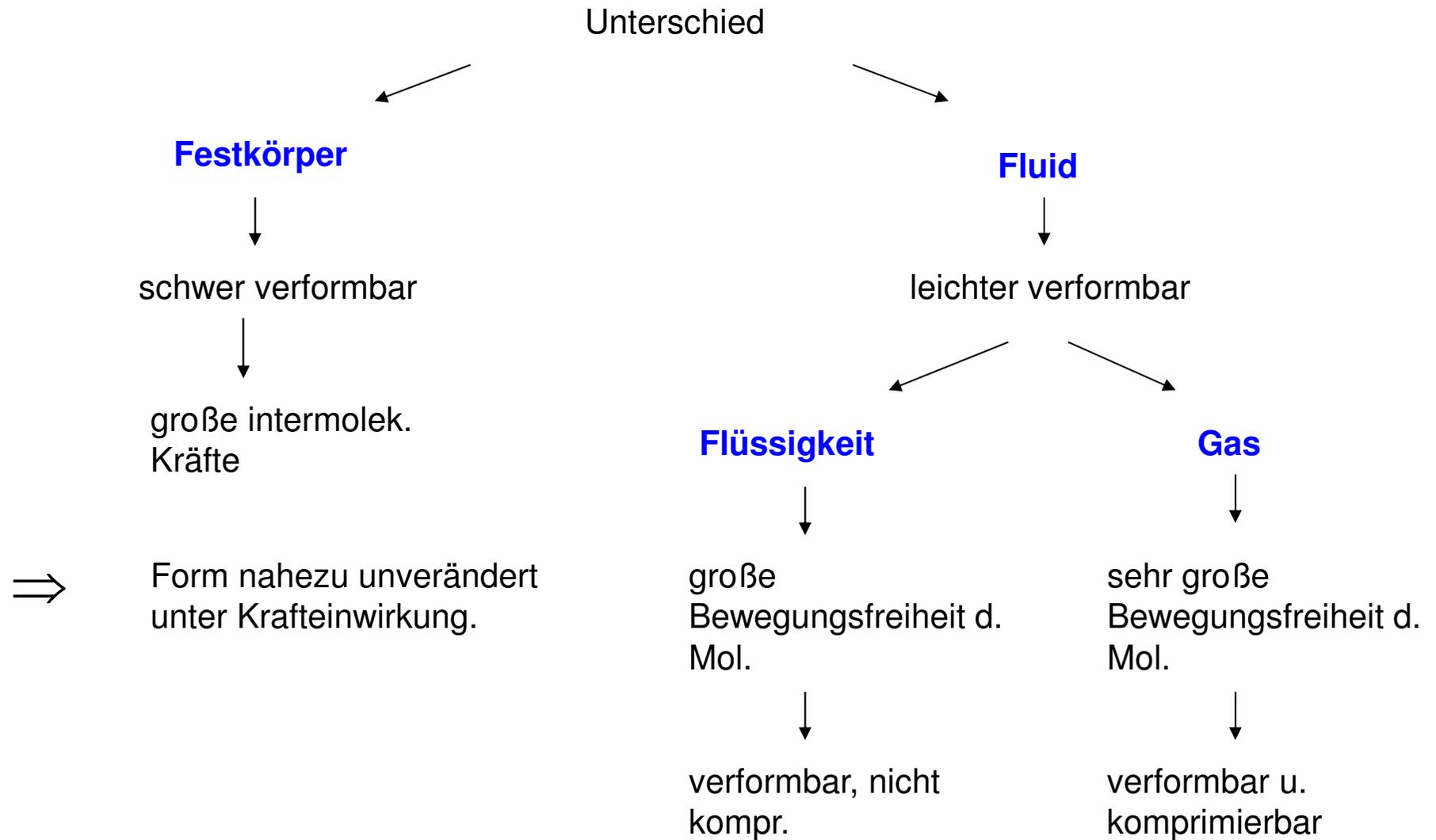


Festkörper, Flüssigkeiten, Gase



Verformung durch äußere Kraft

Fluid : Stoff, der sich kontinuierlich verformt, wobei die Schubkraft beliebig klein sein kann.

Festkörper : Stoff, der sich nicht kontinuierlich verformt
⇒ fließt nicht

Materialien, die weder reine Festkörper noch reine Fluide sind

⇒ Rheologie

Bewegung der Moleküle \Rightarrow Mechanik der Fluide

JEDOCH : Interesse am durchschnittlichen Verhalten

gewähltes Mittelungsvolumen

- \ll Dimension der Probleme
- \gg Abstand der Moleküle

\Rightarrow Var. im Strömungsfeld entspricht dem Durchschnittswert der Moleküle im Volumen

Annahme : Sehr viele im Volumen

\rightarrow kontinuierliche Verteilung der Charakteristika

\Rightarrow **Kontinuumsmechanik**

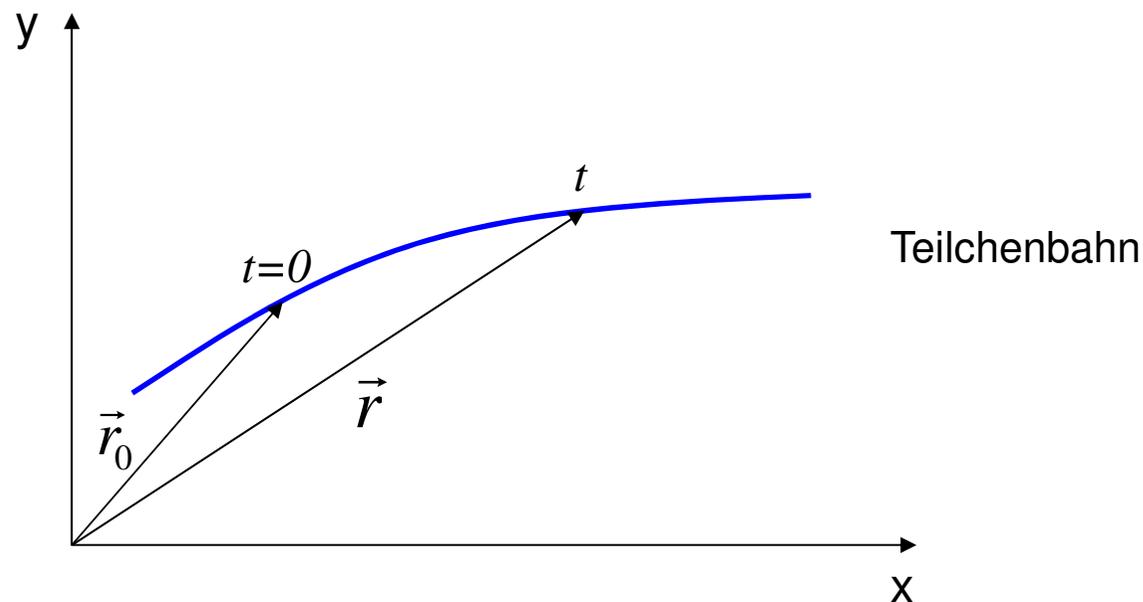
Kinematik der Fluide

Ablauf der Bewegung, später Ursache der Bewegung

Eulersche und Lagrangesche Strömungsbeschreibung

Lagrange: Bewegung des einzelnen Partikels bestimmt die Fluideigenschaften

Unabhgg. Var. t , $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}$



Lage des Teilchens $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$

Strögs.var. F geg durch $F(\vec{r}_0, t)$

Euler: \longrightarrow Feldkonzept

Zeitpunkt $t = t_0 = konst$

Fluideigenschaft $P = P(x, y, z)$

allgemein gilt für eine Var. F

$F(\vec{r}, t)$ mit $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

\Rightarrow z. Bsp. für die Geschwindigkeit \vec{v}

sofern $u(x, y, z, t)$

$v(x, y, z, t)$

$w(x, y, z, t)$

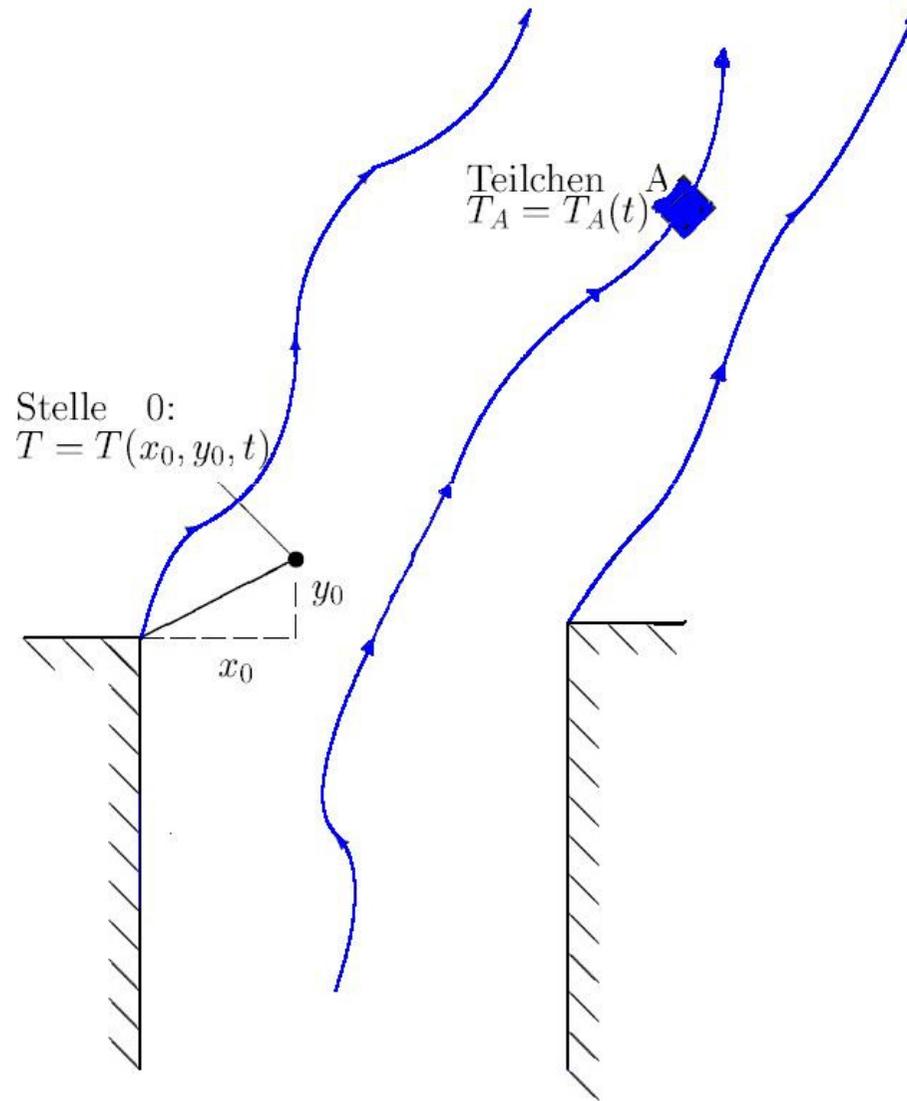
bekannt,

dann auch

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

Unterschied: Euler - Lagrange

Bsp. : Kaminrauch



Euler Methode :

Temp.messgerät in 0 \rightarrow $T(x_0, y_0, z_0, t)$

mit vielen Messgeräten \rightarrow $T(x, y, z, t)$

Temp. eines Teilchens abhängig von t ist unbekannt

Lagrange Methode :

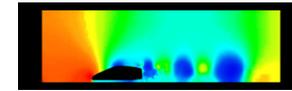
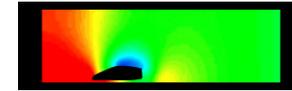
Temp.messgerät sitzt auf A \rightarrow $T_A = T_A(t)$

$T_A = f(Ort)$ unbekannt, sofern

$Ort = g(t)$ unbestimmt

In der **Fluidmechanik** wird im Allgemeinen auf das **Euler Konzept** zurückgegriffen

Stationäre und instationäre Strömungen



instationär bzw. zeitabhängig:

$$\text{Variable} = f(x, y, z, t)$$

stationär bzw. zeitunabhängig:

$$\text{Variable} = f(x, y, z) \neq g(t)$$

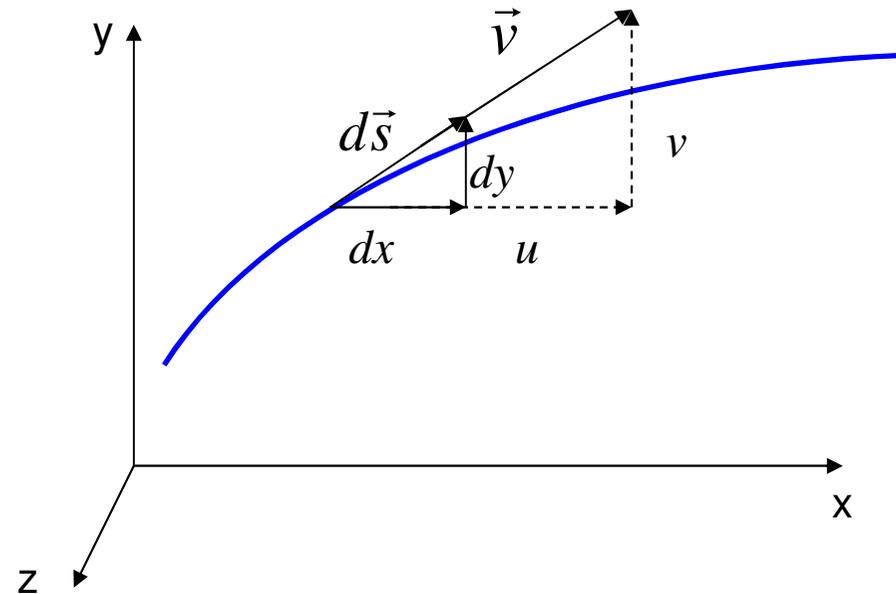
Instationäre Strömungen : Start- und Anfahrvorgänge

quasistationär bzw. ‘wie stationär‘: Änderung aufgrund von t **sehr langsam**

Bemerkung : Beschleunigung aufgrund von $A = f(x, y, z)$ in stationären Strömungen

