Erhaltung der Masse

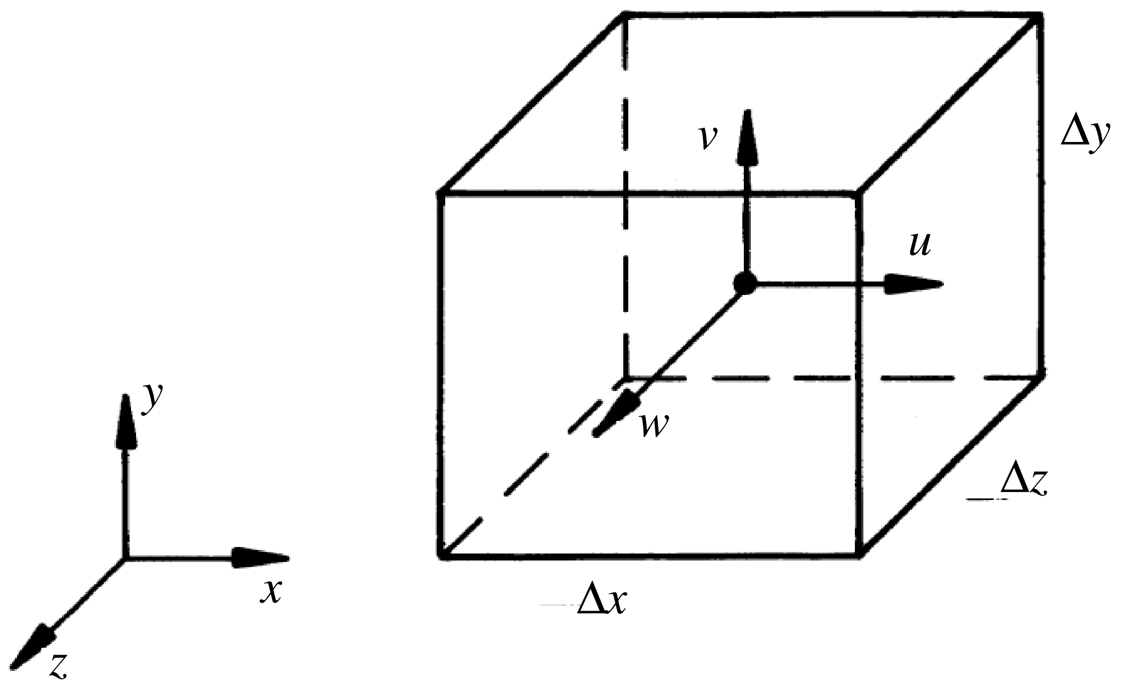
Die Masse des Systems bleibt bei Bewegung durch das Strömungsfeld konstant

$B = mb$, für $b = 1$

$$\boxed{\frac{dm_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{KV} \rho \, dV + \int_{KF} \rho \, \vec{v} \cdot \vec{n} \, dA = 0}$$

integrale Form

differentielle Form über Gaußschen Satz oder am Element

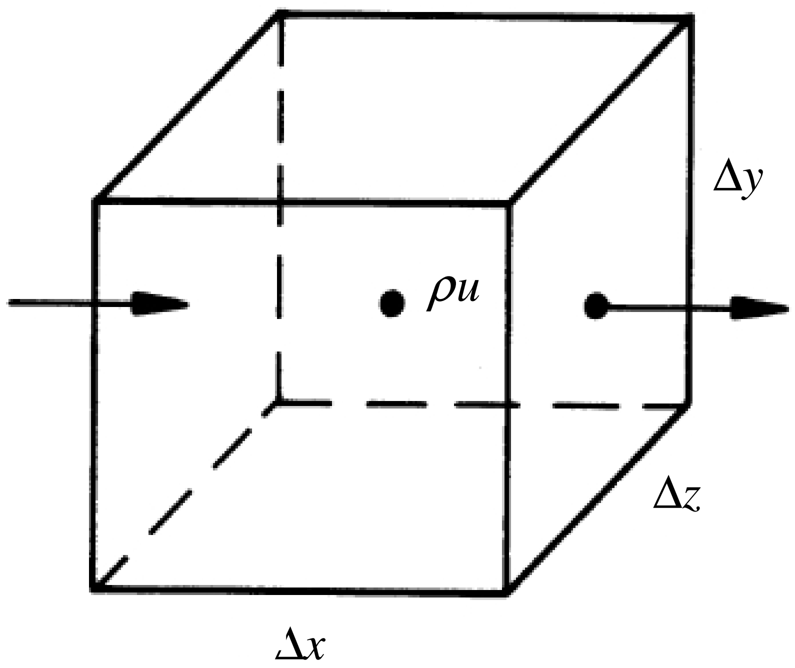


Zeitliche lokale Massenänderung :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \, \Delta x \; \Delta y \; \Delta z$$

Massenfluss über die Oberfläche des Elements (in x-Richtung) :

$$\left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta z$$



$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta z$$

Nettomassenfluss in x-Richtung

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta z - \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y \Delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z$$

In y- und z-Richtung erhält man

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z \quad , \quad \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z$$

$\Longrightarrow$ differentielle Form der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\ u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\ v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\ w)}{\partial z} \ = \ 0$$

bzw.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \ + \ \vec{\nabla} \cdot (\rho\ \vec{v}) = 0$$

mit

$$\vec{\nabla}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x}\ \vec{i} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial y}\ \vec{j} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial z}\ \vec{k}$$

Mit lok. konvek.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} + w\frac{\partial \rho}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \rho$$

folgt :
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

bzw.
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\, \vec{v} = 0$$

Sonderfälle :

- stat. Strömung $\frac{\partial}{\partial t} \to 0$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho\ \vec{v}) = \frac{\partial(\rho\ u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\ v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\ w)}{\partial z} = 0$$

- Inkompressibles Fluid ρ = konstant

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Erhaltung des Impulses

$\vec{F}$: Auf die Fluidmasse wirkende resultierende Kraft

$\vec{I} = \int\limits_{Sys} \vec{v}\, dm$: Impuls

Anwendung auf ein differentielles Massesystem:

$$\Delta\vec{F} = \frac{d(\vec{v}\,\Delta m)}{dt}$$

$\Delta m_{sys} =$ konstant

$$\Delta\vec{F} = \Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Delta m \vec{a}$$

$\Delta\vec{F}$: Oberflächen- und Volumenkräfte

Volumenkraft : Gewichtskraft maßgeblich

in kartesischen Koordinaten:

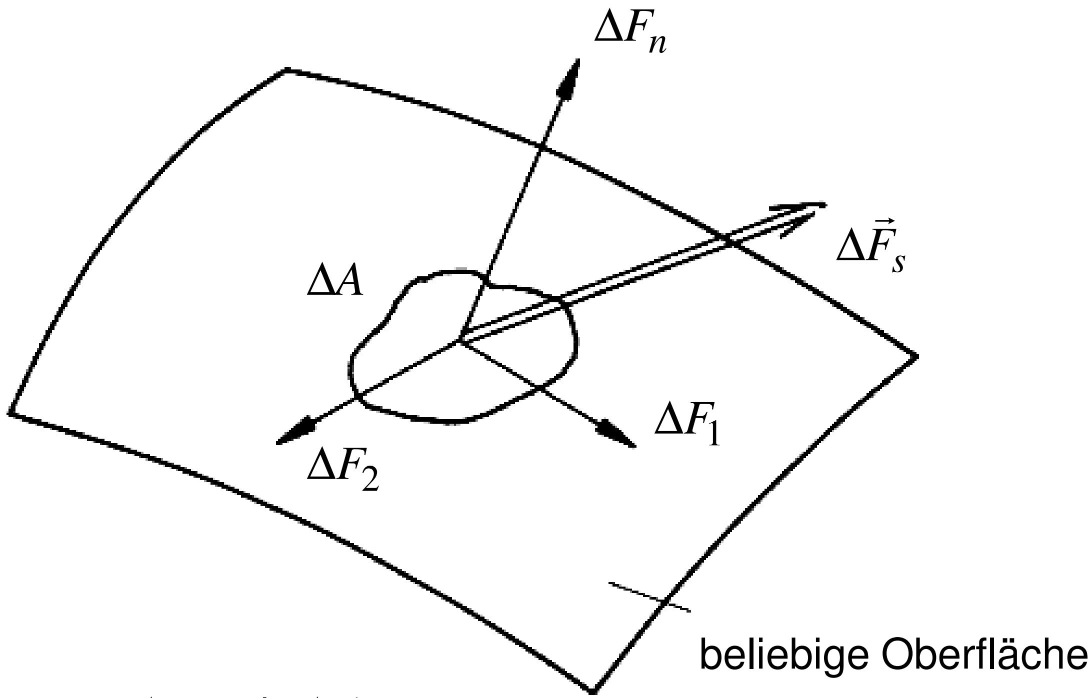
$$\Delta F_{bx} = \Delta m g_x$$

$$\Delta F_{by} = \Delta m g_y$$

$$\Delta F_{bz} = \Delta m g_z$$

Oberflächenkraft:

Element $\leftrightarrow$ Umgebung



$$\Delta F_1 \perp \Delta F_2 \quad , \quad \Delta F_n \perp \Delta A$$

Normalspannung:

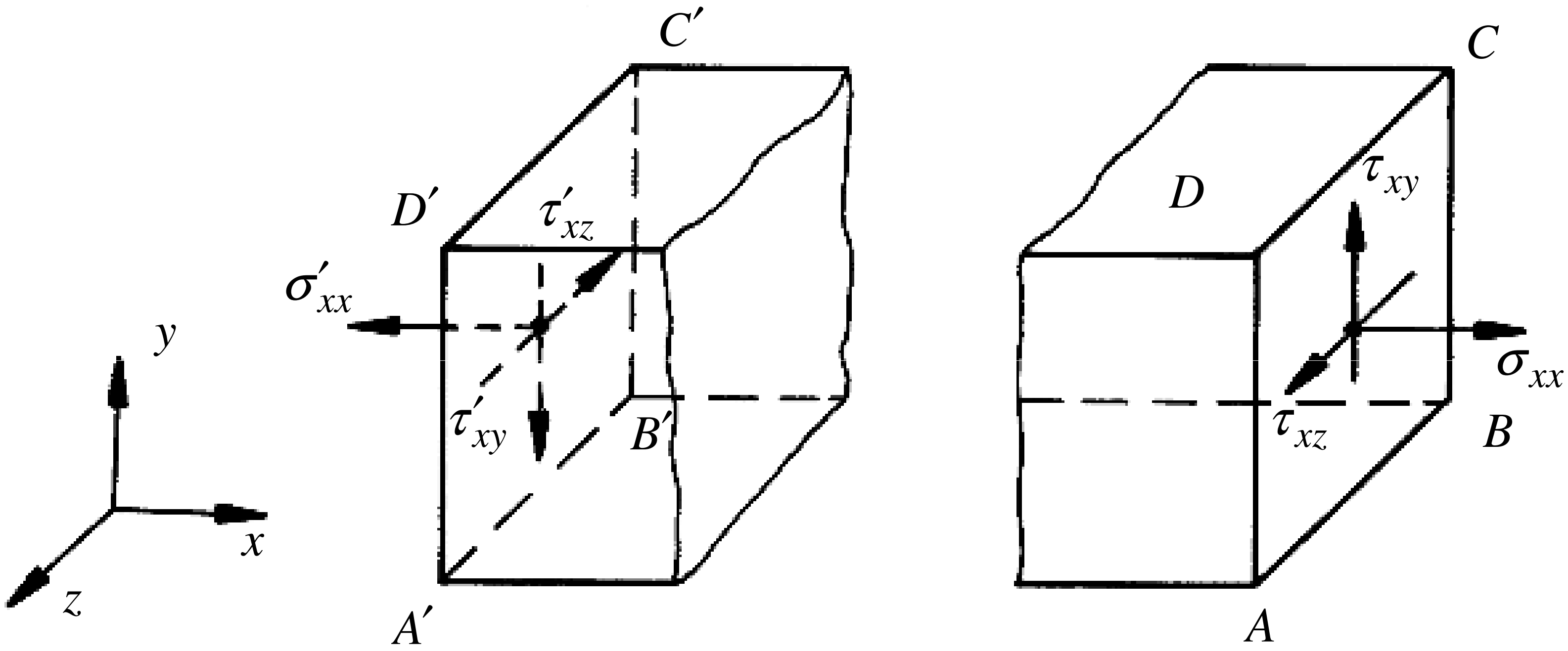
$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$

Schubspannung:

$$\tau_1 = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_1}{\Delta A}$$

$$\tau_2 = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F_2}{\Delta A}$$

die übliche Zeichenkonvektion gilt



Bedeutung der Indizes :

S_{ij}	:	i	Richtung der Normalen der Ebene
		j	Richtung der Spannung

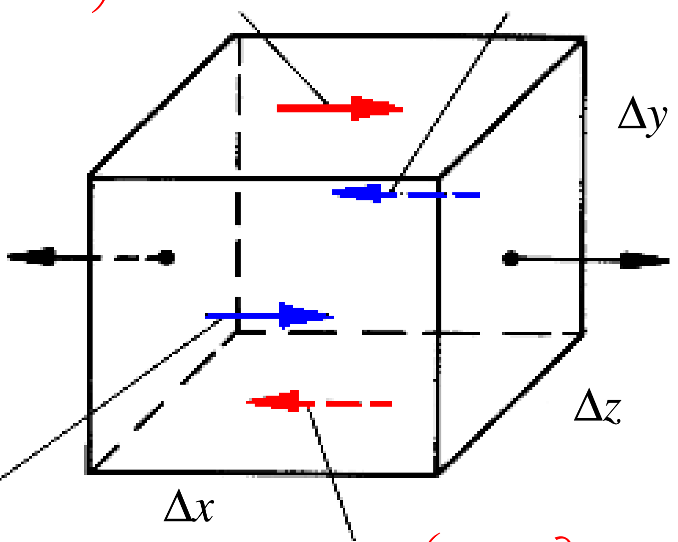
Spannungen auf 3 orthogonalen, durch einen Punkt gehende Ebenen definieren den Spannungszustand eindeutig

Oberflächenkräfte (nicht vollständig):

$$\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x\Delta z$$

$$\left(\tau_{zx}-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y$$

$$\left(\sigma_{xx}-\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\Delta z$$



$$\left(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta y\Delta z$$

$$\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right)\Delta x\Delta y$$

$$\left(\tau_{yx}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x\Delta z$$

Summation liefert die Komponenten der resultierenden Oberflächenkraft:

$$\Delta\vec{F}_S = \Delta F_{Sx}\,\vec{i} + \Delta F_{Sy}\,\vec{j} + \Delta F_{Sz}\,\vec{k}$$

Kräfte in x- / y- / z-Richtung:

$$\Delta F_{Sx} = \left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\Delta F_{Sy} = \left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\Delta F_{Sz} = \left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

Einsetzen in $\Delta\vec{F} = \Delta m\vec{a}$

mit $\Delta\vec{F} = \Delta\vec{F}_s + \Delta\vec{F}_b$

$$\Delta m = \rho\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \underline{\underline{u\frac{\partial\vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{v}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{v}}{\partial z}}}$$

ergibt $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$

Differentielle Form der Impulserhaltung

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho g_x+\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \qquad \text{X}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=\rho g_y+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \qquad \text{Y}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho g_z+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \qquad \text{Z}$$

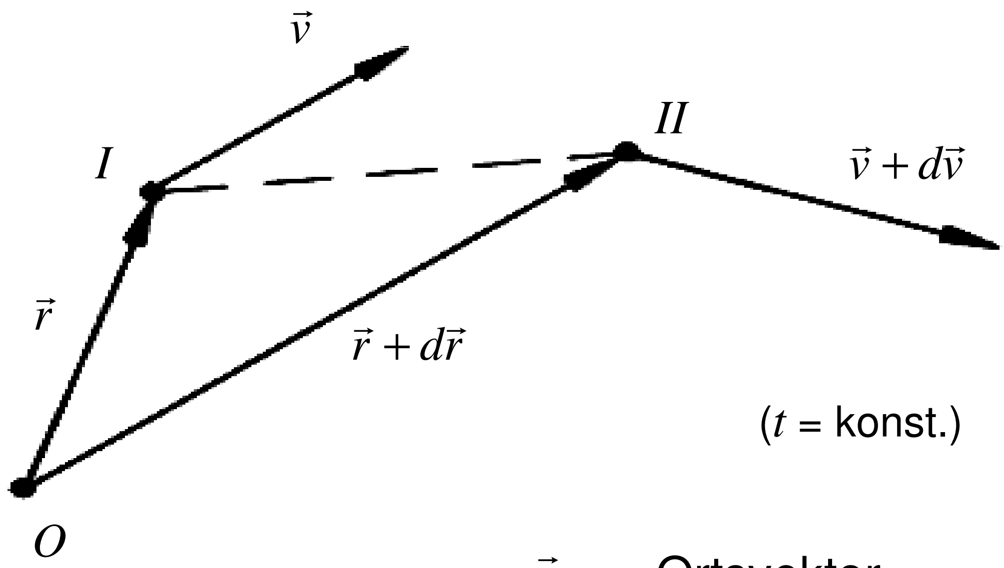
Kinematik des Fluidelements

Aufgabe : Spannungen durch Geschwindigkeitskomponenten ausdrücken

Bewegung eines Elements

$\Longrightarrow$ Änderung seiner Lage und seiner Form

Bestimmung der Verformung mittels der relativen Bewegung zwischen 2 Punkten I und II



(t = konst.)

$\vec{r}$: Ortsvektor

$d\vec{v}$: Geschwindigkeitsänderung

$d\vec{v}$ in Komponentenschreibweise

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

Um den Zusammenhang mit Translation, Rotation, Dehnung und Scherung zu erkennen, wird $d\vec{v}$ umgeschrieben

$$du = \dot{\varepsilon}_x dx + \dot{\varepsilon}_{xy} dy + \dot{\varepsilon}_{xz} dz + \omega_{zx} dz - \omega_{xy} dy$$

$$dv = \dot{\varepsilon}_{yx} dx + \dot{\varepsilon}_y dy + \dot{\varepsilon}_{yz} dz + \omega_{xy} dx - \omega_{yz} dz$$

$$dw = \dot{\varepsilon}_{zx} dx + \dot{\varepsilon}_{zy} dy + \dot{\varepsilon}_z dz + \omega_{yz} dy - \omega_{zx} dx$$

Der Vergleich beider Gleichungssysteme ergibt folgende Definitionen für $\dot{\varepsilon}_i$ und $\dot{\varepsilon}_{ij}$ bzw. ω_{ij}

$$\dot{d}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_x & \dot{\varepsilon}_{xy} & \dot{\varepsilon}_{xz} \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_y & \dot{\varepsilon}_{yz} \\ \dot{\varepsilon}_{zx} & \dot{\varepsilon}_{zy} & \dot{\varepsilon}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

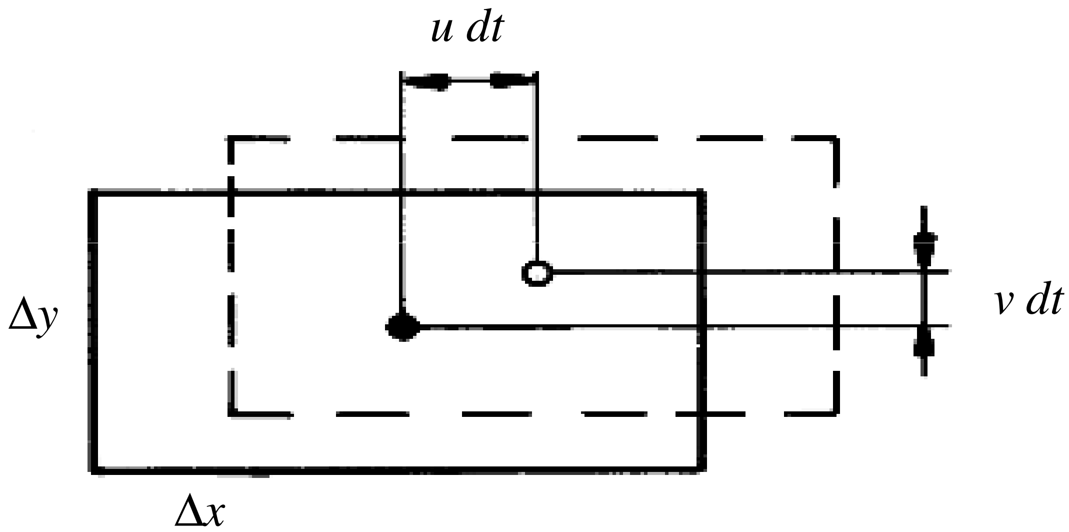
$$\omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$\omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

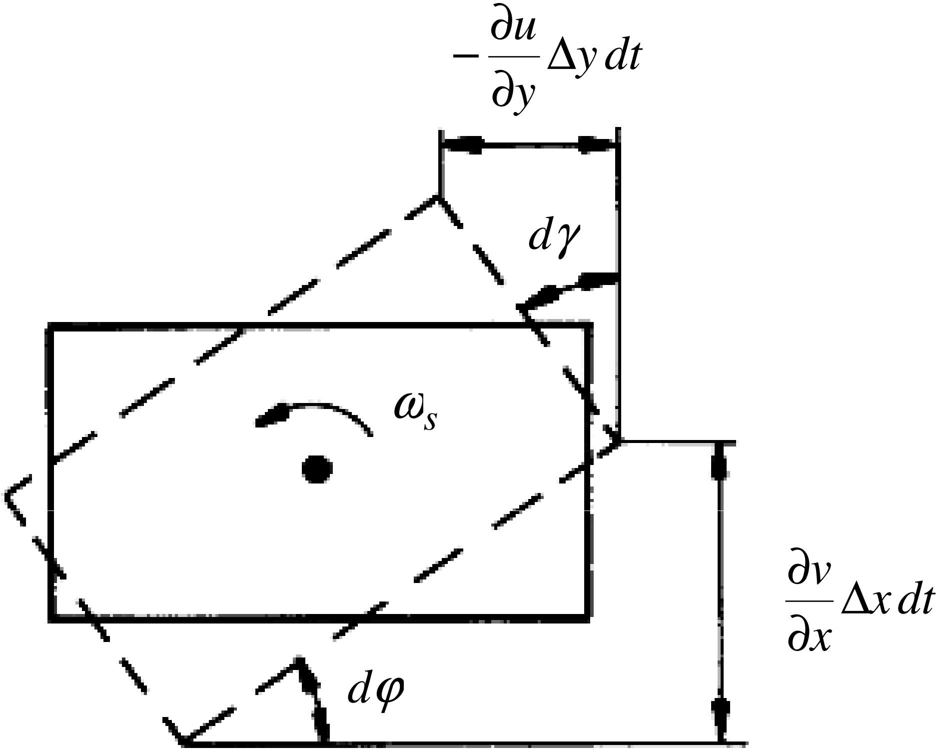
Bedeutung von $\dot{\varepsilon}_i$, $\dot{\varepsilon}_{ij}$, ω_{ij} ?

Unverformtes Element bewegt sich in der Strömung

Translation:



Rotation:



$$\tan(d\varphi) \approx d\varphi$$

$$d\varphi = \frac{\partial v}{\partial x} dt = -\frac{\partial u}{\partial y} dt$$

$\Rightarrow$ Zeitliche Winkeländerung $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ aus dem arithmetischen Mittel

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \omega_{xy}$$

$\Rightarrow$ Drehung um z-Achse

In 3D erhält man :

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \omega_{yz}$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \omega_{zx}$$

$\Rightarrow$ Dreh- oder Wirbelvektor $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$\Rightarrow$ ω_{ij} - Terme : Rotation des unverformten Elements

Relative Volumenänderung (Volumendilatation) $\dfrac{1}{\Delta V}\dfrac{d(\Delta V)}{dt}$

$$\frac{1}{\Delta V}\frac{d(\Delta V)}{dt}=\frac{1}{\Delta V}\left\{\left[\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\,dt\right]\cdot\left[\Delta y+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\,dt\right]\cdot\left[\Delta z+\frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\,dt\right]-\Delta x\Delta y\Delta z\right\}\frac{1}{dt}$$

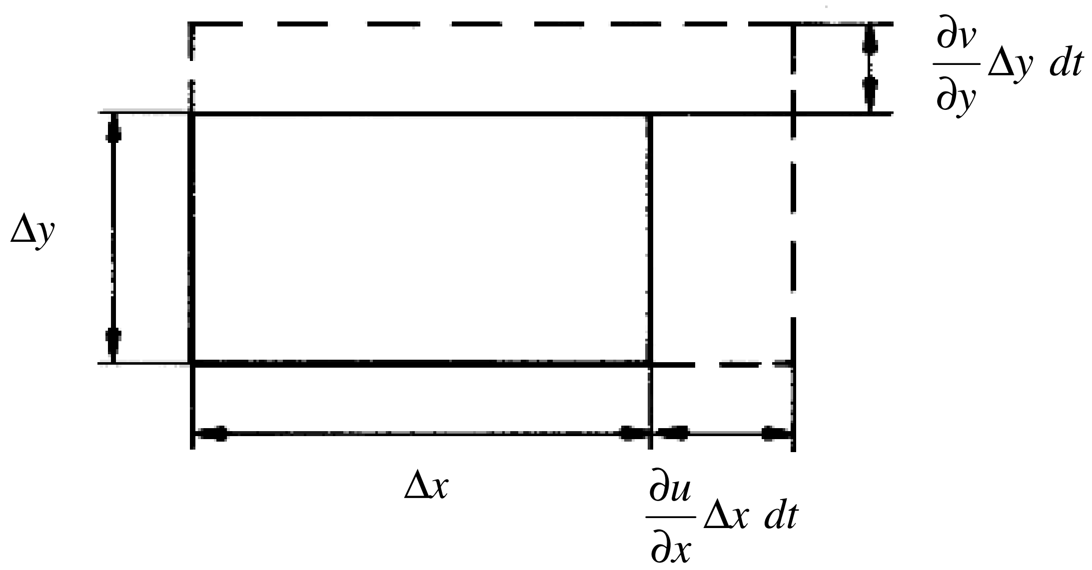
$$\frac{1}{\Delta V}\frac{d(\Delta V)}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\vec{\nabla}\cdot\vec{v}=div\,\vec{v}$$

$\longrightarrow$ Kontinuitätsgleichung für inkompr. Fluide

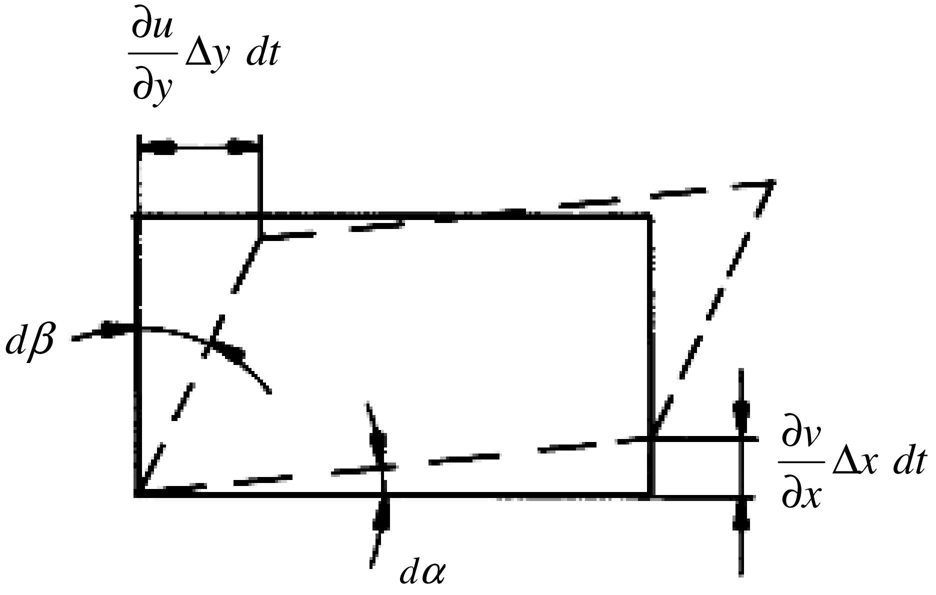
Rechteck $\xrightarrow{\textbf{Scherung}}$ Parallelepiped

$$d\,\gamma = d\,\alpha + d\,\beta$$

Verformung des Elements



Dehnung



Scherung

Dehnungsgeschwindigkeit entspricht der zeitlichen Dehnungsänderung pro Kantenlänge

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \dot{\varepsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

entspricht den Hauptdiagonalen der Matrix d_{ij}

$$d\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

$$d\beta = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

$$\frac{d\gamma}{dt} : \left(\frac{d\alpha}{dt}\right); \left(\frac{d\beta}{dt}\right)$$

gesamte Winkeländerung pro Zeit

Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}_{ij}$ über arithmetische Mittelung

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

Vergleiche mit $d_{ij} - Matrix$:

$\Longrightarrow$ $\dot{\varepsilon}_{ij} \mathrel{\widehat{=}} \dot{\gamma}_{ij}$ – Terme

$\Longrightarrow$ d_{ij} – Matrix : enthält **Dehnung** und **Scherung**

$\Longrightarrow$ Tensor der Deformation

Spannungstensor τ_{ij} in der Impulserhaltung

Zusammenhang zwischen τ_{ij} und $\dot{d}_{ij}$ durch Newtonschen Reibungsansatz :

Tangentiale Spannung ~ Schergeschwindigkeit

und mittels Isotropie des Elements

$\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_z$ und $div\vec{v}$ $\longrightarrow$ viskositätsbedingte Normalspannungen

Ansatz:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\eta\dot{\varepsilon}_x + \lambda\, div\,\vec{v} \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\eta\,\dot{\gamma}_{xy}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\eta\dot{\varepsilon}_y + \lambda\, div\,\vec{v} \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} = 2\eta\,\dot{\gamma}_{yz}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta\dot{\varepsilon}_z + \lambda div\,\vec{v} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz} = 2\eta\,\dot{\gamma}_{zx}$$

Die Größen η und λ sind Proportionalitätsfaktoren

Die Normalspannungen werden i. a. umformuliert

$$\sigma_{yy} = -p + \eta\left(2\dot{\varepsilon}_y - \frac{2}{3} div\,\vec{v}\right) + \hat{\eta}\, div\,\vec{v}$$

$$\sigma_{xx} = -p + \eta\left(2\dot{\varepsilon}_x - \frac{2}{3} div\,\vec{v}\right) + \hat{\eta}\, div\,\vec{v}$$

$$\sigma_{zz} = -p + \eta\left(2\dot{\varepsilon}_z - \frac{2}{3} div\,\vec{v}\right) + \hat{\eta}\, div\,\vec{v}$$

η : dynamische Viskosität

$\hat{\eta} = \lambda + \frac{2}{3}\eta$: Volumenviskosität

Stokes ‘sche Hypothese : $\hat{\eta} = \lambda + \frac{2}{3}\eta = 0$

inkompressible Strömungen : $div\,\vec{v} = 0$

$\Rightarrow$ mittlere Normalspannung σ :

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) = -p + \hat{\eta}\, div\,\vec{v}$$

Einsetzen der Normal- und Tangentialspannung

$\Longrightarrow$ **Navier- Stokes Gleichungen**

$$\rho\frac{du}{dt}=\rho g_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}div\,\vec{v}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\eta\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]$$

$$\rho\frac{dv}{dt}=\rho g_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}div\,\vec{v}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]$$

$$\rho\frac{dw}{dt}=\rho g_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left[\eta\left(2\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{2}{3}div\,\vec{v}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\eta\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]$$

inkompressible Strömung, η = konst

$$\longrightarrow \quad div\,\vec{v} = 0$$

Vereinfachung der 2. Ableitungen

$$\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\eta\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]=\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$\Longrightarrow$ Navier- Stokes Gleichungen für ein ink. Fluid

$$\boxed{\begin{aligned}
\rho\frac{du}{dt} &= \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\
\rho\frac{dv}{dt} &= \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\\
\rho\frac{dw}{dt} &= \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}}$$

Energiegleichungen

1. Hauptsatz der Thermodynamik :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{dW}{dt}$$

Q : Wärme; E : Energie; W : Arbeit

Volumenelement :

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta m = \rho \Delta V$$

Wärmeleitung nach Fourier :

$$\frac{1}{A}\frac{dQ}{dt} = q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$$

λ : Wärmeleitfähigkeit

Betrachtung für die Fläche $\Delta y \, \Delta z$ (x-Richtung)

aufgenommene Wärme:

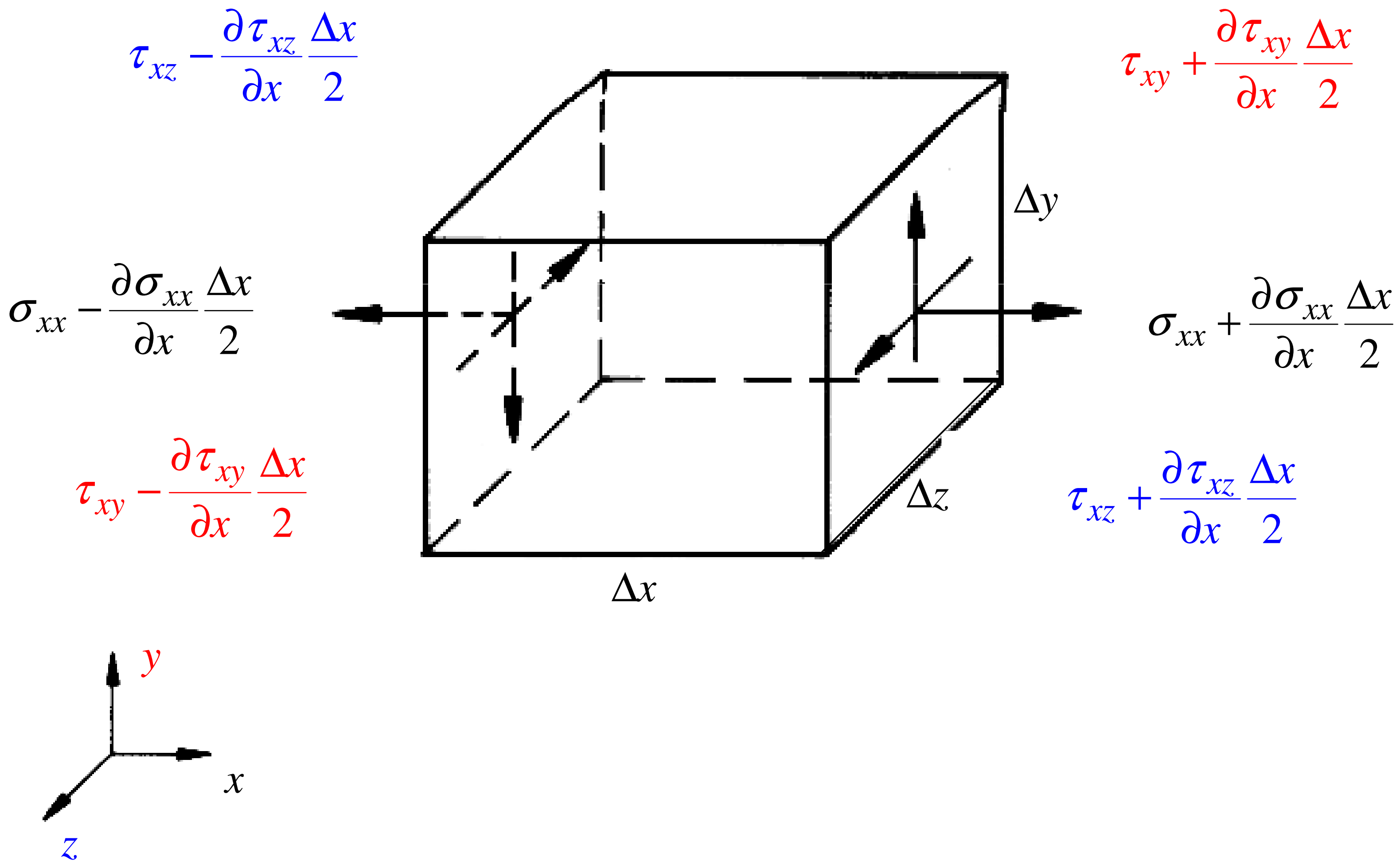
$$-\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

abgegebene Wärme:

$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

Nettowärmestrom in x- , y- und z-Richtung

$$dQ = dt\Delta V\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right\}$$



zeitliche Änderung der Gesamtenergie:

$$\frac{dE}{dt} = \rho \Delta V \left[\frac{de}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u^2 + v^2 + w^2) \right]$$

e : massenbezogene innere Energie

Arbeit pro Zeit anhand von σ_{xx} **:**

$$dW_{\sigma_{xx}} = -\Delta y \Delta z dt \left\{ \underline{-\left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)} \right.$$

$$\left. \underline{+ \left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)} \right\}$$

$$= -\Delta y \Delta z dt \left(u \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x$$

$$= -\Delta V dt \underline{\underline{\frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx})}}$$

analoge Vorgehensweise für den gesamten Spannungstensor :

$$\frac{dW}{dt} = -\Delta V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\underline{\underline{u\sigma}}_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\tau_{yx} + v\sigma_{yy} + w\tau_{yz}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\sigma_{zz}\right)\right]$$

Mittels Impulserhaltung (z.B. x-Impuls) :

$$\underline{\rho\frac{du}{dt}} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

Umformung der $\dfrac{dE}{dt}$ und $\dfrac{dW}{dt}$ -Therme :

$$\frac{dE}{dt} = \left[\rho\frac{de}{dt} + \underline{u\underline{\rho\frac{du}{dt}}} + v\rho\frac{dv}{dt} + w\rho\frac{dw}{dt}\right]\Delta V$$

$$\frac{dW}{dt}\frac{1}{\Delta V} = \underline{-u\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}} - \sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\ldots$$

$$\underline{-u\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}} - \tau_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\ldots$$

$$\underline{-u\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}} - \tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z}\ldots$$

$$\left(\frac{dE}{dt} + \frac{dW}{dt}\right)\frac{1}{\Delta V} = \rho\frac{de}{dt} - \sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} - \tau_{xy}\frac{\partial v}{\partial x} - \tau_{xz}\frac{\partial w}{\partial x}$$

$$-\tau_{yx}\frac{\partial u}{\partial y} - \sigma_{yy}\frac{\partial v}{\partial y} - \tau_{yz}\frac{\partial w}{\partial y}$$

$$-\tau_{zx}\frac{\partial u}{\partial z} - \tau_{zy}\frac{\partial v}{\partial z} - \sigma_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}$$

Einführung der Spannungen ergibt die Energiegleichung

$$\rho \frac{de}{dt} + p\, div\, \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + \eta \Phi$$

mit Φ für $\hat{\eta} = 0$

$$\Phi = 2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 > 0$$

$\Phi = \text{Dissipatio nsfunktion}$

mechanische Energie $\longrightarrow$ thermische Energie

Energiegleichungen für ideale Gase

$$e = f(T),\;\; h = e + \frac{p}{\rho} = f(T)$$

kalorische Zustandsgleichungen:

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial T}\right)_{\frac{1}{\rho}} dT = c_v dT \qquad\qquad dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_p dT = c_p dT$$

$$\Rightarrow \quad \frac{de}{dt} = \frac{dh}{dt} - \frac{d\left(\frac{p}{\rho}\right)}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho}\left[\frac{dp}{dt} - \frac{p d\rho}{\rho dt}\right]$$

Kontinuitätsgleichung:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = div\,\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)\right] + \eta \Phi}$$

Form der Energiegleichung in CFD-Untersuchungen

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[u(E+p)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[v(E+p)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[w(E+p)\right]=$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u\tau_{xx}+v\tau_{xy}+w\tau_{xz}-q_x\right]+$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[u\tau_{xy}+v\tau_{yy}+w\tau_{yz}-q_y\right]+$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[u\tau_{xz}+v\tau_{yz}+w\tau_{zz}-q_z\right]$$

bzw. mit

$$H=h+\frac{\left\|\vec{v}\right\|^2}{2}$$

$$\rho H=p+\rho\left(e+\frac{\left\|\vec{v}\right\|^2}{2}\right)=p+E$$

lauten die räumlichen 1. Ableitungen der linken Seite

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho uH\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho vH\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho wH\right)$$

Formen der Erhaltungsgleichungen

Vektorschreibweise unter Berücksichtigung des Nabla-Operators

Masse:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

oder

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Impuls:

Spannungstensor τ

$$\tau = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \sigma_{xx} + p = \eta \left(2\dot{\varepsilon}_x - \frac{2}{3} div\ \vec{v} \right) + \hat{\eta} div\ \vec{v}$$

$$\sigma_y = \sigma_{yy} + p$$

$$\sigma_z = \sigma_{zz} + p$$

$\Rightarrow$ Formen der Navier-Stokes Gleichungen:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\tau$$

oder: $$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\tau$$

oder: $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{v}) + \vec{\nabla}\cdot(\rho\,\vec{v}\vec{v}) = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \vec{\nabla}\cdot\tau$$

mit $\vec{v}\vec{v}$

$$\vec{v}\vec{v} = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{pmatrix}$$

inkompressibles Fluid mit η = konstant:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \eta\nabla^2\vec{v}$$

+ stationär $$\rho\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{v} = \rho\vec{g} - \vec{\nabla}p + \eta\nabla^2\vec{v}$$

Energie

$$E = \rho\left(e + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2}\right) \quad : \quad \text{Gesamtenergie}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(E\vec{v}) = \rho\vec{g}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} - \vec{\nabla}\cdot(p\vec{v}) + \vec{\nabla}\cdot(\tau\cdot\vec{v})$$

plus Kontinuitätsgleichung

$$\rho\frac{d}{dt}\left(e + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2}\right) = \rho\vec{g}\cdot\vec{v} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} - \vec{\nabla}\cdot(p\vec{v}) + \vec{\nabla}\cdot(\tau\cdot\vec{v})$$

$$H = \frac{p+E}{\rho} \quad : \quad \text{Gesamtenthalpie}$$

$$\rho\frac{dH}{dt} = \rho\vec{g}\cdot\vec{v} + \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla}\cdot\vec{q} + \vec{\nabla}(\tau\cdot\vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}\left(e + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2}\right) = \frac{dH}{dt} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(p\vec{v})\right)$$

e : innere Energie

$$\rho \frac{de}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \tau \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

mit

$$\begin{aligned}
\tau \cdot \vec{\nabla} \vec{v} &= \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_z \\
&= \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
&= \eta \Phi
\end{aligned}$$

h : innere Enthalpie

$$\rho \frac{dh}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \frac{dp}{dt} + \tau \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

bzw. bei idealem Gas: $$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \frac{dp}{dt} + \tau \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

Ähnlichkeitstheorie

Realistische Probleme sind selten durch exakte Lösungen der Erhaltungsgleichungen zu beschreiben.

