x \sin\alpha - \delta_1(x))}$

(c) neue Berechnung des Geschwindigkeitsprofils

(d) Prüfung, ob die Veränderung des neuen Geschwindigkeitsprofils gegenüber dem alten Geschwindigkeitsprofil z.B. durch die Bestimmung der L_2-Norm kleiner als ein vorgegebener Wert ist.

(e) Schritte (a)-(d) wiederholen, bis der vorgegebene Wert unterschritten wird.

8. Aufgabe

a) Temperaturverhältnis:

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$$

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{M^2 \gamma R T}{2}$$

$$c_p T_0 = c_p T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Annahme: adiabate und reibungsfreie Strömung (isentrop)

b) Machzahl:

Gemessene Drücke: $p_{0,2} = p_v$, $p_2 = p_h$

$$\frac{p_{0,2}}{p_2} = \left(\frac{T_{0,2}}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_2^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rightarrow M_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{p_{0,2}}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right)} = 0.57735$$

c) Ruhedruck:

$$M_2^\star = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + 2/M_2^2}} = 0.6124$$

$$\rightarrow M_1^\star = \frac{1}{M_2^\star} = 1.633$$

$$\rightarrow M_1 = \sqrt{\frac{2}{\frac{\gamma+1}{(M_1^\star)^2} - (\gamma - 1)}} = 2$$

$$p_1 = \frac{p_2}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)} = 1 \text{ bar}$$

$$\frac{p_{01}}{p_1} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 7.825$$

$$\rightarrow p_{01} = 7.825 \text{ bar}$$