Stromlinie, Bahnlinie, Rauchlinie

Stromlinie : Kurve, die tangential zum Geschwindigkeitsvektorfeld verläuft



$$d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$$

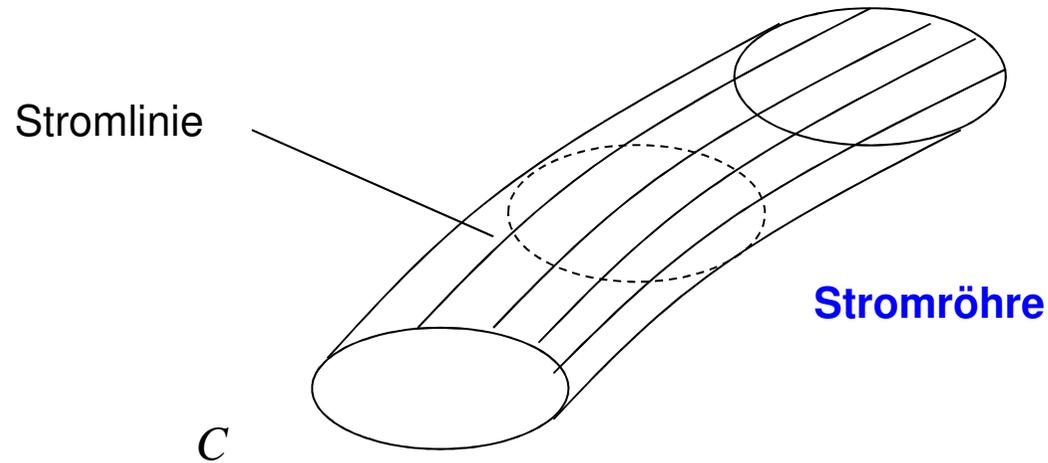
es gilt : $\vec{v} \times d\vec{s} = \vec{0}$

bzw.

$$\boxed{\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}}$$

entlang der Stromlinie

Stromröhre : Stromlinien, die durch eine geschlossene Kurve G gehen



Stromfaden : Stromröhre mit infinitesimalem Querschnitt

Bahnlinie : Trajektorie eines individuellen Partikels über der Zeit

Stat. Strömung : Bahnlinie = Stromlinie

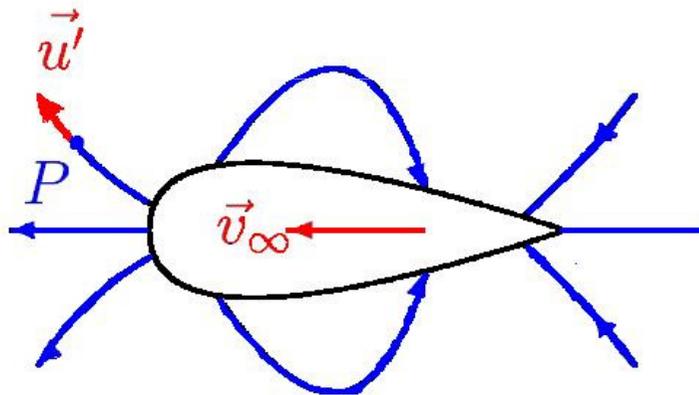
Instat. Strömung : Bahnlinie \neq Stromlinie

Rauchlinie : Linie der Fluidpartikel, die denselben Ort passiert haben.

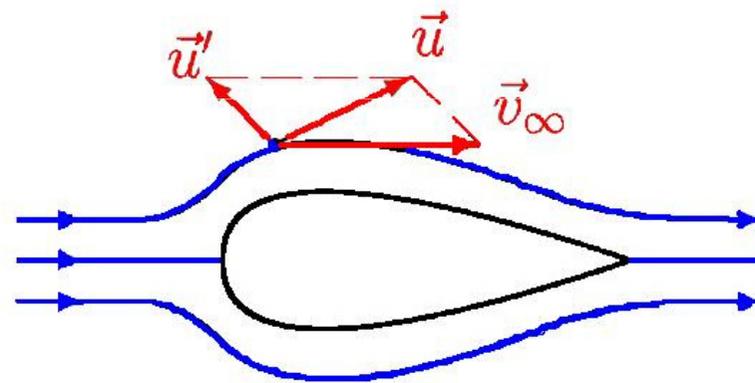
Stat. Strömung : Stromlinie = Bahnlinie = Rauchlinie

Bezugssystem

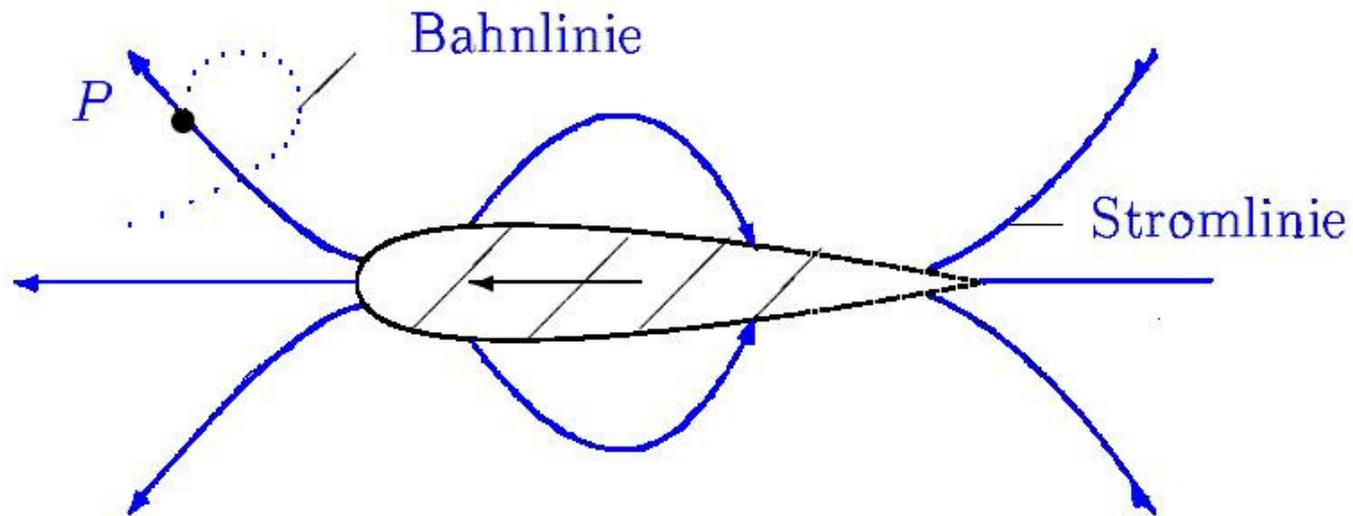
stat. oder instat. kann f (Bezugssystem) sein



fester Beobachter
(instat. Strömung)



mitbewegter Beobachter
(stat. Strömung)



fester Beobachter → instationäre Strömung

Stromlinie : Momentaufnahme

Bahnlinie : Verlauf über die Zeit

Visualisierung von Strom- und Bahnlinien zum Bsp. mittels reflektierendem Material auf der Fluidoberfläche.

Wichtig: **Stromlinien** haben **keinen Knick**.

Grundgleichungen strömender Fluide



Kontrollvolumen und Kontrollsystem

Fundamentale physikalische Gesetze auf Kontrollsystemen (KS) und Kontrollvolumina (KV) anwendbar

KS : Sammlung einer Substanz gleichbleibender Identität

KV : festgelegtes Volumen im Raum \longrightarrow geometrische Größe

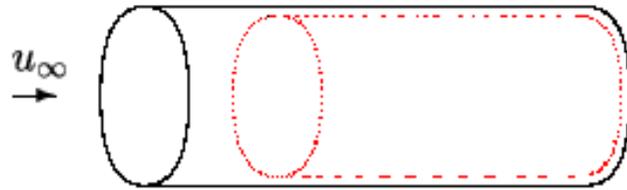
Im Allgemeinen ist man in der Fluidmechanik u. a. an Kräften interessiert, die von der Strömung auf Propeller, Flugzeuge Autos etc. wirken.

Veränderungen des Systems stehen nicht im Vordergrund der Analyse

\Rightarrow Im Allgemeinen Analyse mittels KV !

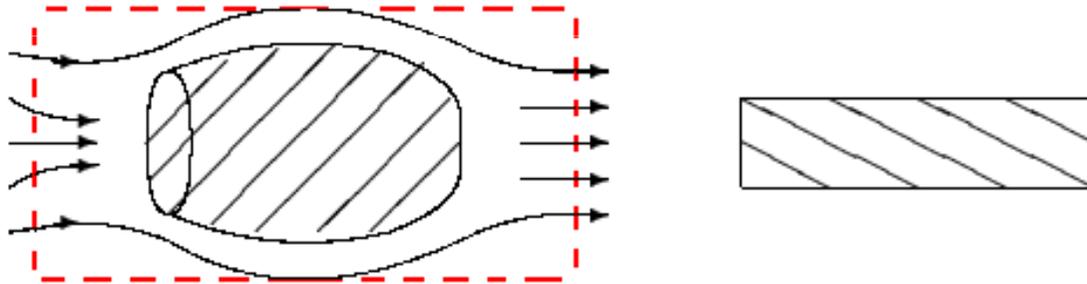
typische KV :

a)



ruhendes, festes KV

b)



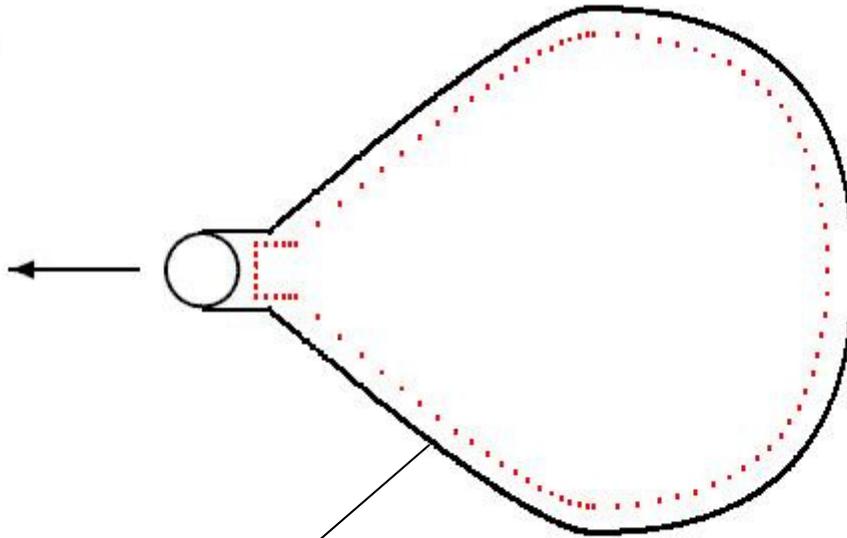
ruhendes oder
bewegtes KV

-- Grenze des Kontrollvolumens, Kontrollfläche

 Kontrollsystem zur Zeit t_1

 Kontrollsystem zur Zeit $t_2 > t_1$

c)