$\Rightarrow$ Lösung mittels Numerik oder Experiment

Experiment :
- Planung
- Übertragbarkeit der Ergebnisse

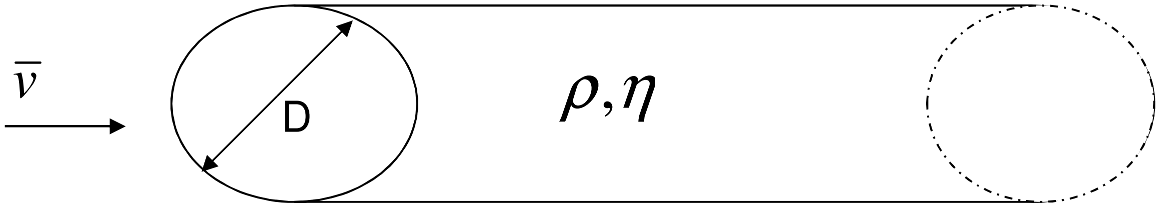
$\Rightarrow$ Ähnlichkeitstheorie

Ähnlichkeit : Beziehung zwischen Modell und Realausführung

2 Methoden :
- Methode der DGL
- Dimensionsanalyse

Dimensionsanalyse

Pipeline-Problem :



stationär, inkompr.

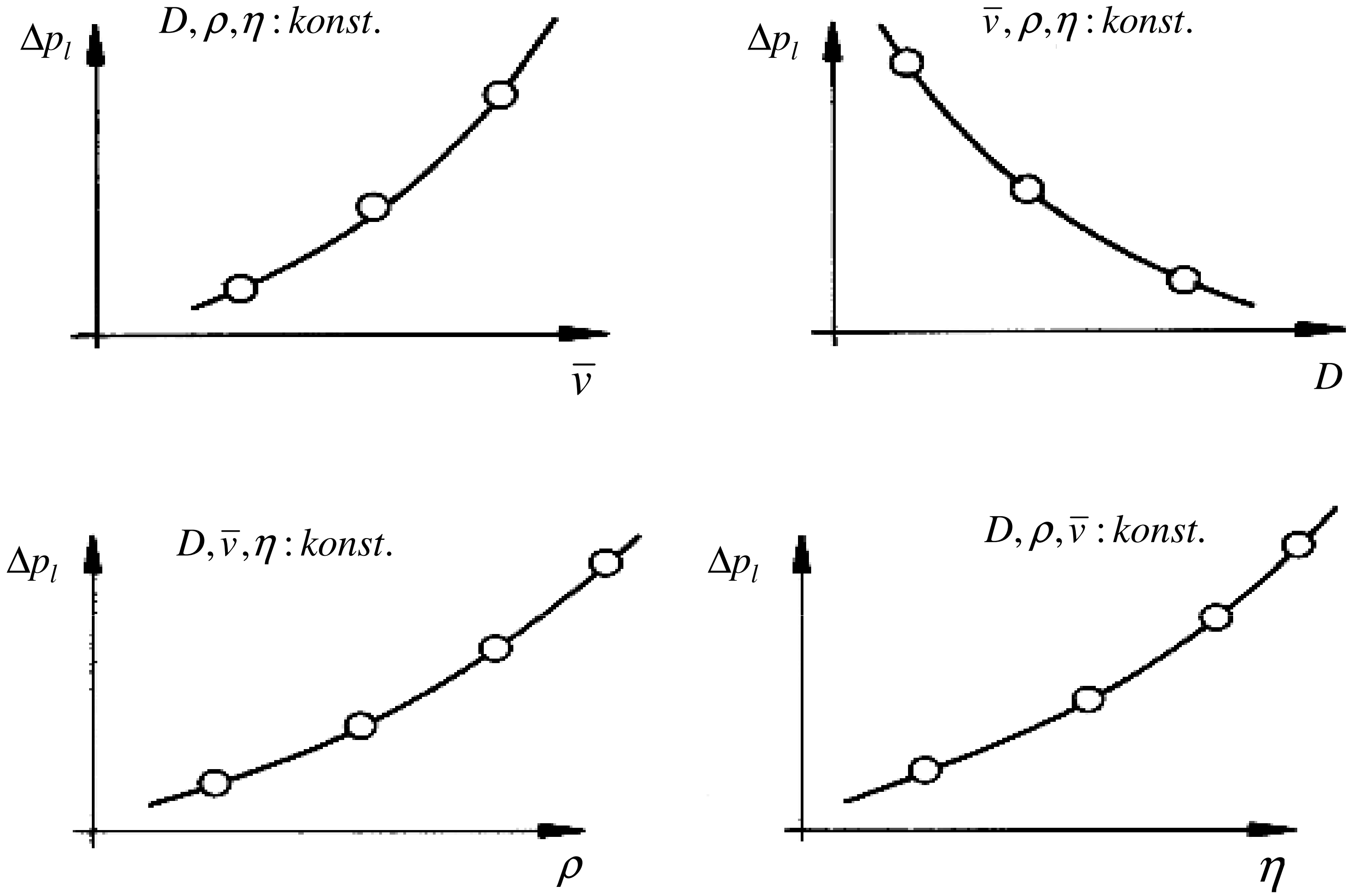
Druckverlust pro Einheitslänge Δp_l ?

Planung des Experiments → $\Delta p_l = f\,(?)$

hier : $\Delta p_l = f\,(D, \rho, \eta, \bar{v})$

f(…) mittels Experiment bestimmen!

Experiment der Form : $\Delta p_l = f\,(x_1)$ mit x_2, x_3, x_4 konstant

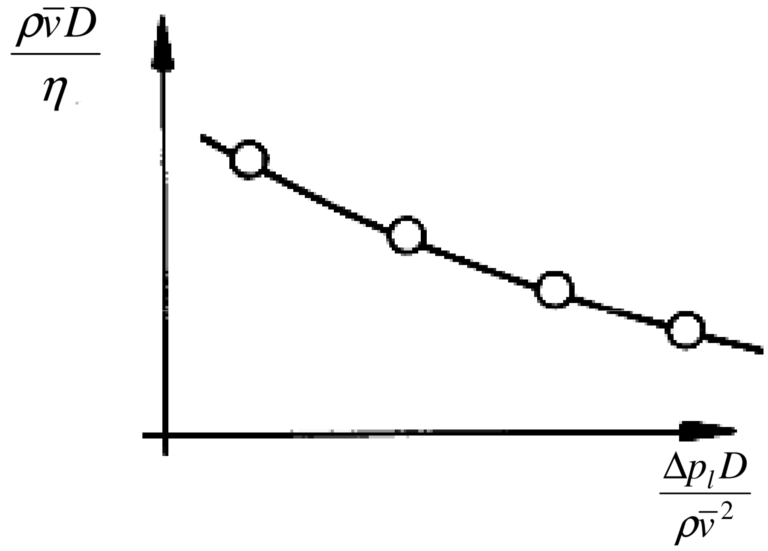


Betrag von $\Delta p_l = f(D, \rho, \eta, \bar{v})$ aufwendig und schwierig

Daten liefern nicht automatisch $f(...)$.

Ausweg : Bildung von **Kennzahlen** (dimensionslose Parameter) aus $\rho, \eta, D, \bar{v}$

hier : $$\frac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2} = \phi\left(\frac{\rho \bar{v} D}{\eta}\right)$$



$\Rightarrow$ 1 Kurve aus den Experimenten?

Exp. : einfacher und kostengünstiger

Wie gelangt man zu $\frac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2} = \phi\left(\frac{\rho \bar{v} D}{\eta}\right)$?

Basis : Dimension der Variablen $\Rightarrow$ qualitative Beschreibung des Problems

Basisdimensionen :

M : Masse, L : Länge, T : Zeit

Pipeline-Problem : $\Delta p_l\left[\frac{M}{t^2 L^2}\right],\ D[L],\ \rho\left[\frac{M}{L^3}\right],\ \bar{v}\left[\frac{L}{t}\right],\ \eta\left[\frac{M}{Lt}\right]$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2} = \phi\left(\frac{\rho \bar{v} D}{\eta}\right) \qquad \text{: dimensionslos}$$

mittels Dimensionsanalyse wird die Anzahl der Variablen reduziert.

Grundlage der Dimensionsanalyse ist das **Kennzahl-** oder **PI-Theorem** von Buckingham.

$\Longrightarrow$ # der nötigen dimensionslosen Parameter

PI-Theorem : Sofern eine Gleichung mit **k Variablen** bezüglich der Dimensionen homogen ist, kann sie auf eine Beziehung **mit k-r unabhängigen dimensionslosen Variablen** reduziert werden, wobei **r der minimalen Anzahl von Referenzgrößen** entspricht, die zur Beschreibung der ursprünglichen Variablen nötig ist.

dimensionslose Größen : Kennzahlen oder PI-Terme

D.h. nach **PI-Theorem** folgt auf

$$u_1 = f(u_2, u_3, u_4, \ldots, u_k)$$

der Zusammenhang

$$\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, \ldots, \pi_{k-r})$$

Im Allgemeinen ist $r=3$ (M,L,T)

Bestimmung der **PI-Terme** mittels der **Methode der wiederkehrenden Variablen**.

1. Angabe aller relevanten Variablen,

i. a. geometrische Daten (→ D)

Fluiddaten (→ ρ, η)

äußere Effekte (→ Δp_l) .

Achtung : Variablen müssen unabhängig sein (→ nicht D und A)

2. Alle Variablen in Referenzgrößen schreiben

3. k : # der Variablen

   r : # der Referenzgrößen

   $\longrightarrow$ k-r : # der Kennzahlen

4. Wahl der wiederkehrenden Variablen, # der wiederkehrenden Variablen = # der Referenzdimensionen, wiederkehrende Variable besitzen alle Bezugsdimensionen;

   wiederkehrende Variable müssen dimensional unabhängig sein;

   Bemerkung : die wesentliche, zu bestimmende Größe sollte nicht Teil der Liste der wiederkehrenden Variablen sein.

5. Bestimmung der Kennzahl: Multiplikation einer nichtwiederkehrenden Variablen mit den wiederkehrenden Variablen derart, dass die Kennzahl dimensionslos ist, Betrachtung für jede nichtwiederkehrende Variable.

6. Check : Kennzahl dimensionslos?

7. Angabe von $\pi_1 = \Phi(\pi_2, \pi_3, ..., \pi_{k-r})$

Bemerkung : Bestimmung von Φ mittels Experiment

Anwendung auf das Pipeline-Problem

1. $\Delta p_l = f(D, \rho, \eta, \bar{v})$

2. $\Delta p_l = \frac{M}{t^2 L^2}, D \doteq L, \rho \doteq \frac{M}{L^3}, \eta \doteq \frac{M}{Lt}, \bar{v} \doteq \frac{L}{t}$

3. $k = 5, \quad r = 3, \quad k - r = 2$ Kennzahlen

4. wiederkehrende Variable $D, \rho, \bar{v}$

5. $\pi_1 = \Delta p_l D^a \,\bar{v}^b \rho^c$

$$M^0 L^0 t^0 \doteq M t^{-2} L^{-2} L^a (L t^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

$$M \;: 0 = 1 + c$$
$$L \;: 0 = -2 + a + b - 3c$$
$$t \;: 0 = -2 - b$$

$$a = 1,\;\; b = -2,\;\; c = -1$$

$$\pi_1 = \frac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2}$$

$$\pi_2 = \eta D^a \bar{v}^b \rho^c$$

$$M^0 L^0 t^0 \doteq M t^{-1} L^{-1} L^a (L t^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

$$M \;: 0 = 1 + c$$

$$L \;: 0 = -1 + a + b - 3c$$

$$t \;: 0 = -1 - b$$

$$a = -1, b = -1, c = -1$$

$$\pi_2 = \frac{\eta}{D\rho\bar{v}}$$

6. Check : π_1, π_2 dimensionslos

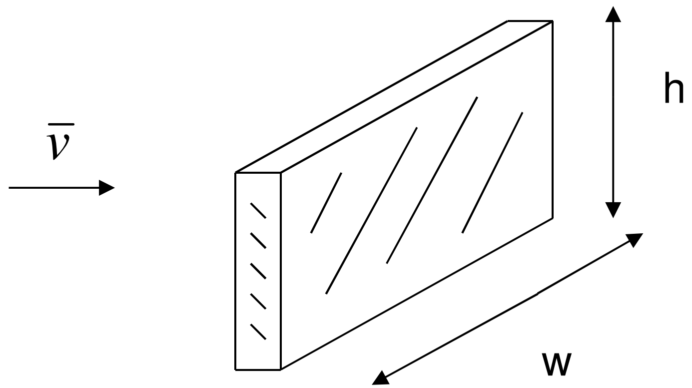
7.

$$\frac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2} = \varphi\left(\frac{\eta}{D\rho\bar{v}}\right)$$

$$\frac{\Delta p_l D}{\rho \bar{v}^2} = \phi\left(\frac{D\rho\bar{v}}{\eta}\right)$$

φ - oder ϕ - Funktion aus Experiment

Platten-Beispiel :



gesucht : Widerstand $D = f(w, h, \rho, \eta, \bar{v})$ bzw. geeignete Kennzahlen zur Beschreibung

$$D \doteq MLt^{-2}, \quad w \doteq L, \quad h \doteq L, \quad \rho \doteq ML^{-3}$$

$$\eta \doteq ML^{-1}t^{-1}, \quad \bar{v} \doteq Lt^{-1}$$

$$k = 6\,, \;\; r = 3$$

$\Rightarrow$ # der Kennzahlen $\mathrm{k} - \mathrm{r} = 3$

wiederkehrende Variable : $\rho, \overline{v}, w$

$$\pi_1 = D\, w^a\, \overline{v}^b \rho^c$$

$$M^0 L^0 t^0 \doteq MLt^{-2} L^a (Lt^{-1})^b (ML^{-3})^c$$

$$M \; : 0 = 1 + c$$
$$L \; : 0 = 1 + a + b - 3c$$
$$t \; : 0 = -2 - b$$

$$a = -2, \;\; b = -2, \;\; c = -1$$

$$\pi_1 = \frac{D}{w^2 \overline{v}^2 \rho}$$

$$\pi_2 = h w^a \overline{v}^b \rho^c$$

$$M^0 L^0 t^0 \doteq L\, L^a (Lt^{-1})^b (ML^{-3})^c$$

$$M \; : 0 = c$$
$$L \; : 0 = 1 + a + b - 3c$$
$$t \; : 0 = b$$

$$a = -1, b = 0, c = 0$$

$$\pi_2 = \frac{h}{w}$$

$$\pi_3 = \eta w^a \bar{v}^b \rho^c$$

$$M^0 L^0 t^0 \doteq M L^{-1} t^{-1} L^a (L t^{-1})^b (M L^{-3})^c$$

$$a = -1, b = -1, c = -1$$

$$\pi_3 = \frac{\eta}{w \bar{v} \rho}$$

$$\frac{D}{w^2 \bar{v}^2 \rho} = \phi\left(\frac{w}{h}, \frac{w \bar{v} \rho}{\eta} \right)$$

Methode der Differentialgleichungen

Beschreibung anhand der 2-dim. , inkompressiblen Strömung

Erhaltungsgleichungen :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho\, g + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Rand- und Anfangsbedingungen sind bekannt

Variablen des Problems : u, v, p, x, y, t

Referenzgrößen :

$$u_\infty\,,\,p_\infty\,,l\,,\tau$$

dimensionslose Variable :

$$\bar{u}=\frac{u}{u_\infty},\quad \bar{v}=\frac{v}{v_\infty},\quad \bar{p}=\frac{p}{p_\infty}$$

$$\bar{x}=\frac{x}{l},\quad \bar{y}=\frac{y}{l},\quad \bar{t}=\frac{t}{\tau}$$

in DGL einsetzen : $\Longrightarrow$ z. Bsp.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(u_\infty \bar{u})}{\partial \bar{x}}\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}=\frac{u_\infty}{l}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{u_\infty}{l}\frac{\partial}{\partial \bar{x}}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}\right)\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}=\frac{u_\infty}{l^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\frac{\rho\, u_\infty}{\tau}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \frac{\rho\, u_\infty^2}{l}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{p_\infty}{l}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\eta\, u_\infty}{l^2}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\underbrace{\frac{\rho\, u_\infty}{\tau}}_{F_{Il}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \underbrace{\frac{\rho\, u_\infty^2}{l}}_{F_{Ic}}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\underbrace{\frac{p_\infty}{l}}_{F_p}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \underbrace{\rho\, g}_{F_G} + \underbrace{\frac{\eta\, u_\infty}{l^2}}_{F_v}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

F_{Il} : lokale Trägheitskraft / V

F_{Ic} : konvektive Trägheitskraft / V

F_p : Druckkraft / V

F_G : Gravitationskraft / V

F_V : Reibungskraft / V

<u>dimensionslose Gleichungen :</u> Division durch F_{Ic} (i. a.)

$\longrightarrow$

$$\frac{l}{\underline{\underline{\tau\ u_\infty}}}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{p_\infty}{\underline{\underline{\rho\ u_\infty^2}}}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\eta}{\underline{\underline{\rho\ u_\infty\ l}}}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\frac{l}{\tau\ u_\infty}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{p_\infty}{\rho\ u_\infty^2}\,\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} - \frac{g\ l}{\underline{\underline{u_\infty^2}}} + \frac{\eta}{\rho\ u_\infty\ l}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$=$ Ausdrücke sind die Kennzahlen

$$Sr = \frac{l}{\tau u_\infty}$$

: Strouhal Zahl

relevant für instationäre Vorgänge; Verhältnis der Zeiten l / u^∞ und τ

$Sr \rightarrow$: Strömung quasistationär

$$Eu = \frac{p_\infty}{\rho u_\infty^2}$$

: Euler Zahl

Verhältnis von Druck- und Trägheitskraft

$$Fr = \frac{u_\infty}{\sqrt{gl}}$$

: Froude Zahl

Verhältnis von Trägheits- und Schwerekräften;
relevant bei Flüssigkeitsströmungen mit freier Oberfläche

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho u_\infty l}{\eta}$$

: Reynolds Zahl

Verhältnis von Trägheits- und Reibungskraft weitere physikalisch bedeutende Kennzahlen :

$$Ma = \frac{u}{c}$$

: Mach Zahl

Verhältnis von Strögs. und Schallgeschwindigkeit

Ma < 0.3 → inkompressible Strömung

$$\mathrm{Pr} = \frac{\upsilon}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda}$$

: Prandtl Zahl

Verhältnis von durch Reibung erzeugter und abgeleiteter Wärme; a : Temp. leitfähigkeit; Stoffgröße, Pr = 0.72 (Luft)

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$$

: Nusselt Zahl

Verhältnis der übergehenden zur geleiteten Wärme; α : Wärmeübertragungszahl

$$St = \frac{Nu}{\mathrm{RePr}} = \frac{\alpha}{\rho c_p u_\infty}$$

: Stanton Zahl

Verhältnis der übergehenden zur konvekt. transportierten Wärme

$$Pe = \frac{\rho u_\infty l c_p}{\lambda} = \frac{u_\infty l}{\alpha}$$

: Péclet Zahl

Verhältnis der konvekt. zur geleiteten Wärme

$$Kn = \frac{\bar{l}}{l}$$

: Knudsen Zahl

Verhältnis der mittleren freien Weglänge zu einer charakterischen geometrischen Länge;

$Kn << 1$ Kontinuumsmechanik

$Kn >> 1$ kinetische Gastheorie

zur Methode der Differentialgleichungen :

Kennzahlen gleich $\Rightarrow$ Lösungen des DGLs stimmen überein

$\Rightarrow$ sogenannte **dynamische Ähnlichkeit**

$\Rightarrow$ einfaches Experiment für komplexe Strömungen

Dimensionsanalyse

physik. Intuition ist Voraussetzung, sonst Fehler

Methode der DGL

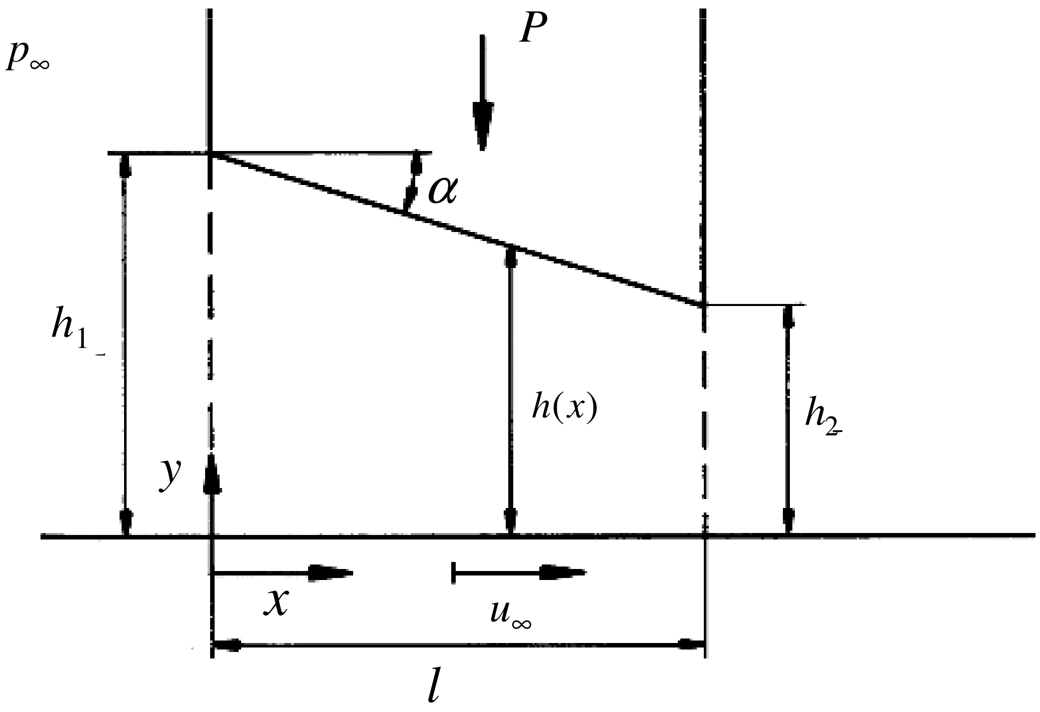
Ausgangsgleichungen liefern entscheidende Kennzahlen
abhängig von den Bezugsgrößen

Schleichende Strömungen

$$\frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} << 1$$

$$\frac{\text{Trägheit}}{\text{Reibung}} \sim \text{Geschwindigkeit} \Rightarrow \text{Bezeichnung : schleichend}$$

Vereinfachung der Erhaltungsgleichungen anhand dieses Beispiels der **Gleitlagerströmung**



stationär, inkomp. , $T = konst.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
$$\rho\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

Wahl der Bezugsgrößen derart, dass Terme $0\ (1)$ sind

$$\overline{u} = \frac{u}{u_\infty}, \quad \overline{v} = \frac{v}{u_\infty}\frac{l}{h}, \quad \overline{p} = \frac{p}{\rho u_\infty^2}, \quad \overline{x} = \frac{x}{l}, \quad \overline{y} = \frac{y}{h}$$

denn mit $\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u}$ und $\alpha = 0\left(\frac{h}{l}\right)$

$$\Rightarrow \qquad \frac{v}{u_\infty} = 0\left(\frac{h}{l}\right)$$

dimensionslose Erhaltungsgleichungen :

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$$\frac{\rho\, u_\infty^2}{l}\left(\bar{u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\rho\, u_\infty^2}{l}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\eta\, u_\infty}{h^2}\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}\frac{h^2}{l^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right]$$

$$\frac{\rho\, u_\infty^2\, h}{l^2}\left(\bar{u}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\rho\, u_\infty^2}{h}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \frac{\eta\, u_\infty}{h\, l}\left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}\frac{h^2}{l^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right]$$

Division von $\frac{\rho u_\infty^2}{l}$ und $\frac{\rho u_\infty^2}{h}$ liefert

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{l^2}{h^2}\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{h^2}{l^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} - \mathrm{Re}\frac{h^2}{l^2}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)\right]$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \frac{1}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} + \frac{h^2}{l^2}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} - \mathrm{Re}\frac{h^2}{l^2}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right)\right]$$

Es gilt :

$$\frac{\rho u \dfrac{\partial u}{\partial x}}{\eta \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}} \rightarrow \frac{\rho\, u_\infty^2 / l}{\eta\, u_\infty / h^2} = \mathrm{Re}\left(\frac{h}{l}\right)^2 << 1$$

da h/l $<< 1$, obwohl Re > 1 .

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{l^2}{h^2}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2} \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} &= \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2} \end{aligned}}$$

Es ist :

$$\frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{y}} << \frac{\partial\overline{p}}{\partial\overline{x}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{l^2}{h^2}\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial\overline{y}^2} >> \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2\overline{v}}{\partial\overline{y}^2}$$,so dass

$$\Rightarrow \quad p(x,y) = p(x)$$

$$\boxed{\frac{dp}{dx} = \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

Randbedingungen :

$$y = 0 : u = u_\infty, v = 0 \qquad y = h(x) : u = v = 0$$

$$x = 0 : p = p_\infty \qquad x = l : p = p_\infty$$

zweifache Integration :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}y + C_1$$

$$u = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2$$

RB $\Rightarrow$ $$C_2 = u_\infty$$

$$C_1 = -\frac{1}{h}\left[u_\infty + \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2}\right]$$

$\Rightarrow$ $$\boxed{u = u_\infty\left(1-\frac{y}{h}\right) - \frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2\eta}\frac{y}{h}\left(1-\frac{y}{h}\right)}$$

$p\,(x)$ mittels $\dot{V} = konst.$

$$\dot{V} = \int_0^{h(x)} u\,dy = konst.$$

$$\dot{V} = \frac{u_\infty h}{2} - \frac{h^3}{12\eta}\frac{dp}{dx}$$

$\Rightarrow$ $$\frac{dp}{dx} = 12\eta\left(\frac{u_\infty}{2h^2} - \frac{\dot{V}}{h^3}\right)$$

$$\boxed{p(x) = p_\infty + 6\eta u_\infty \int_0^x \frac{dx}{h^2(x)} - 12\eta\dot{V}\int_0^x \frac{dx}{h^3(x)}}$$

$x = l \qquad \Rightarrow$

$$\dot{V} = \frac{1}{2} u_\infty \frac{\int_0^l \frac{dx}{h^2(x)}}{\int_0^l \frac{dx}{h^3(x)}} = \frac{1}{2} u_\infty H$$

H : charakteristische Höhe

$$\longrightarrow \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_\infty}{h^2}\left(1 - \frac{H}{h}\right)$$

D. h. : $p\ (x)$ hat bei $h = H$ einen Extremwert !

Beispiel : h (x) linear

$$h(x) = \underbrace{h_1}_{\alpha} - \underbrace{\frac{h_1 - h_2}{l}}_{\beta} x = \alpha + \beta x$$

mit

$$\int \frac{dx}{(ax+b)^n} = \frac{-1}{a(n-1)(ax+b)^{n-1}} + C$$

folgt

$$\int_0^l \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^2} = \left[\frac{-1}{\alpha(\alpha x+\beta)}\right]_0^l = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right]$$

$$\int_0^l \frac{dx}{(\alpha x+\beta)^3} = \left[\frac{-1}{\alpha 2(\alpha x+\beta)^2}\right]_0^l = \frac{1}{2\alpha}\left[\frac{1}{h_1^2} - \frac{1}{h_2^2}\right]$$

$\Rightarrow$ $$H = \frac{2h_1h_2}{h_1+h_2}$$

$\Rightarrow$ $$\dot{V} = u_\infty \frac{h_1h_2}{h_1+h_2}$$

bzw.

$$\boxed{p(x) = p_\infty + \frac{6\eta u_\infty l}{h_1^2 - h_2^2} \cdot \frac{(h_1-h)(h-h_2)}{h^2}}$$

Gesamtdruckkraft P :

$$P = \int_0^l (p - p_\infty)dx$$

$$P=\int_0^l (p-p_\infty)dx=\int_0^l \frac{6\eta u_\infty l}{h_1^2-h_2^2}\left[\frac{h_1+h_2}{h}-\frac{h_1h_2}{h^2}-1\right]dx$$

$$=\frac{6\eta u_\infty l}{h_1^2-h_2^2}\left[-l\,\frac{h_1+h_2}{h_1-h_2}\ln(h(x))-l\,\frac{h_1h_2}{h_1-h_2}\frac{1}{h(x)}-x\right]_0^l$$

$$P=\frac{6\eta u_\infty l^2}{(h_1-h_2)^2}\left(\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)-2\frac{h_1-h_2}{h_1+h_2}\right)$$

Gesamtschubspannungskraft

$$F=-\int\eta\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}dx$$

$$\left.\frac{du}{dy}\right|_{y=0}=-\frac{u_\infty}{h}-\frac{h}{2\eta}\frac{dp}{dx}=-\frac{4u_\infty}{h}+\frac{6u_\infty h_1h_2}{h_1+h_2}\frac{1}{h^2}$$

$$\boxed{F=\frac{\eta u_\infty l}{h_1-h_2}\left[4\ln\left(\frac{h_1}{h_2}\right)-\frac{6(h_1-h_2)}{h_1+h_2}\right]}$$

$$\frac{F}{P} \sim \frac{h_2}{l} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{P} << 1 \ \textit{möglich}$$

Mit

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_\infty}{h^2}\left(1 - \frac{2h_1h_2}{h_1 + h_2}\frac{1}{h}\right)$$

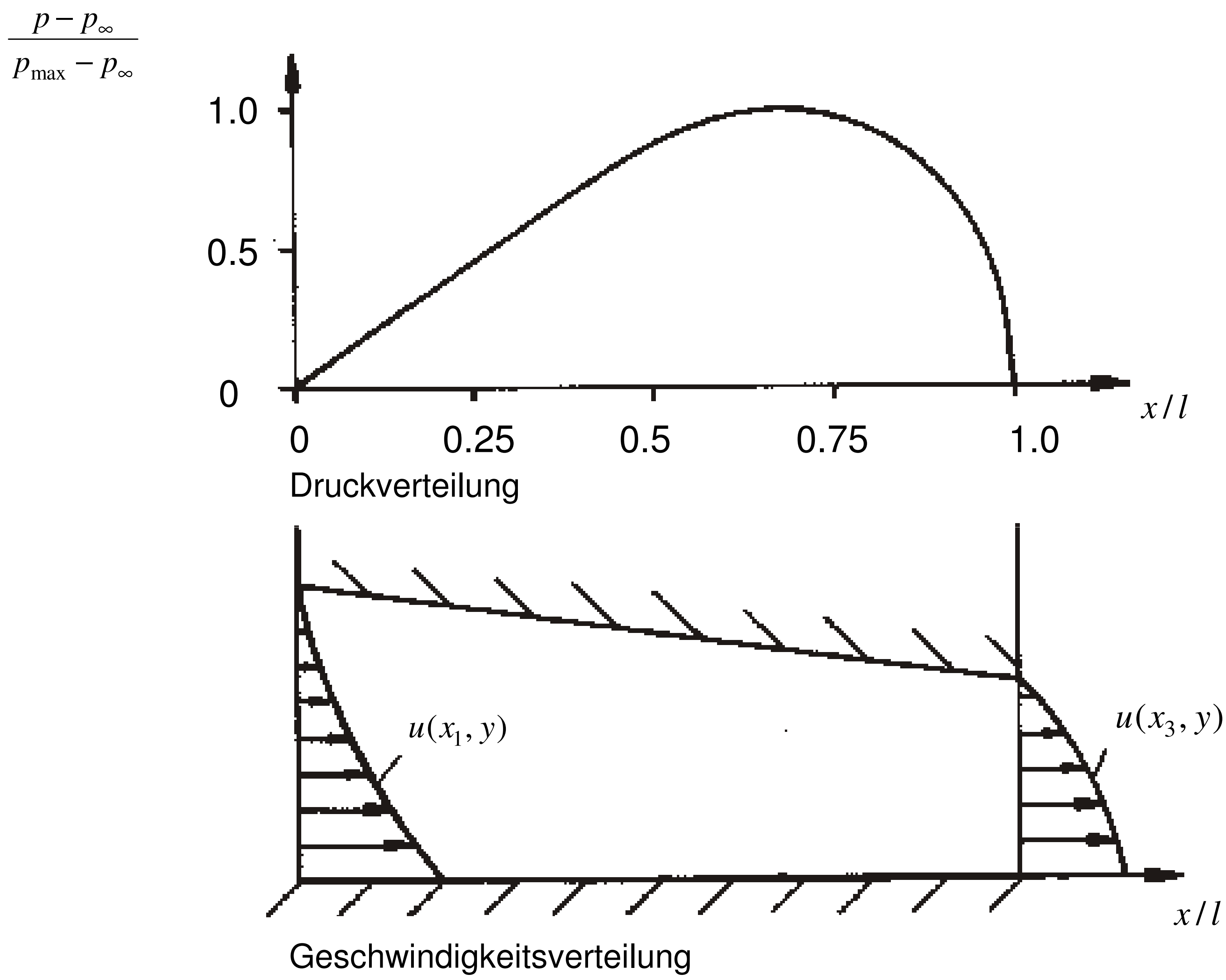
folgt

$$u(x, y) = u_\infty\left(1 - \frac{y}{h}\right)\left[1 - 3\frac{y}{h}\left(1 - \frac{2h_1h_2}{h_1 + h_2}\frac{1}{h}\right)\right]$$

bzw.

$$v = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\, dy$$

Ist $\dfrac{h_2}{h_1}$ bekannt, ergibt sich folgende $p(x)$- und $u(x, y)$- Verteilung



$\frac{p - p_\infty}{p_{max} - p_\infty}$
1.0
0.5
0
0
0.25
0.5
0.75
1.0
x/l
Druckverteilung
$u(x_1, y)$
$u(x_3, y)$
x/l
Geschwindigkeitsverteilung

Bemerkungen zu **schleichenden Strömungen:**

$$\frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} << 1$$

- $\vec{v}$ klein

oder

- η sehr groß

oder

- $\frac{h}{l}$ sehr klein

oder

- ρ sehr klein

• Bewegung einer Kugel 1851 (Stokes) , 1910 (Oseen)

• Strömung zwischen parallelen Platten mit $h / l << 1$ 1898 (Hele, Shaw)

• Praxis : Luft oder Wasser durch Sand → Grundwasserströmung

Wirbelströmungen





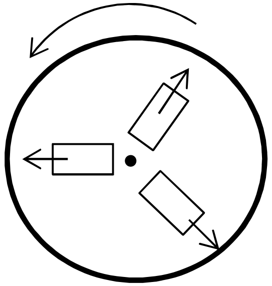


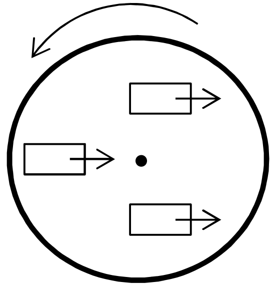



Wirbelströmungen

Strömungen

drehungsbehaftet | drehungsfrei





$\Downarrow$ | $\Downarrow$

Wirbelströmungen | Potentialströmungen

Begriffe der Wirbelströmungen

Dreh- oder Wirbelvektor $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$\vec{\omega}$ zeigt in Richtung der Drehachse des Fluidteilchens