Ballon

verformendes
Kontrollvolumen

Grundgesetze der Strömungsmechanik sind ursprünglich für KS formuliert

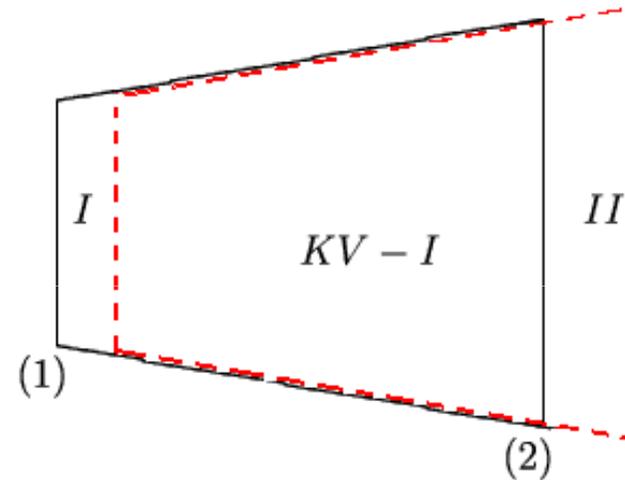
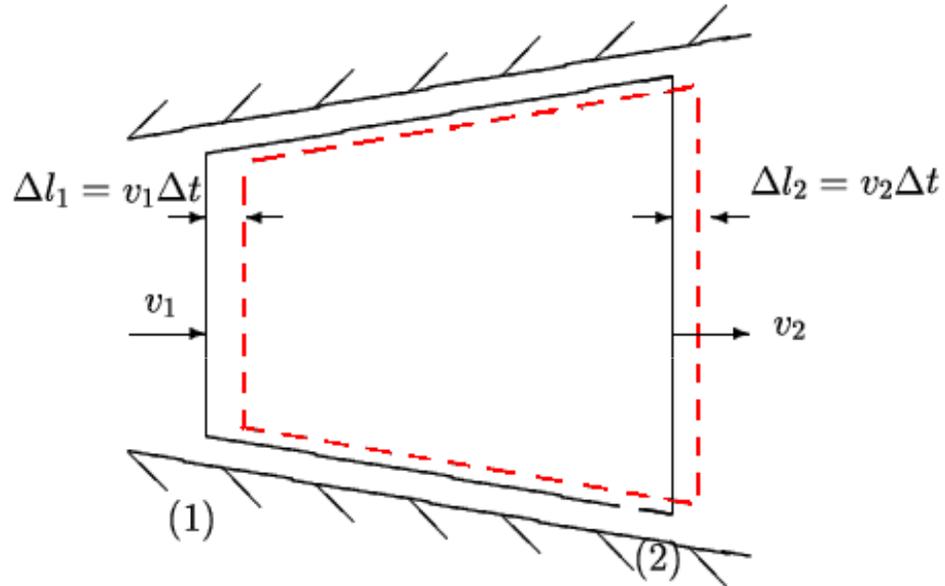
- Masse eines Systems ist konstant
- zeitliche Änderung des Impulses eines Systems ist gleich der ΣF auf das System

- ⇒ Reynoldssche Transporttheorem notwendig, um von der KS-Form auf die KV-Form zu gelangen

Das Reynoldssche Transporttheorem

— feste Kontrollfläche und Systemgrenze zum Zeitpunkt t

- - - Systemgrenze zur Zeit $t + \Delta t$



Zeitpunkt t : System enthält Fluid im KV

Zeitpunkt $t + \Delta t$: System besteht aus $(KV - I) + II$

B sei eine beliebige Größe des Systems (z. Bsp. die Masse m). Dann gilt zum Zeitpunkt t ,

$$B_{sys}(t) = B_{KV}(t)$$

da System und Fluid im Kontrollvolumen übereinstimmen. Weiterhin ist

$$B_{sys}(t + \Delta t) = B_{KV}(t + \Delta t) - B_I(t + \Delta t) + B_{II}(t + \Delta t)$$

bzw. die zeitliche Änderung von B ist

$$\begin{aligned} \frac{\Delta B_{sys}}{\Delta t} &= \frac{B_{sys}(t + \Delta t) - B_{sys}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{B_{KV}(t + \Delta t) - B_{KV}(t)}{\Delta t} - \frac{B_I(t + \Delta t)}{\Delta t} + \frac{B_{II}(t + \Delta t)}{\Delta t} \end{aligned}$$

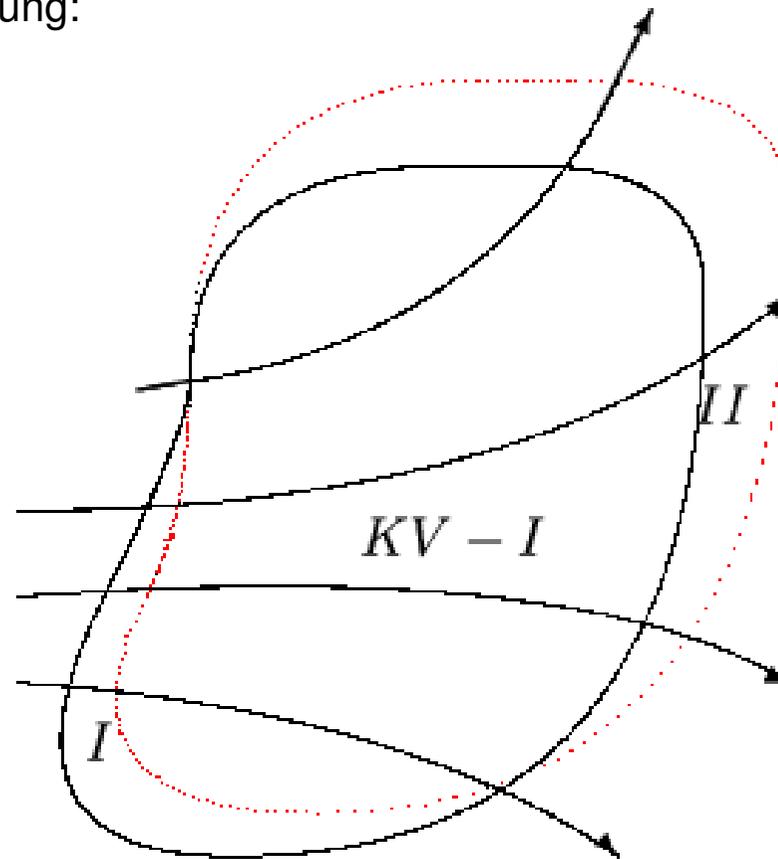
Für $\Delta t \rightarrow 0$ erhält man : $\frac{dB_{sys}}{dt}$

$$\begin{aligned}\frac{dB_{sys}}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta B_{sys}}{\Delta t} \right) \\ &= \underline{\underline{\frac{\partial B_{KV}}{\partial t} + \dot{B}_{out} - \dot{B}_{in}}}}\end{aligned}$$

Zusammenhang zwischen der zeitlichen Änderungsrate von B für das KS und das KV

B_{out}, B_{in} : Nettostrom von B aus dem bzw. in das KV.

allgemeine Darstellung:

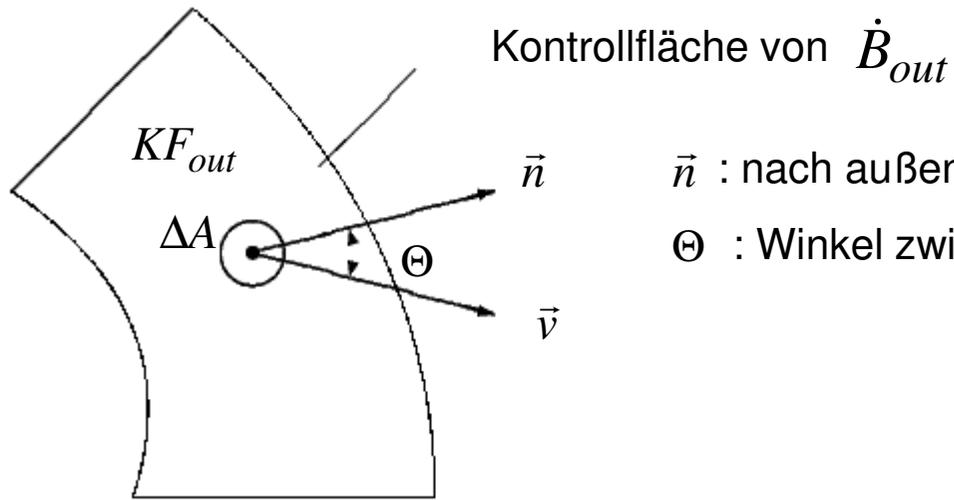


— feste Kontrollfläche und Systemgrenze bei t

- - - Systemgrenze bei $t + \Delta t$

Bestimmung von B_{out} mittels Integration über ΔA von KF_{out}

KF_{out} : trennt Gebiet II und KV



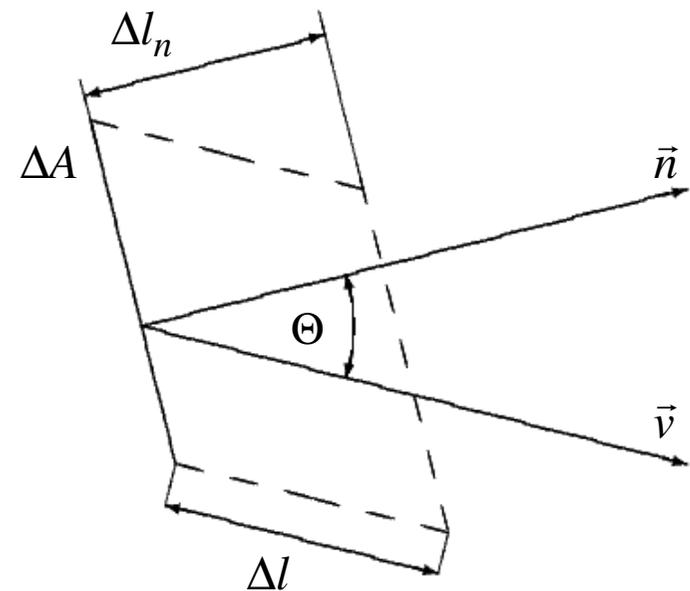
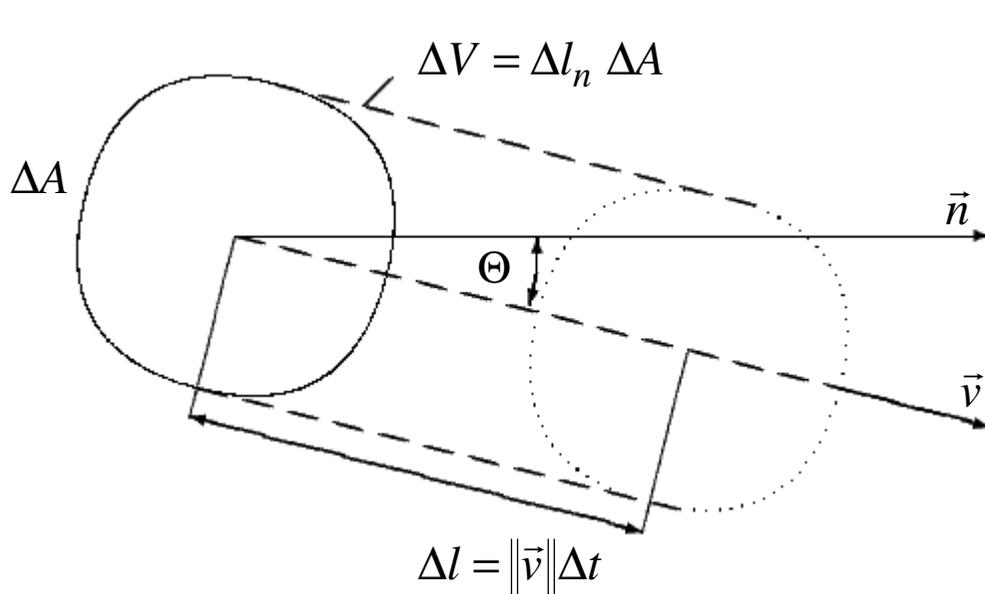
\vec{n} : nach außen gerichtete Normale zur Oberfläche

Θ : Winkel zwischen \vec{v} und \vec{n}

$$B = mb$$

Fluss von B über ΔA in Δt

$$\Delta B_{out} = b\rho\Delta V = b\rho(\|\vec{v}\| \cos \Theta \Delta A)$$



Als Strom erhält man

$$\Delta \dot{B}_{out} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\rho b \Delta V}{\Delta t} \right) = \rho b \|\vec{v}\| \cos \Theta \Delta A$$

bzw. nach Integration über KF_{out}

$$\dot{B}_{out} = \int_{KF_{out}} d\dot{B}_{out} = \int_{KF_{out}} \underline{\underline{\rho b \|\vec{v}\| \cos \Theta}} dA$$

$$\dot{B}_{out} = \int_{KF_{out}} \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

Für die Einströmung über die Kontrollfläche KF_{in} errechnet sich

$$\dot{B}_{in} = - \int_{KF_{in}} \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

$$\dot{B}_{out} - \dot{B}_{in} = \int_{KF_{out}} \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dA - \left[- \int_{KF_{in}} \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dA \right] = \int_{KF} \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

mit $B_{KV} = \int_{KV} \rho b dV$ folgt

$$\frac{dB_{sys}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho b dV + \int_{KF} \rho b \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