Wirbellinien : Kurven verlaufen tangential zum Wirbelvektor

Richtung der Wirbellinie aus $\vec{\omega} \parallel d\vec{s}$

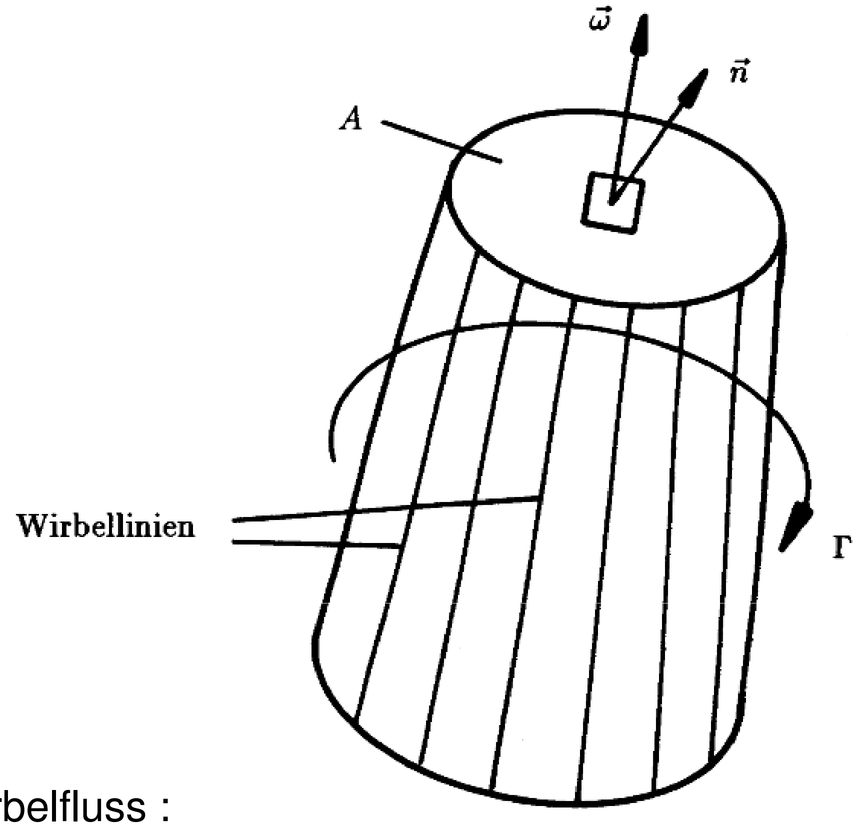
$$\Rightarrow \qquad (\omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}) \times (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = \vec{0}$$

bzw.

$$\underbrace{\underbrace{\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y}}_{\text{2D}} = \frac{dz}{\omega_z}}_{\text{3D}}$$

Wirbelfaden : Bündelung aller durch A gehenden Wirbellinien

Wirbelröhre : Wirbellinien der Mantelfläche des Wirbelfadens



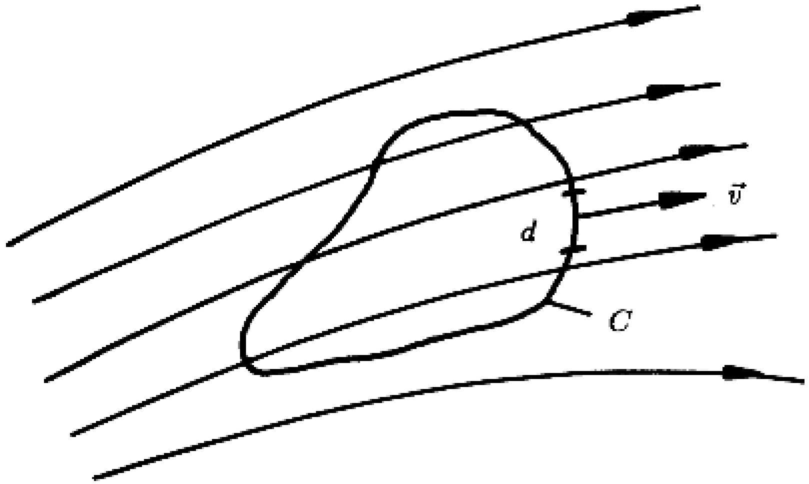
Wirbelstrom oder Wirbelfluss :

$$\Omega = \int_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} \, dA$$

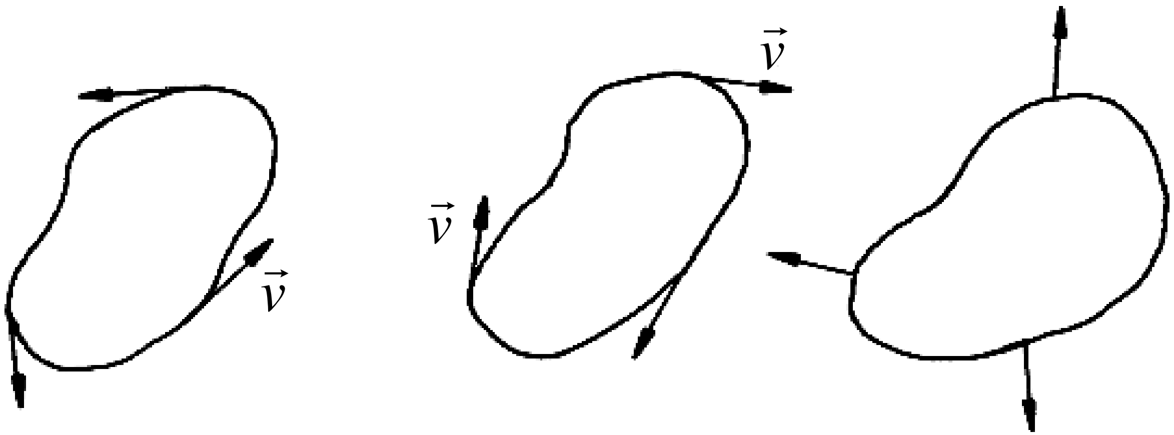
Zirkulation :

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_C v_t \left\| d\vec{r} \right\|$$

Γ : Summe der Tangentialkomponenten v_t auf C

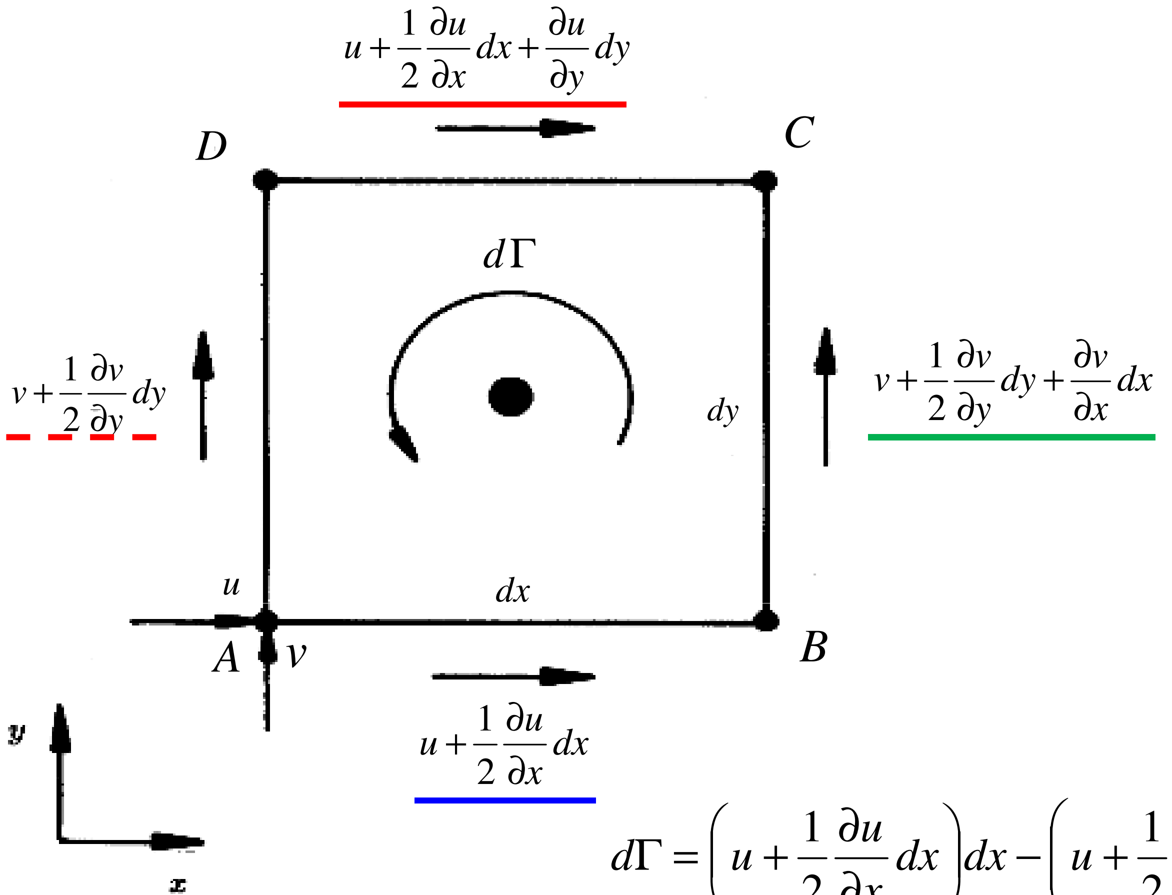


Annahme : C im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen



$\Gamma > 0$ $\Gamma < 0$ $\Gamma = 0$

Zusammenhang zwischen $\vec{\omega}$ und Γ



$$d\Gamma = \left(u + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dx - \left(u + \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)dx$$

$$+ \left(v + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}dx\right)dy - \left(v + \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)dy$$

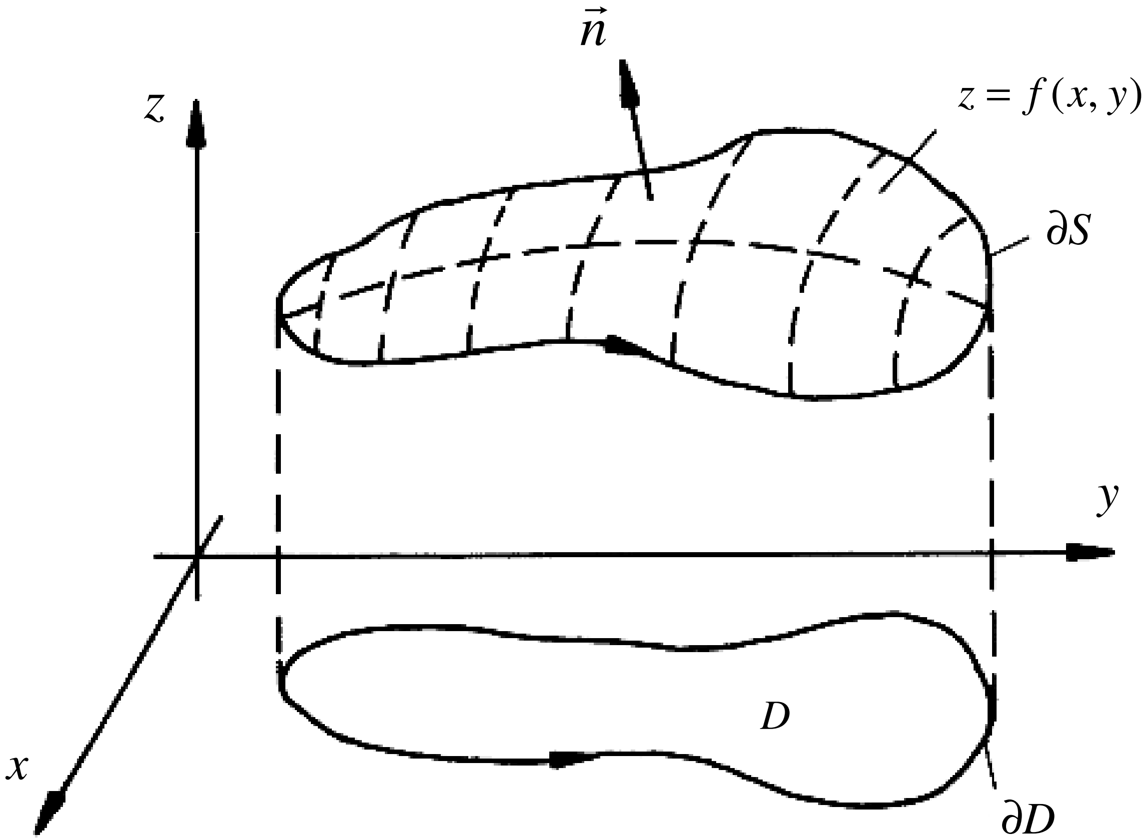
$$d\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy$$

$$d\Gamma = 2\omega_z dA$$

$$\Rightarrow \qquad \Gamma = \oint_C v_t \|d\vec{r}\| = 2\int_A \omega_z dA$$

Zusammenhang Oberflächenintegral und Linienintegral → Stokessches Theorem

$$\int_{\partial S} \vec{\Phi}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{\Phi}) \cdot \vec{n} dA = \iint_S rot\vec{\Phi} \cdot \vec{n} dA$$



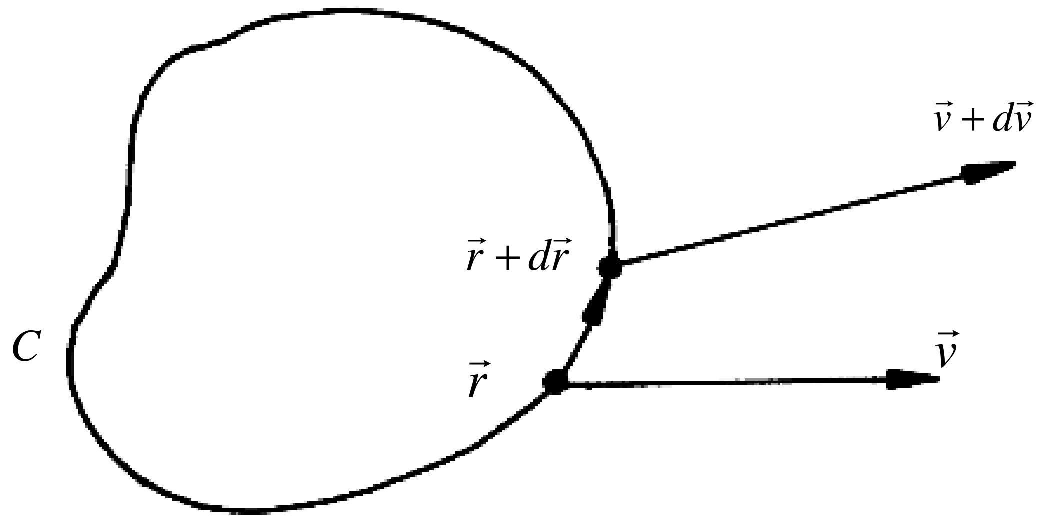
Es sei $\vec{\Phi} = \vec{v}$ und $\vec{\nabla} \times \vec{\Phi} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = rot\vec{v} = 2\vec{\omega}$

bzw.

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{n} dA = \int_A rot\vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

D. h. : Die Zirkulation entlang der Randkurve einer beliebigen räumlichen Fläche ist gleich dem doppelten Wirbelfluss durch die zugehörige Projektionsfläche

$\frac{d\Gamma}{dt}$: ? in reibungsfreier, barotroper Strömung $(\rho = f(p))$



$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt}\oint_C \vec{v}\cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} + \oint_C \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}\,d\vec{r}$$

<u>reibungsfreie</u> Strömung $(\eta / \rho = 0)$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p$$ Euler Gleichungen

$$\rightarrow \oint_C \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{g}\cdot d\vec{r} - \oint_C \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{g}\cdot d\vec{r} - \oint_C \frac{dp}{\rho}$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \underbrace{\oint_C \vec{g}\cdot d\vec{r}}_{\mathrm{I}} - \underbrace{\oint_C \frac{dp}{\rho}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{\oint_C \vec{v}\cdot\frac{d}{dt}(d\vec{r})}_{\mathrm{III}}$$

I : Satz : Jedes **konservative** Vektorfeld ist als Gradient zu schreiben

$$\vec{g} = \vec{\nabla} f$$

$$\oint_C \vec{g} \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \oint_C df = 0$$

II : Annahme : Strömung ist barotrop

$\rightarrow \rho = \rho(p)$ Definition : $\dfrac{1}{\rho} = \dfrac{dF}{dp} = f(p)$

$$\oint_C \frac{dp}{\rho} = \oint_C \frac{dF}{dp} dp = 0$$

III :

$$d\vec{v} = \frac{d}{dt}(d\vec{r})$$

$$\oint_C \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}(d\vec{r}) = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{v} = \oint d\left(\frac{\vec{v}^{\,2}}{2}\right) = 0$$

$$\boxed{\frac{d\Gamma}{dt} = 0}$$ reibungsfreie, barotrope Strömung mit konserv. Volumenkräften

Satz von Thomson

$$\Gamma(t=0) = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma(t+\Delta t) = 0$$

Strömung drehungsfrei (Stokes)

Achtung : Gültig für die Kurve C

Wirbeltransportgleichung

Für $\rho = konst.$, $\eta = konst.$ wird eine Gleichung für $\vec{\omega}$ abgeleitet.

Wirbelerhaltungssatz

Identität : $div(rot\,\vec{\Phi}) = 0$

Mit $\vec{\omega} = \frac{1}{2} rot\,\vec{v}$

$$\boxed{div\,\vec{\omega} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = 0}$$

Zusammenhang zwischen $\vec{v}$ und $\vec{\omega}$ führt auf $\vec{\omega}$ - Gleichung aus

rot (Impulserhaltung).

Da *rot (grad h) = 0* gilt

rot (grad f) = 0 Grav.terme

rot (grad p) = 0 Druckterme

$$\Rightarrow \quad \vec{\nabla}\times \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = \vec{\nabla} f - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p + \nu\, \nabla^2 \vec{v}\right]$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{v} = \vec{\omega}$$

Identität :

$$(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = (\vec{\nabla}\times\vec{v})\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \vec{\omega}\times\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{\nabla} q^2$$

$$q^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

$$\vec{\nabla}\times\left[\frac{1}{2}\vec{\nabla}(u^2 + v^2 + w^2\right] = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = \nu \nabla^2 \vec{\omega}$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \vec{\omega}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} - \vec{v}\vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \underbrace{(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}}_{\text{(a)}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \vec{\omega}}_{\text{(b)}}}$$

Wirbeltransportgleichung

(a) : Änderung der Wirbelstärke durch Streckung und Neigung der Wirbellinien

(b) : Änderung von $\vec{\omega}$ durch Diffusion

ebene, drehsymmetrische Strömung

$$\vec{\omega} \perp \vec{v} \Rightarrow (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = 0$$

$$\boxed{\frac{d\omega}{dt} = \nu \nabla^2 \omega}$$

Lösung zum Beispiel : $\omega = konst.$

reibungsfreie Strömung

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial t} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

In reibungsloser Strömung (mit $\rho = konst.$, $\eta = konst.$) wird Drehung weder erzeugt noch vernichtet.

stationäre Strömung

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

Die **Wirbeltransportgleichung** ist eine modifizierte Form der

Navier-Stokes Gleichung :

$\Rightarrow \qquad \vec{\omega} = \vec{0}$ ist auch Lösung der Impulserhaltung.

$\vec{\omega} = \vec{0} \quad \Rightarrow$ **Potentialströmungen**

Potentialströmungen



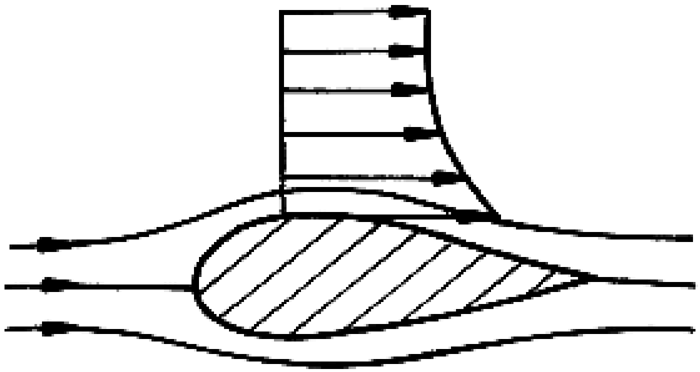




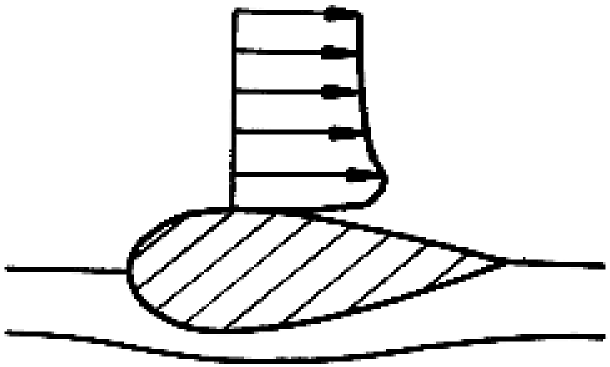
Potentialströmungen

$\rho = konst.$, reibungsfrei, 2D

$$\rightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$$



idealisierte Strömung $\nu = 0$



realistische Strömung

Reibungseffekte nur in dünnen Wandschichten interessant.

$\Rightarrow$ Aufteilung :

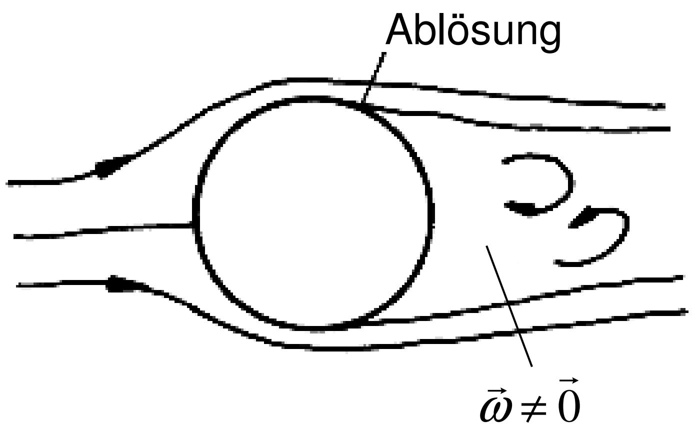
- Außenbereich

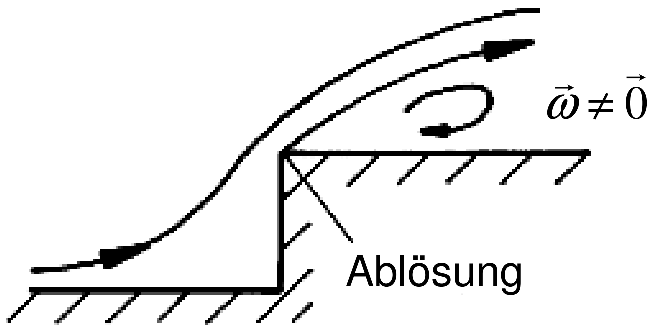
Strömung wird reibungsfrei und drehungsfrei angenommen.

$\Rightarrow$ Analyse mittels d. Th. drehungsfr. Strömung

- Innenbereich

Reibung führt u. a. zur Diffusion der Wirbelstärke





Potentialfunktion, Stromfunktion, Laplace Gleichung

$\vec{\omega} = rot\,\vec{v} = \vec{0}$ Lösung der Impulsgleichung

Identität :

$$rot\,(grad\ f) = \vec{0}$$

$$\vec{v} = grad\,\Phi$$

$$\vec{\omega} = rot\ (grad\,\Phi) = 0$$

$$div\,\vec{v} = 0 \xrightarrow{Bestgsglg.\ von\ \Phi} div\,(grad\,\Phi) = 0$$

$$\boxed{\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0}$$

Laplace Gleichung der Potentialfunktion

da $\quad u = \dfrac{\partial\phi}{\partial x} \qquad v = \dfrac{\partial\phi}{\partial y}$

Definition von ψ :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

- Kontinuitätsgleichung erfüllt

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

- Bestimmung von ψ durch $\vec{\omega} = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{(eben)}$$

$$\boxed{\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0}$$

Laplace Gleichung der Stromfunktion

Vergleich von ϕ und ψ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Cauchy- Riemann DGL

$\phi\,(x, y) = konst.$ → Potentiallinien

$\psi\,(x, y) = konst.$ → Stromlinien

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = u dx + v dy = 0 \qquad (1)$$

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy = 0 \qquad (2)$$

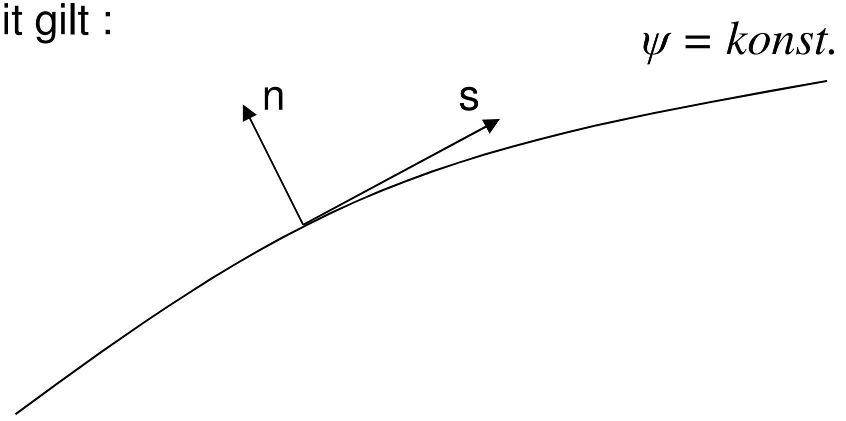
(1) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi} = -\frac{u}{v}$ (2) $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi} = \frac{v}{u}$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\psi} = -\left[\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\phi}\right]^{-1} \qquad \Rightarrow \quad \psi \perp \phi$$

Cauchy-Riemann : $\vec{\nabla}\phi \cdot \vec{\nabla}\psi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$

Stromlinien können sich nicht schneiden → keine Komp. normal zu $\psi = konst.$

Somit gilt :



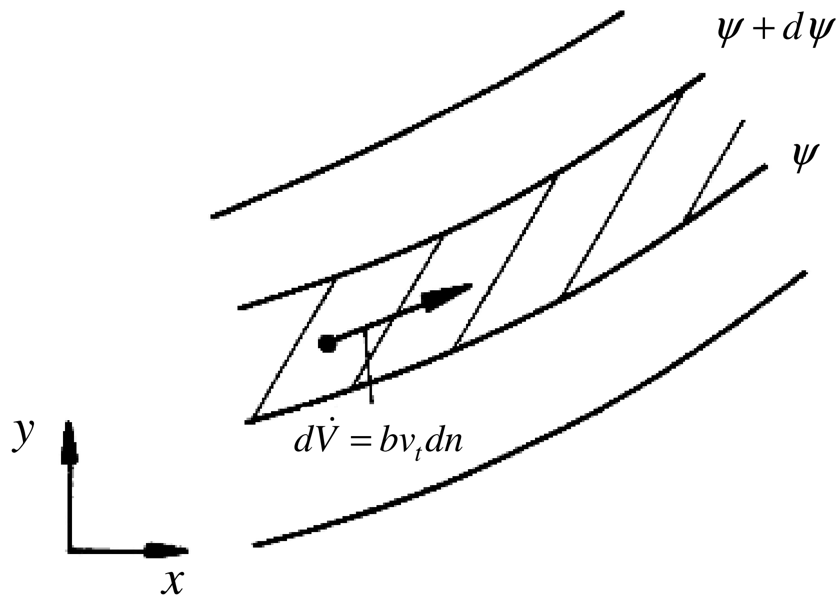
$$v_n = \frac{\partial \phi}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s} = 0$$

$$v_t = \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n} \neq 0$$

kinematische Randbedingung

$\longrightarrow$ Fluidelemente **gleiten** auf der Kontur

<u>Berechnung des Volumenstroms über ψ</u>



$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} dn = v_t dn$$

$$d\dot{V} = b\, d\psi$$

Berechnung der Druckverteilung

ϕ *oder* ψ bekannt $\rightarrow u, v$

Impulserhaltung für reibungsfreie Strömungen (Euler Gleichung)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underline{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}} = \underline{\vec{b}} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla} p$$

Identität : (unter Berücksichtigung der Drehungsfreiheit)

$$\underline{(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}} = \vec{\nabla}\frac{\vec{v}^2}{2} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) = \vec{\nabla}\frac{\vec{v}^2}{2}$$

Potential :

$$\underline{\vec{b}} = -\vec{\nabla}(gz)$$

stationär :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$$

einsetzen und integrieren :

$$p + \frac{\rho}{2}\vec{v}^2 + \rho g z = konst. \quad \text{(Bernoulli)}$$

$\Longrightarrow$ Gleichungen sind linear → Superposition möglich

Elementarströmungen mit $\phi_1,....\phi_n$ werden zu neuen Strömungen zusammengesetzt.

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i$$

$\phi_1, \phi_2, ...\phi_n$ bekannt, a_i angepasst an Problem → ϕ

Komplexe Potentialfunktion

kurz : Theorie der komplexen Funktionen

wichtig für die Analyse der Laplaceschen Differentialgleichung

Definition :

komplexe Geschwindigkeit : $w = u + iv$

konjug. komplexe Geschwindigkeit : $\overline{w} = u - iv$

die Funktion $\boldsymbol{F(z) = \int \overline{w} dz}$ ist die **komplexe Potentialfunktion**

F(z) erfüllt die Laplace Gleichung

$$
\begin{aligned}
F(z) &= \int \overline{w} dz = \int (udx + vdy) + i \int (udy - vdx) \\
&= \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \right) + i \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \right) \\
&= \int d\phi + i \int d\psi = \phi(x, y) + i \psi(x, y)
\end{aligned}
$$

Laplace Gleichung :

$$
\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dF}{dz} \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{d^2 F}{dz^2}
$$

$$
\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{dF}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{dF}{dz} \quad , \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{d^2 F}{dz^2} i^2
$$

$$\frac{d^2F}{dz^2} - \frac{d^2F}{dz^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ $F(z)$ beschreibt Potentialströmung

$F(z)$: analytische Funktion

Singularität :

$F(z)$ oder $\dfrac{dF}{dz}$ → 0 oder → ∞

Cauchy-Riemann nicht erfüllt

$\Rightarrow$ $\phi = konst.$ und $\psi = konst.$ nicht orthogonal !

Bsp. :

$F(z) = \ln(z)$ analytisch außer in $z = 0$!

$F(z) = \dfrac{1}{z}$ analytisch außer in $z = 0$!

Superpositionsprinzip auch für $F(z)$:

$F(z)$ bekannt $\Rightarrow$ $\overline{w} = u - iv = \dfrac{dF}{dz}$

$\Rightarrow$ Geschwindigkeitsverteilung $\Rightarrow$ Druckverteilung

Vorgehensweise (hier) : Vorgabe von $F(z)$

Beispiele für die komplexe Potentialfunktion

2D, inkompressibel

Winkel- und Eckenströmung :

$$F(z) = \frac{a}{n} z^n = \frac{a}{n}(x+iy)^n = \frac{a}{n}(re^{i\varphi})^n$$

$$= \frac{a}{n} r^n (\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

$$n \in \mathrm{R},\ a = a_r \pm i a_i$$

zunächst : $a \in R$

$$\phi = \frac{a}{n} r^n \cos(n\varphi)$$

$$\psi = \frac{a}{n} r^n \sin(n\varphi)$$

Stromlinien : $\psi = konst.$

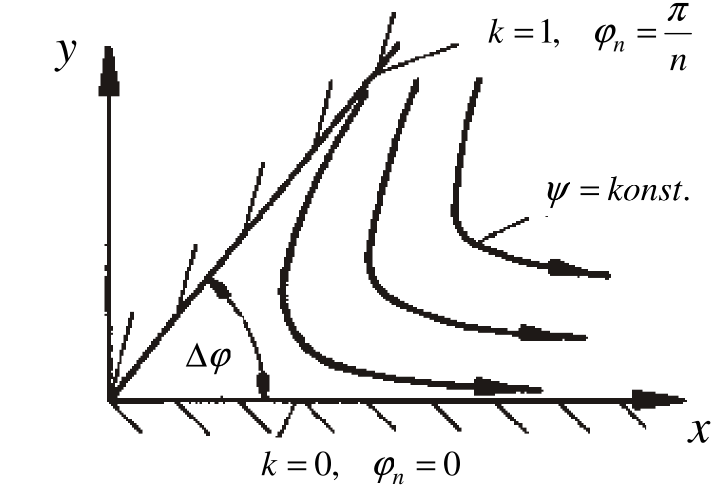
$$\longrightarrow \quad r^n \sin(n\varphi) = konst. = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin(n\varphi) = 0$$

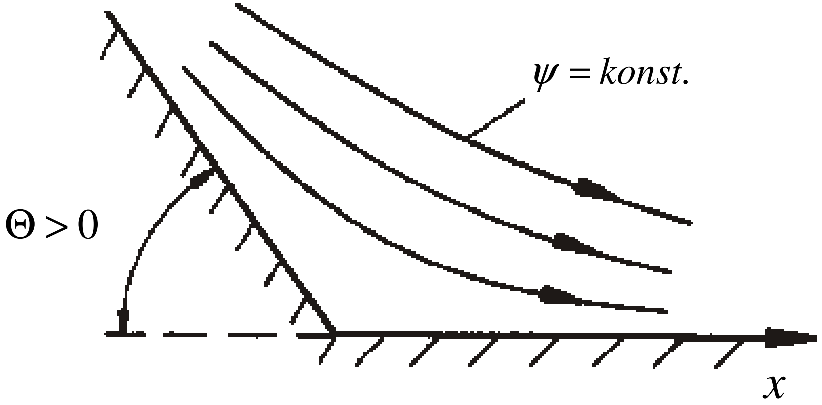
$$\varphi = \varphi_n = K\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad K = 0,1,2,...$$

$$\left.\begin{array}{l} K = 0 : \varphi = 0 \\ K = 1 : \varphi = \frac{\pi}{n} \end{array}\right\} \Delta\varphi = \frac{\pi}{n}$$

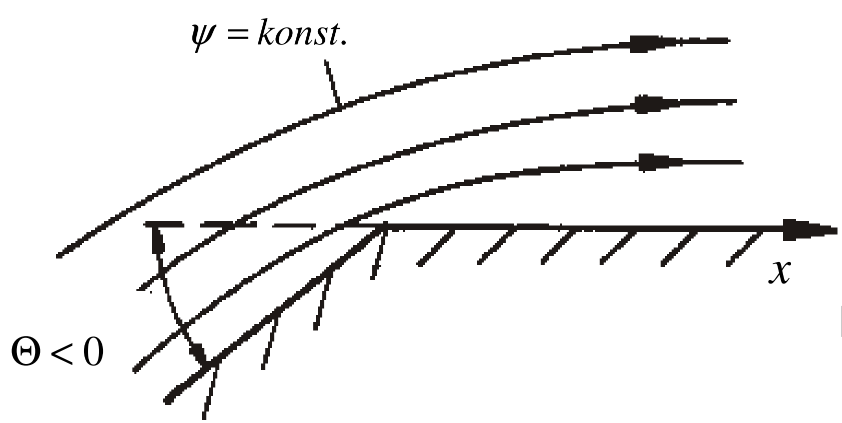
$n \geq 2:$	$\Delta\varphi \leq \frac{\pi}{2}$	(spitzer Winkel)
$2 > n > 1:$	$\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi < \pi$	(konkave Ecke)
$1 > n > \frac{1}{2}:$	$\pi < \Delta\varphi < 2\pi$	(konvexe Ecke)



spitzer Winkel : $n \geq 2$



konkave Ecke : $2 > n > 1$



wobei

$$\Theta = \pi - \Delta\varphi = (n-1)\frac{\pi}{n}$$

konvexe Ecke : $1 > n > 1/2$

$$\overline{w}(z) = \frac{dF}{dz} = az^{n-1} = u - iv \; ; \quad mit \quad z = re^{i\varphi}$$

bzw.

$$\|\vec{v}\| = |a| r^{n-1}$$

<u>konkave Ecke (n > 1) :</u> $\| \vec{v} \| \to 0$ sofern $r \to 0$

<u>konvexe Ecke (n < 1) :</u> $\| \vec{v} \| \to \infty$ sofern $r \to 0$

Stromlinien anhand von

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\tan[(n-1)\varphi]$$

Parallelströmung

$$n=1 \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi=\pi$$

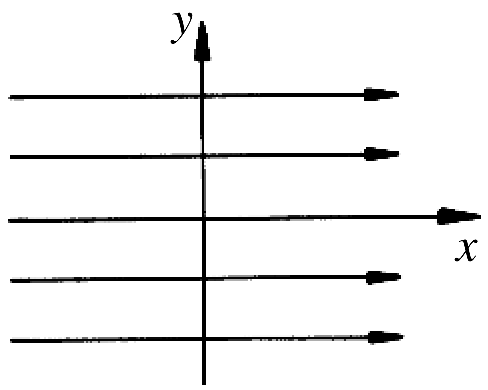
$$F(z)=az=(a_r-ia_i)(x+iy)$$

$$\frac{dF(z)}{dz}=\overline{w}=a=a_r-ia_i=u-iv$$

$$\phi=a_r x+a_i y \quad , \quad \psi=a_r y-a_i x$$

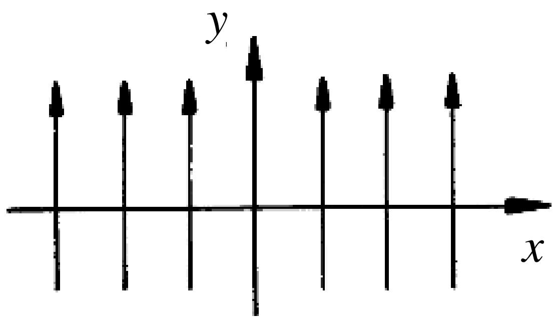
$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=a_r$$

$$v=\frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=a_i$$



$a_r>0$

$a_i=0$



$a_r=0$

$a_i>0$

Ebene Staupunktströmung

$$n = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$F(z) = \frac{a}{2} z^2 = \phi + i\psi$$

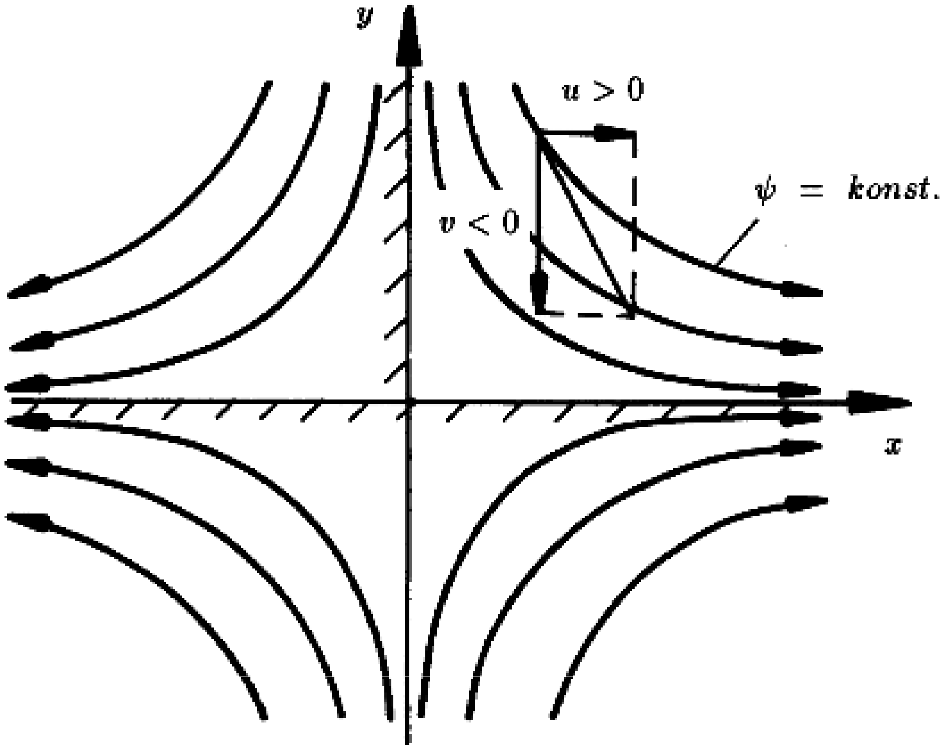
$\psi = axy$ a ist Element der reellen Zahlen

$$\phi = \frac{a}{2}(x^2 - y^2)$$

$\psi = konst.$: $y \sim \frac{1}{x}$ $\longrightarrow$ gleichseitige Hyperbel

$$\overline{w}(z) = \frac{dF}{dz} = az = ax + iay = u - iv$$

$$\left.\begin{aligned} u &= ax \\ v &= -ay \end{aligned}\right\} \frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{y}{x}$$



Isotachen : $\|\vec{v}\| = |a|\, r$

Isobaren : $p(r) = p_0 - \frac{\rho}{2} a^2 r^2$

Quelle oder Senke

$$F(z) = a \ln z = \frac{E}{2\pi} \ln z = \frac{E}{2\pi} \ln(re^{i\varphi})$$

$$\Rightarrow \quad \phi = \frac{E}{2\pi} \ln r$$

$$\psi = \frac{E}{2\pi} \varphi = a\varphi$$

$\phi = konst.$: Kreise um den Ursprung

$\psi = konst.$: Strahlen durch den Ursprung

$$\overline{w}(z) = \frac{dF}{dz} = \frac{E}{2\pi z} = u - iv$$

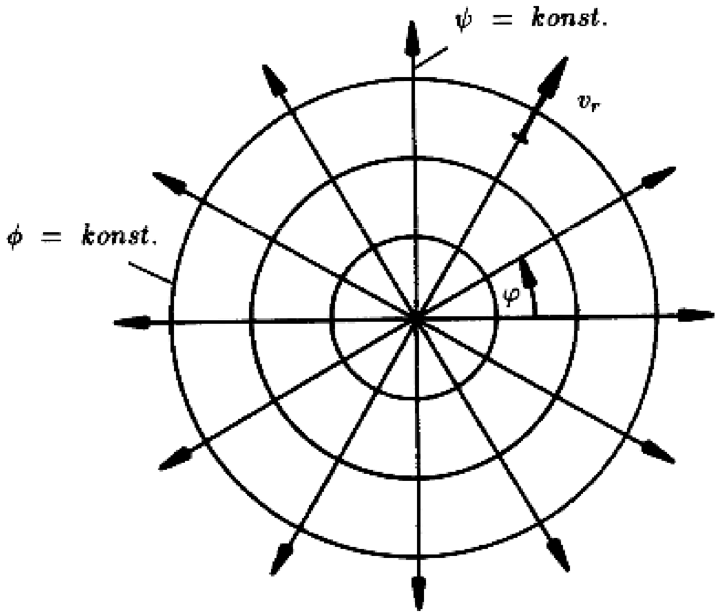
$$u = \frac{Ex}{2\pi(x^2 + y^2)} \qquad v = \frac{Ey}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

geeigneter in Polarkoordinaten

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{E}{2\pi r} \qquad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0$$

$E > 0$: Quellströmung

$E < 0$: Senkenströmung



$$\dot{V} = b[\psi(\varphi + 2\pi) - \psi(\varphi)]$$
$$= b[a(\varphi + 2\pi) - a\varphi] = 2\pi ab = Eb \quad \Rightarrow \quad a = E\,/\,2\pi$$ bzw. $E = \dot{V}\,/\,b$

$$v_r \sim \frac{1}{r}: \quad r \to 0 \quad \Rightarrow \quad v_r \to \infty$$ (Singular.)