Reynoldssches Transporttheorem für ein ruhendes, unverformbares Kontrollvolumen

Erhaltung der Masse

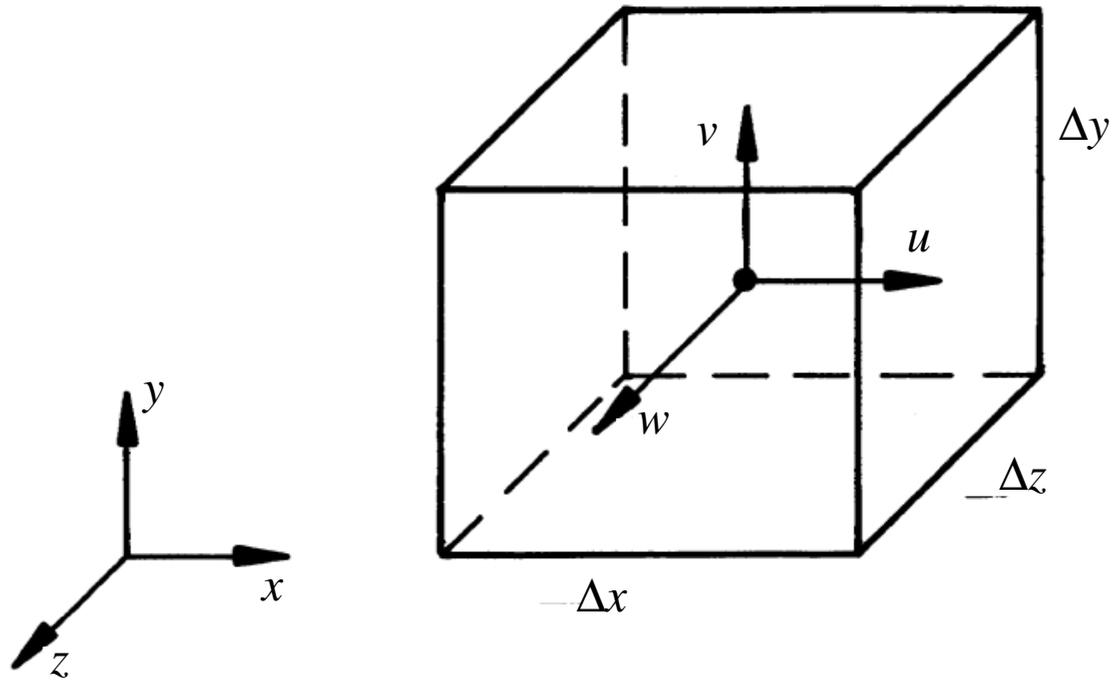
Die Masse des Systems bleibt bei Bewegung durch das Strömungsfeld konstant

$$B = mb \quad , \quad \text{für } b = 1$$

$$\frac{dm_{\text{sys}}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho dV + \int_{KF} \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = 0$$

integrale Form

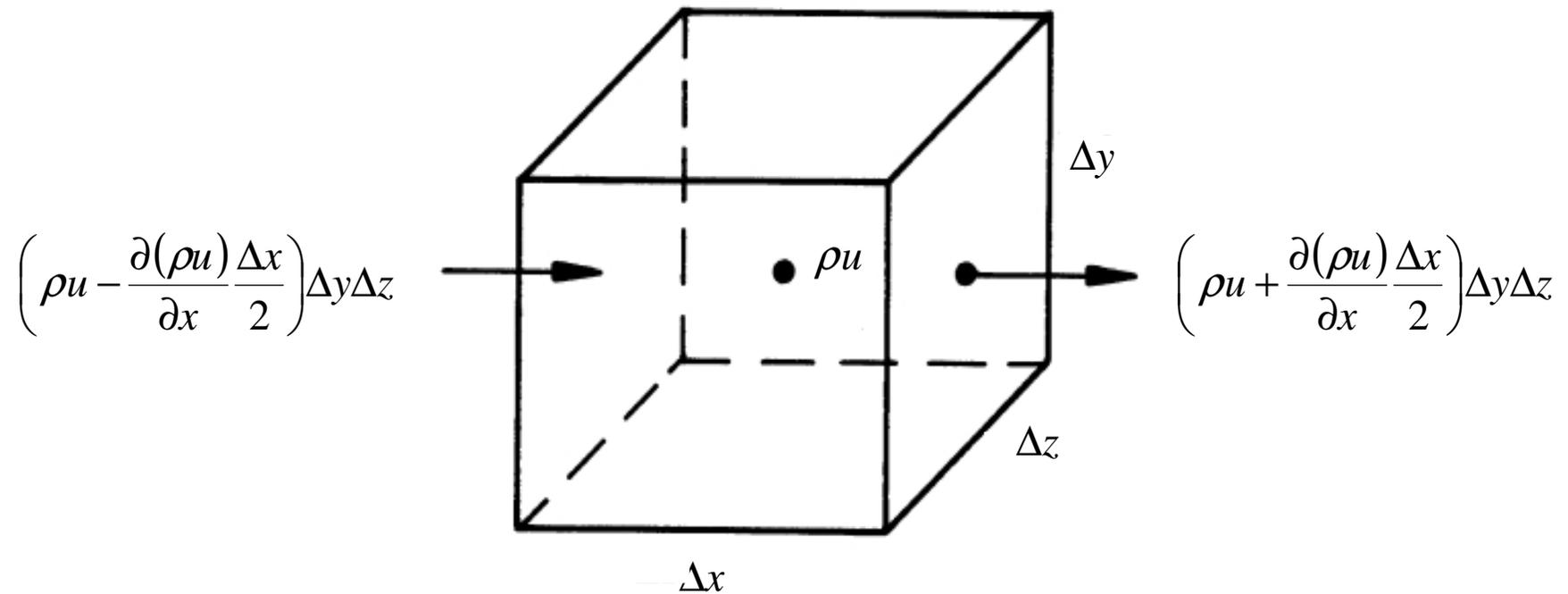
differentielle Form über Gaußschen Satz oder am Element



Zeitliche lokale Massenänderung :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

Massenfluss über die Oberfläche des Elements (in x-Richtung) :



Nettomassenfluss in x-Richtung

$$\left(\rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z - \left(\rho u - \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

In y- und z-Richtung erhält man

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta x \Delta y \Delta z \quad , \quad \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z$$

⇒ differentielle Form der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

bzw.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

mit

$$\vec{\nabla}(\bullet) = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial(\bullet)}{\partial z} \vec{k}$$

Mit lok. konvek.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla\rho$$

folgt :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

bzw.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Sonderfälle :

- stat. Strömung $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

- Inkompressibles Fluid $\rho = \text{konstant}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Erhaltung des Impulses

\vec{F} : Auf die Fluidmasse wirkende resultierende Kraft

$$\vec{I} = \int_{\text{Sys}} \vec{v} dm \quad : \text{ Impuls}$$

Anwendung auf ein differentielles Massesystem:

$$\Delta \vec{F} = \frac{d(\vec{v} \Delta m)}{dt}$$

$\Delta m_{\text{sys}} = \text{konstant}$

$$\Delta \vec{F} = \Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Delta m \vec{a}$$

$\Delta \vec{F}$: Oberflächen- und Volumenkräfte

Volumenkraft : Gewichtskraft maßgeblich

in kartesischen Koordinaten:

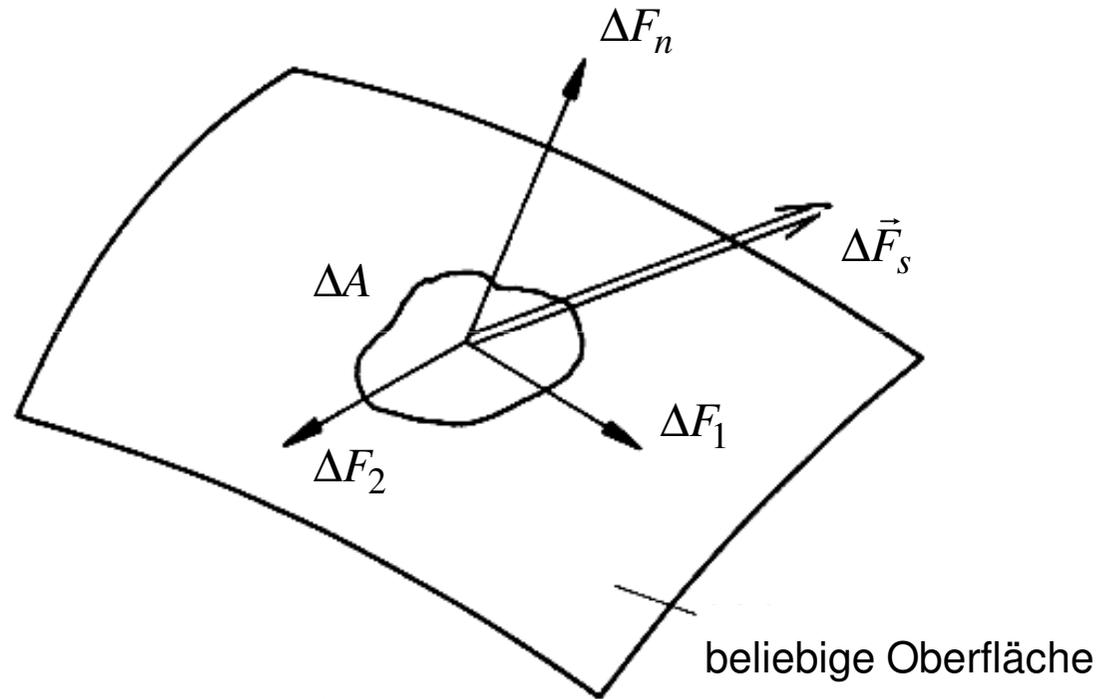
$$\Delta F_{bx} = \Delta m g_x$$

$$\Delta F_{by} = \Delta m g_y$$

$$\Delta F_{bz} = \Delta m g_z$$

Oberflächenkraft:

Element \leftrightarrow Umgebung



$$\Delta F_1 \perp \Delta F_2 \quad , \quad \Delta F_n \perp \Delta A$$

Normalspannung:

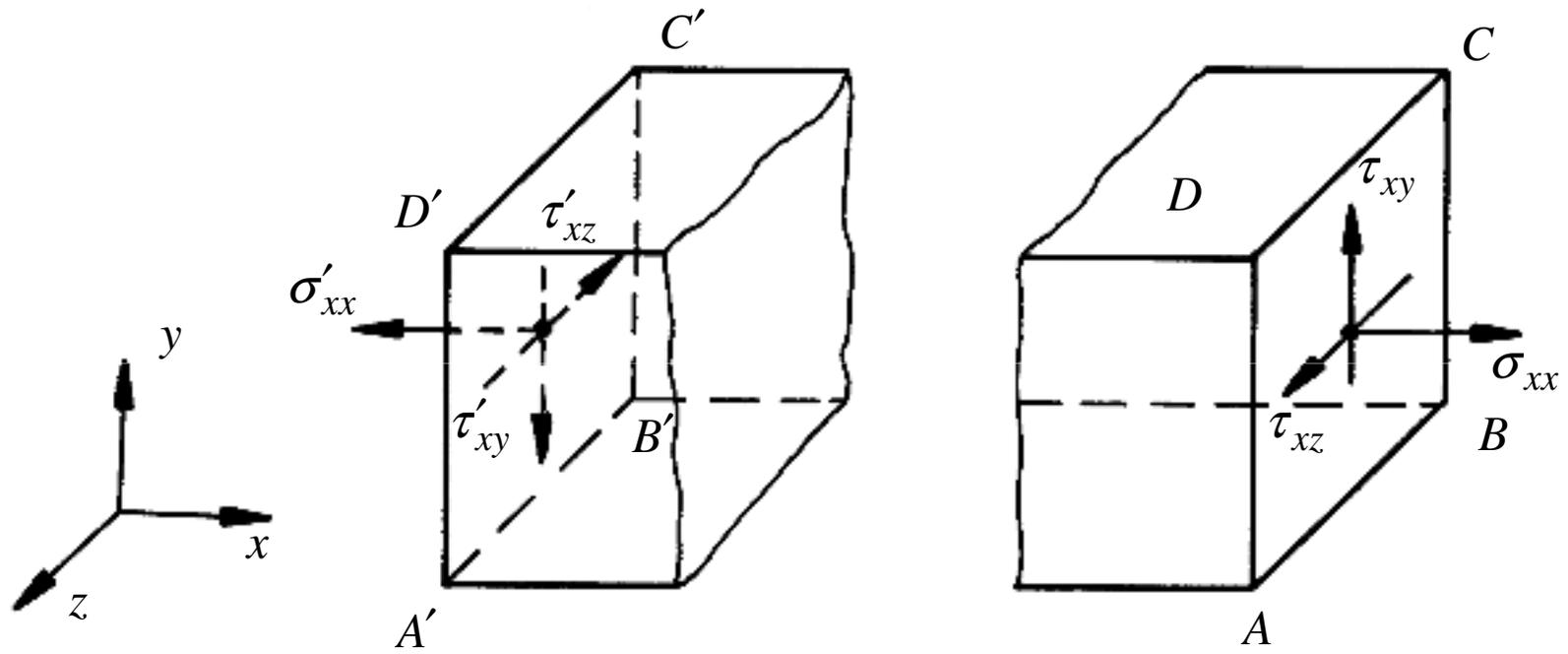
$$\sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_n}{\Delta A}$$