Potentialwirbel

Vertauschen von ϕ und ψ

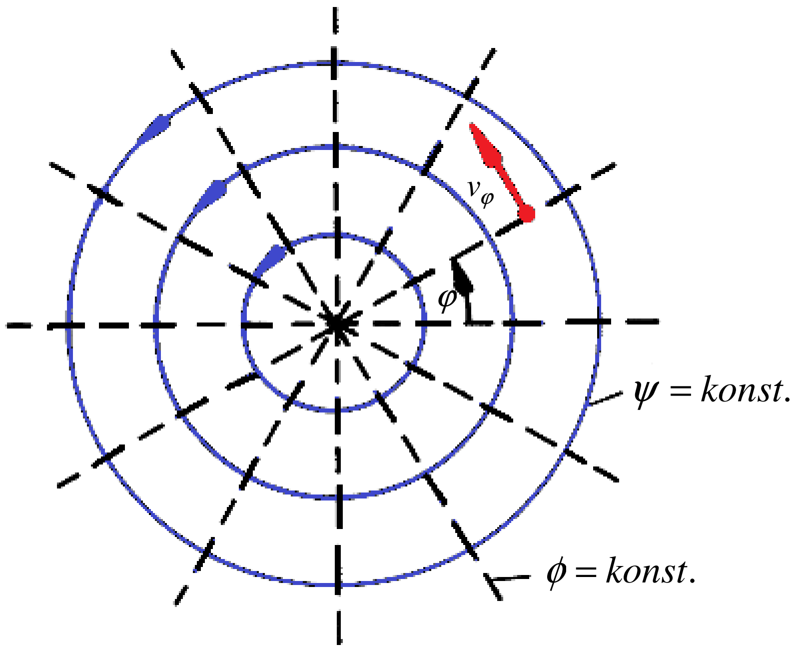
$$\Rightarrow \quad \phi = c\varphi$$

$$\psi = -c \ln r$$

$$F(z) = \phi + i\psi = -ic \ln z$$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = 0$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{c}{r}$$



c : ?

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

$$r = R: \qquad \Gamma = \frac{c}{R} 2\pi R = 2\pi c$$

$$\Rightarrow \quad F(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z, \phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\varphi, \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

Wirbelkomponente in Polarkoordinaten

$$\omega_z = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi) - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right)$$

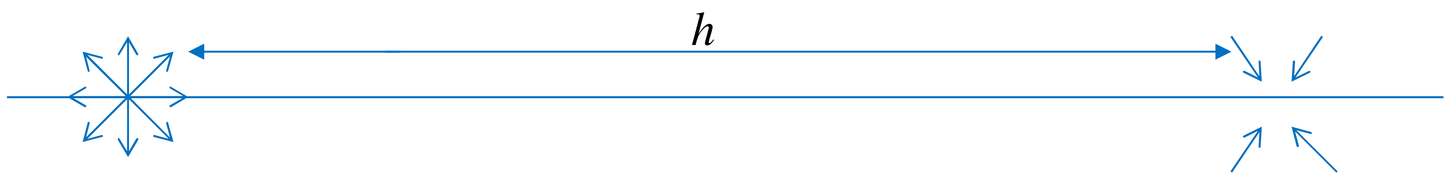
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = 0, \quad rv_\varphi = c = \frac{\Gamma}{2\pi} = konst. \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial (rv_\varphi)}{\partial r} = 0 \qquad [r \neq 0]$$

$$\omega_z = 0 \quad f\ddot{u}r \quad r \neq 0$$

$r = 0? \quad \omega_z \neq 0, \quad denn \quad \Gamma \neq 0$ bedingt Drehung (Stokes)

$\Rightarrow$ bei r = 0 existiert eine Wirbellinie oder Stabwirbel $\perp$ zur Strömungsebene

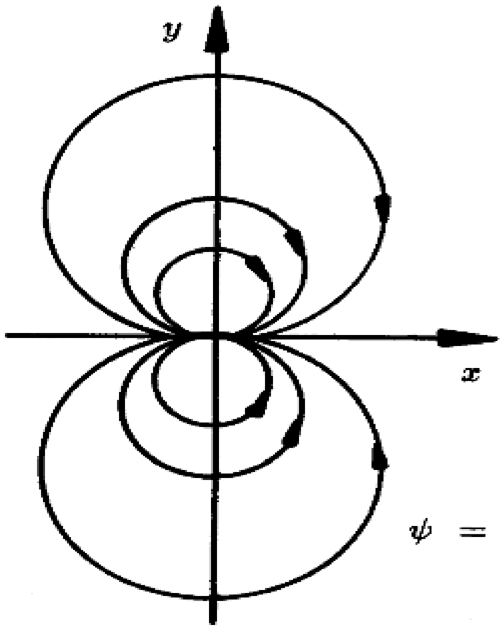
Dipolströmung



$$E_{Quelle} = E_{Senke} = E$$

Bedingung : $E \sim \frac{1}{h}$ bzw. $M = Eh = konst.$ für $h \to 0$

$\Rightarrow$ Dipolströmung mit Dipolmoment M und Dipolachse x.



$$F(z)=\frac{M}{2\pi}\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\ln(z+h)-\ln z}{h}}_{\frac{d\ln(z)}{dz}=\frac{1}{z}}=\frac{M}{2\pi z}=\frac{M}{2\pi}\frac{x-iy}{r^2}=\phi+i\varphi$$

$$\phi=\frac{M}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\psi=-\frac{M}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

ψ - Gleichung liefert

$$x^2+\left(y+\frac{M}{4\pi\psi}\right)^2=\left(\frac{M}{4\pi\psi}\right)^2$$

$\Rightarrow$ Stromlinien : Kreis mit Zentren $\left(0,-\frac{M}{4\pi\psi}\right)$ und Radien $M/(4\pi\psi)$

(siehe Skizze)

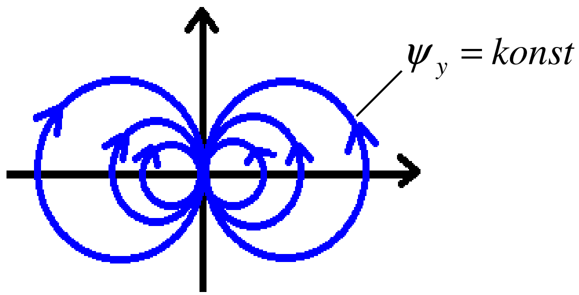
$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$\Longrightarrow$ Multiplikation mit i $\Longrightarrow$ Rotation um $\pi/2$.

D. h. iM statt M

$\Longrightarrow$
$$\psi_y = \frac{Mx}{2\pi(x^2+y^2)}$$

bzw.
$$\left(x - \frac{M}{4\pi\psi_y}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{4\pi\psi_y}\right)^2$$



Aus $F(z) = \dfrac{M}{2\pi z}$ folgt :

$$\overline{w}(z) = \frac{dF}{dz} = -\frac{M}{2\pi z^2} = u - iv$$

$$u = -\frac{M}{2\pi r^2}\cos(2\varphi) = -\frac{M}{2\pi}\frac{x^2 - y^2}{r^4}$$

$$v = -\frac{M}{2\pi r^2}\sin(2\varphi) = -\frac{M}{2\pi}\frac{2xy}{r^4}$$

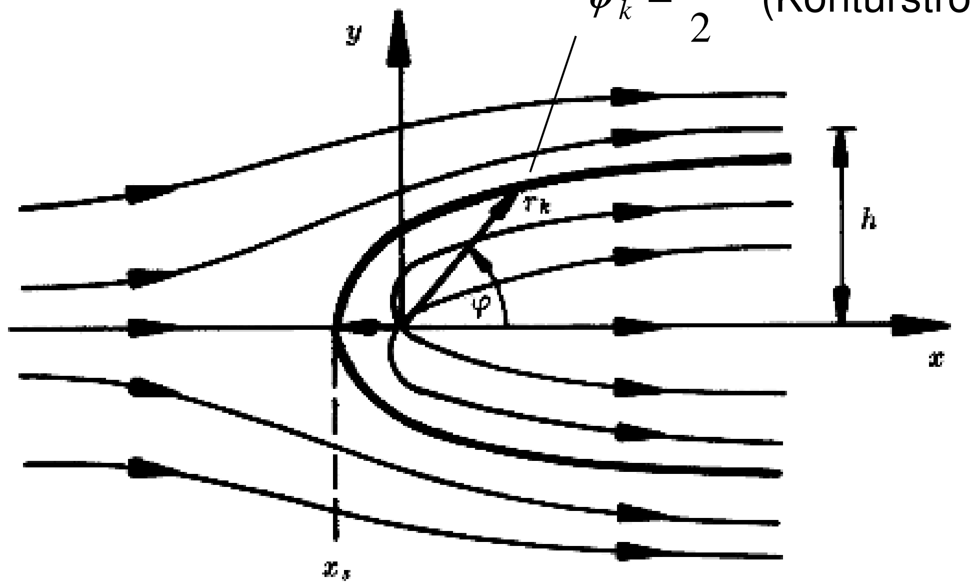
$\|\vec{v}\| \sim 1/r^2 \longrightarrow$ Singularität bei $r = 0$

Halbkörper

Parallelströmung + Quellenströmung

$$F(z) = u_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln z$$

$\psi_k = \frac{E}{2}$ (Konturstromlinie)



$$\phi = u_\infty x + \frac{E}{2\pi}\ln r = u_\infty x + \frac{E}{4\pi}\ln(x^2 + y^2)$$

$$\psi = u_\infty y + \frac{E}{2\pi}\varphi$$

bzw. die Geschwindigkeitskomponenten :

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = u_\infty + \frac{E}{2\pi}\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{E}{2\pi}\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$\Longrightarrow$ Koordinaten des Staupunkts $\;(u = v = 0)$

$$v = 0: \qquad y_s = 0$$

$$u = 0: \qquad x_s = -\frac{E}{2\pi u_\infty}$$

Wandstromlinie : ?

$\psi_k = \psi_s$ (Wert von ψ im Staupunkt)

$$\varphi_s = \pi \qquad \Rightarrow \qquad \psi_s = \frac{E}{2}$$

$$\psi_k = u_\infty r_k \sin\varphi + \frac{E}{2\pi}\varphi = \frac{E}{2}$$

$$\Rightarrow \quad r_k = \frac{E}{2\pi u_\infty}\frac{\pi - \varphi}{\sin\varphi}$$

max. (Halb) breite h bei $x \rightarrow \infty$:

$$x \rightarrow \infty : \qquad y = h \qquad , \qquad \varphi = 0$$

$$\psi_\infty = \psi_k$$

$$\psi_\infty = u_\infty h = \psi_k = \frac{E}{2} \qquad \Rightarrow \qquad h = \frac{E}{2u_\infty}$$

Druckverteilung : ?

$$p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)$$

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{\rho}{2}u_\infty^2} = 1 - \left[\left(\frac{u}{u_\infty}\right)^2 + \left(\frac{v}{u_\infty}\right)^2\right]$$

$$c_p = 1 - \left[\left(1 + \frac{h}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \right)^2 + \left(\frac{h}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \right)^2 \right]$$

Druckverteilung auf der Kontur :

$$u_k = u_\infty + \frac{E}{2\pi} \frac{\cos\varphi}{r_k} = u_\infty + \frac{u_\infty}{\pi - \varphi} \sin\varphi \cos\varphi$$

$$v_k = \frac{E}{2\pi} \frac{\sin\varphi}{r_k} = \frac{u_\infty}{\pi - \varphi} \sin\varphi \sin\varphi$$

$$c_{pk} = 1 - \left[\left(1 + \frac{\cos\varphi \sin\varphi}{\pi - \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\sin^2\varphi}{\pi - \varphi} \right)^2 \right]$$

Additionstheoreme :

$$\sin(2\varphi) = 2\cos\varphi \sin\varphi$$

$$\sin(2(\pi - \varphi)) = -\sin(2\varphi)$$

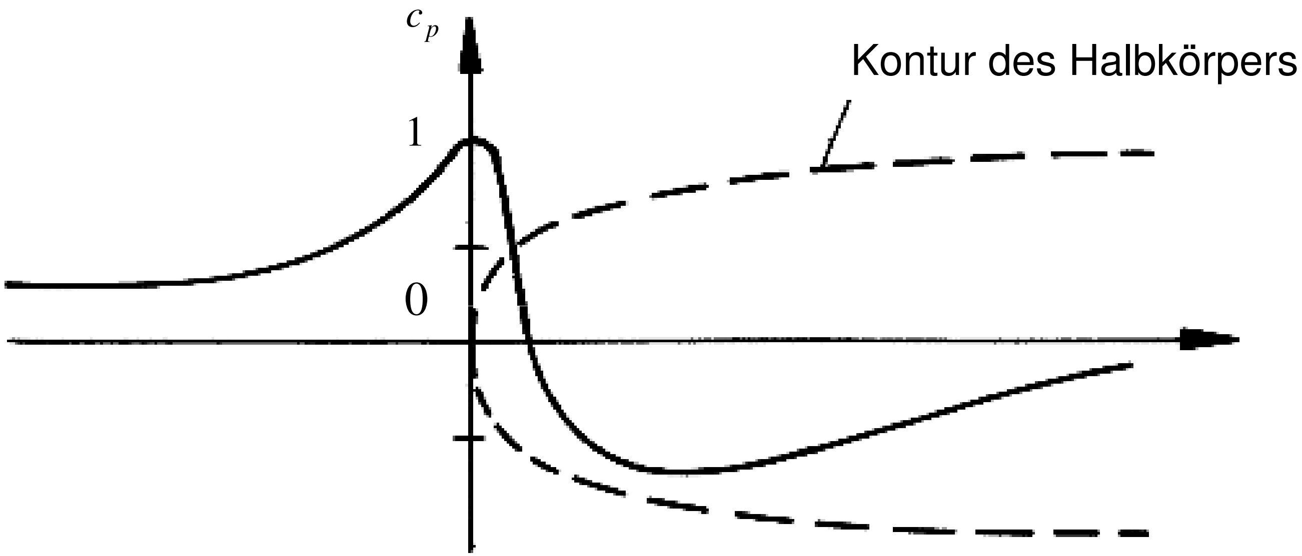
$$c_{pk} = \frac{\sin(2\overline{\varphi})}{\overline{\varphi}} - \left(\frac{\sin\overline{\varphi}}{\overline{\varphi}} \right)^2$$

Staupunkt : $\varphi = \pi$ bzw. $\overline{\varphi} = 0$

$c_p = 1$

$$c_p(\varphi = \frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi^2}$$

$c_p \to 0$ für $x \to \infty$ bzw. $\varphi \to 0$



Kreiszylinder

Parallelströmung + Quellenströmung + Senkenströmung

$$E_Q = E_s$$

$\Rightarrow$ geschlossene Wandstromlinie

Abstand von Quelle + Senke → 0

$\Rightarrow$ Dipolströmung

⟶ Parallelströmung + Dipolströmung

$$F(z) = u_\infty z + \frac{M}{2\pi z}$$

$$\phi = u_\infty x + \frac{M}{2\pi r^2} x = \left(u_\infty + \frac{M}{2\pi r^2} \right) r \cos\varphi$$

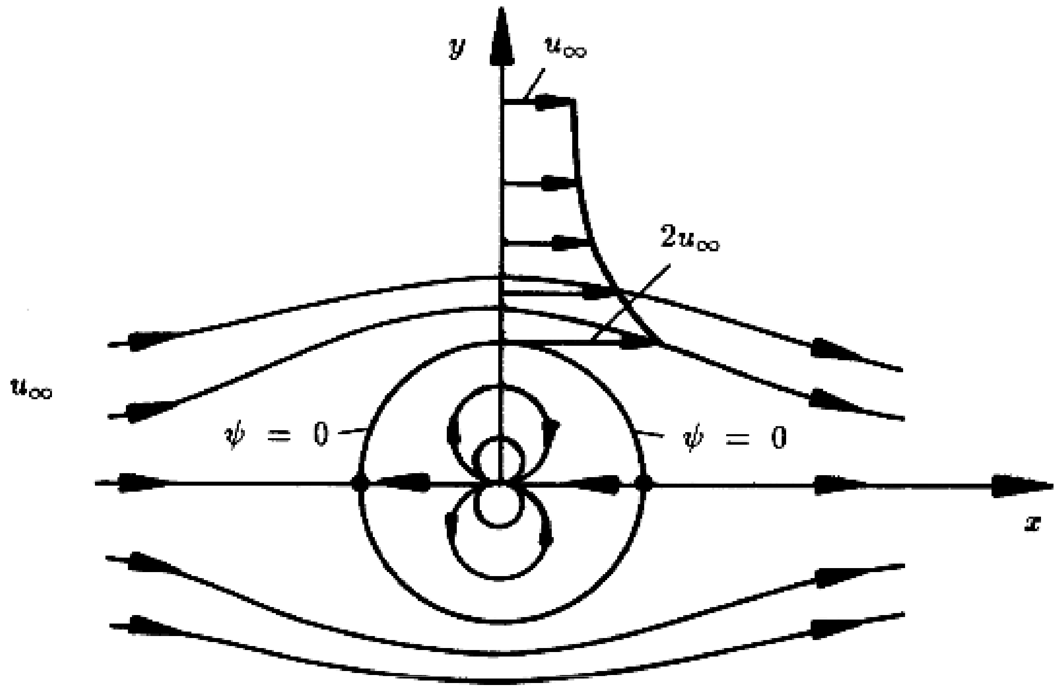
$$\psi = u_\infty y - \frac{M}{2\pi r^2} y = \left(u_\infty - \frac{M}{2\pi r^2} \right) r \sin\varphi$$

$$\overline{w}(z) = u_\infty - \frac{M}{2\pi z^2}$$

bzw.

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(u_\infty - \frac{M}{2\pi r^2} \right) \cos\varphi$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = -\left(u_\infty + \frac{M}{2\pi r^2} \right) \sin\varphi$$



Staupunkte $(v_r = v_\varphi = 0)$ bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$

$$v_r = 0 \quad \Rightarrow \quad u_\infty - \frac{M}{2\pi R^2} = 0$$

$$R = \sqrt{\frac{M}{2\pi\, u_\infty}}$$

$\Rightarrow$ Wandstromlinie $\psi = 0$; Geschwindigkeit auf $\psi = 0$

$$v_r = 0$$

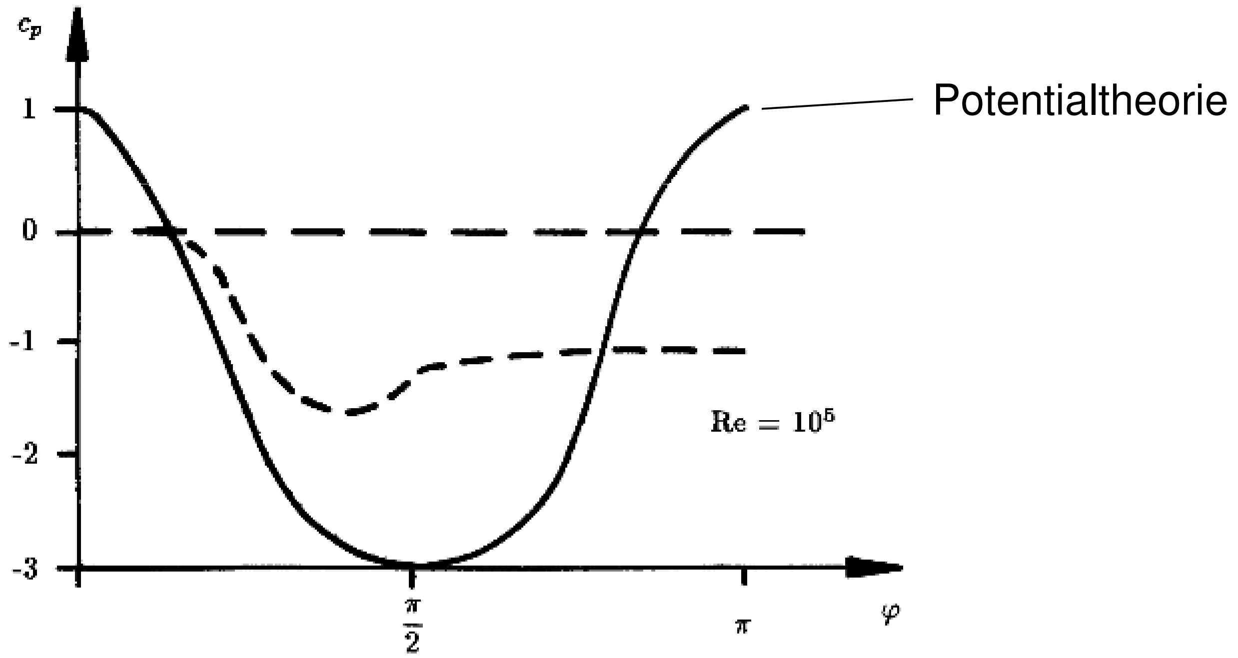
$$v_\varphi = -2u_\infty \sin\varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \text{ oder } \varphi = \frac{3}{2}\pi : \ |v_\varphi| = 2u_\infty$$

Druckverteilung auf Kontur :

$$p_k + \frac{\rho}{2} v_k^2 = p_\infty + \frac{\rho}{2} u_\infty^2$$

$$c_{pk} = \frac{p_k - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \left(\frac{v_k}{u_\infty} \right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \varphi$$



Potentialtheorie → symmetrische p-Verteilung

→ keine resultierende Kraft

→ d 'Alembertsches Paradoxon

Addition eines Potentialwirbels $\Longrightarrow$ Seitenkraft

$$F(z) = u_\infty \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z$$

$$\phi = u_\infty \cos\varphi \left(r + \frac{R^2}{r} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi$$

$$\psi = u_\infty \sin\varphi \left(r - \frac{R^2}{r} \right) + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = u_\infty \cos\varphi \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right)$$

$$v_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = -u_\infty \sin\varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$v_r = 0 \quad \textit{für} \quad r = R$$

$$v_\varphi = -2u_\infty \sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi R}$$

Staupunkt(e) : ?

$$v_\varphi = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi u_\infty R}$$

$\Gamma < 4\pi u_\infty R \quad \Rightarrow$ 2 Staupunkte

$\Gamma = 4\pi u_\infty R \quad \Rightarrow$ 1 Staupunkt

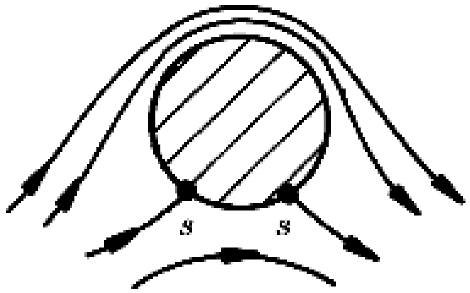
$\Gamma > 4\pi u_\infty R \quad \Rightarrow$ keine Lösung auf der Kontur, jedoch ein freier Staupunkt

$$v_r(r \neq R, \varphi) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

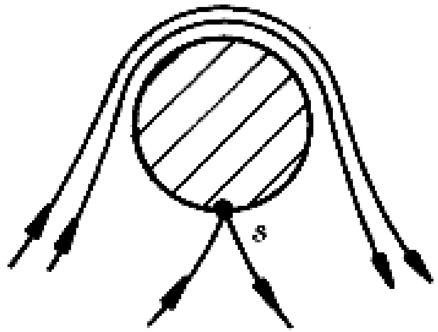
$$v_\varphi(r \neq R, \varphi = -\frac{\pi}{2}) = 0 \;\Rightarrow\; u_\infty(1 + \frac{R^2}{r^2}) - \frac{\Gamma}{2\pi r} = 0$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{4\pi u_\infty}\left[\Gamma \pm \sqrt{\Gamma^2 - (4\pi u_\infty R)^2}\right]$$

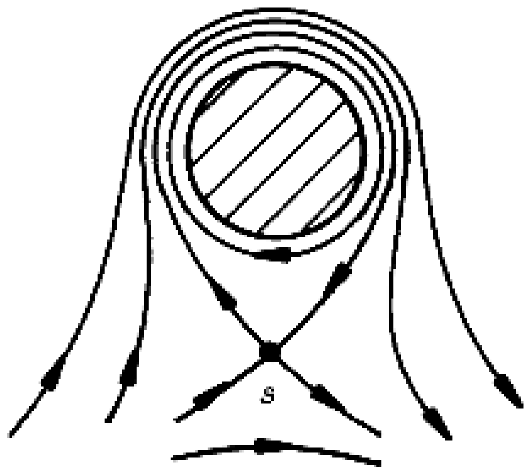
nur $r > R$ berücksichtigen



$\Gamma < 4\pi u_\infty R$



$\Gamma = 4\pi u_\infty R$



$\Gamma > 4\pi u_\infty R$

Potentialwirbel → Γ → Seitenkraft

Magnus Effekt

Druckverteilung auf der Kontur

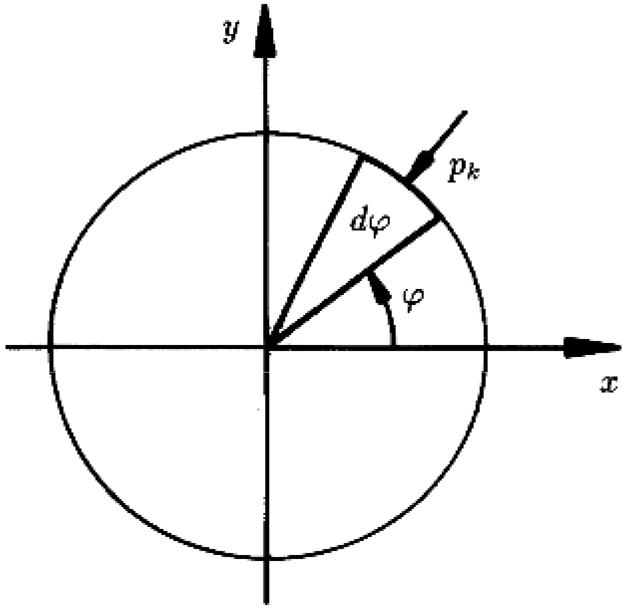
$$p + \frac{\rho}{2}(v_r^2 + v_\varphi^2) = p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2$$

$$p_k = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left[u_\infty^2 - \left(-2u_\infty \sin\varphi - \frac{\Gamma}{2\pi R}\right)^2\right]$$

bzw.

$$c_p = \frac{p_k - p_\infty}{\frac{\rho}{2} u_\infty^2} = 1 - \left(2\sin\varphi + \frac{\Gamma}{2\pi u_\infty R} \right)^2$$

Kraft in y - Richtung :



$$L = -\int_0^{2\pi} p_k \sin\varphi R \, d\varphi$$

$$L = \frac{\rho u_\infty \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{\rho u_\infty \Gamma}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi$$

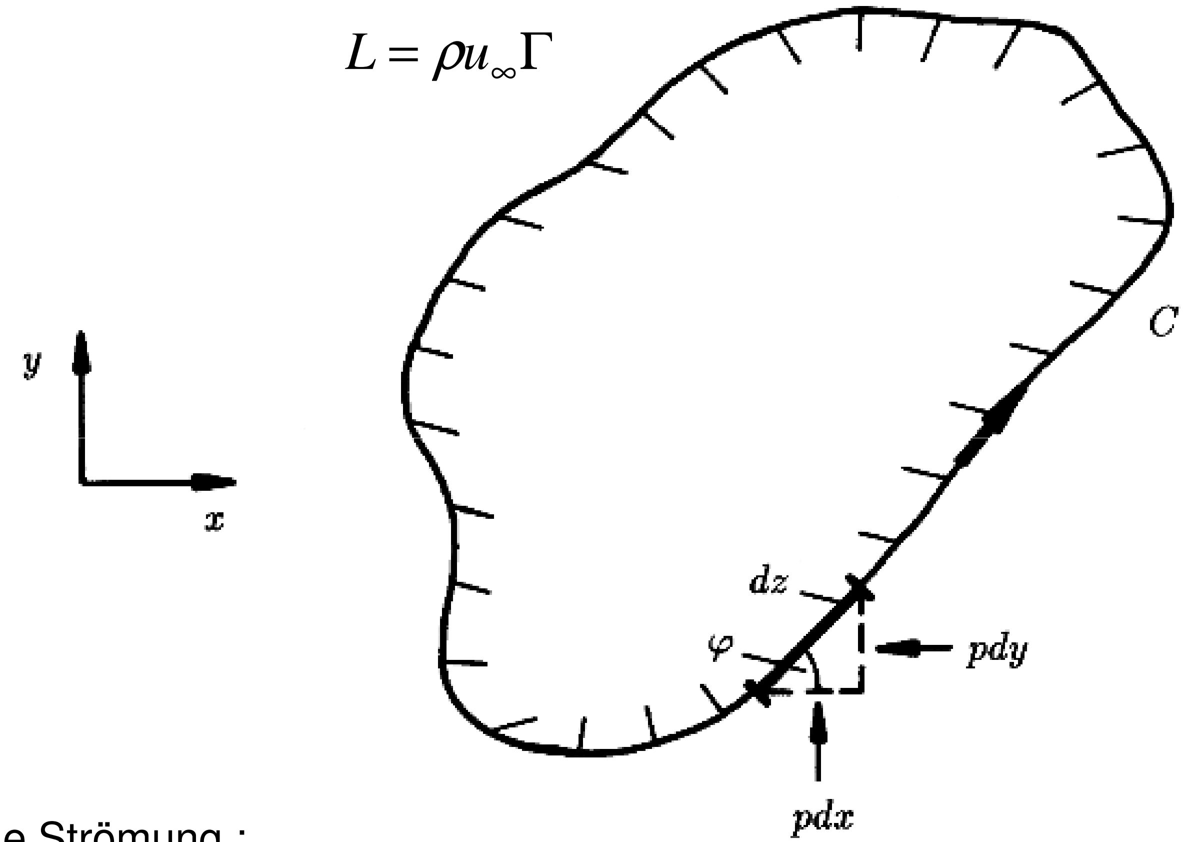
$$\boxed{L = \rho u_\infty \Gamma}$$

$L \sim \Gamma$ Kutta, Zhukhovski

Auftriebssatz von Kutta – Zhukhovski

Für beliebige ebene Körper gilt :

$$L = \rho u_\infty \Gamma$$



reibungsfreie Strömung :

$$dD = -pdy$$

$$dL = pdx$$

infinitesimale Kraft

$$dD - idL = -pdy - ipdx = -ipd\overline{z}$$

$$d\overline{z} = dx - idy$$

Gesamtkraft

$$D - iL = -i\oint_C pd\overline{z}$$

Druckverteilung

$$p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2 = p + \frac{\rho}{2}\left(u^2 + v^2\right) = p + \frac{1}{2}\rho(u+iv)(u-iv)$$

$$D - iL = -i\oint\Bigg[\underbrace{p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2} - \frac{\rho}{2}(u+iv)(u-iv)\Bigg]d\overline{z}$$

$$\Rightarrow \quad \oint_C\left(p_\infty + \frac{\rho}{2}u_\infty^2\right)d\overline{z} = 0$$

$$dz = |dz| e^{i\varphi}$$

$$u + iv = \sqrt{u^2 + v^2}\, e^{i\varphi}$$

$$\Rightarrow \; dz \parallel u + iv$$

$\Rightarrow \; (u + iv) d\bar{z}$ reell und

$$(u - iv) dz = (u + iv) d\bar{z}$$

$$D - iL = \frac{i}{2} \rho \oint_C (u - iv)^2 dz = \frac{i}{2} \rho \oint_C \left(\frac{dF}{dz} \right)^2 dz$$

(I. Blasiussche Formel)

gültig für ebene, stat. , drehungsfreie Strömungen

Funktionentheorie :

Integration auf jeder beliebigen Kontur möglich, sofern keine Singularitäten zwischen Körper und gewählter Kontur.

hier : • Strömung setzt sich u. a. aus Sing. zusammen, die sich jedoch innerhalb des Körpers befinden.

• Wahlkontur weit entfernt vom Körper

$$F(z) = u_\infty z + \underbrace{\frac{E}{2\pi}\ln z}_{} + \frac{i\Gamma}{2\pi}\ln z + \frac{M}{2\pi z} + \ldots$$

$\longrightarrow$ $\sum_i (E_{Qi} + E_{si}) = 0$ $\longrightarrow$ Körperoberfläche ist geschlossen

I. Blasiussche Formel :

$$D - iL = \frac{i\rho}{2}\oint\left[u_\infty + \frac{i\Gamma}{2\pi z} - \frac{M}{2\pi z^2} + \ldots\right]^2 dz$$

Residuensatz :

$$\oint_c f(z)dz = 2\pi i \cdot \left(\sum \mathrm{Res}[f(z)]\right)$$

Res [*f(z)*]*: ?*

$$\left[u_\infty + \frac{i\Gamma}{2\pi z}\right]^2 \quad \rightarrow \quad u_\infty^2 - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 z^2} + \frac{i u_\infty \Gamma}{\pi z}$$

$$\rightarrow \quad D - iL = \frac{i\rho}{2}\left[2\pi i\left(\frac{i u_\infty \Gamma}{\pi}\right)\right]$$

$$D = 0$$

$$L = \rho u_\infty \Gamma$$

Somit verschwindet die Widerstandskraft und die Seitenkraft ist proportional zur Zirkulation!