Schubspannung:

$$\tau_1 = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_1}{\Delta A}$$

$$\tau_2 = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F_2}{\Delta A}$$

die übliche Zeichenkonvention gilt

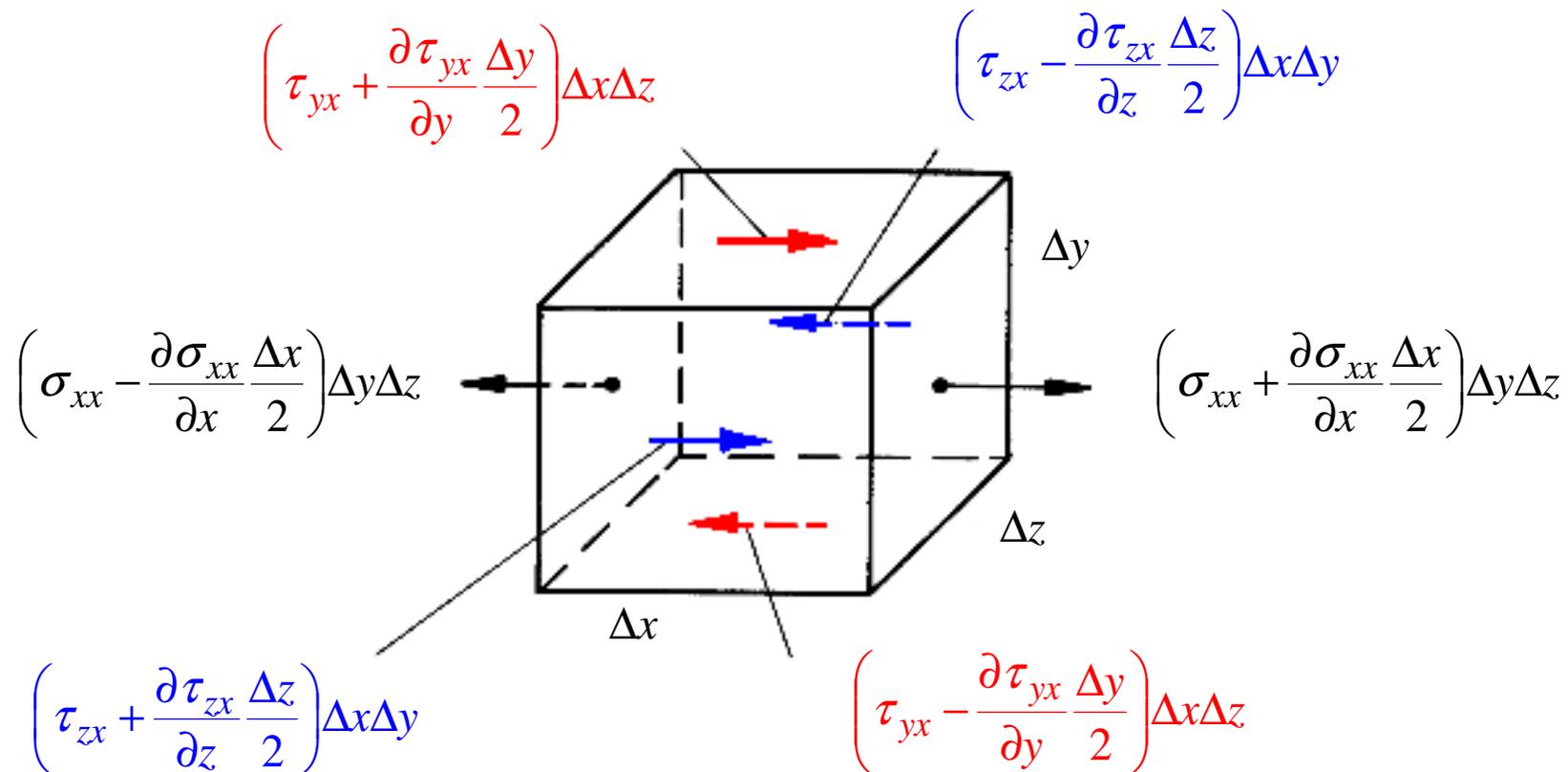


Bedeutung der Indizes :

S_{ij} : i Richtung der Normalen der Ebene
 j Richtung der Spannung

Spannungen auf 3 orthogonalen, durch einen Punkt gehende Ebenen definieren den Spannungszustand eindeutig

Oberflächenkräfte (nicht vollständig):



Summation liefert die Komponenten der resultierenden Oberflächenkraft:

$$\Delta \vec{F}_S = \Delta F_{S_x} \vec{i} + \Delta F_{S_y} \vec{j} + \Delta F_{S_z} \vec{k}$$

Kräfte in x- / y- / z-Richtung:

$$\Delta F_{S_x} = \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta F_{S_y} = \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta F_{S_z} = \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

Einsetzen in $\Delta \vec{F} = \Delta m \vec{a}$

mit $\Delta \vec{F} = \Delta \vec{F}_s + \Delta \vec{F}_b$

$$\Delta m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

ergibt $\vec{v} = u \vec{i} + v \vec{j} + w \vec{k}$

Differentielle Form der Impulserhaltung

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}$$

X

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$$

Y

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}$$

Z

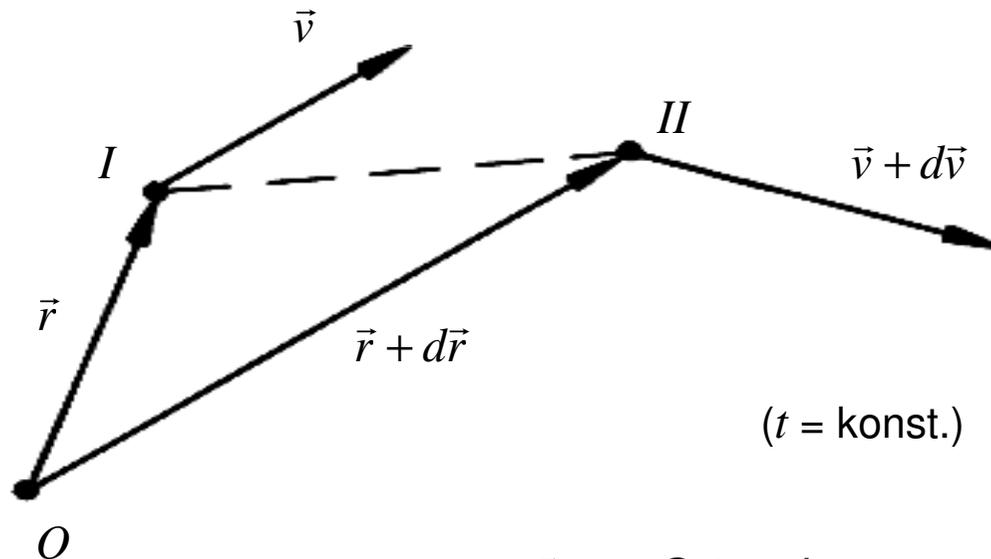
Kinematik des Fluidelements

Aufgabe : Spannungen durch Geschwindigkeitskomponenten ausdrücken

Bewegung eines Elements

⇒ Änderung seiner Lage und seiner Form

Bestimmung der Verformung mittels der relativen Bewegung zwischen 2 Punkten *I* und *II*



\vec{r} : Ortsvektor

$d\vec{v}$: Geschwindigkeitsänderung

$d\vec{v}$ in Komponentenschreibweise

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz$$

Um den Zusammenhang mit Translation, Rotation, Dehnung und Scherung zu erkennen, wird $d\vec{v}$ umgeschrieben

$$du = \dot{\epsilon}_x dx + \dot{\epsilon}_{xy} dy + \dot{\epsilon}_{xz} dz + \omega_{zx} dz - \omega_{xy} dy$$

$$dv = \dot{\epsilon}_{yx} dx + \dot{\epsilon}_y dy + \dot{\epsilon}_{yz} dz + \omega_{xy} dx - \omega_{yz} dz$$

$$dw = \dot{\epsilon}_{zx} dx + \dot{\epsilon}_{zy} dy + \dot{\epsilon}_z dz + \omega_{yz} dy - \omega_{zx} dx$$

Der Vergleich beider Gleichungssysteme ergibt folgende

Definitionen für $\dot{\mathcal{E}}_i$ und $\dot{\mathcal{E}}_{ij}$ bzw. ω_{ij}

$$\dot{d}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\mathcal{E}}_x & \dot{\mathcal{E}}_{xy} & \dot{\mathcal{E}}_{xz} \\ \dot{\mathcal{E}}_{yx} & \dot{\mathcal{E}}_y & \dot{\mathcal{E}}_{yz} \\ \dot{\mathcal{E}}_{zx} & \dot{\mathcal{E}}_{zy} & \dot{\mathcal{E}}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

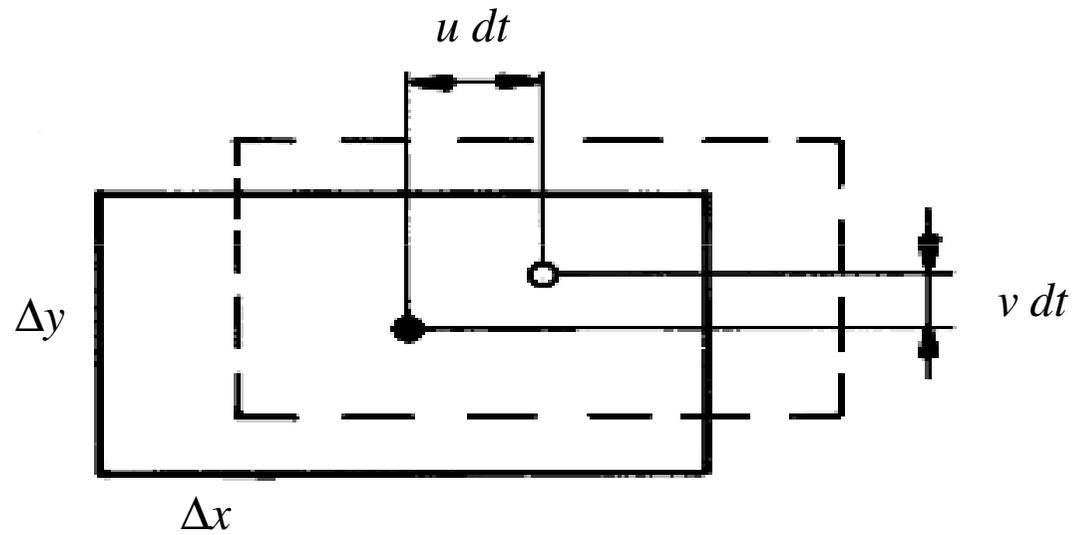
$$\omega_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\omega_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

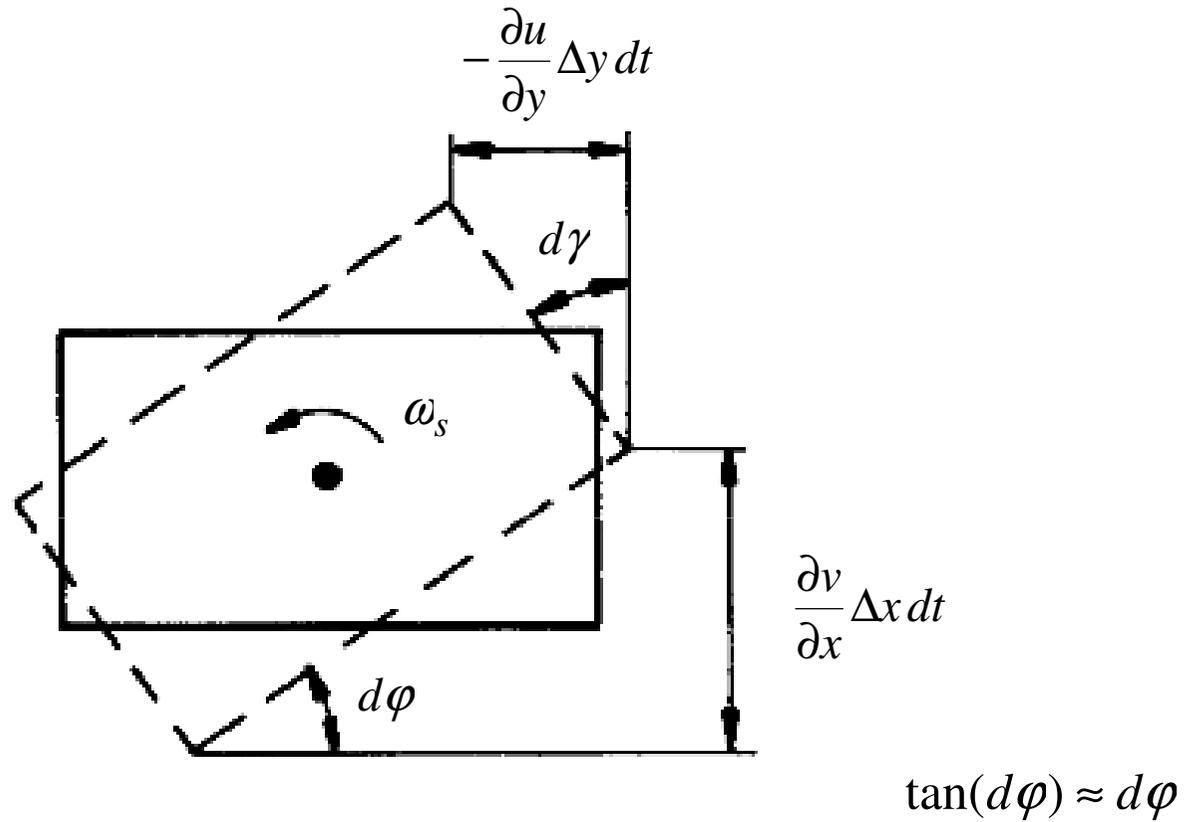
Bedeutung von $\dot{\mathcal{E}}_i$, $\dot{\mathcal{E}}_{ij}$, ω_{ij} ?

Unverformtes Element bewegt sich in der Strömung

Translation:



Rotation:



$$d\varphi = \frac{\partial v}{\partial x} dt = -\frac{\partial u}{\partial y} dt$$

⇒ Zeitliche Winkeländerung $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ aus dem arithmetischen Mittel

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \omega_{xy}$$

⇒ Drehung um z-Achse

In 3D erhält man :

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \omega_{yz}$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \omega_{zx}$$

⇒ Dreh- oder Wirbelvektor $\vec{\omega}$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

⇒ ω_{ij} - Terme : Rotation des unverformten Elements

Relative Volumenänderung (Volumendilatation) $\frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt}$

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{1}{\Delta V} \left\{ \left[\Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x dt \right] \cdot \left[\Delta y + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y dt \right] \cdot \left[\Delta z + \frac{\partial w}{\partial z} \Delta z dt \right] - \Delta x \Delta y \Delta z \right\} \frac{1}{dt}$$

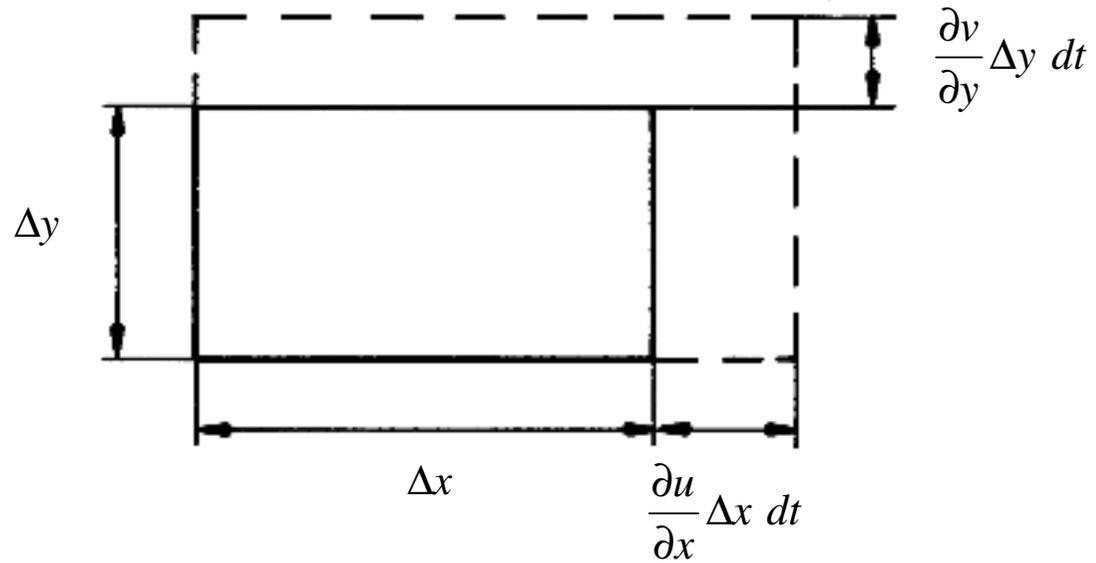
$$\frac{1}{\Delta V} \frac{d(\Delta V)}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \text{div } \vec{v}$$

→ Kontinuitätsgleichung für inkompr. Fluide

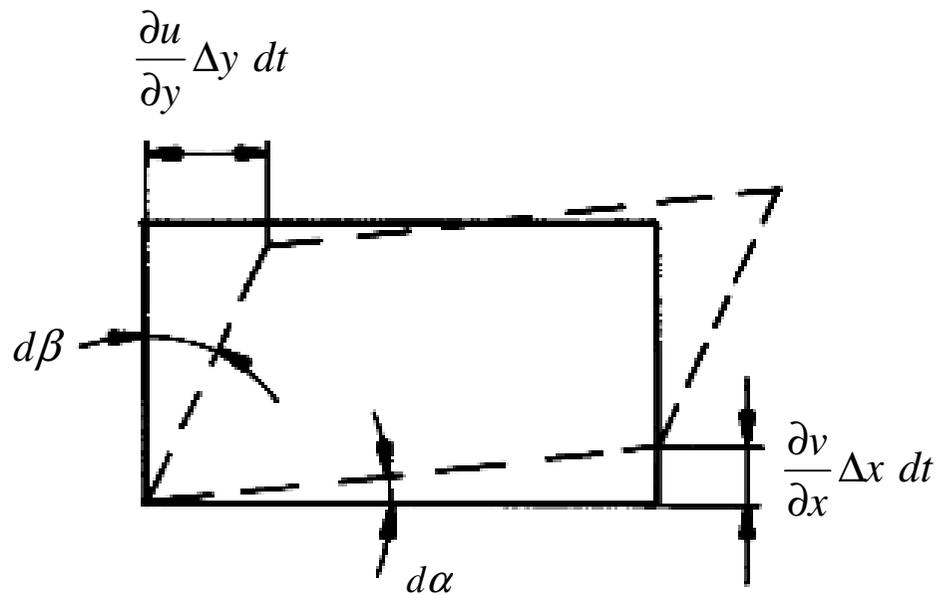
Rechteck $\xrightarrow{\text{Scherung}}$ Parallelepipet

$$d \gamma = d \alpha + d \beta$$

Verformung des Elements



Dehnung



Scherung

Dehnungsgeschwindigkeit entspricht der zeitlichen Dehnungsänderung pro Kantenlänge

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \dot{\epsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \dot{\epsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

entspricht den Hauptdiagonalen der Matrix d_{ij}

$$d \alpha = \frac{\partial v}{\partial x} dt$$

$$d \beta = \frac{\partial u}{\partial y} dt$$

$$\frac{d\gamma}{dt} : \left(\frac{d\alpha}{dt} \right); \left(\frac{d\beta}{dt} \right) \quad \text{gesamte Winkeländerung pro Zeit}$$

Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}_{ij}$ über arithmetische Mittelung

$$\dot{\gamma}_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\dot{\gamma}_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

Vergleiche mit d_{ij} – *Matrix* :

$$\Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij} \hat{=} \dot{\gamma}_{ij} - \text{Terme}$$

$\Rightarrow d_{ij}$ – Matrix : enthält **Dehnung** und **Scherung**

\Rightarrow Tensor der Deformation

Spannungstensor τ_{ij} in der Impulserhaltung

Zusammenhang zwischen τ_{ij} und \dot{d}_{ij} durch Newtonschen Reibungsansatz :

Tangentiale Spannung \sim Schergeschwindigkeit

und mittels Isotropie des Elements

$\dot{\epsilon}_x, \dot{\epsilon}_y, \dot{\epsilon}_z$ und $div \vec{v}$ \longrightarrow viskositätsbedingte Normalspannungen

Ansatz:

$$\sigma_{xx} = -p + 2\eta \dot{\epsilon}_x + \lambda div \vec{v}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\eta \dot{\epsilon}_y + \lambda div \vec{v}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\eta \dot{\epsilon}_z + \lambda div \vec{v}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\eta \dot{\gamma}_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = 2\eta \dot{\gamma}_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = 2\eta \dot{\gamma}_{zx}$$

Die Größen η und λ sind Proportionalitätsfaktoren

Die Normalspannungen werden i. a. umformuliert

$$\sigma_{yy} = -p + \eta \left(2\dot{\epsilon}_y - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \hat{\eta} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\sigma_{xx} = -p + \eta \left(2\dot{\epsilon}_x - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \hat{\eta} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\sigma_{zz} = -p + \eta \left(2\dot{\epsilon}_z - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \hat{\eta} \operatorname{div} \vec{v}$$

η : dynamische Viskosität

$$\hat{\eta} = \lambda + \frac{2}{3} \eta \quad : \text{Volumenviskosität}$$

Stokes 'sche Hypothese : $\hat{\eta} = \lambda + \frac{2}{3} \eta = 0$

inkompressible Strömungen : $\operatorname{div} \vec{v} = 0$

\Rightarrow mittlere Normalspannung $\bar{\sigma}$:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) = -p + \hat{\eta} \operatorname{div} \vec{v}$$

Einsetzen der Normal- und Tangentialspannung

⇒ **Navier- Stokes Gleichungen**

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right]$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[\eta \left(2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]$$

inkompressible Strömung, $\eta = \text{konst}$

$$\longrightarrow \operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Vereinfachung der 2. Ableitungen

$$\eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\eta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] = \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

\Rightarrow Navier- Stokes Gleichungen für ein ink. Fluid

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho g_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = \rho g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

Energiegleichungen

1. Hauptsatz der Thermodynamik :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{dE}{dt} + \frac{dW}{dt}$$

Q : Wärme; E : Energie; W : Arbeit

Volumenelement :

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$$

$$\Delta m = \rho \Delta V$$

Wärmeleitung nach Fourier :

$$\frac{1}{A} \frac{dQ}{dt} = q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$$

λ : Wärmeleitfähigkeit

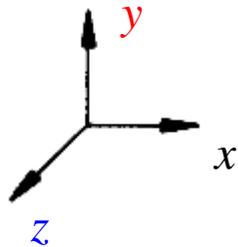
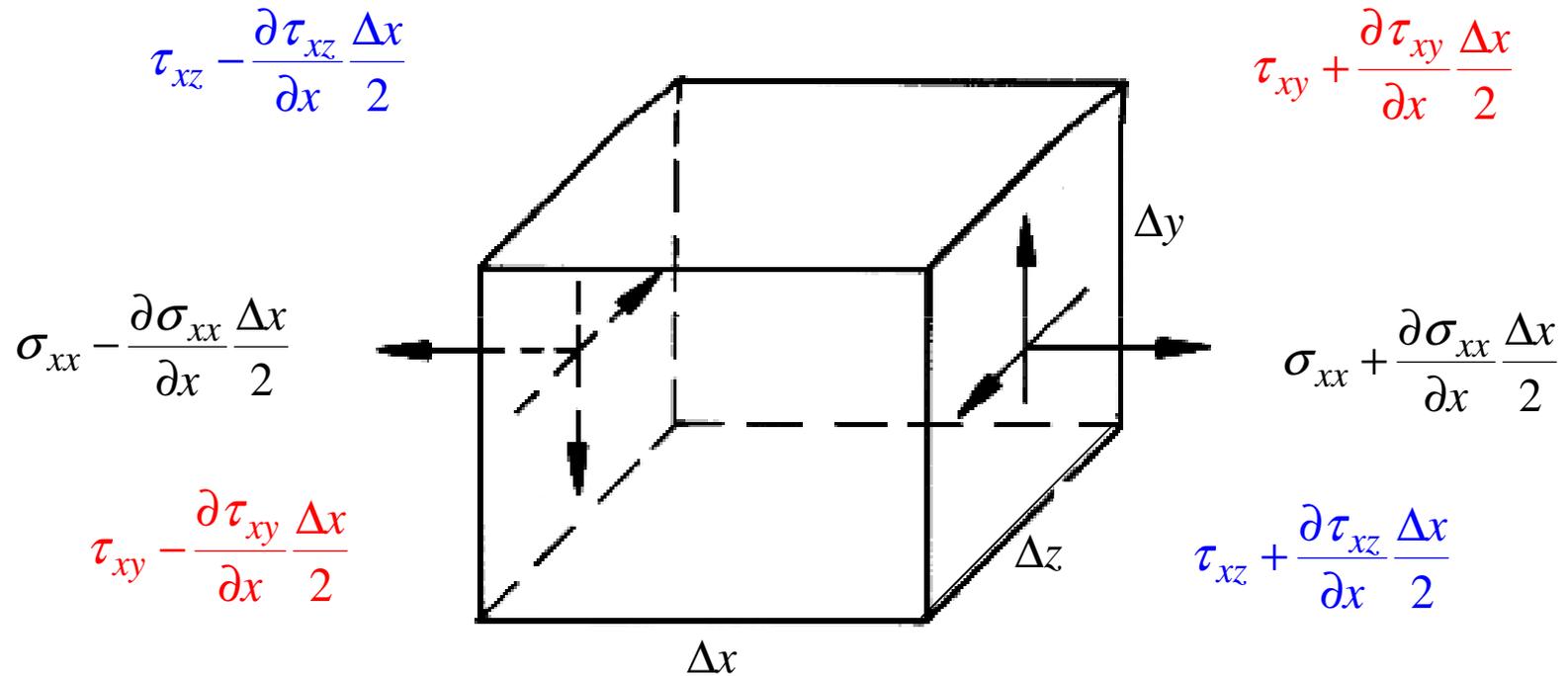
Betrachtung für die Fläche $\Delta y \Delta z$ (x-Richtung)

aufgenommene Wärme:
$$-\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

abgegebene Wärme:
$$\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta y \Delta z$$