Entstehung der Zirkulation

nur Körper mit scharfen Hinterkanten erzeugen Γ (exp. Ergebnis)

$\Gamma = 0$

$\Gamma \neq 0$

Γ_{Kutta}

vorangegangene Darstellung : drehungsfreie Strömung, Γ steigt an

$\Gamma = 0$ Staupunkt (B) auf der Oberfläche

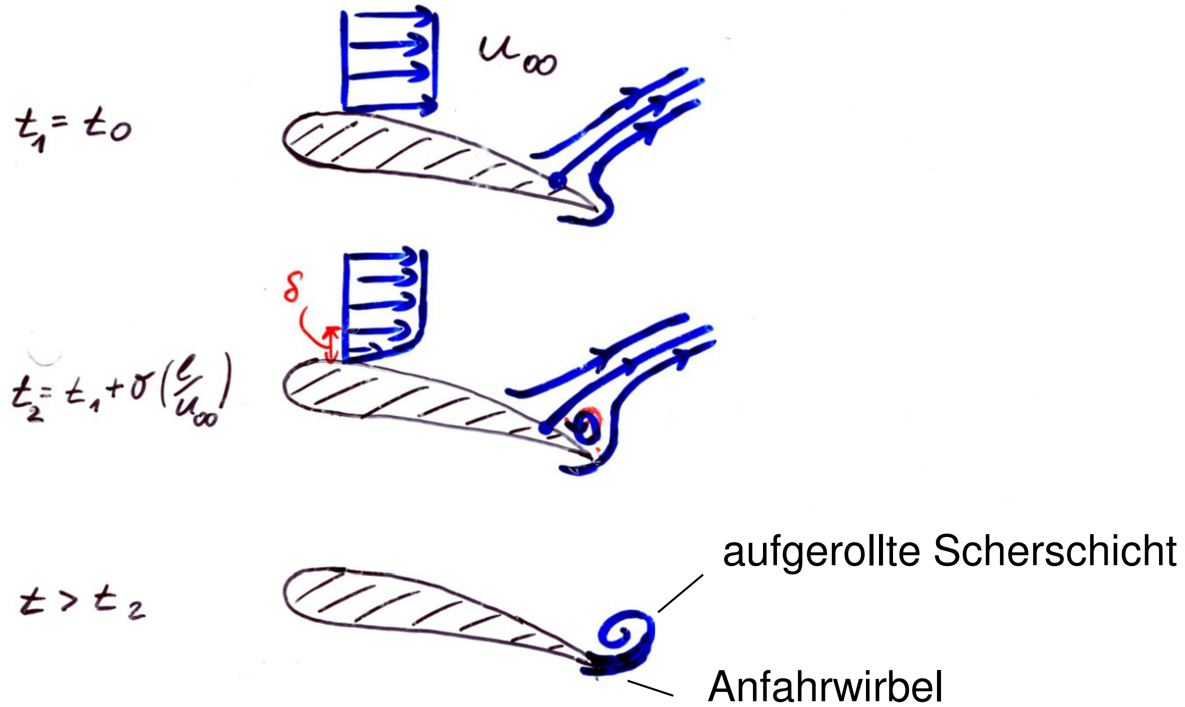
$\Gamma \uparrow$ A,B wandern auf der Oberfläche

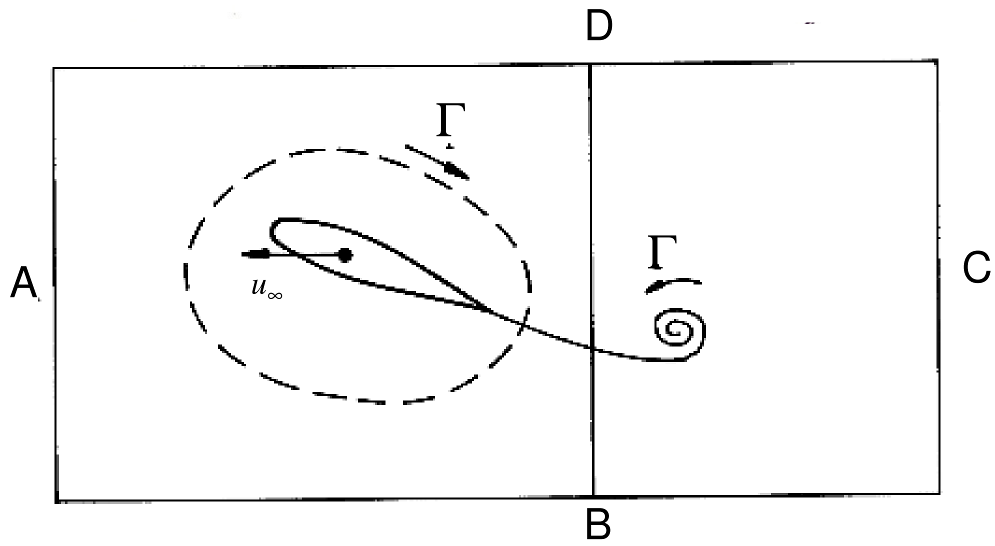
Γ_{Kutta} B auf der Hinterkante

Hypothese von Kutta :

Strömung über ebenen, scharfkantigen Körper besitzt genau die Zirkulation Γ, so dass B auf der Hinterkante liegt. (Kutta Bedingung)

Warum genügt eine realistische Strömung der Kutta Bedingung?





Satz von Thomson : Γ um jede geschlossene Kurve ist konstant, wenn die Kurve in einer reibungsfreien Strömung bleibt.

$$\rightarrow \Gamma_{ABCD}(t > t_0) = 0, \quad \text{da } \Gamma_{ABCD}(t_0 = 0) = 0$$

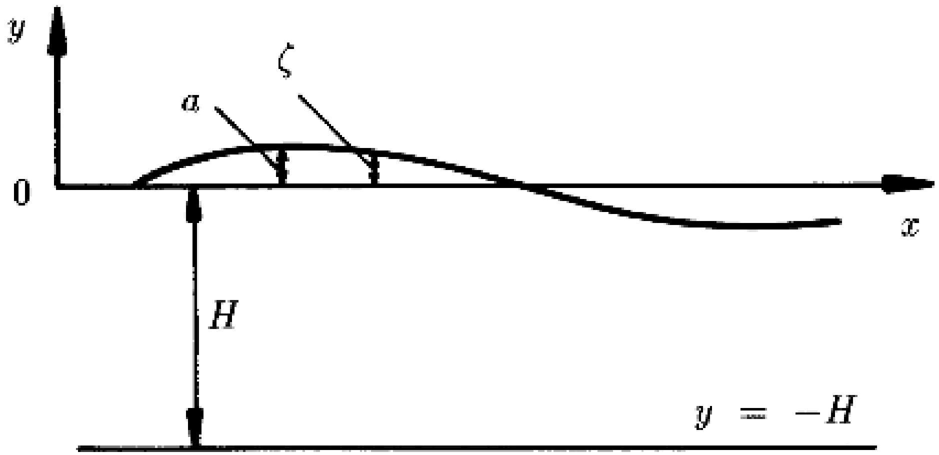
$$\Rightarrow \Gamma_{ABD} \;\; \text{kompensiert} \;\; \Gamma_{BCD} = \Gamma_{Anfahr}$$

nur Γ_{Kutta} bewirkt keine Oszillation des hinteren Staupunktes

D.h. Viskosität ruft zwar D hervor, jedoch ebenfalls Γ und somit L.

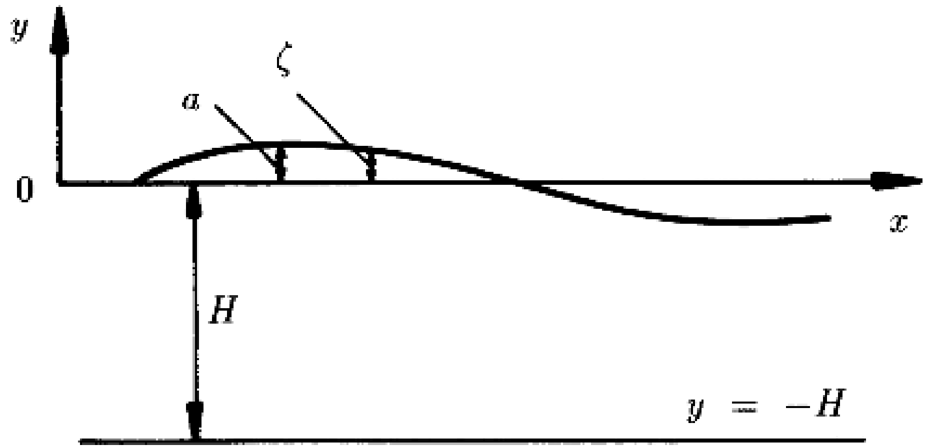
Schwerewellen

[redacted]



H : mittlere Tiefe

- $a/\lambda \ll 1$ und $a/H \ll 1$
- $H \;\substack{\ll \\ \gg}\; \lambda$
- η klein → Reibung hat keinen Einfluss auf Wellenausbreitung
- Bewegung aus der Ruhe → drehungsfreie Analyse



$\zeta\,(x,\,t)$ beschreibt die Oszillationen, drehungsfreie Strömung → Potential einführen

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}$$ in Kontinuitätsgleichung :

$$\Rightarrow \qquad \nabla^2 \phi = 0$$

Randbedingungen :

$$y = \zeta: \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x}\bigg|_{y=\zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}\bigg|_{y=\zeta} = v\big|_{y=\zeta}$$

$$\boxed{y = -H: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v = 0}$$

Annahme : a klein $\Rightarrow$ $u\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}$ klein

$$\longrightarrow \quad u\frac{\partial \zeta}{\partial x} << \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

somit : $y=\zeta \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=\zeta}$

Taylorentwicklung

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=\zeta} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=0} + \zeta\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \quad \dots \quad \approx \left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{y=0}$$

dynamische Randbedingung bei $y = \zeta$:

$$y=\zeta \quad : \quad p = p_a = 0$$

mittels Bernoulli Gleichung

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2+v^2) + \frac{p}{\rho} + gy = F(t)$$

$$\phi = f(\tilde{\phi}, F)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gy = 0$$

$$y = \zeta \quad : \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\zeta = 0$$

mit $$\left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{y=\zeta} = \left.\frac{\partial \phi}{\partial t}\right|_{y=0} + \zeta \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} + \ldots.$$

$$\boxed{y = 0 \quad : \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\zeta}$$

Zusammenfassung des Problems $\nabla^2 \phi = 0$

mit RB :

$$y = -H \quad : \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

$$y = 0 \quad : \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\zeta$$

Annahme : $\zeta(x,t) = a\cos(kx - \omega t)$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$: Wellenzahl $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$: Kreisfrequenz

$T = \frac{\lambda}{c}, \quad c$: Phasengeschwindigkeit

bzw. $\omega = kc$

Bedenkt man die Bedingungen

$y = 0$ $\qquad \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y}$ und $\dfrac{\partial \phi}{\partial t} = -g\zeta$

folgt als Ansatz für ϕ :

$$\phi = f(y)\sin(kx - \omega t)$$

$f(y)$, k bzw. ω unbekannt

Laplace ergibt :

$$\frac{d^2 f}{dy^2} - k^2 f = 0$$

allgemeine Lösung :

$$f(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}$$

$$\phi = (Ae^{ky} + Be^{-ky})\sin(kx - \omega t)$$

A, B aus Randbedingungen

$y = -H$ $\qquad \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = \left(Ake^{-kH} - Bke^{kH}\right)\sin(kx - \omega t) = 0$

$$\Rightarrow \qquad B = Ae^{-2kH}$$

$y = 0:$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = a\omega \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = k\left(Ae^{ky} - Be^{-ky}\right)\sin(kx - \omega t) = k\left(A - B\right)\sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}: \qquad k(A - B) = a\omega$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{a\omega}{k(1 - e^{-2kH})}$$

$$B = \frac{a\omega e^{-2kH}}{k(1 - e^{-2kH})}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \phi &= \frac{a\omega}{k}\frac{\cosh\left(k(y+H)\right)}{\sinh(kH)}\sin(kx - \omega t) \\ u &= a\omega\frac{\cosh\left(k(y+H)\right)}{\sinh(kH)}\cos(kx - \omega t) \\ v &= a\omega\frac{\sinh\left(k(y+H)\right)}{\sinh(kH)}\sin(kx - \omega t) \end{aligned}}$$

Zusammenhang zwischen c, ω, k über die dynamische Bedingung

$$\zeta \text{ und } \phi \text{ in } \frac{\partial \phi}{\partial t} = -g\zeta \qquad (\, y = 0 \,)$$

$$-\frac{a\omega^2}{k}\frac{\cosh(kH)}{\sinh(kH)}\cos(kx-\omega t) = -\underbrace{ga\cos(kx-\omega t)}_{\zeta}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{gk\tanh(kH)}$$

$$\Rightarrow \qquad c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}\tanh(kH)} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\tanh\frac{2\pi H}{\lambda}} \qquad (*)$$

$$\left.\begin{aligned} c &= f(k) \\ k &= g(c) \end{aligned}\right\}$$: dispersive Wellen

$\omega = f(k)$ heißt Dispersionsbeziehung

Gleichung * für : $H/\lambda >> 1$ und

$H/\lambda << 1$

$H / \lambda >> 1$

$$\tanh(x \to \infty) \to 1$$

Näherung : $\tanh(1.75) = 0.9414$

$$\Rightarrow \quad KH > 1.75 \text{ bzw. } H > 0.28\lambda$$

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}}$$ 3 % genau

Tiefwasserwellen, sofern $H > 0.28\lambda$; $c = f(\lambda)$, $c \neq f(H)$

$H / \lambda << 1$

$$\tanh(x \to 0) \approx x$$

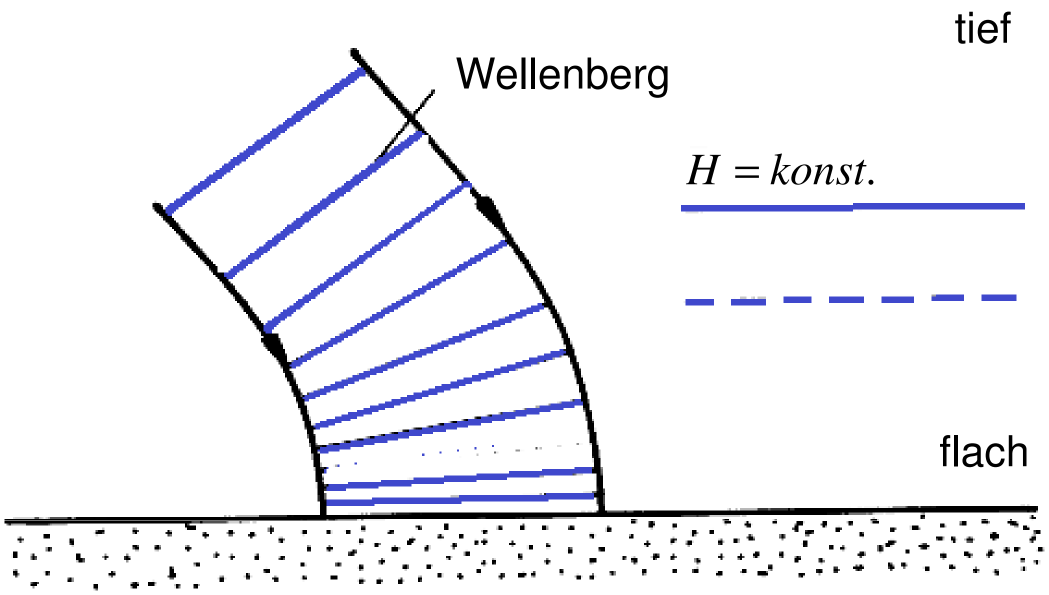
$H / \lambda << 1$

$$\tanh \frac{2\pi H}{\lambda} \approx \frac{2\pi H}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{gH}$$ Genauigkeit besser 3% für $H / \lambda < 0.07\lambda$

Flachwasserwellen, sofern $H < 0.07\lambda$; $c \neq f(\lambda)$, $c = f(H)$

Bemerkung zur Berechnung von Flachwasserwellen



in Strandnähe : $c = \sqrt{gH}$

$\longrightarrow$ Drehung der Wellenberge parallel zur Küste in Richtung Strand

$\Rightarrow$ Wellen immer parallel zur Küste; sie treffen senkrecht auf den Strand auf

Laminare Grenzschichten

analytische Lösungen stationärer Strömungen :

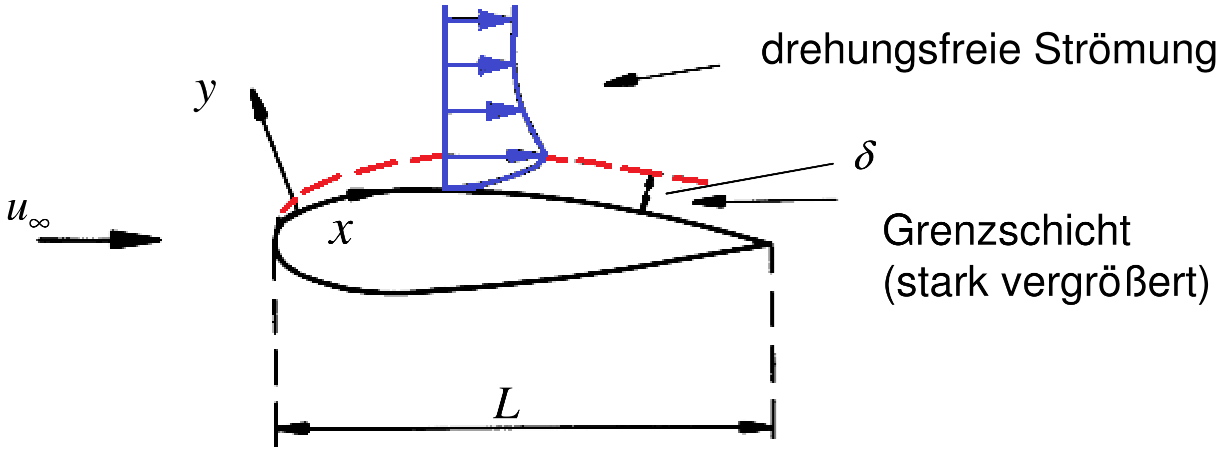
- Druck- und Reibungsterme im Gleichgewicht
- Trägheits- und Druckkräfte im Gleichgewicht

<u>1904</u> Grenzschichtkonzept von Prandtl :

η klein, dann werden Reibungskräfte nur in unmittelbarer Wandnähe berücksichtigt.

$\eta \rightarrow 0$, dann $\delta \rightarrow 0$;

durch δ wird die Haftbedingung erfüllt → Widerstandskraft



Grenzschichtgleichungen

η klein bzw. Re groß

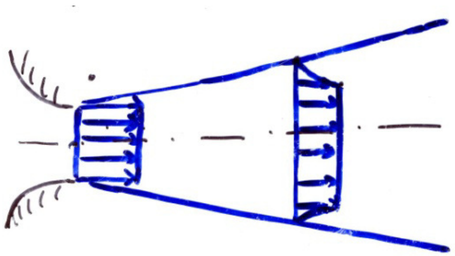
$\longrightarrow$ Grenzschicht existiert

$$\delta << L \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{sehr groß (i.a.)}$$

dünne Reibungsschichten :

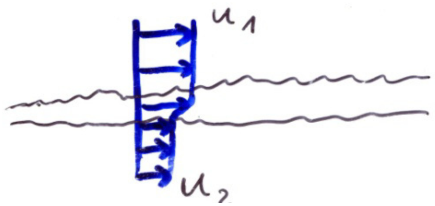
- Wandgrenzschicht

  - Freistrahl

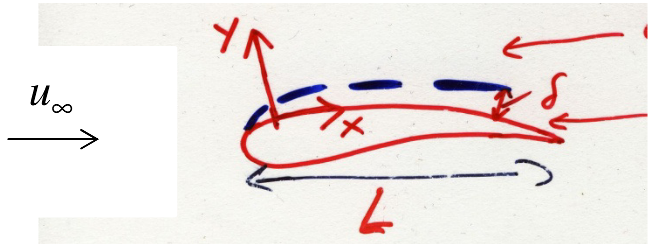


  - Nachlauf

  - Scherschicht



hier : Wandgrenzschichten



Ableitung eines Maßes für die Grenzschichtdicke $\tilde{\delta}$

Impulsgleichung in x-Richtung :

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

Referenzgeschwindigkeit : u_∞

charakteristische Länge : L

$$\longrightarrow \qquad u\frac{\partial u}{\partial x}\sim\frac{u_\infty^2}{L}$$ Ordnung der konvek. Terme

Maß für die Variation von *v* aus der Kontinuitätsgleichung :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$u \gg v \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}$$ von gleicher Ordnung in der Grenzschicht

$$\longrightarrow \quad \frac{u_\infty}{L} \sim \frac{v}{\tilde{\delta}} \quad \Rightarrow \quad v \sim \frac{u_\infty \tilde{\delta}}{L}$$

$$\Rightarrow \quad v \frac{\partial u}{\partial y} \sim \frac{u_\infty^2}{L}$$

Ordnung der konvektiven Terme : $\dfrac{u_\infty^2}{L}$

Ordnung der Reibungsterme : $\nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sim \nu \dfrac{u_\infty}{\tilde{\delta}^2}$

Annahme : Übereinstimmung der Ordnung

$$\Rightarrow \quad \tilde{\delta} \sim \sqrt{\frac{\nu L}{u_\infty}}$$

Vereinfachung der Bewegungsgleichungen in der Grenzschicht

es ist : $$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Referenzgrößen :

Längen : L in x- , $\tilde{\delta} \ll L$ in y - Richtung

Druck : ρu_∞^2

Geschw. : u_∞ in x - , $\dfrac{u_\infty \tilde{\delta}}{L}$ in y - Richtung

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \qquad \bar{y} = \frac{y}{\tilde{\delta}}$$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_\infty} \qquad \bar{v} = \frac{v}{\tilde{\delta} u_\infty / L} = \frac{v}{u_\infty}\sqrt{\mathrm{Re}} \qquad \bar{p} = \frac{p}{\rho u_\infty^2}$$

man erhält :

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \underline{\underline{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{\mathrm{Re}}}}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \underline{\underline{\frac{1}{\mathrm{Re}^2}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2}}} + \underline{\underline{\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}}}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

wobei : $\mathrm{Re} = u_\infty \frac{L}{\nu}$

dimensionslose Variable und die Differentiale von Ordnung 1

$\Rightarrow$ $\mathrm{Re} \to \infty$

$$\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

bzw. in dimensionsbehafteter Form

$$\boxed{\begin{gathered} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{gathered}}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{wand} = p_{\tilde{\delta}}$$

Druckverteilung aus Euler Glg.

$$U\frac{dU}{dx}=-\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$$

oder Bernoulli Glg.

$$p+\frac{\rho}{2}U^2=konst.$$

U : Geschwindigkeit bei $\tilde{\delta}$

Anfangs- und Randbedingungen : $u(x,0)=0,\qquad v(x,0)=0$

$u(x,\infty)=U(x)\qquad u(x_0,y)=u_0(y)$

2D stationäre kompressible Strömungen

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\rho c_p u\frac{\partial T}{\partial x}+\rho c_p v\frac{\partial T}{\partial y}=u\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\eta\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

bekannt : $c_p(T), \eta(T), \lambda(T), \dfrac{\partial p}{\partial x}$

Anfangs- und Randbedingungen :

$$u(x,0 \;\; = v(x,0) = 0$$

$$T(x,0) = T_w(x)$$ oder

$$\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$$

$$u(x,\infty) \; = U(x), \quad T(x,\infty) = T_i(x)$$

$$u(x_0, y) = u_0(y)$$

$$T(x_0, y) = T_0(y)$$

Gültigkeit der Grenzschichtvereinfachung

$$\mathrm{Re} >> 1$$

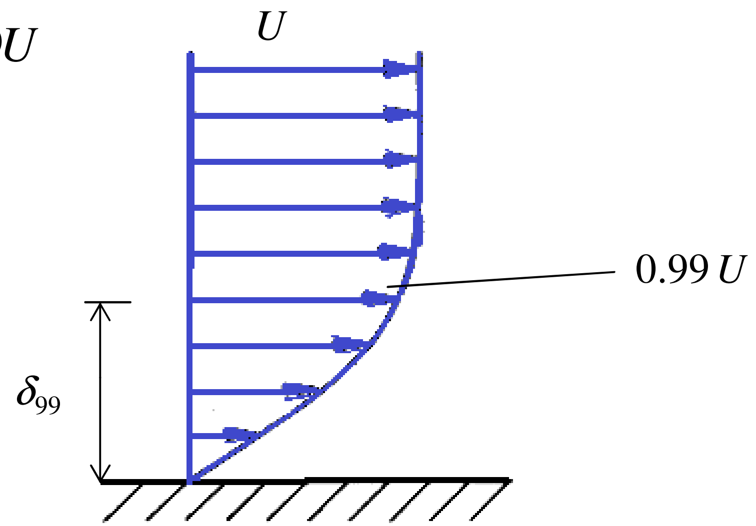
$$R >> \tilde{\delta}$$

Grenzschichtgrößen

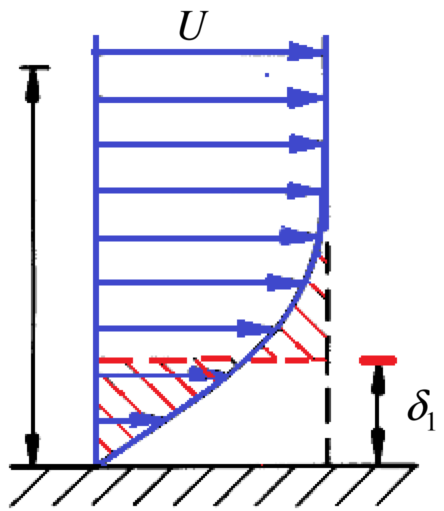
Definition der Grenzschichtdicke (3 übliche Maße)

0,99 U – Dicke

$$\delta \overset{!}{=} \delta_{99}, \; wobei \; u(x, y = \delta_{99}) = 0.99U$$



Verdrängungsdicke : δ_1



Aufdickung einer angenommen reibungsfreien Strömung um δ_1 , wobei $\dot{Q}_i = \dot{Q}_v$

$h >> \delta$, es gilt

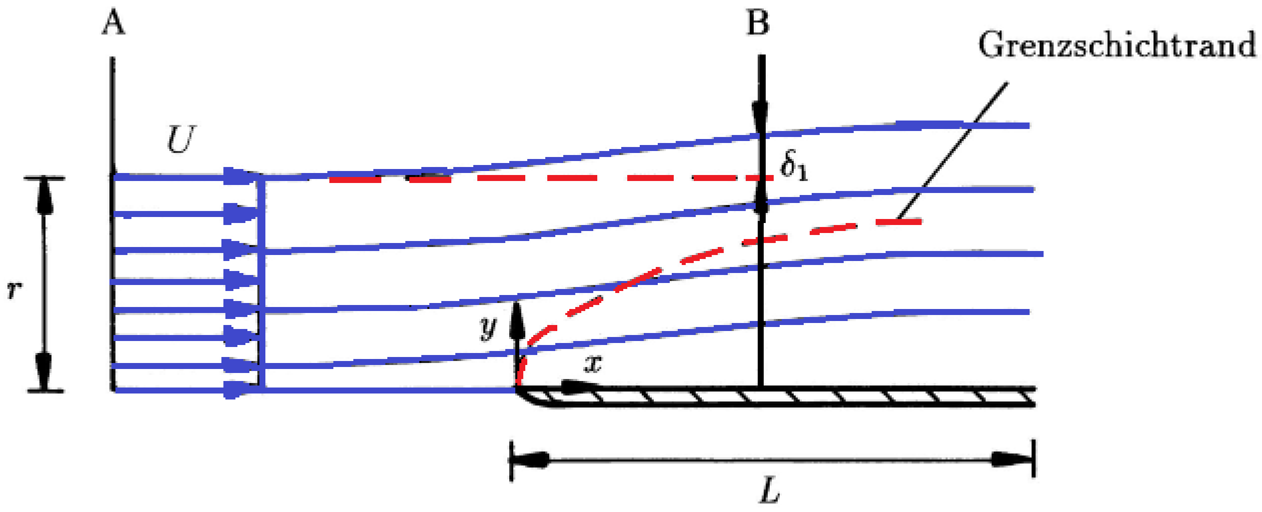
$$\underbrace{\int_0^h u\,dy}_{\dot{Q}_v} = \underbrace{U(h-\delta_1)}_{\dot{Q}_i}$$

$$h \to \infty \quad \Rightarrow \quad \delta_1 = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

für $\dfrac{dp}{dx}$ ist δ_1 entscheidend

weitere Interpretation von : δ_1

δ_1 ist der Abstand, um den die Stromlinien bei $y > \delta$ abgedrängt werden.



$\dot{Q}$ in A und B:

$$Ur = \int_0^{r+\delta_1} u\,dy = \int_o^r u\,dy + U\delta_1$$

$$\Rightarrow \qquad U\delta_1 = \int_0^r (U-u)dy$$

$$r \to \infty \quad : \qquad \boxed{\delta_1 = \int_0^\infty \left(1-\frac{u}{U}\right)dy}$$

Impulsverlustdicke δ_2

δ_2 ist die Dicke, so dass $\rho U^2 \delta_2$ den Impulsverlust durch die Grenzschicht dargestellt

mit obiger Abbildung: $I_{vb} \equiv$ Impulsfluss/Einheitsbreite

Schnitt *A:* $\qquad I_{vb,A} = \rho U^2 r$

Schnitt *B:* $\qquad I_{vb,B} = \int_0^{r+\delta_1} \rho u^2 dy = \int_0^r \rho u^2 dy + \rho U^2 \delta_1$

$$\delta_2 \text{ aus } \quad I_{vb,A} - I_{vb,B}$$

$$\rho U^2 r - \int_0^r \rho u^2 dy - \rho U^2 \delta_1 \equiv \rho U^2 \delta_2$$

$$\int_0^r \left(U^2 - u^2\right) dy - U^2 \int_0^r \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = U^2 \delta_2$$

$$\Rightarrow \qquad r \to \infty \qquad \boxed{\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy}$$

$$\delta_2 < \delta_1$$

von Kármánsche Integralbeziehung

exakte Lösungen der Grenzschichtgleichungen selten, Näherungsverfahren auf der Basis eines Integrals (von Kármán 1921) gesucht

$$\int_0^h \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) dy = \int_0^h \left(U \frac{dU}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy$$

mit $h > \delta$

Umformung der x-Impulsgleichung mittels $\pm u \frac{dU}{dx}$ und $v \frac{\partial U}{\partial y}$

$$\underbrace{(U-u)\frac{dU}{dx}}_{\mathrm{I}} + \underbrace{u\frac{\partial (U-u)}{\partial x}}_{\mathrm{II}} + \underbrace{v\frac{\partial (U-u)}{\partial y}}_{\mathrm{III}} = \underbrace{-\nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\mathrm{IV}}$$

I :

$$\int_0^h (U-u)\frac{dU}{dx}\,dy = U\frac{dU}{dx}\int_o^h \left(1-\frac{u}{U}\right)dy = U\delta_1 \frac{dU}{dx}$$

III :

III‘

$$\int_0^h v\frac{\partial (U-u)}{\partial y}\,dy = v(U-u)\Big|_0^h - \int_0^h (U-u)\frac{\partial v}{\partial y}\,dy = \int_0^h \frac{\partial u}{\partial x}(U-u)\,dy$$

IV : Schubspannung auf der Wand

$$\tau_0 = \eta \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}$$

$$-\frac{\eta}{\rho}\int_0^h \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dy = -\frac{1}{\rho}\int_0^h \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta\frac{\partial u}{\partial y}\right)dy = \frac{\tau_0}{\rho}$$

II, III' :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[u(U-u)\right] = u\frac{\partial(U-u)}{\partial x} + (U-u)\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\int_0^h \left(u\frac{\partial(U-u)}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}(U-u)\right)dy =$$

$$\int_0^h \frac{\partial}{\partial x}\left[u(U-u)\right]dy = \frac{d}{dx}U^2\int_0^h \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dy = \frac{d}{dx}\left(U^2\delta_2\right)$$

Zusammenfassung :

von Kármánsche Integralbeziehung

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(U^2\delta_2\right) + \delta_1 U\frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho}}$$

bzw.

$$\boxed{\frac{d\delta_2}{dx}+\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}\left(2\delta_2+\delta_1\right)=\frac{\tau_0}{\rho U^2}}$$

Annahme : Geschwindigkeitsprofil

$$\Rightarrow \delta = f(x) \text{ und } \tau_0 = g(x)$$

Beispiel : längsangeströmte ebene Platte

$$\frac{dU}{dx}=0$$

$$\frac{d}{dx}\int_o^\delta (U-u)u\,dy=\frac{\tau_0}{\rho}$$

Geschwindigkeitsprofil : $\frac{u}{U}=a+b\frac{y}{\delta}+c\frac{y^2}{\delta^2}+d\frac{y^3}{\delta^3}$

Randbedingungen : $y=0 \qquad u=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad 1)$

$y\to\delta \qquad u=U \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad 2)$

aus 1) folgt : $a = c = 0$

aus 2) folgt : $b = 3/2$; $d = -1/2$

$$\frac{u}{U} = \frac{3}{2}\frac{y}{\delta} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad \text{mit} \quad \delta = \delta(x)$$

$$U^2 \int_0^h \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy = \frac{39}{280} U^2 \delta$$

und :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{3}{2}\nu\frac{U}{\delta}$$

$\Longrightarrow$ von Kármán Beziehung für die ebene Platte

$$\frac{39}{280}\frac{d}{dx}(U^2\delta) = \frac{39}{280}U^2\frac{d\delta}{dx} = \frac{3}{2}\nu\frac{U}{\delta}$$

Integration in x-Richtung mit $\delta = 0$ bei $x = 0$

$$\delta = 4.64\sqrt{\nu x / U}$$

$$\delta_{lam} \sim \sqrt{x}$$

Reibungsbeiwert : $c_f = \dfrac{\tau_0}{\dfrac{\rho}{2} U^2}$

$$c_f = \frac{\tau_0}{\dfrac{\rho}{2} U^2} = \frac{\dfrac{3}{2} U \nu / \delta}{\dfrac{1}{2} U^2} = \frac{0.646}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad c_{f,lam} \sim x^{-\frac{1}{2}}$$

Ähnliche Lösung der Grenzschichtströmung der ebenen Platte (Blasius Lösung)

Vernachlässigung der Verdrängung

$$\rightarrow U = konst \qquad \rightarrow \frac{dp}{dx} = 0$$

$\rightarrow$ kein Längenmaß

Vorstellung : Lösung ist „ähnlich“

$$\frac{u}{U} = g(\overline{\eta})$$

wobei

$$\overline{\eta} = \frac{y}{\delta(x)}$$

(Ansatz von Blasius)

Ausgangsgleichungen und Randbedingungen

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$x=0, y \qquad u(y)=U$$

$$0\le x\le L, y=0 \qquad u=v=0$$

$$0\le x\le L, \frac{y}{\delta}\to\infty \qquad u\to U$$

Kontinuitätsgleichungen via Stromfunktion ψ

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y} \qquad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$\psi=\int_0^h u\,dy=\delta\int_0^{\overline{\eta}} u\,d\overline{\eta}$$

$$=\delta\int_0^{\overline{\eta}} U\;g(\overline{\eta})d\overline{\eta}=\delta U\;f(\overline{\eta}), \qquad \text{so dass} \qquad g(\overline{\eta})\equiv\frac{df}{d\overline{\eta}}$$

Stromfunktion ψ in Impulsgleichungen einführen

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}$$

$$x=0 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=U$$

$$y=0 \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=\psi=0$$

$$\frac{y}{\delta}\to\infty \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}\to U$$

Rückführung auf $f(\overline{\eta})=\dfrac{\psi}{\delta U}$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=U\left[f\frac{d\delta}{dx}+\delta\frac{\partial f}{\partial x}\right]=\underline{\underline{U\frac{d\delta}{dx}\left[f-f'\overline{\eta}\right]}}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}=U\frac{d\delta}{dx}\frac{\partial}{\partial y}\left[f-f'\overline{\eta}\right]=\underline{\underline{-\frac{U\overline{\eta}f''}{\delta}\frac{d\delta}{dx}}}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\underline{\underline{Uf'}},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\underline{\underline{\frac{Uf''}{\delta}}},\quad \frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=\underline{\underline{\frac{Uf'''}{\delta^2}}}$$

mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{d\overline{\eta}} \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial x} = -f' \frac{\overline{\eta}}{\delta} \frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{df}{d\overline{\eta}} \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial y} = f' \frac{1}{\delta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(f' \overline{\eta}) = \overline{\eta} f'' \frac{1}{\delta} + f' \frac{1}{\delta}$$

die Impulsgleichung lautet

$$-U^2 f' f'' \frac{\overline{\eta}}{\delta}\frac{d\delta}{dx} - U^2 \frac{f''}{\delta}\frac{d\delta}{dx}\left[f - f'\,\overline{\eta}\right] = \nu \frac{Uf'''}{\delta^2} \qquad \Rightarrow \; -\left(\frac{U\,\delta}{\nu}\frac{d\,\delta}{dx}\right) f \;\; f'' = f'''$$

da $f(\overline{\eta}\;)$ folgt

$$\frac{U\delta}{\nu}\frac{d\delta}{dx} = \text{konstant} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \qquad \text{(gewählt)}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \sqrt{\frac{\nu\, x}{U}}$$

Somit gilt

$$\boxed{\frac{1}{2} f\, f'' + f''' = 0}$$

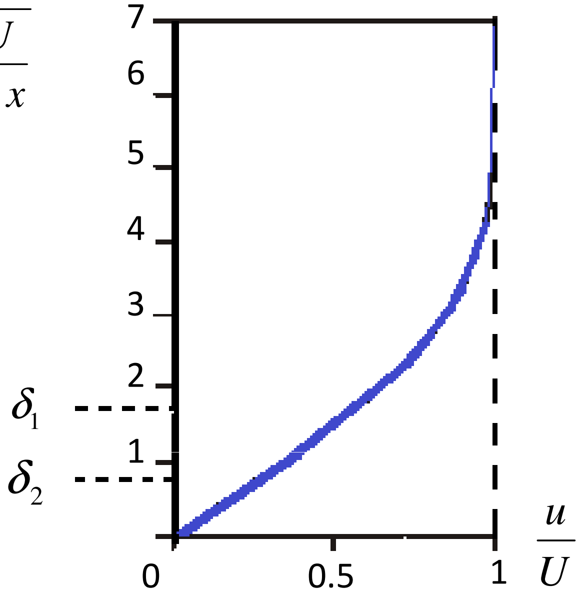
Randbedingungen :

$$f(0) = f'(0) = 0$$
$$f'(\infty) = 1$$

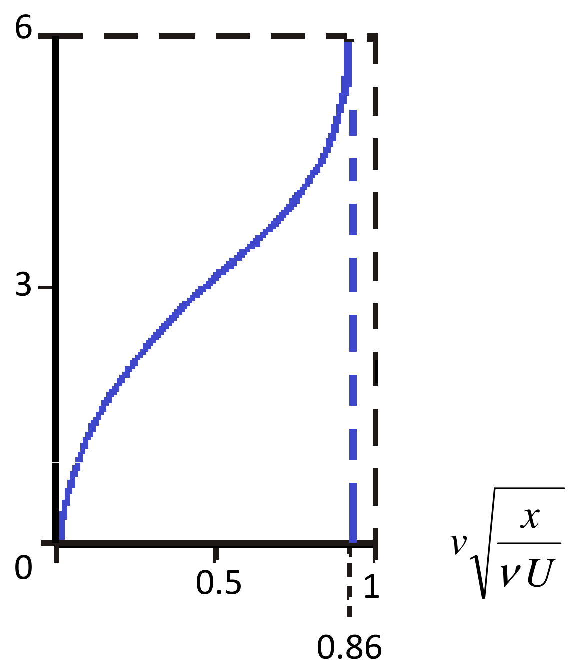
Blasius 1908 über Reihenentwicklung gelöst.

$$\frac{u}{U} = f'(\overline{\eta})$$: Geschwindigkeitsprofil für sämtliche Schnitte

$$\overline{\eta} = y\sqrt{\frac{U}{\nu\, x}}$$



$$\overline{\eta} = y\sqrt{\frac{U}{\nu\, x}}$$



$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -U\,\frac{d\delta}{dx}\left[f - f'\overline{\eta}\right] \qquad \frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu}{xU}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\nu U}{x}}\left[\overline{\eta} f' - f\right]$$

$u = 0{,}99U$ bei $\xi = 4.9$

$$\Rightarrow \quad \delta_{99} = 4.9\sqrt{\frac{\nu x}{U}} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\delta_{99}}{x} = \frac{4.9}{\sqrt{\frac{Ux}{\nu}}} = \frac{4.9}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad \Rightarrow \delta \sim \sqrt{x}$$

$$U = 1\frac{m}{s} \quad \rightarrow \quad \mathrm{Re}_{x=1m} = 6\times 10^4 \quad \Rightarrow \quad \delta_{99} = 2cm$$

$$\delta_1 = \int_0^\infty (1 - \frac{u}{U})dy \qquad \delta_1 = 1.72\sqrt{\frac{\nu x}{U}}, \quad \delta_2 = 0.664\sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\tau_0 = \eta \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\bigg|_{y=0} = \eta \frac{Uf''(0)}{\delta}$$

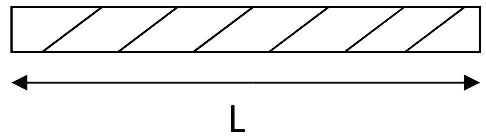
$$\tau_0 = \frac{0.332\rho U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad \Rightarrow \quad \tau_0 \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Achtung : $x \rightarrow 0 \quad \tau_0 \rightarrow \infty; \ \frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y}$ nicht mehr erfüllt!

lokaler Reibungsbeiwert

$$c_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

Reibungskraft auf <u>einer</u> Seite der Platte



$$D = \int_0^L \tau_0 dx = \frac{0.664\,\rho U^2 L}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$$

$$D_{lam} \sim U^{3/2}$$

Reibungsbeiwert c_D

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 L} = \frac{1.33}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$$

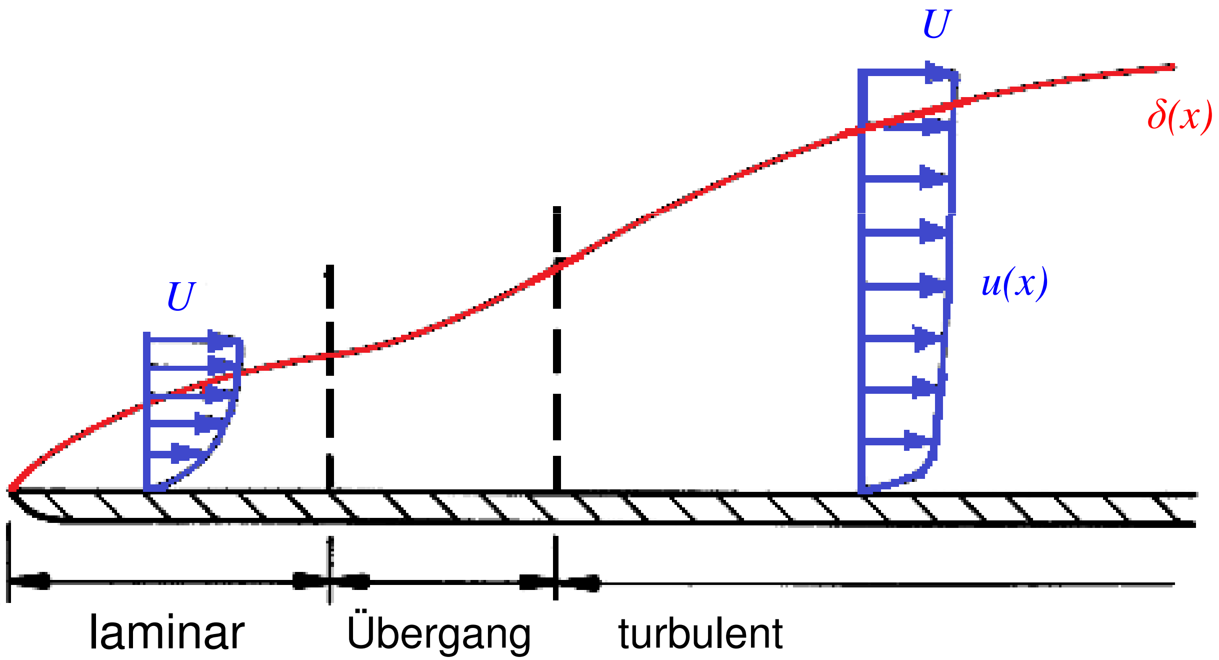
wobei $$c_D = \frac{1}{L}\int_0^L c_f \, dx$$

Turbulente Grenzschichten

Vgl. Blasius-Experiment bis $x \leq x_{kr}$ bzw. $\mathrm{Re}_x \leq \mathrm{Re}_{kr}$ OK !