Nettowärmestrom in x-, y- und z-Richtung

$$dQ = dt \Delta V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right\}$$



zeitliche Änderung der Gesamtenergie:

$$\frac{dE}{dt} = \rho \Delta V \left[\frac{de}{dt} + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u^2 + v^2 + w^2) \right]$$

e : massenbezogene innere Energie

Arbeit pro Zeit anhand von σ_{xx} :

$$\begin{aligned} dW_{\sigma_{xx}} &= -\Delta y \Delta z dt \left\{ \underbrace{- \left(u - \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)}_{\text{blue underline}} \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right) \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \frac{\Delta x}{2} \right)}_{\text{red underline}} \right\} \\ &= -\Delta y \Delta z dt \left(u \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \\ &= -\Delta V dt \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx}) \\ &\quad \underline{\underline{\text{blue double underline}}} \end{aligned}$$

analoge Vorgehensweise für den gesamten Spannungstensor :

$$\frac{dW}{dt} = -\Delta V \left[\frac{\partial}{\partial x} (\underline{u\sigma_{xx}} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u\tau_{yx} + v\sigma_{yy} + w\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\sigma_{zz}) \right]$$

Mittels Impulserhaltung (z.B. x-Impuls) :

$$\underline{\rho} \frac{du}{dt} = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

Umformung der $\frac{dE}{dt}$ und $\frac{dW}{dt}$ -Therme :

$$\frac{dE}{dt} = \left[\rho \frac{de}{dt} + \underline{u\rho} \frac{du}{dt} + v\rho \frac{dv}{dt} + w\rho \frac{dw}{dt} \right] \Delta V$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} \frac{1}{\Delta V} = & -u \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \dots \\ & -u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} \dots \\ & -u \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dE}{dt} + \frac{dW}{dt} \right) \frac{1}{\Delta V} = & \rho \frac{de}{dt} - \sigma_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial v}{\partial x} - \tau_{xz} \frac{\partial w}{\partial x} \\ & - \tau_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} - \sigma_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} - \tau_{yz} \frac{\partial w}{\partial y} \\ & - \tau_{zx} \frac{\partial u}{\partial z} - \tau_{zy} \frac{\partial v}{\partial z} - \sigma_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

Einführung der Spannungen ergibt die Energiegleichung

$$\rho \frac{de}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \eta \Phi$$

mit Φ für $\hat{\eta} = 0$

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 > 0 \end{aligned}$$

Φ = Dissipationsfunktion

mechanische Energie \longrightarrow thermische Energie

Energiegleichungen für ideale Gase

$$e = f(T), \quad h = e + \frac{p}{\rho} = f(T)$$

kalorische Zustandsgleichungen:

$$de = \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_{\frac{1}{\rho}} dT = c_v dT \quad dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT = c_p dT$$

$$\Rightarrow \frac{de}{dt} = \frac{dh}{dt} - \frac{d\left(\frac{p}{\rho}\right)}{dt} = c_p \frac{dT}{dt} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{dp}{dt} - \frac{p d\rho}{\rho dt} \right]$$

Kontinuitätsgleichung:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \eta \Phi}$$

Form der Energiegleichung in CFD-Untersuchungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u(E + p)] + \frac{\partial}{\partial y} [v(E + p)] + \frac{\partial}{\partial z} [w(E + p)] = \\ \frac{\partial}{\partial x} [u\tau_{xx} + v\tau_{xy} + w\tau_{xz} - q_x] + \\ \frac{\partial}{\partial y} [u\tau_{xy} + v\tau_{yy} + w\tau_{yz} - q_y] + \\ \frac{\partial}{\partial z} [u\tau_{xz} + v\tau_{yz} + w\tau_{zz} - q_z] \end{aligned}$$

bzw. mit

$$H = h + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2}$$
$$\rho H = p + \rho \left(e + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) = p + E$$

lauten die räumlichen 1. Ableitungen der linken Seite

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u H) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v H) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w H)$$

Formen der Erhaltungsgleichungen

Vektorschreibweise unter Berücksichtigung des Nabla-Operators

Masse:
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

oder
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Impuls: Spannungstensor τ

$$\tau = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \sigma_{xx} + p = \eta \left(2\dot{\epsilon}_x - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right) + \hat{\eta} \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\sigma_y = \sigma_{yy} + p$$

$$\sigma_z = \sigma_{zz} + p$$

⇒ Formen der Navier-Stokes Gleichungen:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tau$$

oder:
$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tau$$

oder:
$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \vec{\nabla} \cdot \tau$$

mit $\vec{v} \vec{v} = \begin{pmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{pmatrix}$

inkompressibles Fluid mit $\eta = \text{konstant}$:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

+ stationär
$$\rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla} p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

Energie

$$E = \rho \left(e + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) \quad : \quad \text{Gesamtenergie}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (E\vec{v}) = \rho \vec{g} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \vec{\nabla} \cdot (p\vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v})$$

plus Kontinuitätsgleichung

$$\rho \frac{d}{dt} \left(e + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) = \rho \vec{g} \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} - \vec{\nabla} \cdot (p\vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v})$$

$$\underline{\underline{H = \frac{p + E}{\rho}}} \quad : \quad \text{Gesamtenthalpie}$$

$$\rho \frac{dH}{dt} = \rho \vec{g} \cdot \vec{v} + \frac{\partial p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \vec{v})$$

$$\frac{d}{dt} \left(e + \frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) = \frac{dH}{dt} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (p\vec{v}) \right)$$

e : innere Energie

$$\rho \frac{de}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} - p \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \tau \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

mit

$$\begin{aligned} \tau \cdot \vec{\nabla} \vec{v} &= \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} + \tau_{zx} \frac{\partial w}{\partial x} + \tau_{zy} \frac{\partial w}{\partial y} + \sigma_z \\ &= \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tau_{zx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \eta \Phi \end{aligned}$$

h : innere Enthalpie

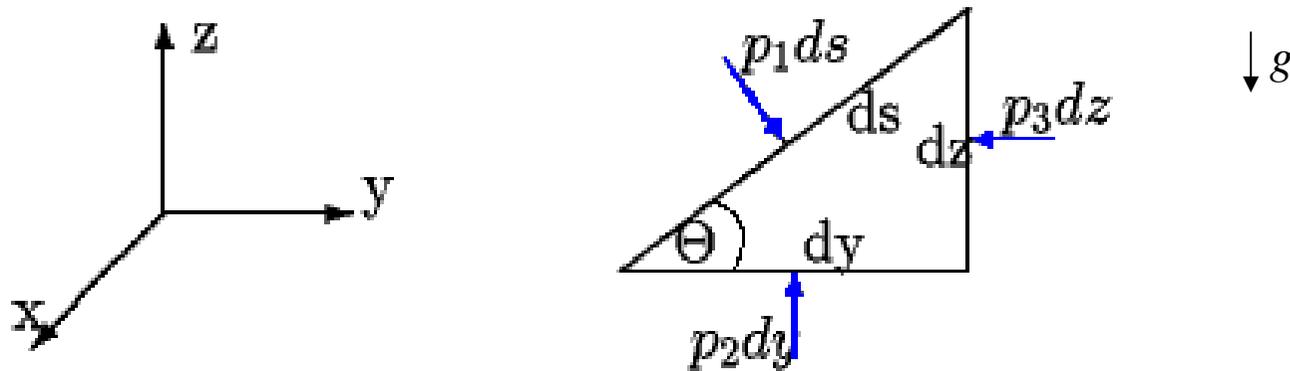
$$\rho \frac{dh}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \frac{dp}{dt} + \tau \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

bzw. bei idealem Gas:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{q} + \frac{dp}{dt} + \tau \cdot \vec{\nabla} \vec{v}$$

Hydrostatik

ruhendes Fluid \longrightarrow keine Tangentialspannungen



Kräftegleichgewicht für Oberflächen- und Gewichtskraft

$$\text{y-Richtung: } (p_1 ds) \sin \Theta - p_3 dz = 0$$

$$\text{z-Richtung: } -(p_1 ds) \cos \Theta + p_2 dy - \frac{1}{2} \rho g dy dz = 0$$

$$dz = ds \sin \Theta \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_3$$

$$dy = ds \cos \Theta$$

$$\Rightarrow p_2 - p_1 - \frac{1}{2} \rho g dz = 0$$

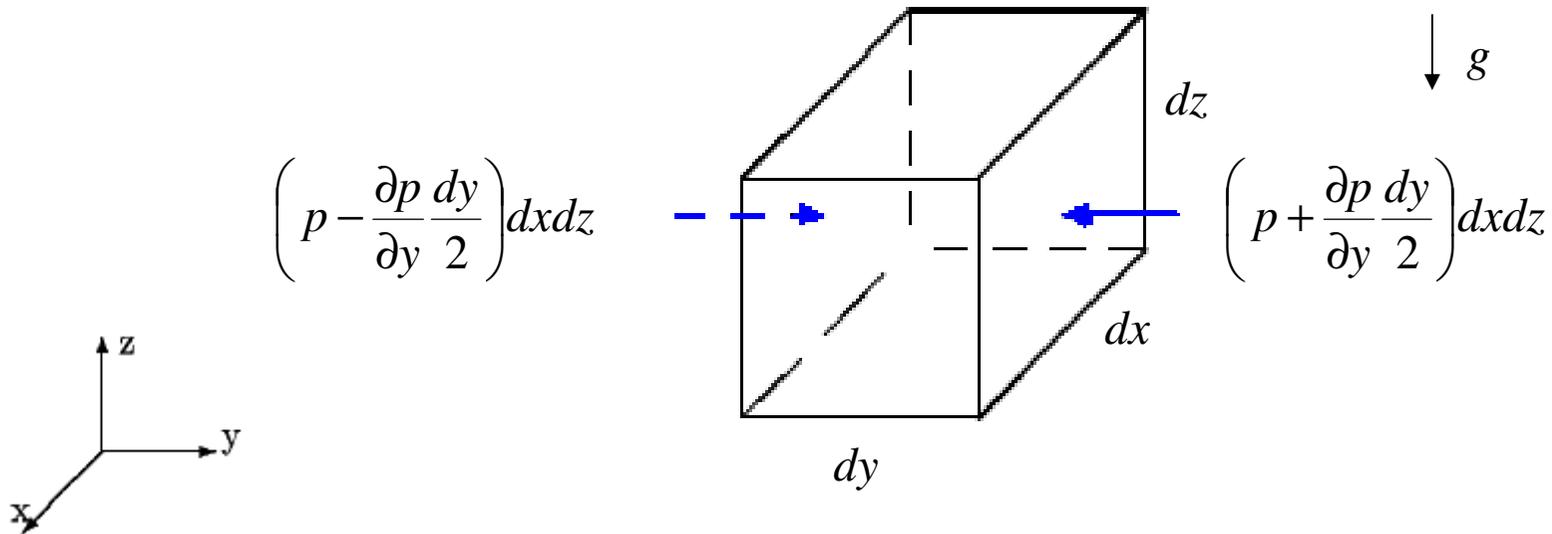
Volumen \rightarrow Punkt :

$$dz \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = p_2$$

\Rightarrow ruhendes Fluid, in einem Punkt; Druck unabhängig von der Richtung

\Rightarrow Druck ist eine skalare Größe

räumliche Verteilung des Druckes



Kräftegleichgewicht in x- und y-Richtung:

$$-\left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz + \left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) dy dz = 0$$

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2}\right) dx dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad p \neq f(x, y)$$

in z-Richtung:

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{2}\right) dx dy - \rho g dx dy dz = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$$

$\rho = \text{konstant}, g = \text{konstant}$

mit $p_0 = p(z = 0)$

$$p = p_0 - \rho g z$$

$$\Rightarrow p + \rho g z = p_0 = \text{konstant} \quad \text{hydrostatische Grundgleichung}$$

hydrostatische Grundgleichung für beliebige Beschleunigungsfelder

Oberflächenkräfte in x-, y-, z-Richtung: $dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$

$$dF_y = -\frac{\partial p}{\partial y} dx dy dz$$

$$dF_z = -\frac{\partial p}{\partial z} dx dy dz$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow d\vec{F}_s &= dF_x \vec{i} + dF_y \vec{j} + dF_z \vec{k} \\ &= -\left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right) dx dy dz \\ &= -\vec{\nabla} p dx dy dz\end{aligned}$$