$\mathrm{Re}_x > \mathrm{Re}_{kr}$ Übergang laminar → turbulent

$\mathrm{Re}_{x\,kr} = f$ (Oberfläche, Geometrie der Vorderkante; U' , V' ; etc.)



längsangeströmte ebene Platte : $\mathrm{Re}_{kr} \approx 5 \cdot 10^5$

laminare Grenzschicht : $\delta \sim x^{1/2}$

$\tau_0 \sim U^{3/2}$

turbulente Grenzschicht : $\delta \sim x^{4/5}$

$\tau_0 \sim U^{7/4}$

Grenzschichtgleichungen der turbulenten Strömung

Erhaltungsgleichungen gültig für laminare und turbulente Strömungen ;

jedoch : Auflösung aller Skalen „unmöglich“

$\Rightarrow$ Strömung wird durch gemittelte Größen beschrieben

$\Rightarrow$ **Reynolds Mittelung**

hier : zeitliche Mittelung

Zerlegung nach Reynolds (siehe turbulente Rohrströmung)

$$f = \bar{f} + f'$$

mit

$$\bar{f} = \frac{1}{T}\int_{t}^{t+T} f(x, y, z, t)\,dt$$ zeitlicher Mittelwert

f' : Schwankungsanteil

Erhaltungsgleichungen in Divergenzform für inkompressibles Fluid

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \nabla^2 u$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \nabla^2 v$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \nabla^2 w$$

Kontinuitätsgleichung :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{\bar{u}+u'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{\bar{v}+v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{\bar{w}+w'}\right)=$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w'}}{\partial z}=$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=0$$

x-Impulsgleichung :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overline{\rho\left(\bar{u}+u'\right)}\right]+\frac{\partial}{\partial x}\left[\overline{\rho\left(\bar{u}+u'\right)^2}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{\rho\left(\bar{u}+u'\right)\left(\bar{v}+v'\right)}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{\rho\left(\bar{u}+u'\right)\left(\bar{w}+w'\right)}\right]$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}\overline{\left(\bar{p}+p'\right)}+\eta\nabla^2\overline{\left(\bar{u}+u'\right)}$$

$$\frac{\partial \rho\bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho\left(\bar{u}^2+\underline{\underline{\overline{u'^2}}}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho\left(\bar{u}\bar{v}+\underline{\underline{\overline{u'v'}}}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho\left(\bar{u}\bar{w}+\underline{\underline{\overline{u'w'}}}\right)\right]$$

$$=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\eta\nabla^2\bar{u}$$

denn :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho 2\overline{\bar{u}u'}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left[\overline{\rho\left(\bar{u}v'+u'\bar{v}\right)}\right], \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left[\overline{\rho\left(\bar{u}w'+u'\bar{w}\right)}\right], \qquad \overline{\frac{\partial p'}{\partial x}}, \nabla^2\overline{u'} \to 0$$

y-Impuls , z-Impuls ebenso $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{gathered}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=0 \\[2ex]
\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\eta\nabla^2\bar{u}-\rho\left[\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right] \\
\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\eta\nabla^2\bar{v}-\rho\left[\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\right] \\
\rho\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right)=-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\eta\nabla^2\bar{w}-\rho\left[\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right]
\end{gathered}}$$

die gemittelten Produkte der turbulenten Schwankungsgrößen ergeben den turbulenten oder Reynoldsschen Spannungstensor.

$$\begin{pmatrix} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_{zz} \end{pmatrix} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{u'v'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{u'w'} & \overline{v'w'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix}$$

$-\rho\overline{f'g'}$: Reynolds- oder scheinbare Spannungen

turbulente Strömung :

Gesamtspannung = visk. Spannung + turbulente Spannung

i. a. gilt : turbulente Spannung >> visk. Spannung

Vereinfachung obiger Erhaltungsgleichungen mittels

- ebene Strömung $\quad \overline{w} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \rightarrow 0$
- Grenzschichtannahme $\quad \frac{\partial}{\partial x} << \frac{\partial}{\partial y}$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0$$

$$\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\frac{\partial u}{\partial y} - u'v'\right]$$

Grenzschichtgleichungen turbulenter Strömungen

zusätzlicher Term : $-\rho\,\overline{u'v'}$

Randbedingungen analog zur laminaren Strömung

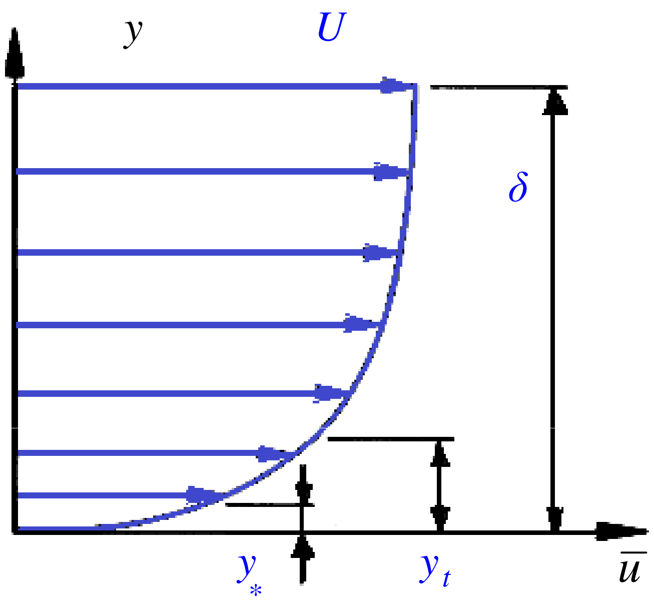
Schließung des Gleichgewichtssystems durch die Prandtlsche Mischungsweghypothese

$$\tau_t = -\rho\overline{u'v'} = \rho l^2\left|\frac{d\overline{u}}{dy}\right|\frac{d\overline{u}}{dy} = \eta_t\frac{d\overline{u}}{dy}$$

$l = f$ (charakteristische Länge)

Turbulente Plattengrenzschicht

Annahme : Grenzschicht ist turbulent ab $x = 0$ $u(y)_{GS}$ vergleichbar mit $u(y)_{Rohr}$



zähe Unterschicht $y < y_*$

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} \text{ mit } u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

log. Schicht $y_* < y$

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = 2.5 \ln \frac{y u_*}{\nu} + C$$ univers. Wandgesetz

Achtung : das universelle Wandgesetz gilt nicht in Wandnähe $y < y_*$

äußerer Grenzschichtbereich

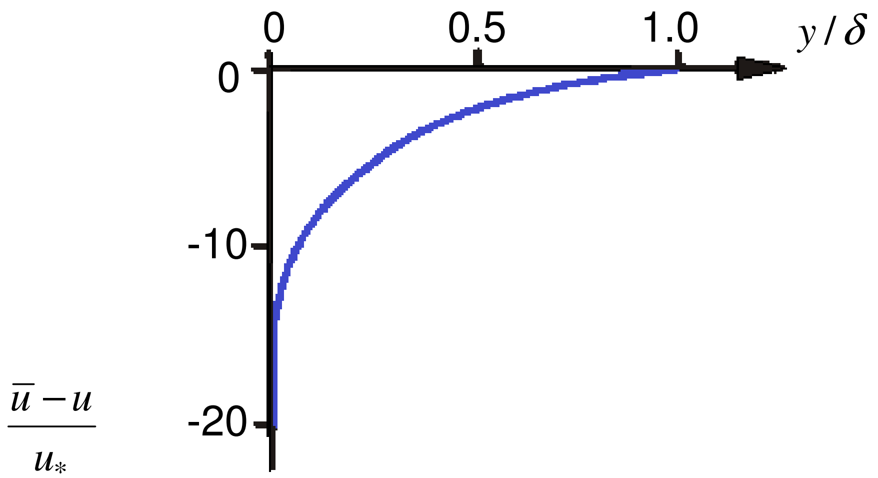
$y_* << y \leq \delta$ Abnahme der turbulenten Spannungen

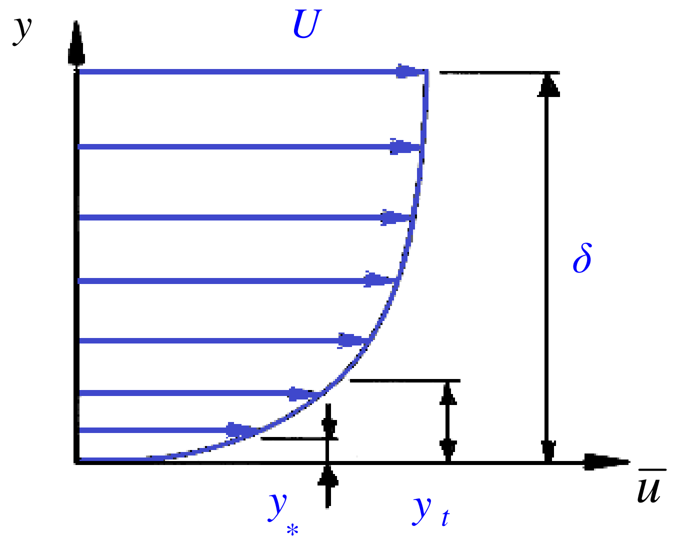
$U - \overline{u} \sim \tau_w \;\; bzw. \;\; u_* \quad \Rightarrow$

$$\frac{U - \overline{u}}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$f\left(\frac{y}{\delta}\right) : ?$ Annahme : universelles Wandgesetz gilt im Außenbereich

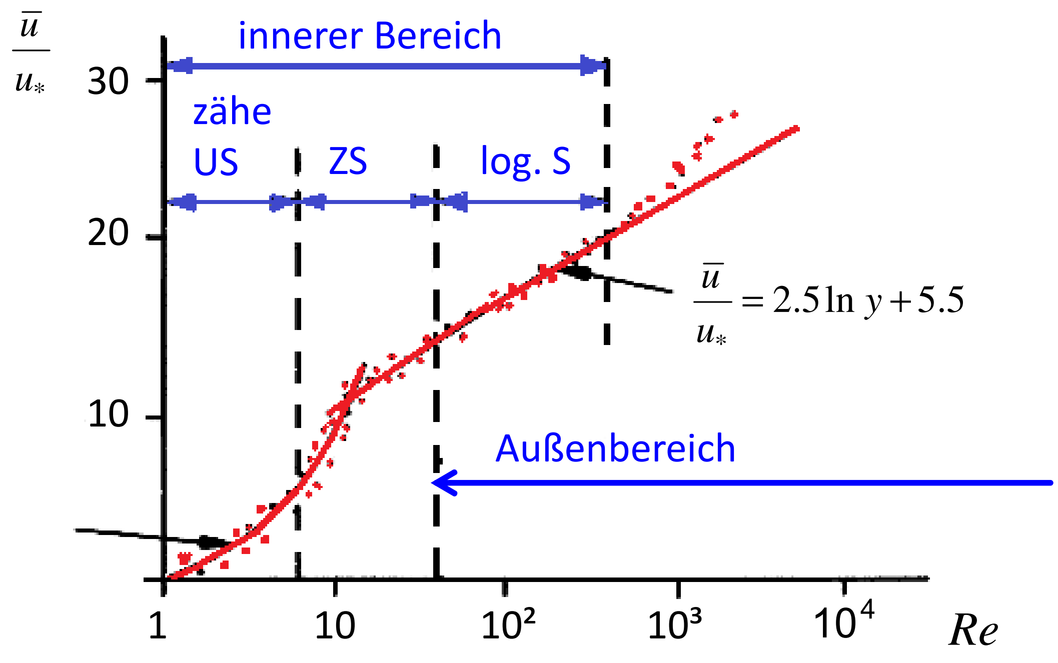
nach Prandtl : $f\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{\delta}$





Zusammenfassung :

$0 \le y \le y_*$	zähe Unterschicht
$y_* < y < y_t$	Übergangsschicht
$y_t \le y \le \delta$	Außenbereich



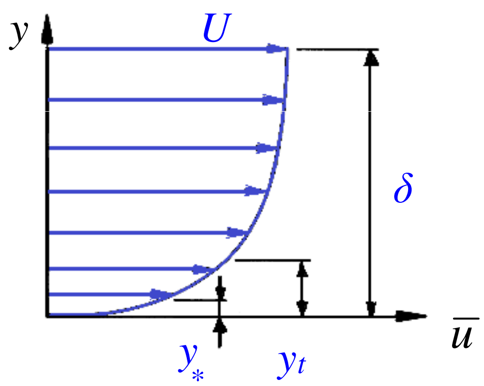
Herleitung des logarithmischen Gesetzes mittels Dimensionsbetrachtungen

- Geschwindigkeitsprofil in Wandnähe

$$\overline{u} = \overline{u}(u_*, y, \nu)$$

π – Theorem : 4 Var. , 2 Ref. dim.

$$\Rightarrow \qquad \frac{\overline{u}}{u_*} = f\left(\frac{u_* y}{\nu}\right) = f(y^+)$$



zähe Unterschicht :

$$\tau_w = \eta \frac{d\overline{u}}{dy}$$

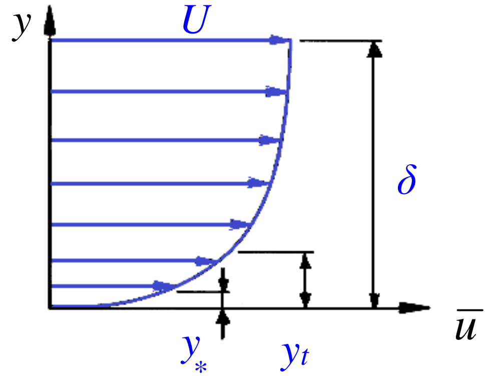
$$\overline{u} = \frac{y\tau_w}{\eta} = \frac{y\rho u_*^2}{\eta}$$

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu} = y_+$$

Außenbereich :

$$\overline{u} - U \sim u_*$$

$$\frac{\overline{u} - U}{u_*} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) = g(\zeta)$$

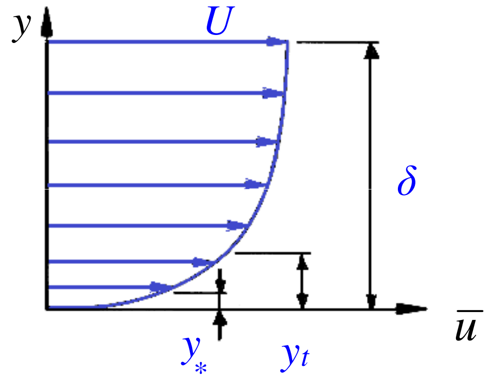


Gebiet zwischen Innen- und Außenbereich :

$$\frac{d\overline{u}}{dy} \text{ für } y_+ \to \infty$$

$$\zeta \to 0$$

$$\Rightarrow \quad f(y_+) \text{ und } g(\zeta)$$



Innenbereich :

$$\frac{d\overline{u}}{dy} = u_* \frac{dy_+}{dy} \frac{df}{dy_+} = \frac{u_*^2}{\nu} \frac{df}{dy_+}$$

Außenbereich :

$$\frac{d\overline{u}}{dy} = u_* \frac{dg}{d(y/\delta)} \frac{d(y/\delta)}{dy} = \frac{u_*}{\delta} \frac{dg}{d(y/\delta)}$$

$$\left.\frac{d\bar{u}}{dy}\right|_{Innen} = \left.\frac{d\bar{u}}{dy}\right|_{Außen}$$

$$\frac{u_*^2}{\nu}\frac{df}{dy_+} = \frac{u_*}{\delta}\frac{dg}{d\zeta} \qquad \left|\cdot \frac{y}{u_*}\right.$$

$$y_+\frac{df}{dy_+} = h(y_+) = \zeta\frac{dg}{d\zeta} = r(\zeta)$$

$\Rightarrow$ konstant $\overset{!}{=} \dfrac{1}{k}$

$$\Rightarrow \quad f(y^+) = \frac{1}{k}\ln y_+ + \alpha$$

$$g(y/\delta) = \frac{1}{k}\ln(y/\delta) + \beta$$

Experiment : $k = 0.4$, $\alpha = 5.5$, $\beta = -1.0$

y_+ groß : $\dfrac{\bar{u}}{u_*} = 2.5\ln y + 5.5$ (log. Gesetz)

$\zeta = \dfrac{y}{\delta}$ klein : $\dfrac{\bar{u} - U}{u_*} = 2.5\ln(\dfrac{y}{\delta}) - 1.0$ (Defektverteilung)

Näherung von $\bar{u}\,(y)$ mittels

$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}$$

Vgl. mit Experiment → $n = 7$ $\quad\Rightarrow$

Verdrängungsdicke δ_1

$$\delta_1 = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{\delta}{8}$$

Impulsverlustdicke δ_2

$$\delta_2 = \delta \int_0^1 \frac{\bar{u}}{U}\left(1 - \frac{\bar{u}}{U}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{7}{72}\delta$$

! $\dfrac{\bar{u}}{U} = \left(\dfrac{y}{\delta}\right)^{1/7}$ nicht gültig bei $y = 0$!

$\Rightarrow$ τ_w aus der turbulenten Rohrströmung

Mit $\lambda = \dfrac{0.316}{\sqrt[4]{\dfrac{\bar{u}d}{\nu}}}$ in $\lambda = \dfrac{8\tau_w}{\rho\bar{u}^2}$ und $\dfrac{\bar{u}}{U} = 0.8$ folgt

$$\frac{U}{u_*} = 8.74\left(\frac{u_* R}{\nu}\right)^{1/7}$$

$$\Rightarrow \qquad u_* = 0.150\, U^{7/8}\left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{1/8} \qquad \text{bzw.}$$

$$\tau_w = \rho u_*^2 = 0.0225 \rho U^{7/4}\left(\frac{\nu}{\delta}\right)^{1/4}$$

v. Karmansche Integralbeziehung

$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \underline{\underline{0.0225\left(\frac{\nu}{\delta U}\right)^{1/4}}}$$

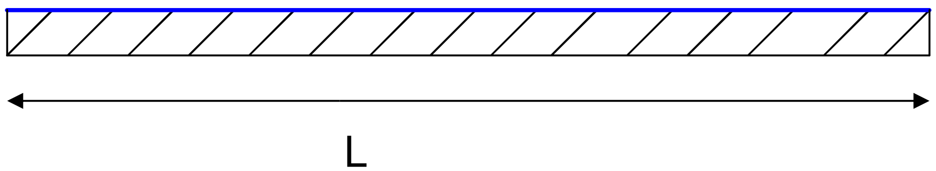
$$\longrightarrow \qquad \frac{7}{72}\frac{d\delta}{dx} = \frac{d\delta_2}{dx}$$

$$\boxed{\frac{\delta(x)}{x} = \frac{0.37}{\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{1/5}} = \frac{0.37}{(\mathrm{Re}_x)^{1/5}}}$$

D. h. $\delta \sim x^{4/5}$ turbulente Grenzschicht

$\delta \sim x^{1/2}$ laminare Grenzschicht

Reibungskraft auf einer Seite



$$D = \int_0^L \tau_0 dx = 0.036 \rho U^2 \frac{L}{(\mathrm{Re}_L)^{1/5}}$$

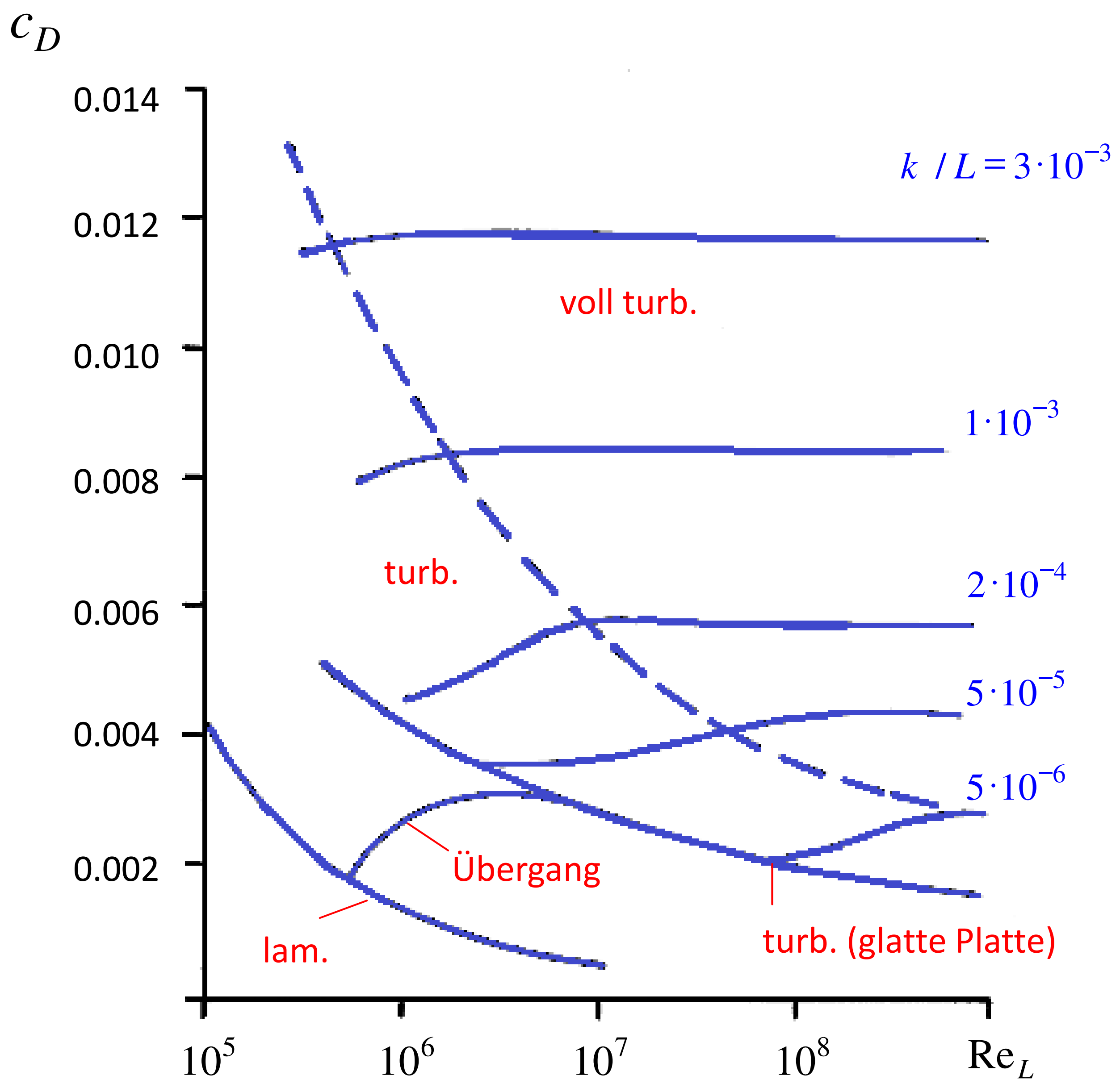
$$\Rightarrow D \sim L^{4/5} \quad bzw. \quad D \sim U^{9/5}$$

$$\left[\text{lam.: } D \sim L^{1/2} \quad bzw. \quad D \sim U^{3/2}\right]$$

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 L} = \frac{0.072}{(\mathrm{Re}_L)^{1/5}} \quad \text{bzw} \quad c_D = \frac{0.074}{(\mathrm{Re}_2)^{1/5}} \quad \text{(Exp.)}$$

allgemein : $c_D = f(\mathrm{Re}_2, k/L)$

bzw $c_D = f(k/L)$ für Re_L sehr groß !



c_D
0.014
0.012
0.010
0.008
0.006
0.004
0.002
$k\ /L = 3\cdot10^{-3}$
$1\cdot10^{-3}$
$2\cdot10^{-4}$
$5\cdot10^{-5}$
$5\cdot10^{-6}$
voll turb.
turb.
Übergang
lam.
turb. (glatte Platte)
10^5
10^6
10^7
10^8
Re_L

Zum Diagramm :

Übergangsbereich :

$$c_D = \frac{0.074}{\sqrt[5]{\mathrm{Re}_L}} - \frac{1700}{\mathrm{Re}_L}$$

glatte Platte :

$$c_D = \frac{0.455}{(\log \mathrm{Re}_L)^{2.58}}$$

voll turbulentes Gebiet :

$$c_D = \left[1.89 - 1.62 \log(k / L)\right]^{-2.5}$$

Bemerkungen zur Turbulenz

vorteilhaft :

$\longrightarrow$ Wärmeübergang zwischen Wand und Fluid

- Klimaanlagen
- Kessel im Kraftwerk

$\longrightarrow$ Vermischung von Fluiden

- Rauch aus Schornsteinen

laminare Strömung wünschenswert :

$\longrightarrow$ Druckverlust der Rohrströmung

$\longrightarrow$ Widerstand eines Tragflügels

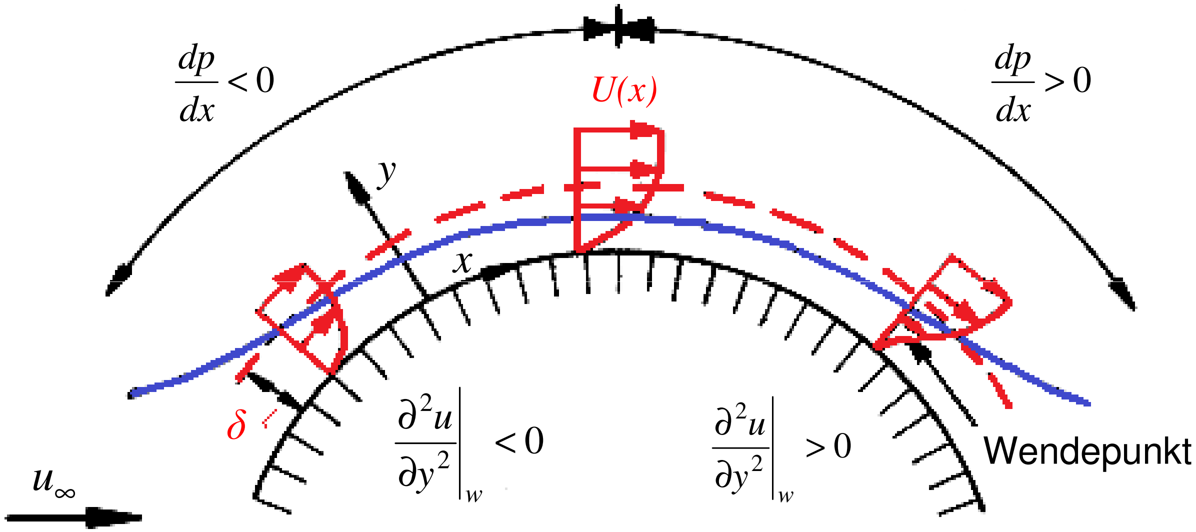
jedoch : Vermeidung von Ablösung in turbulenten Strömungen

$\Longrightarrow$ größerer Auftrieb als mit Ablösung

Grenzschichtablösung

Einfluss des Druckgradienten

ebene Platte : $\dfrac{dp}{dx} = 0$



Auswirkungen von $\dfrac{dp}{dx}$ auf $u(y)$?

Grenzschichtgleichung (x-Impuls):

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Grenzschichtablösung









weiterhin :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{dU}{dx}$$

Wand $\quad y = 0: \qquad u = v = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dx} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$\frac{dp}{dx} < 0$ (beschleunigte Strömung) : $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{Wand} < 0$

nahe dem Grenzschichtrand δ gilt : $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$ mit

$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta} \to 0$ folgt $\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=\delta} < 0$

$\Rightarrow$ **kein** Vorzeichenwechsel von $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ in $0 \le y \le \delta$ (i. a.)

$$\frac{dp}{dx} > 0 \text{ (verzögerte Strömung) } : \left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{Wand} > 0$$

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel zwischen $0 \leq y \leq \delta$

$\longrightarrow$ $u\,(y)$ hat Wendepunkt, in dem $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

Bemerkung : ebene Platte : $\left.\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{y=0} = 0$

$$\frac{dp}{dx} > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta(x) \text{ wächst deutlich an, denn } \quad v(x,y) = -\int_0^y \frac{\partial u}{\partial x}\,dy$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x} \uparrow \;\Rightarrow\; v \uparrow \;\Rightarrow\; \delta \uparrow$$

Mit $\dfrac{dp}{dx} > 0$ ist i. a. die Ablösung der Strömung verbunden.

Ablösung

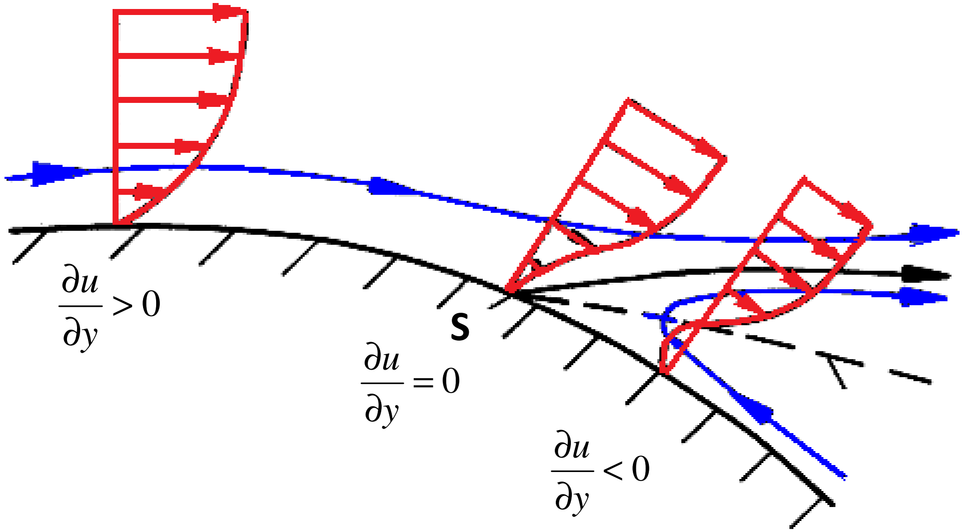
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{in} \quad 0 \le y \le \delta$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{y=y_w+\varepsilon} < 0 \quad \text{aufgrund von} \quad \frac{dp}{dx} > 0$$

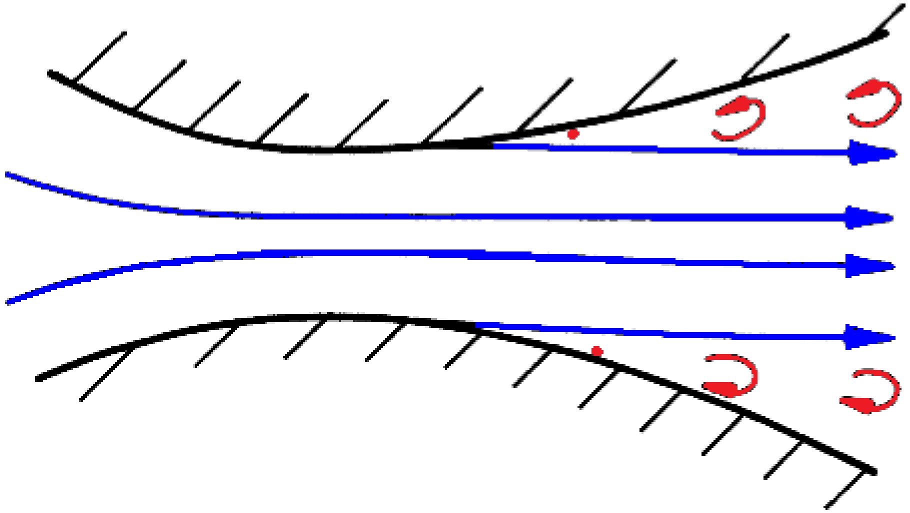
sofern $\frac{dp}{dx} > 0$ groß, folgt : $u_1(x_1, y_w + \varepsilon) > 0$, $u_2(x_1 + \varepsilon, y_w + \varepsilon) < 0$

⟶ Strömungsablösung

Ablösepunkt : $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{Wand} = 0$



Ablösung bei externen und internen Strömungen



Die Grenzschichtgleichungen sind bis $x = x_S$ gültig ; für $x > x_S$ Grenzschichtannahmen im allgemeinen ungültig.

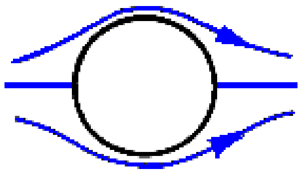
Strömung über einen Kreiszylinder

Ablösung $= f\,(Re)$ vor allem bei stumpfen Körpern

Analyse für den Kreiszylinder :

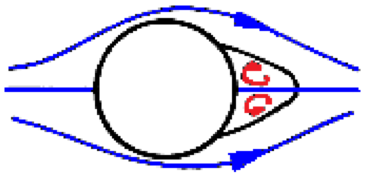
$$\mathrm{Re} = \frac{Ud\rho}{\eta}$$

$\mathrm{Re} < 4$: $c_D \sim \mathrm{Re}^{-1}$, keine Ablösung

(A) 

$\mathrm{Re} < 4$

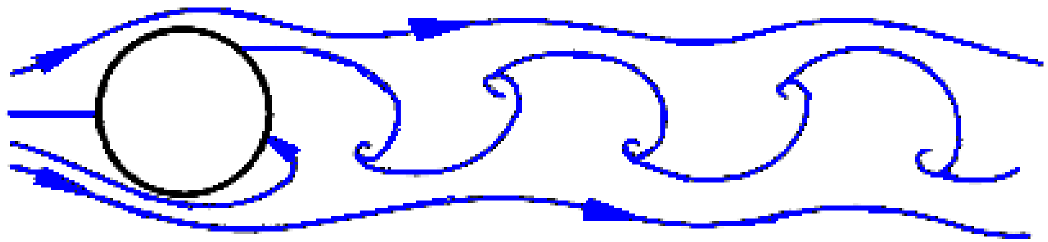
$4 < \mathrm{Re} < 40$: Bildung zweier anliegender Wirbel

(B) 

für $\mathrm{Re} > 40$: Nachlauf wird instabil; Geschwindigkeit ist periodisch in t und in x *(für $x > x_s$)*

$80 < \mathrm{Re} < 200$: 2 versetzte Wirbel im Nachlauf

(C)



$80 < \mathrm{Re} < 200$

→ von Kármánsche Wirbelstraße

$$u_{vor,ab} < U$$

40 < Re < 80 : anliegende Wirbel nicht Teil der Wirbelstraße.

Re > 80 : Wirbel $\Longrightarrow$ Oszillation des Zylinders.

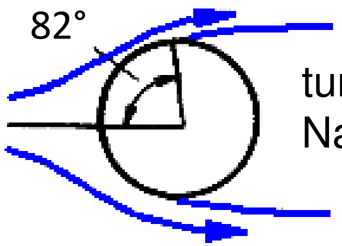
Strouhal Zahl : $Sr = f \dfrac{d}{U}$

dimensionslose Frequenz der abgehenden Wirbel :

$Sr = 0.21$ (Experiment, Numerik)

d klein, U klein → f im hörbaren Bereich

$\mathrm{Re} < 3\times10^5$: Ablösung bei ≈ 82°, Grenzschicht ist laminar

(D) 

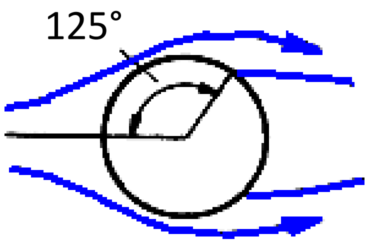
turb. Nachlauf

im Nachlauf : $p \approx konst. < p_\infty$

$\mathrm{Re} < 3\cdot10^5$

$3\times10^5 < \mathrm{Re} < 3\times10^6$: Grenzschicht ist turbulent, Ablösung bei ≈ 125°

⇒ Nachlauf wird schmaler

(E) 

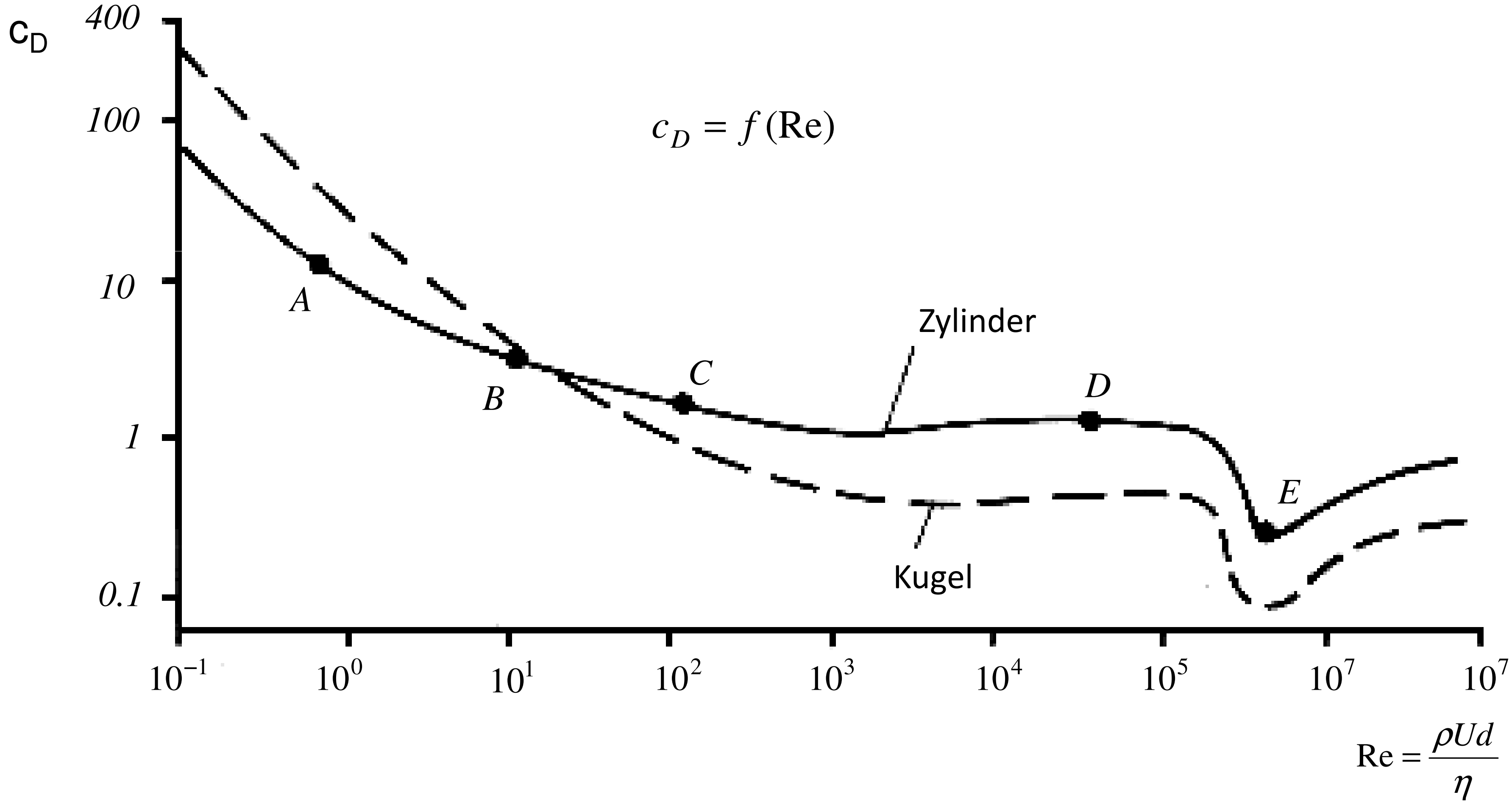
turb. Nachlauf

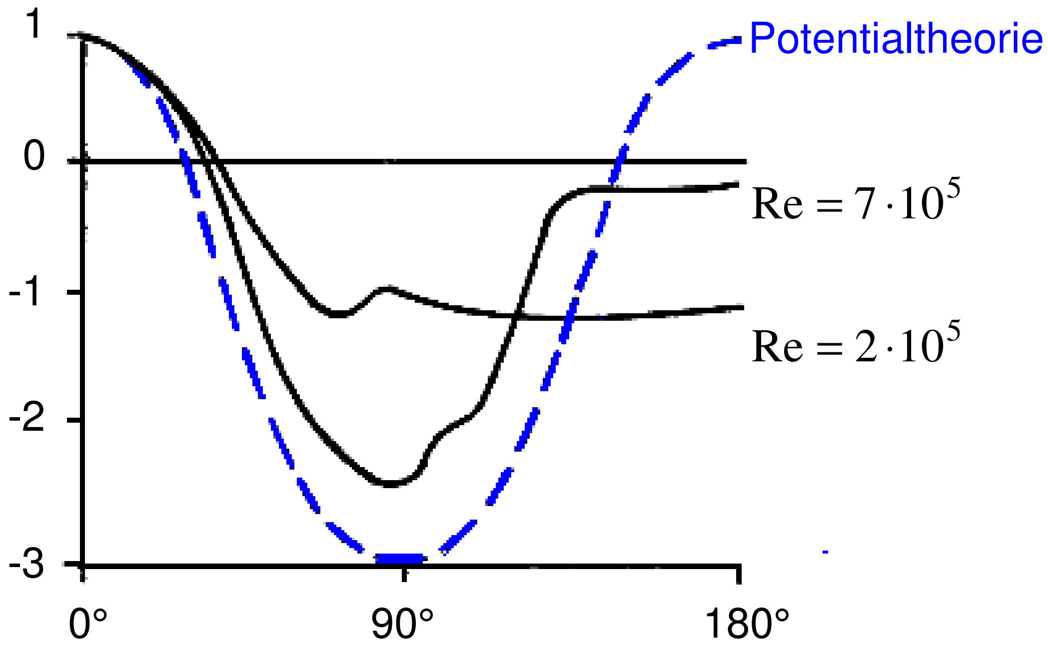
$\mathrm{Re} > 3\cdot10^5$

$\mathrm{Re} > 3 \times 10^6 \quad : \quad \Theta_s < 125°$

$\Rightarrow c_D$ steigt

$\mathrm{Re}_{krit} = f($Turb. in der Anströmung, Oberflächenrauhigkeit$)$





$c_p = f(\Theta), Zylinder$

Strömung über eine Kugel

Übergang 2D → 3D → deutliche Unterschiede

z. B. : keine reguläre Wirbelströmung

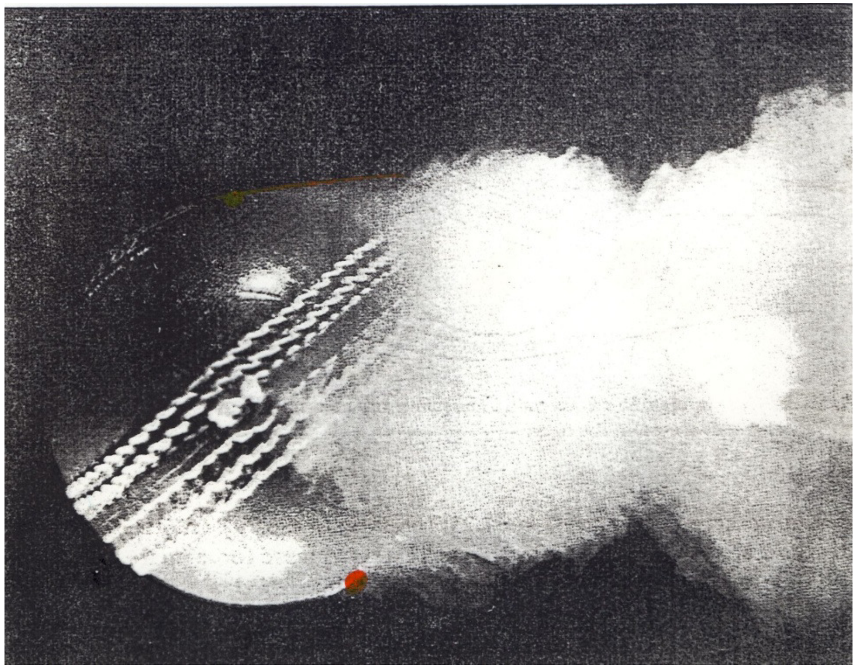
Re < 130 : anliegender Wirbelring

$\mathrm{Re} > 130$: Oszillationen beginnen, verzerrte Wirbelschleifen gehen ab

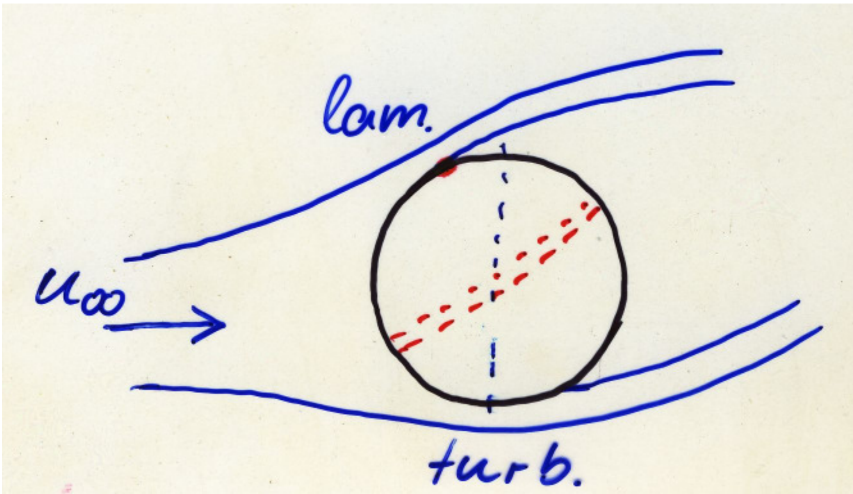
Verhalten der Grenzschicht wie beim Kreiszylinder ;

$$\mathrm{Re}_{krit} \approx 5 \times 10^5 \quad \text{(Kugel)}$$

Transition laminar – turbulent $\Rightarrow c_D$ sinkt

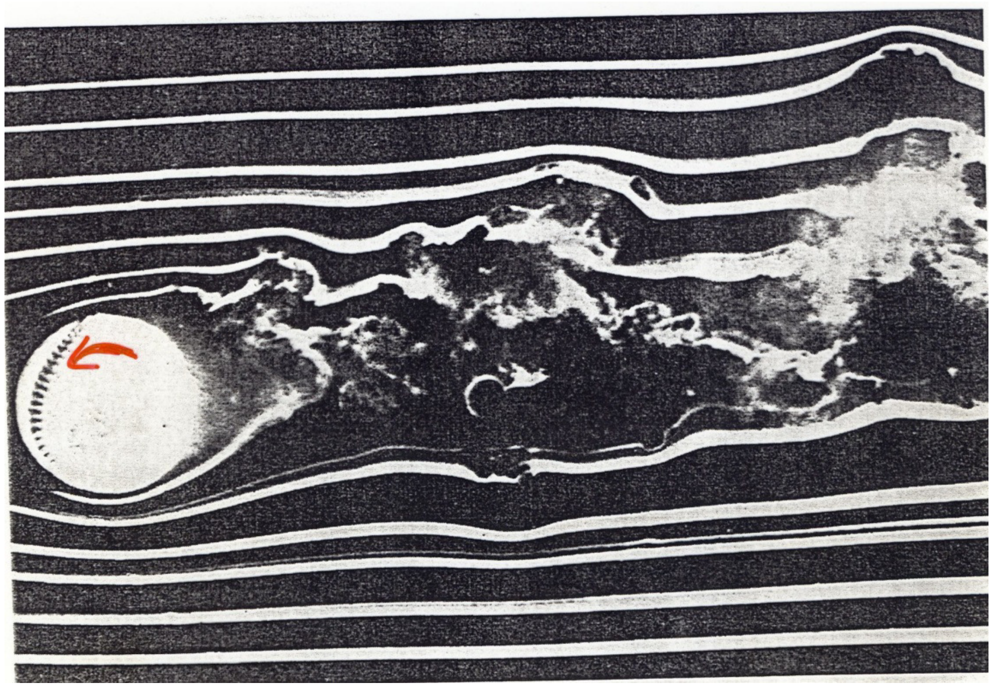


Strömung über einen Kricketball ;

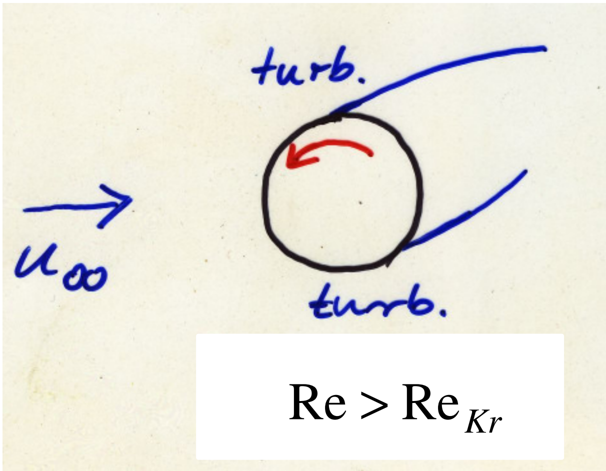


$$\mathrm{Re} \approx 10^5$$

Richtung der Seitenkr.



Strömung über einen rotierenden Baseball ,



Richtung der Seitenkr.

Kompressible Strömungen









Kompressible Strömungen

bisher : dichtebeständige Fluide

im folgenden : dichteveränderliche bzw. kompressible Fluide

→ Gasdynamik

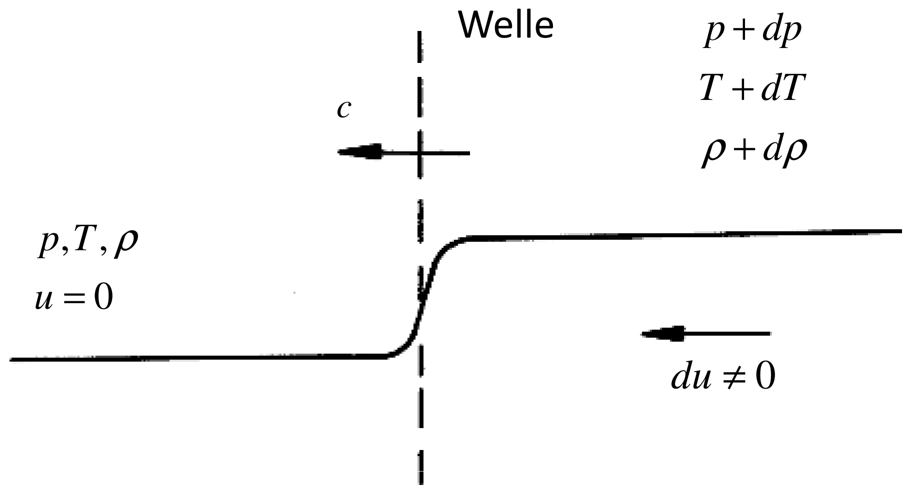
Beschränkung : stationäre, 1-D , reibungsfreie, kompressible Strömungen idealer Gase

Schallgeschwindigkeit

inkompressible Strömung : p-Störung überall, sofort messbar

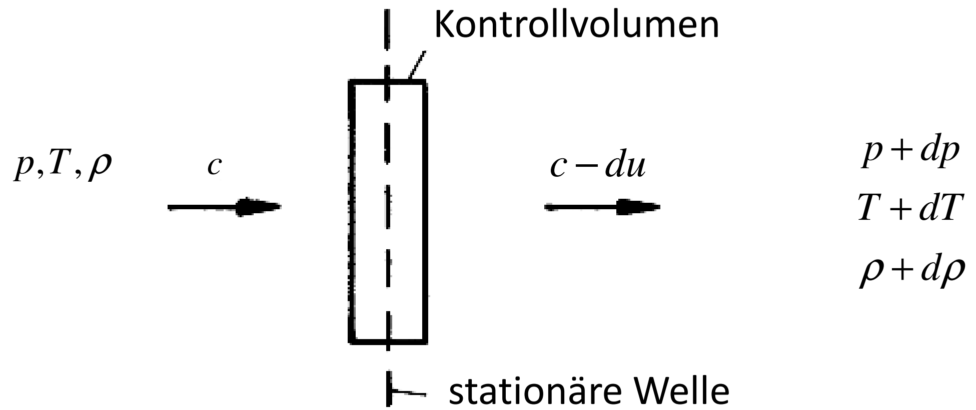
kompressible Strömung : p-Störung breitet sich als elastische Welle aus akustische oder Schallwelle : Wellen mit infinitesimaler Amplitude

Bestimmung der Schallgeschwindigkeit :



instat. Problem für den ruhenden Beobachter

stat. Problem durch Überlagerung mit Geschwindigkeit c in entgegengesetzter Richtung



$\dot{m}$ über die Fläche A des Kontrollvolumens

$$
\begin{aligned}
A\rho c &= A(\rho + d\rho)(c - du) \\
&= A\rho c + Acd\rho - A\rho du \\
&\qquad\qquad\qquad - \underbrace{Ad\rho du}_{\text{vernachlässigbar}}
\end{aligned}
$$

$$\longrightarrow \qquad du = c\frac{d\rho}{\rho}$$

Kompression : $d\rho > 0 \quad \rightarrow \quad du > 0$

Expansion : $d\rho < 0 \quad \rightarrow \quad du < 0$

Impuls : $A\rho c(c - du) - A\rho cc = pA - (p + dp)A$

$$dp = \rho c du$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c^2 = \frac{dp}{d\rho}}$$

Amplitude der Welle ist infinites. $\Longrightarrow$ isentrope Zustandsänderung der Teilchen

$$\longrightarrow \quad c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=konst.}$$

+ Isentropenbeziehung : $p/\rho^{\gamma} = konst.$

+ Gasgleichung : $p = \rho RT$

$$\longrightarrow \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s=konst.} = \gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho^{\gamma}}\gamma\rho^{\gamma-1} = \frac{p}{\rho}\gamma = \gamma RT$$

bzw.

$$c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}$$

Luft , $15\ °C,\ c = 340\ m/s$

Luft , $20\ °C,\ c = 343\ m/s$

Kompressibilitätseffekte von Bedeutung ?

Antwort mittels $M = \frac{u}{c}$

Kontinuitätsgleichung (1D) :

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

inkompressibel, sofern

$$u\frac{\partial \rho}{\partial x} << \rho\frac{\partial u}{\partial x}$$

bzw.

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} << \frac{\Delta u}{u}$$

Schallgeschwindigkeit :

$$\Delta p \approx c^2 \Delta\rho$$

Euler (1D) :

$$u\Delta u \approx \frac{\Delta p}{\rho}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\Delta\rho}{\rho} \approx \frac{u^2}{c^2}\frac{\Delta u}{u} = M^2 \frac{\Delta u}{u}$$

D.h. : $M^2 << 1$ $\quad$, d.h. $\dfrac{\Delta\rho}{\rho}$ sehr klein

inkompressibel : $M \leq 0.3$

kompressibel : $M > 0.3$

Einteilung kompressibler Strömungen :

$0.3 < M < 1$: subsonische Strömung

$0.8 < M < 1.2$: transonische Strömung

$1 < M < 3$: supersonische Strömung

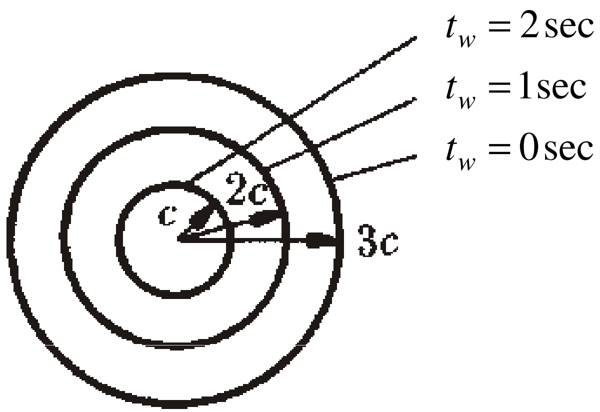
$M > 3$: hypersonische Strömung

Sofern $M > 1$ ist das Ausbreitungsgebiet von Strömungen begrenzt.

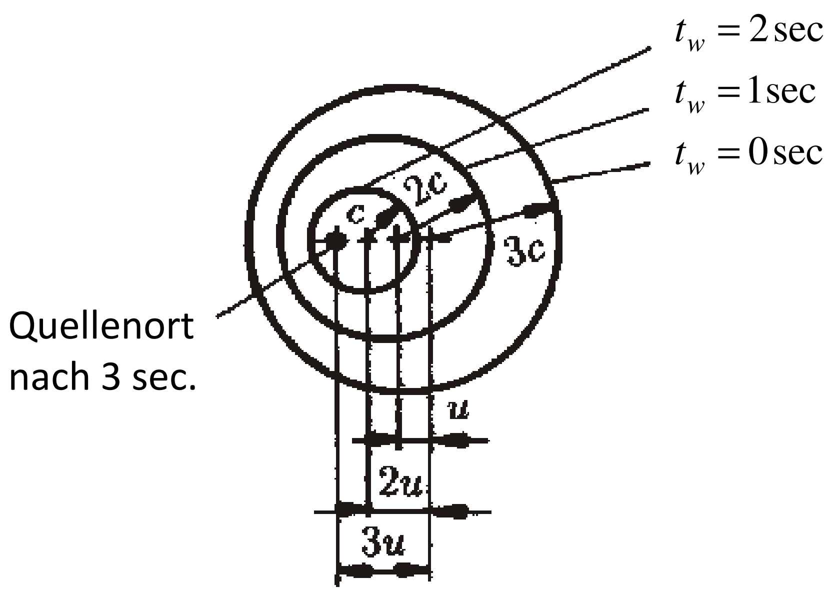
→ Machkegel

Druckwelle wird bei $t = t_w$ initiiert

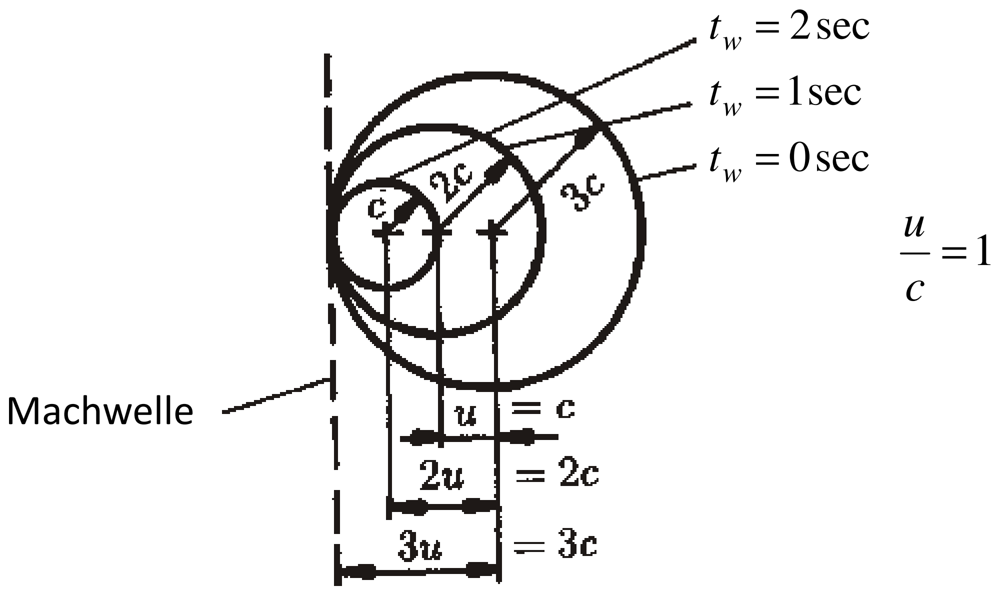
Radius $r = (t - t_w)c$



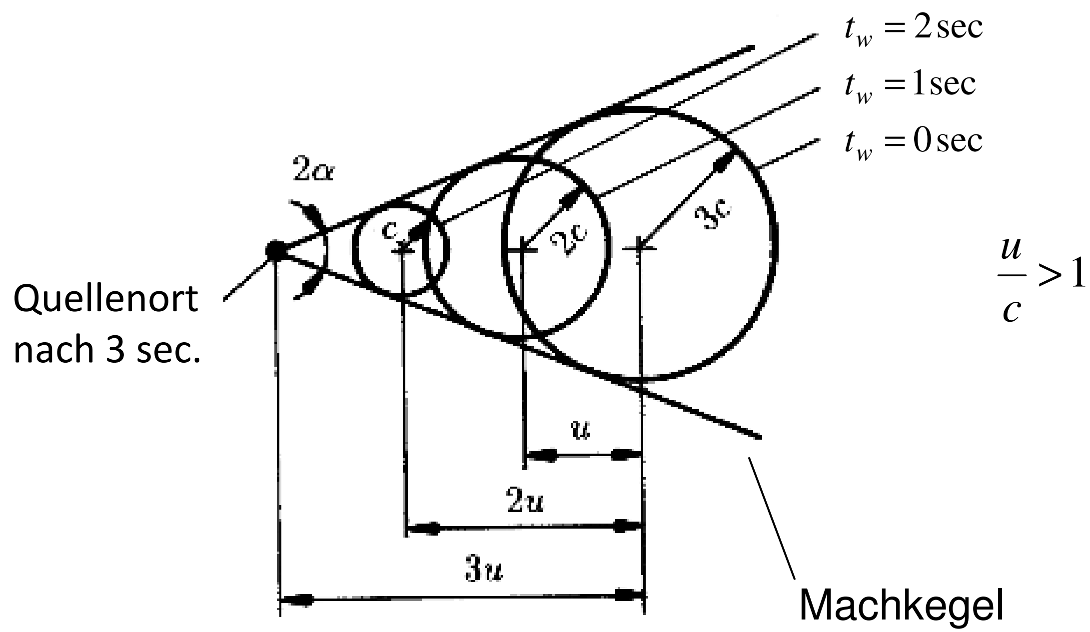
$u = 0$



$\frac{u}{c} < 1$



$t_w = 2\,\mathrm{sec}$
$t_w = 1\,\mathrm{sec}$
$t_w = 0\,\mathrm{sec}$
c
$2c$
$3c$
Machwelle
$u = c$
$2u = 2c$
$3u = 3c$
$\frac{u}{c} = 1$

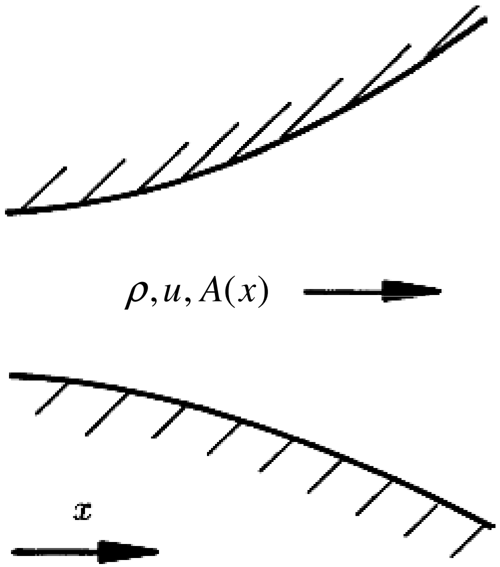


$t_w = 2\,\mathrm{sec}$
$t_w = 1\,\mathrm{sec}$
$t_w = 0\,\mathrm{sec}$
2α
c
$2c$
$3c$
Quellenort
nach 3 sec.
u
$2u$
$3u$
Machkegel
$\frac{u}{c} > 1$

Öffnungswinkel des Machkegels

$$\sin\alpha = \frac{c}{u} = \frac{1}{M}$$

Flächen-Geschwindigkeits-Beziehung



isentrope Strömung durch ein Rohr

Kontinuitätsgleichung :

$$\dot{m} = \rho u A = konst.$$

Differentiation

$$\frac{d(\rho uA)}{\rho uA} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \frac{dA}{A} = 0$$

Euler (1D) :

$$u\ du = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{\rho} = -c^2\frac{d\rho}{\rho}$$

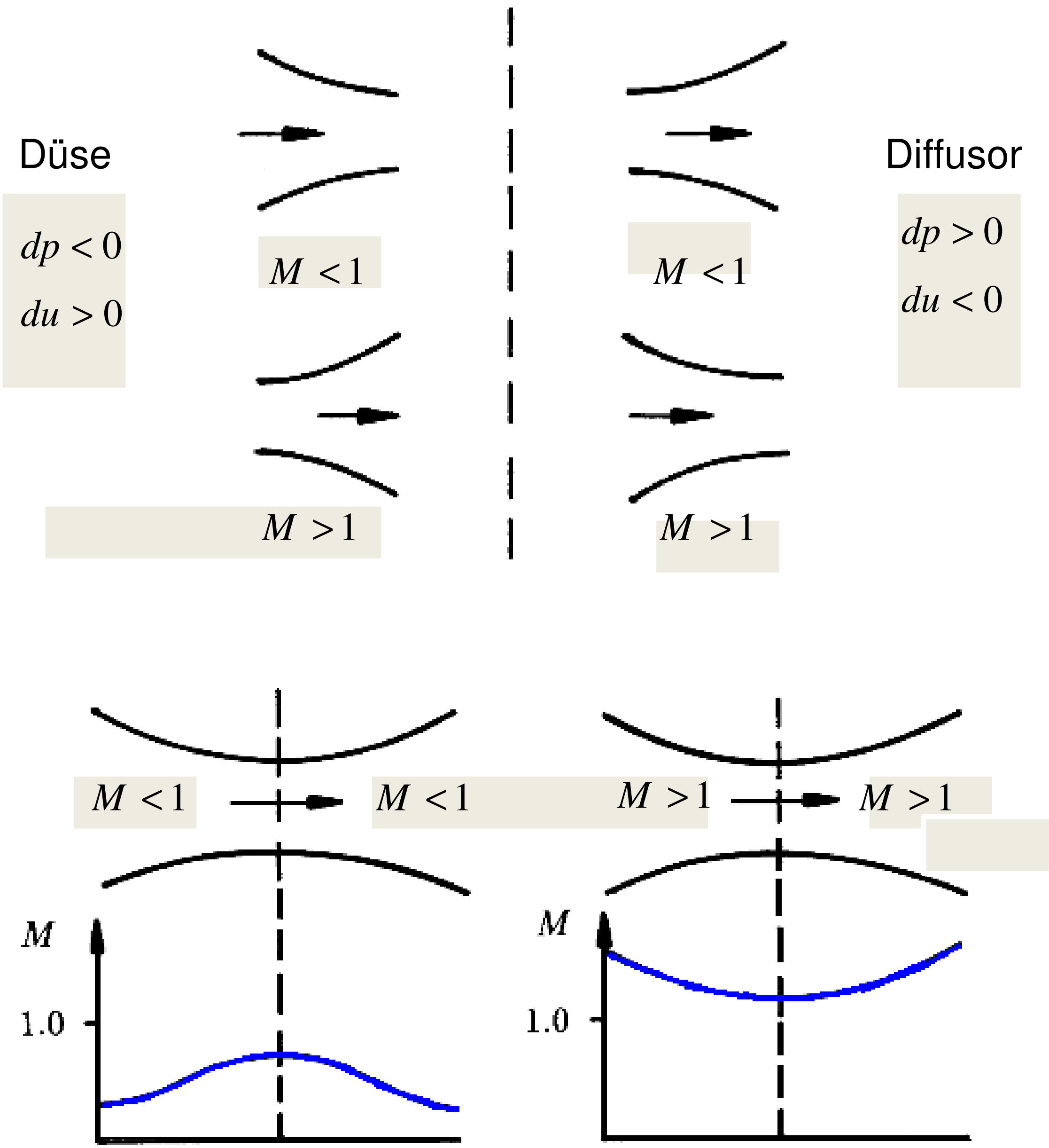
$$\Rightarrow \qquad \frac{d\rho}{\rho} = -M^2\frac{du}{u} \qquad\qquad \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{u^2}{c^2}\frac{du}{u}$$

bzw.

$$\boxed{\frac{du}{u} = -\frac{dA}{A}\frac{1}{1-M^2}}$$

Flächen-Geschwindigkeits-Beziehung

Daraus folgen interessante Konsequenzen der Kompressibilität bezüglich der Auswirkungen von Änderungen von $A(x)$ auf $u(x)$.


Düse
dp < 0
du > 0
M < 1
M > 1
M < 1
M > 1
Diffusor
dp > 0
du < 0
M < 1
M < 1
M > 1
M > 1
M
1.0
M
1.0

Ruhe- und kritische Größen

Ruhezustand : isentrope Verzögerung auf $\vec{v}=0$ dient als Referenzzustand

Energiegleichung im Ruhezustand :

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2}$$

ideales Gas : $h = c_p T$

$$c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2}$$

$$c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2 c_p T} = 1 + \frac{u^2}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma R T}$$

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

$$\frac{T_0}{T} = f(M)$$

Isentropenbeziehungen →

$$\frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left[1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = g(M)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = l(M)$$

in adiabater Strömung $\left\{h+\frac{u^2}{2}=konst.\right\}$ gilt für die Ruhegrößen

$$h_0 = konst. \quad , \quad T_0 = konst.$$

$$c_0 = \sqrt{\gamma R T_0} = konst.$$

Beziehung zwischen u und p :

$$c_p T + \frac{u^2}{2} = c_p T_0$$

$$u^2 = \frac{2\gamma}{\gamma-1} R T_0 \left(1-\frac{T}{T_0}\right)$$

$$u = \left\{\frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Vakuum : $p \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad u \rightarrow u_{\max}$

$$u_{\max} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Machzahl als $f(p)$:

$$M = \left(\frac{u^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{u^2}{\gamma RT} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{u^2}{\gamma \, p/\rho} \right)^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{2}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$p \rightarrow 0 \quad : \quad M \rightarrow \infty$$

konvergent-divergente Düse : bei geeignetem Gegendruck erhält man

$$M = 1$$

im Halsquerschnitt. Zustand ($M = 1$) wird als kritischer Zustand bezeichnet.

Für den kritischen Zustand, ebenfalls ein Referenzzustand, ergibt sich

$$c_p T_0 = c_p T^* + \frac{\gamma R T^*}{2} \quad ; \quad (\gamma = 1.4)$$

$$\frac{T^*}{T_0} = \frac{2}{\gamma+1} = 0.833$$

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = 0.528$$

$$\frac{\rho^*}{\rho_0} = \left(\frac{T^*}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 0.634$$

Beziehung $A^* / A = f(M, \gamma)$ mittels Kontinuitätsgleichung

$$\rho u A = \rho^* u^* A^*$$

$$\frac{A^*}{A} = \frac{\rho}{\rho^*} \frac{u}{u^*}$$

$$\frac{A^*}{A} = \underbrace{\frac{\rho}{\rho_0}}_{f(M)} \underbrace{\frac{\rho_0}{\rho^*}}_{f(\gamma)} \underbrace{\frac{u}{c} \frac{c}{c_0}}_{f(M)} \underbrace{\frac{c_0}{u^*}}_{f(\gamma)}$$

mit

$$\frac{\rho}{\rho_0}\frac{\rho_0}{\rho^*}=\frac{1}{\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}}$$

$$\frac{c}{c_0}\frac{c_0}{u^*}=\left(\frac{T}{T_0}\frac{T_0}{T^*}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{A^*}{A}=\frac{1}{\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M^2\right)\frac{2}{\gamma+1}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}=f(M,\gamma)$$

mit

$$\frac{\rho}{\rho_0}\cdot\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*}\left(\frac{T_0}{T^*}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

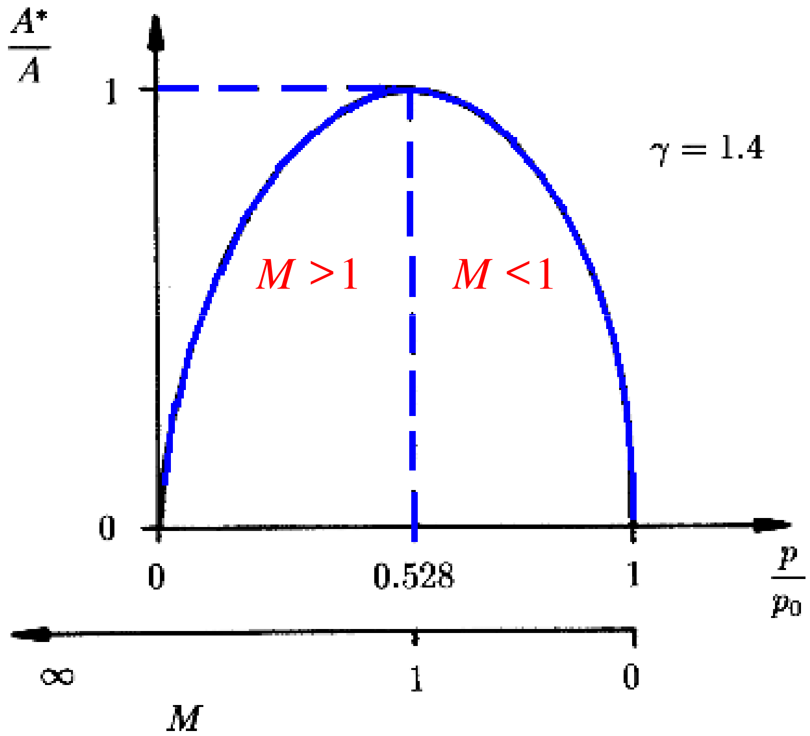
$$M=\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{A^*}{A}=\frac{\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\right]^{\frac{1}{2}}}=f\left(\gamma,\frac{p}{p_0}\right)$$

$$A^*/A \to 0 \quad \textit{für} \quad M \to 0 \quad \textit{bzw.} \quad p/p_0 \to 1$$

$$M \to \infty \qquad\qquad p/p_0 \to 0$$

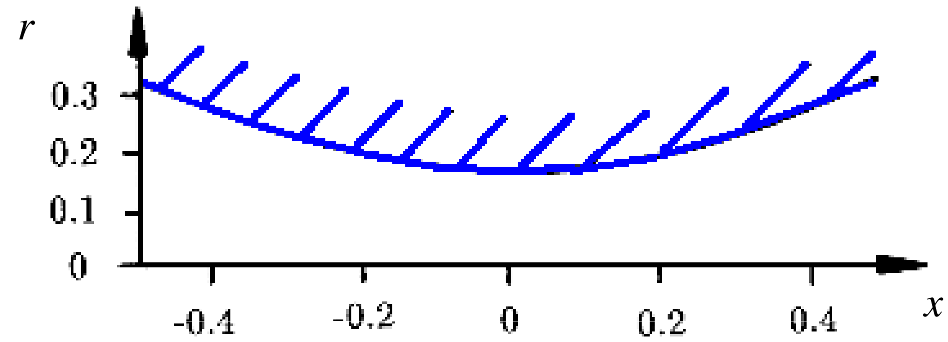
$$A^*/A \to 1 \quad \textit{für} \quad M \to 1 \quad \textit{bzw.} \quad p/p_0 \to 0.528$$

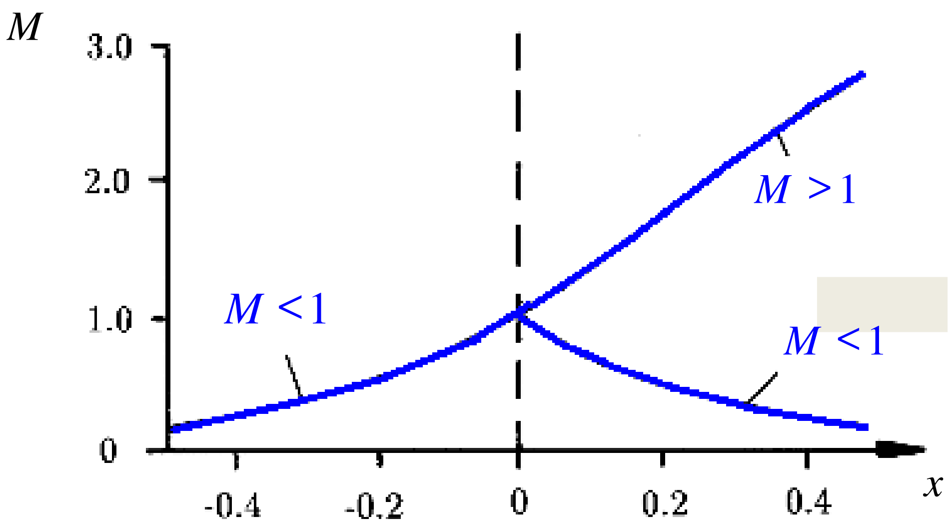


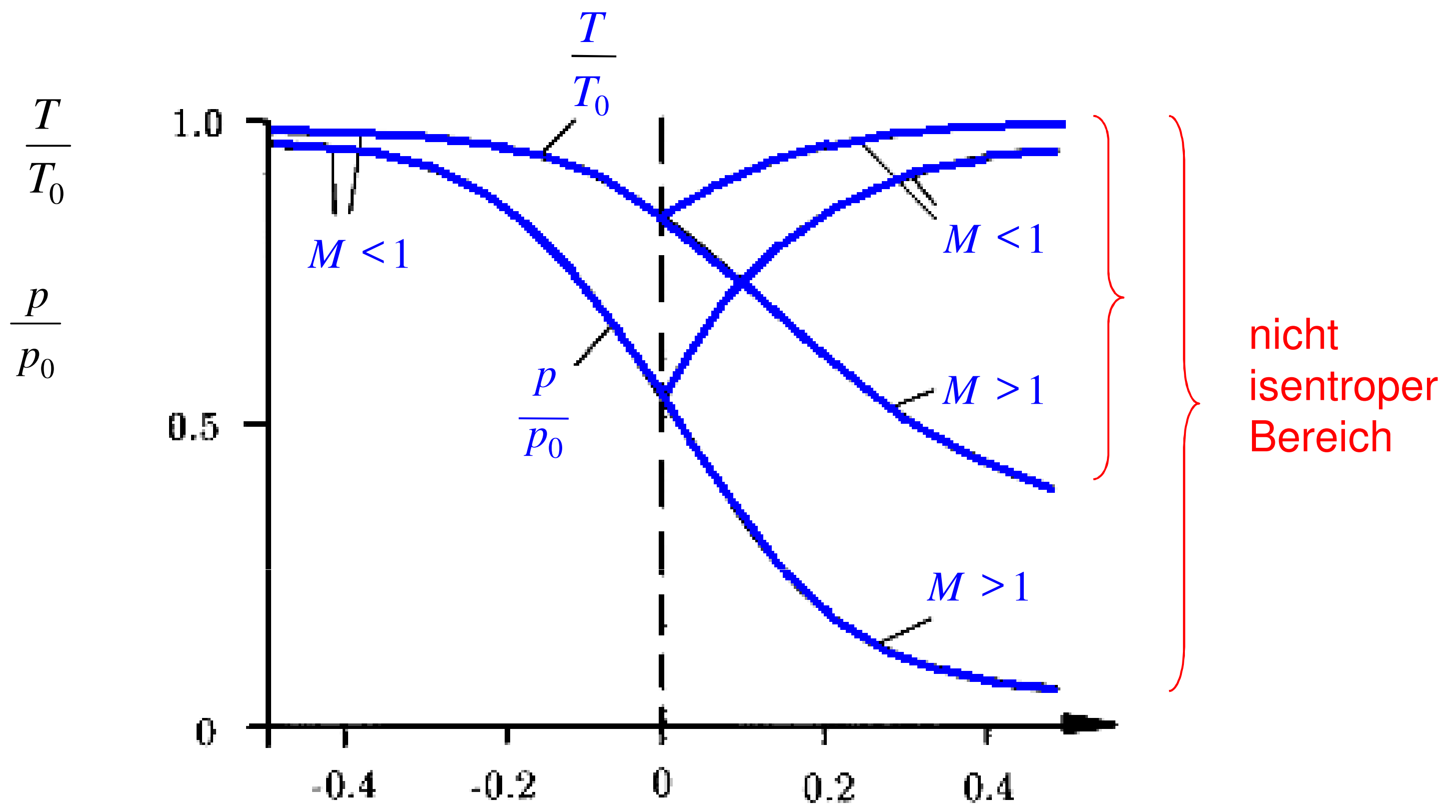
kritische Variable sind Referenzgrößen, wenn $M = 1$ Zustand isentrop erreicht wird.

A^*/A bekannt $\rightarrow$ $M, \dfrac{p}{p_0}, \dfrac{T}{T_0}$ Verlauf

z. Bsp. : $r = \left[\left(0.1 + x^2\right)/\pi\right]^{\frac{1}{2}}$







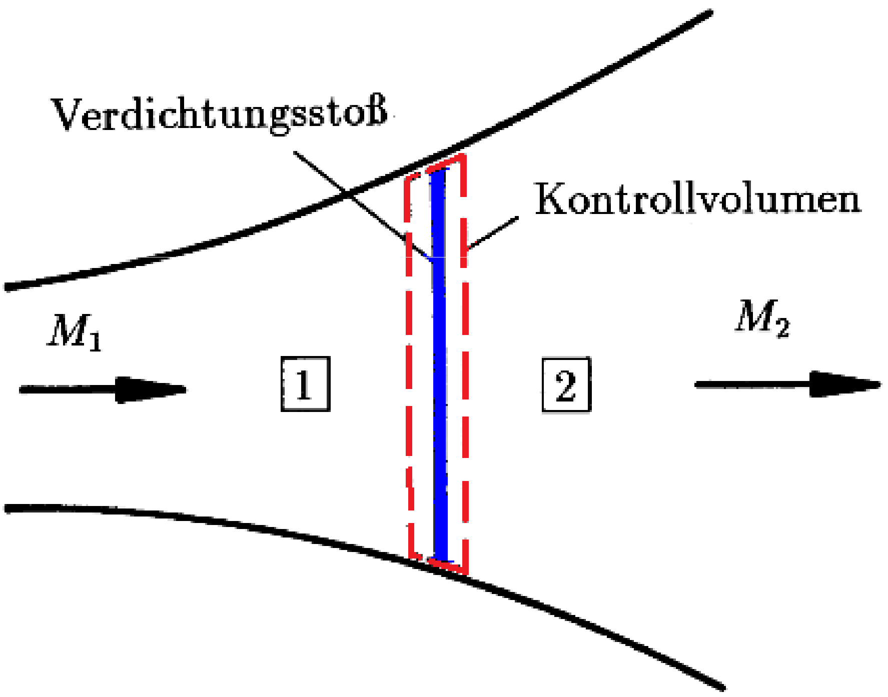
$\frac{T}{T_0}$
$\frac{p}{p_0}$
1.0
0.5
0
$M < 1$
$M < 1$
$M > 1$
$M > 1$
-0.4
-0.2
0
0.2
0.4
nicht
isentroper
Bereich

Der senkrechte Verdichtungsstoß

Verdichtungsstoß oder Stoßwelle ist eine Diskontinuität endl. Stärke ;

über diesen Stoß sind die Isentropenbeziehungen ungültig.

Zustände vor und hinter dem Stoß :



Gesucht : $\frac{u_2}{u_1}, \frac{\rho_2}{\rho_1}, \frac{p_2}{p_1}, \frac{T_2}{T_1}$ etc. !

Masse- , Impuls- und Energieerhaltungsgleichung *(dA ≈ 0)*

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$$

$$\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = p_1 - p_2$$

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2}$$

Impuls :

$$u_2 - u_1 = \frac{p_1}{\rho_1 u_1} - \frac{p_2}{\rho_2 u_2} = \frac{c_1^2}{\gamma u_1} - \frac{c_2^2}{\gamma u_2}$$

$$\gamma(u_2 - u_1) = \left(\frac{c_1}{u_1}\right)^2 u_1 - \left(\frac{c_2}{u_2}\right)^2 u_2 \qquad (*)$$

Referenzzustand → * -Zustand :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = c^{*2}\,\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,\frac{1}{2} = c_p T^* + \frac{c^{*2}}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{c^*}{u}\right)^2 = \left[\left(\frac{c}{u}\right)^2 + \frac{\gamma-1}{2}\right]\frac{2}{\gamma+1}$$

$$\left(\frac{u}{c^*}\right)^2 = M^{*2} = \frac{\gamma+1}{(\gamma-1)+\frac{2}{M^2}} \qquad M^* = f(M, \gamma)$$

$$M = 0 \quad : \quad M^* = 0$$

$$M = 1 \quad : \quad M^* = 1$$

$$M \to \infty \quad : \quad \lim_{M \to \infty} M^{*^2} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$M < 1 \quad : \quad M^* < 1$$

$$M > 1 \quad : \quad M^* > 1$$

$$\frac{c}{u} = f\left(\frac{c^*}{u}, \gamma\right)$$ in Gleichung (*)

$$\Rightarrow \left(u_2 - u_1\right)\frac{\gamma+1}{2} = c^{*2}\left(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2}\right)\frac{\gamma+1}{2}$$

$$c^{*^2} = u_1 u_2$$

$$\boxed{M_1^* M_2^* = 1}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{u_1^2}{u_1 u_2} = \frac{u_1^2}{c^{*2}} = M_1^{*2} = \frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2 + 2} = f(M_1, \gamma)$$

Impuls :

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1}\right)$$

$$= 1 + \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{(\gamma-1) + \frac{2}{M_1^2}}{\gamma+1}\right)$$

$$= 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2 - 1)$$

$$= g(M_1, \gamma)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2}\frac{M_1^2+1}{M_1^2}\left(M_1^2-1\right) = h(M_1,\gamma)$$

$$M_2^2 = \frac{2+(\gamma-1)M_1^2}{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)} = \varphi(M_1,\gamma)$$

sog. Rankine–Hugoniot Beziehungen

Entropieänderung = $f(M_1,\gamma)$: $T\,ds = dh - \frac{1}{\rho}dp$

$$\frac{s_2-s_1}{R} = \frac{c_p}{R}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$\frac{s_2-s_1}{R} = \ln\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right]$$

$$\frac{s_2-s_1}{R} = \ln\left\{\left[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2-1\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\right\}$$

$$= f(M_1,\gamma)$$

$s_2 - s_1 > 0$: d. h. Stöße nur in superson. Strömungen.

weiterhin :

$$s_2 - s_1 = s_{0_2} - s_{0_1} = c_p \ln\left(\frac{T_{0_2}}{T_{0_1}}\right) - R \ln\left(\frac{p_{0_2}}{p_{0_1}}\right)$$

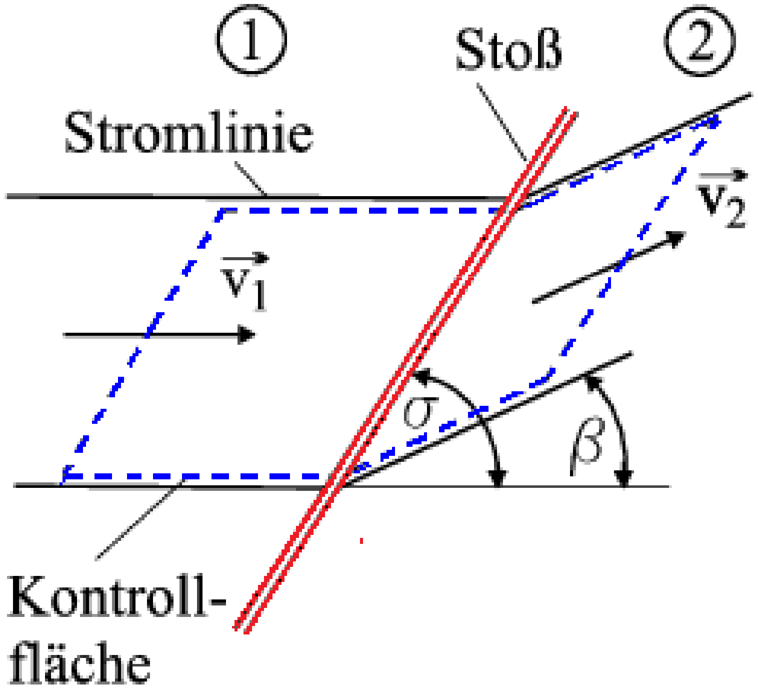
mit $T_0 = konst :$ $p_{02} < p_{01}$

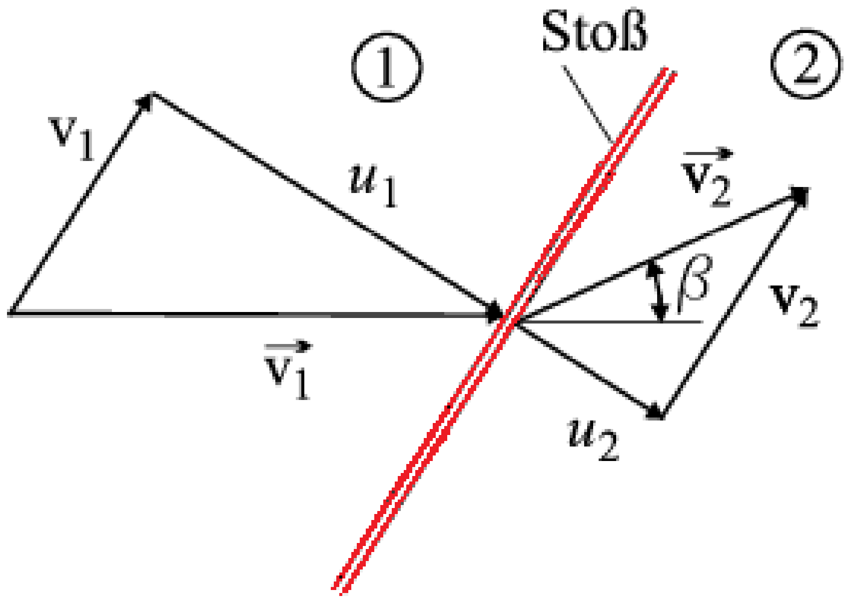
bzw. $\rho_{02} < \rho_{01}$

Schräger Verdichtungsstoß

Im allgemeinen sind Verdichtungsstöße gegenüber der Anströmung geneigt

→ der senkrechte Verdichtungsstoß ist ein Sonderfall





σ : Stoßwinkel

β : Umlenkwinkel

Formulierung der Erhaltungsgleichungen über den Stoß

Kontinuitätsgleichung : $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$

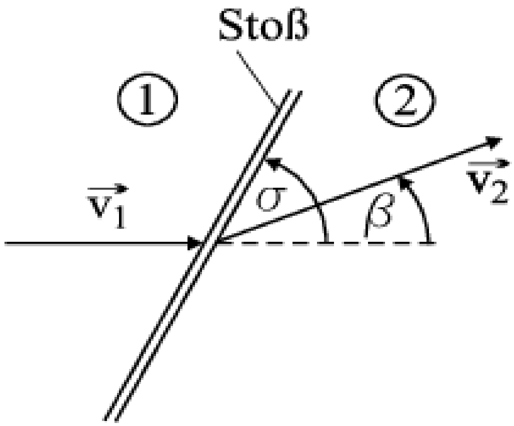
Impulssatz, tangential : $\rho_1 u_1 v_1 = \rho_2 u_2 v_2$

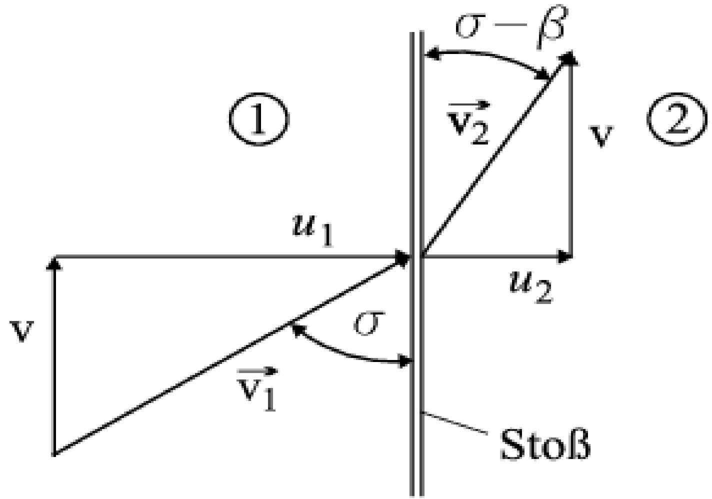
Impulssatz, normal : $\rho_2 u_2^2 - \rho_1 u_1^2 = p_1 - p_2$

Energiesatz : $\dfrac{\left\|\vec{v}_2\right\|^2}{2} - \dfrac{\left\|\vec{v}_1\right\|^2}{2} = c_p \left(T_1 - T_2\right)$

Impulssatz, tangential : $\Rightarrow v_1 = v_2 = v$!

$\longrightarrow$ Überlagerung des v-Feldes möglich





Analyse wie beim senkrechten Verdichtungsstoß :

$$\|\vec{v}_1\| = \sqrt{u_1^2 + v^2} \qquad \sigma = \tan^{-1}(u_1 / v)$$

$$\|\vec{v}_2\| = \sqrt{u_2^2 + v^2} \qquad \sigma - \beta = \tan^{-1}(u_2 / v)$$

$! \, u_2 < u_1 \Rightarrow$ Umlenkung der Strömung in Richtung des Stoßes !

Mach Zahlen senkrecht zum Stoß

$$M_{n1} = u_1 / c_1 = M_1 \sin\sigma > 1$$
$$M_{n2} = u_2 / c_2 = M_2 \sin(\sigma - \beta) < 1$$

$\dfrac{p_2}{p_1}, \dfrac{\rho_2}{\rho_1}, \dfrac{T_2}{T_1}, \dfrac{\Delta S}{R}$ durch $\quad M_1 \leftarrow M_{n1} = M_1 \sin\sigma$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 \sin^2\sigma - 1\right)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma+1) M_1^2 \sin^2\sigma}{(\gamma-1) M_1^2 \sin^2\sigma + 2} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\tan\sigma}{\tan(\sigma-\beta)}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \frac{\gamma M_1^2 \sin^2\sigma + 1}{M_1^2 \sin^2\sigma}\left(M_1^2 \sin^2\sigma - 1\right)$$

$$\frac{s_2 - s_1}{R} = \ln\left[\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}\right] = \ln\left\{\left[\frac{(\gamma+1) M_1^2 \sin^2\sigma}{(\gamma-1) M_1^2 \sin^2\sigma + 2}\right]^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}} \left[1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 \sin^2\sigma - 1\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}\right\}$$

die Prandtl Beziehung des senkrechten Verdichtungsstoßes

$$u_1 u_2 = c^{*2}$$

nimmt für den schrägen Verdichtungsstoß folgende Form an :

Energiesatz : $$c_p T_1 + \frac{u_1^2 + v^2}{2} = c_p T_2 + \frac{u_2^2 + v^2}{2} = c_p T_0$$

mit $$c_p = \gamma R / (\gamma - 1)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2 + v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2 + v^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

Ruhe- und kritische Größen : $$c^{*2}\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} = c_0^2 \frac{1}{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}$$

$\Rightarrow$

$$p_1 = \rho_1 \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} c^{*2} - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\left(u_1^2 + v_1^2\right) \right]$$

$$p_2 = \rho_2 \left[\frac{\gamma+1}{2\gamma} c^{*2} - \frac{\gamma-1}{2\gamma}\left(u_2^2 + v_1^2\right) \right]$$

in Impulssatz, normal

$$\rho_1\left[\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(u_1^2+c^{*2}\right)-\frac{\gamma-1}{2\gamma}v^2\right]=\rho_2\left[\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(u_2^2+c^{*2}\right)-\frac{\gamma-1}{2\gamma}v^2\right]$$

+ Kontinuitätsgleichung $\Longrightarrow$ Prandtl Beziehung für den schrägen Verdichtungsstoß.

$$u_2 u_1 = c^{*2} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1}v^2$$

$M_2 = f(M_1, \sigma, \beta, \gamma)$ aus $M_2 = g(M_1, \gamma)$

mittels $M_1 \leftarrow M_1 \sin\sigma$ und

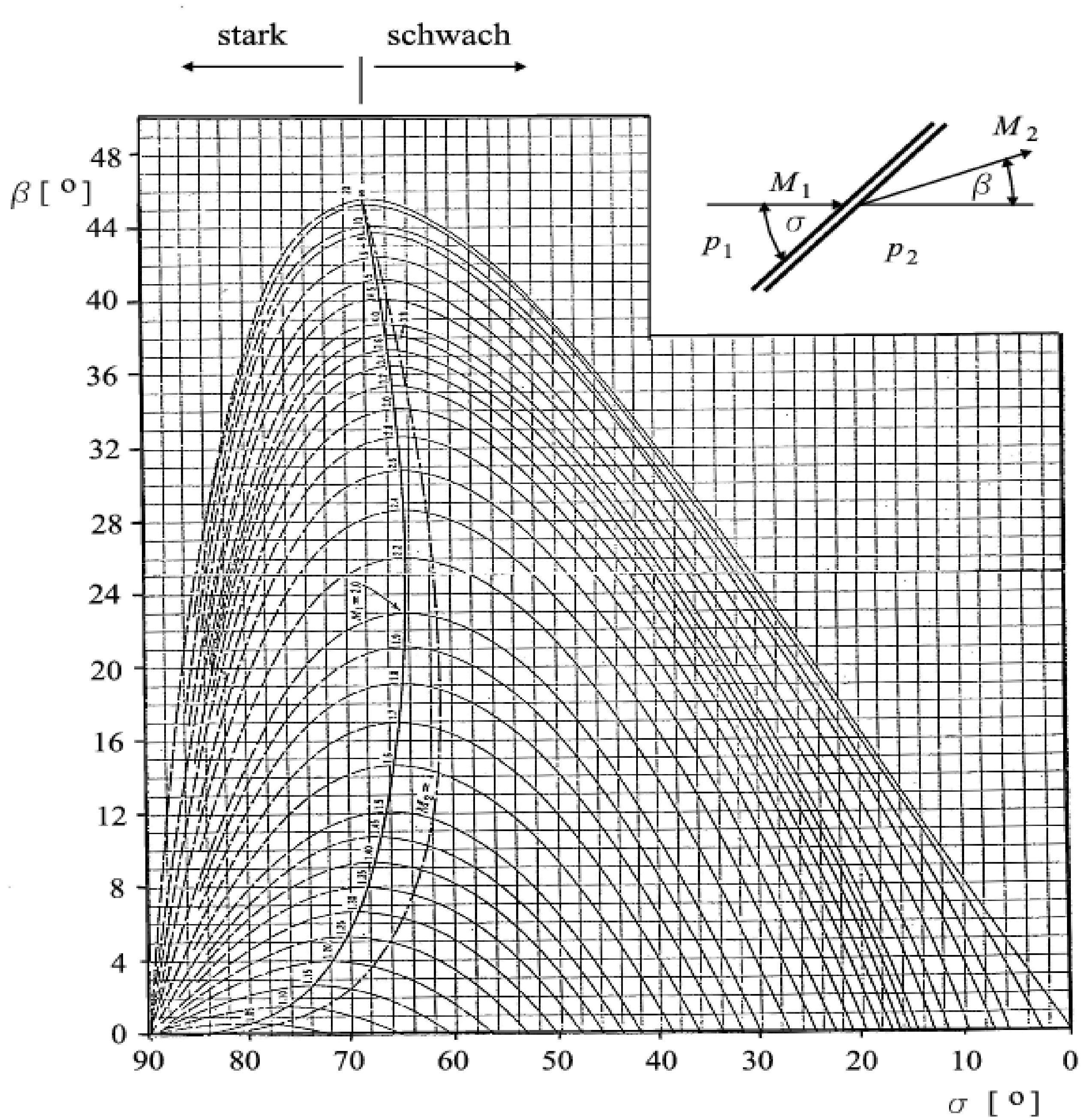
$M_2 \leftarrow M_2 \sin(\sigma - \beta)$

$$\longrightarrow \quad M_2^2 \sin^2(\sigma-\beta) = \frac{(\gamma-1)M_1^2\sin^2\sigma + 2}{2\gamma M_1^2 \sin^2\sigma - (\gamma-1)}$$

Zusammenhang zwischen β, σ, M_1 mittels $\frac{\rho_2}{\rho_1} = f(M_1, \sigma) = g(\sigma, \beta)$

mit $\quad \tan(\sigma - \beta) = \frac{\tan\sigma - \tan\beta}{1 + \tan\sigma \; \tan\beta}$

$$\Rightarrow \quad \tan\beta = 2\cot\sigma \frac{M_1^2 \sin^2\sigma - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\sigma) + 2}$$



stark
schwach
β [o]
σ [o]
M 2
M 1
β
σ
p 1
p 2

$$\left.\begin{array}{lll} \sigma = \dfrac{\pi}{2} & \rightarrow & \tan\beta = 0 \\ \sigma = \alpha_1 = \sin^{-1}(\dfrac{1}{M_1}) & \rightarrow & \tan\beta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$ Max. existiert !

Analyse für $M_1 \rightarrow \infty$:

$$r = \lim_{M_1 \to \infty} (\tan\beta) = \frac{2\cot\sigma\sin^2\sigma}{\gamma + \cos^2\sigma} = \frac{\sin 2\sigma}{\gamma + \cos 2\sigma}$$

$$\frac{dr}{d\sigma} = \frac{2\cos 2\sigma(\gamma + \cos 2\sigma) + 2\sin^2 2\sigma}{(\gamma + \cos 2\sigma)^2} \overset{!}{=} 0$$

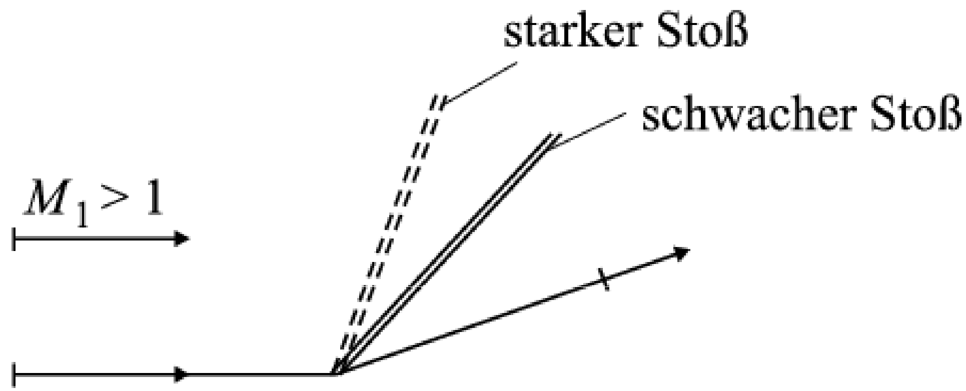
$$\Rightarrow \cos 2\sigma = -\frac{1}{\gamma}\,;\ \gamma = 1.4 : \sigma \approx 67.5$$

$$\tan\beta_{\max} = \frac{\sin 2\sigma}{\gamma + \cos 2\sigma} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 2\sigma}}{\gamma + \cos 2\sigma} = \frac{\sqrt{1 - 1/\gamma^2}}{\gamma - 1/\gamma} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - 1}}{\gamma^2 - 1} = (\gamma^2 - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\beta_{\max} \approx 45°$$

$\beta < \beta_{\max}$: 2 Lösungen

- schwache Lösung , $M_2 > 1\,(i.a.)$
- starke Lösung , $M_2 < 1$

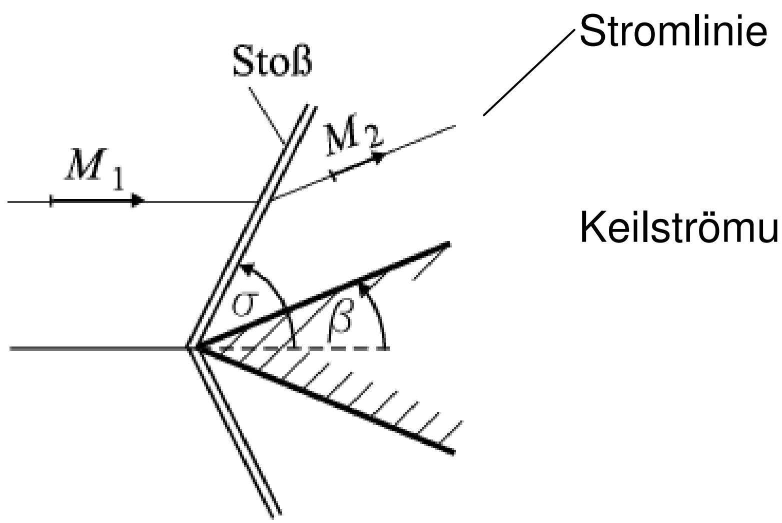


schwache Lösung entspricht der natürlichen Lösung

$\beta > \beta_{\max}$: keine geschlossene analytische Lösung

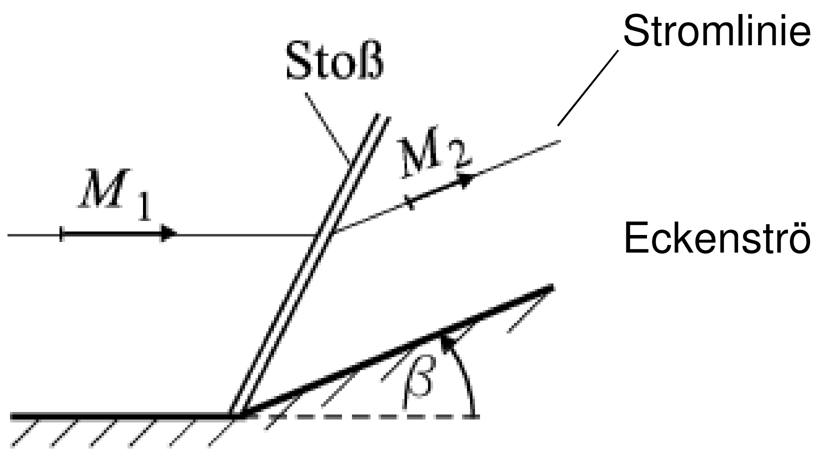
Entstehung von schrägen Verdichtungsstößen

$M_1 > 1$

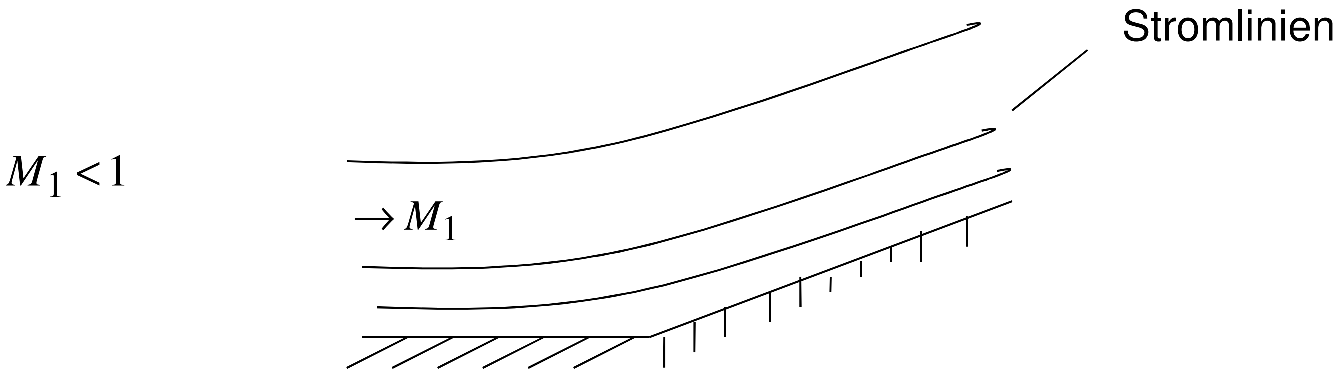


Keilströmung : $\beta < \beta_{\max}$

$M_1 > 1$

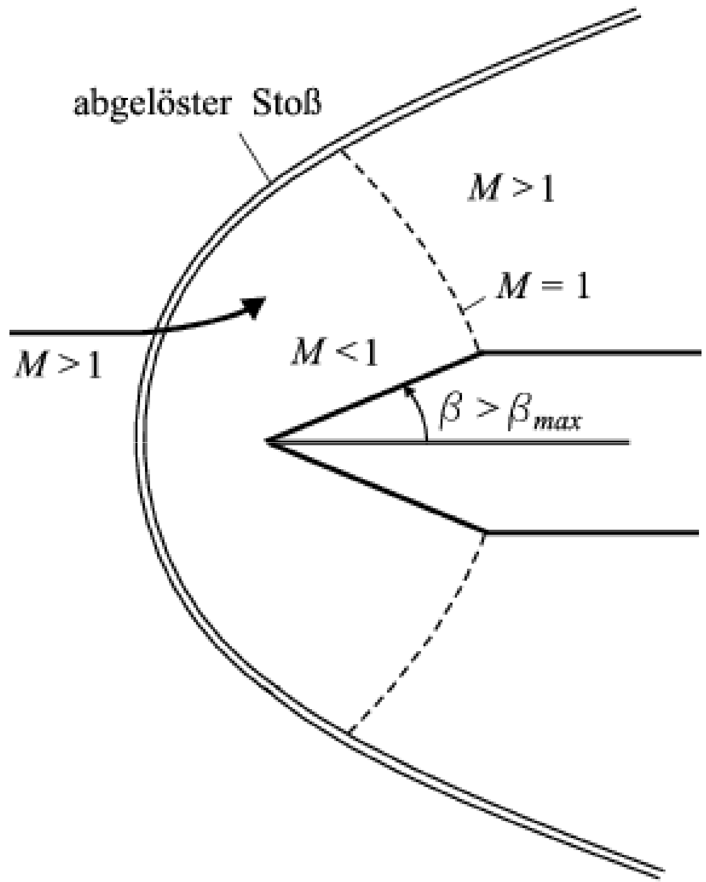


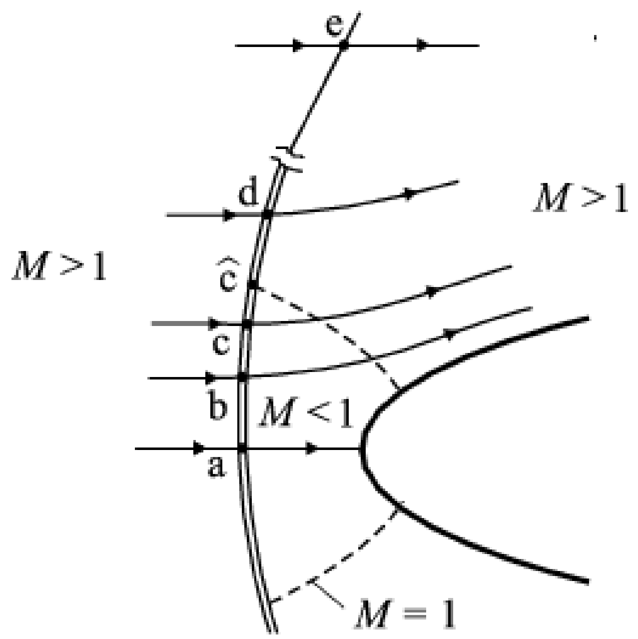
Eckenströmung (konkav) : $\beta < \beta_{\max}$



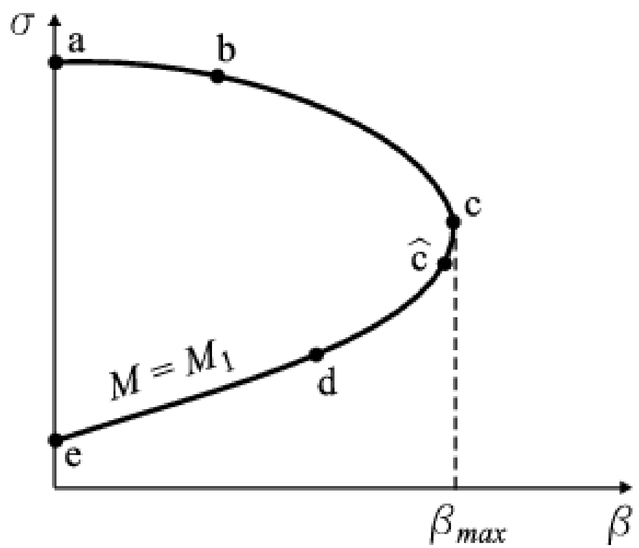
Eckenströmung (konkav, subsonisch)

$\beta > \beta_{\max}$:   Ablösung des Verdichtungsstoßes





abgelöster Verdichtungsstoß



σ, β , M_1 - Zusammenhang

Herzkurve

Approximationen für schräge Verdichtungsstöße

- Hyperschallströmungen : $M_1^2 \sin^2\sigma \gg 1\,, \quad \sin\sigma \ll 1$

aus

$$\frac{\tan(\sigma-\beta)}{\tan\sigma} = \frac{\gamma - 1 + 2\big/ M_1^2 \sin^2\sigma}{\gamma+1}$$

und $\sigma \approx \beta$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sigma-\beta}{\sigma} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}$$

$$= \frac{\gamma+1}{2}\beta \qquad \text{Newton-Theorie}$$

- Näherung für schwache Stöße : Annahme : β klein

$$\beta \to 0: \quad \Rightarrow \ \sigma \to \ \alpha_1 = \sin^{-1}(1/M_1)$$

in $\beta = f(M_1, \sigma)$

$$\Rightarrow \qquad \tan\beta \approx 2\cot\alpha_1 \frac{M_1^2 \sin^2\sigma - 1}{M_1^2(\gamma + \cos 2\alpha_1) + 2}$$

mit $\tan\beta \approx \beta$

$$\cot\alpha_1 = \sqrt{M_1^2 - 1}$$

$$\cos 2\alpha_1 = 1 - 2\sin^2\alpha_1 = 1 - 2/M_1^2$$

$\Rightarrow$ $$M_1^2 \sin^2\sigma - 1 \approx \frac{M_1^2(\gamma+1)}{2\sqrt{M_1^2-1}}\beta$$

in $$\frac{p_2}{p_1} = h(M_1, \sigma)$$

$\Rightarrow$ relative Druckänderung für β klein

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} \approx \frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2 - 1}}\beta$$

gültig : schwache Komp. + Exp.wellen

Grund :

$$\frac{s_2 - s_1}{R} \approx \frac{\gamma+1}{12\gamma^2}\left(\frac{p_2 - p_1}{p_1}\right)^3 = \frac{\gamma+1}{12\gamma^2}\left(\frac{\gamma M_1^2}{\sqrt{M_1^2-1}}\right)^3 \beta^3$$

$\Rightarrow$ schwache Stöße näherungsweise isentrop → reversibel