Newton (2. Gesetz)

$$\sum d\vec{F} = dm \vec{a}$$

$$d\vec{F}_s - dG\vec{k} = dm \vec{a}$$

$$-\vec{\nabla} p dx dy dz - \rho g dx dy dz \vec{k} = \rho dx dy dz \vec{a}$$

$$\boxed{-\vec{\nabla} p - \rho g \vec{k} = \rho \vec{a}}$$

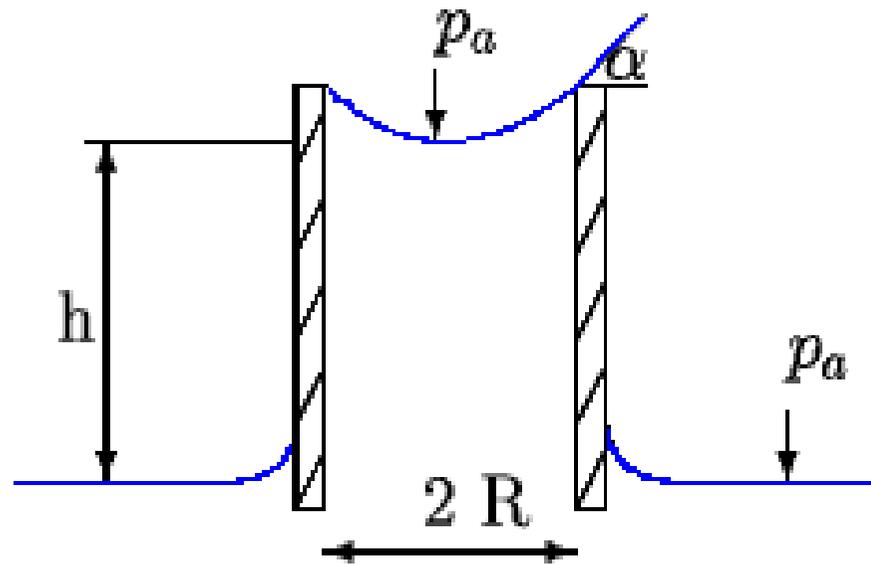
allg. Bewegungsgleichung ohne Tangentialspgn.

ruhendes Fluid $\longrightarrow \frac{dp}{dz} = -\rho g$

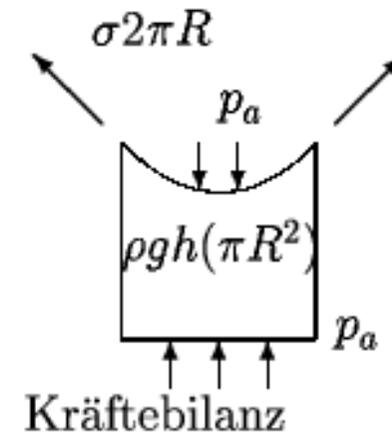
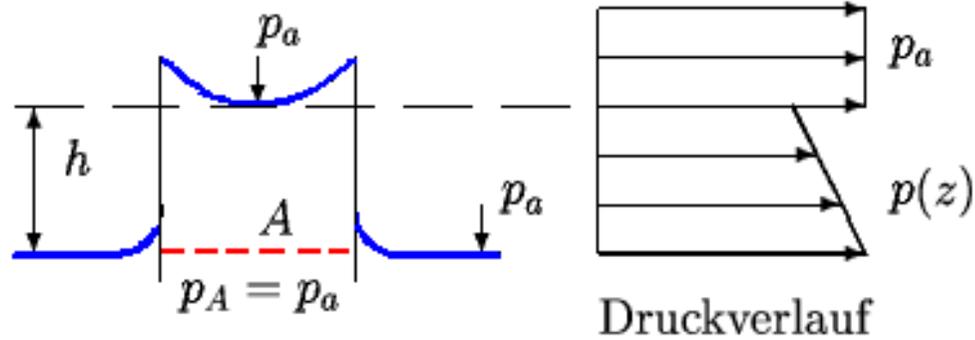
Bsp. 1 :

Herleitung von $h = \frac{2\sigma \sin \alpha}{\rho g R}$,

wobei h Flüssigkeitsanstieg, R Radius, σ Oberflächenspannung und α Berührungswinkel bedeutet.



Lösung 1 :



Kräftegleichgewicht in z-Richtung :

$$2\pi\sigma R \sin \alpha + p_a \pi R^2 - p_a \pi R^2 - \rho g h \pi R^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{h = \frac{2\sigma \sin \alpha}{\rho g R}}}$$

barometrische Höhenformel

ideale Gasgleichung :

$$\rho = \frac{p}{RT}$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{p g}{RT}$$

isotherme Atmosphäre

$$z_0 < z < z_1 \quad T(z) = T_0 = \textit{konst.}$$

$$\int_{p_0}^{p_1} \frac{dp}{p} = \ln \frac{p_1}{p_0} = -\frac{g}{RT_0} \int_{z_0}^{z_1} dz = -\frac{g}{RT} (z_1 - z_0)$$

bzw.

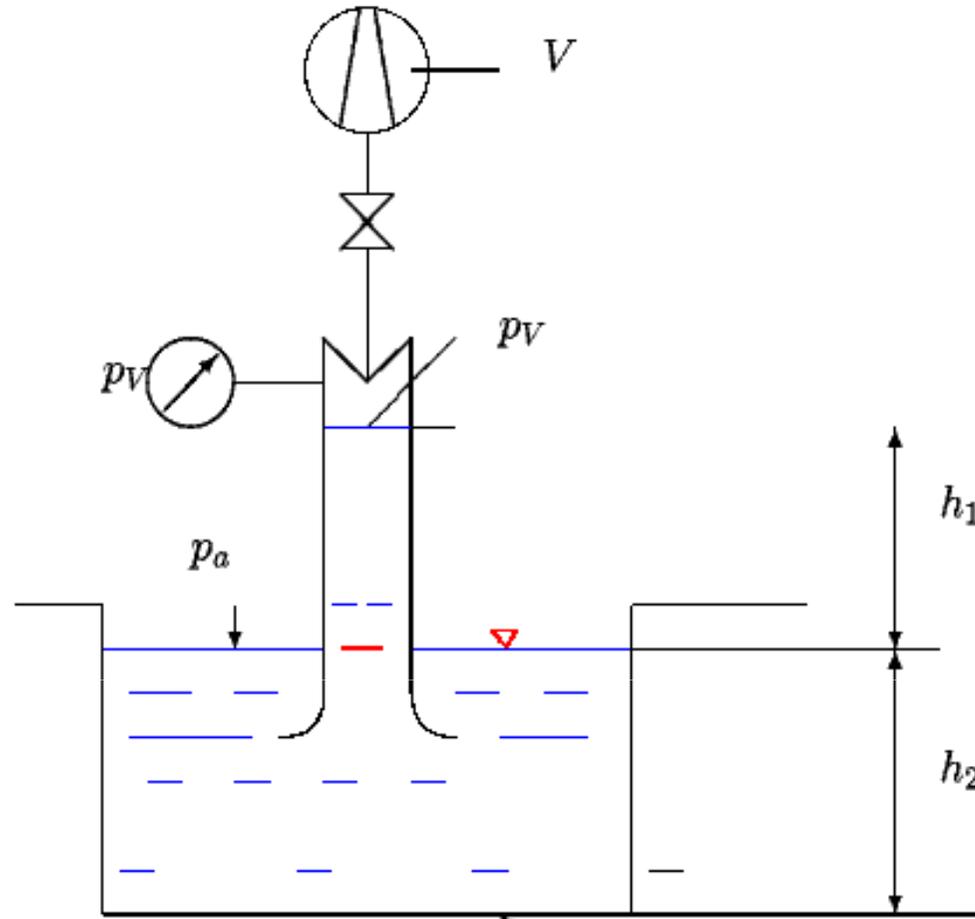
$$p_1 = p_0 \exp \left[-\frac{g}{RT_0} (z_1 - z_0) \right]$$

weitere Beispiele zur hydrostatischen Grundgleichung

Bsp. 2 :

Vakuumpumpe V erzeugt 95% Vakuum

- a) Wasserspiegelhöhe h_1 für einen Atmosphärendruck $p_a = 0.96 \text{ bar}$
- b) Absolutdruck und Überdruck auf dem Boden des Beckens



Lösung 2 :

a) $p_V = 0.05 p_a$

$$p_a = p_V + \rho g h_1$$

$$\Rightarrow h_1 = \frac{p_a - p_V}{\rho g}$$

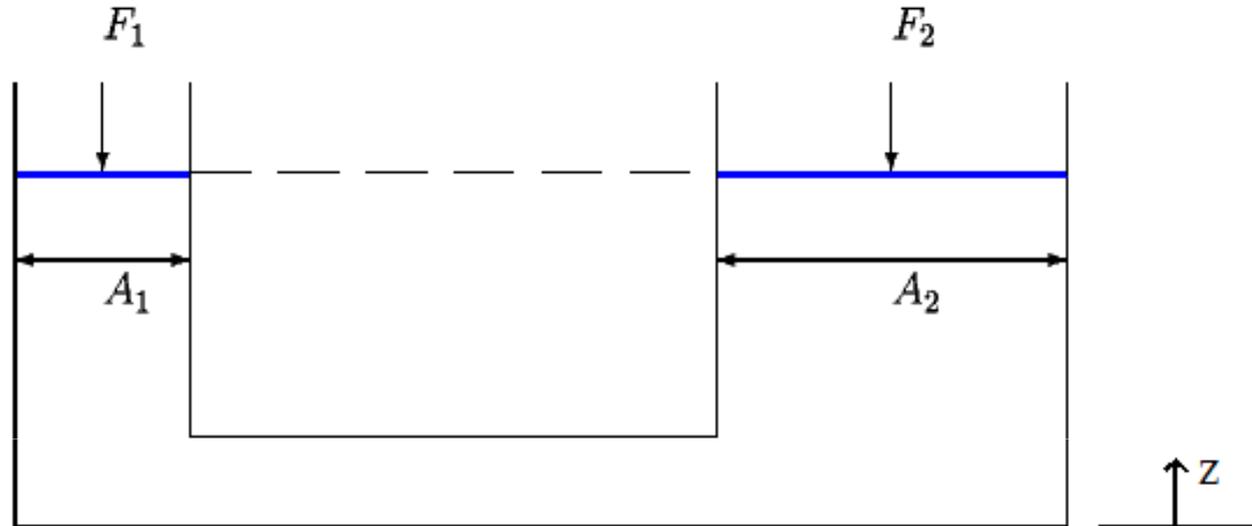
b)

$$\underline{p_B = p_a + \rho g h_2}$$

Überdruck : $\rho g h_2$

Bsp. 3 :

Ein geschlossenes System ist zum Beispiel mit Öl gefüllt. Für die Kolbenflächen gilt $A_2 \gg A_1$. Gesucht ist der Zusammenhang zwischen F_1 und F_2 .



Lösung 3 :

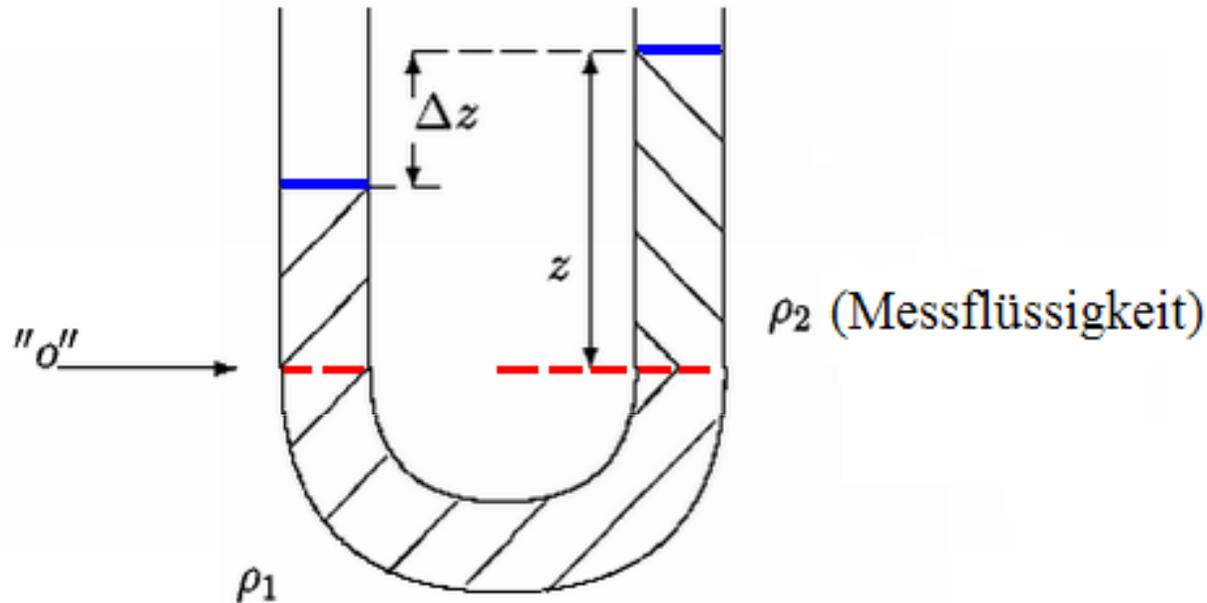
$$p_1 + \rho g z_1 = p_2 + \rho g z_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} + \rho g z_1 = \frac{F_2}{A_2} + \rho g z_2 \quad , \quad z_1 = z_2$$

$$\underline{\underline{F_2 = \frac{A_2}{A_1} \cdot F_1}}$$

Bsp. 4 :

Bestimmung der Dichte einer Messflüssigkeit anhand eines U-Rohres und einer Vergleichsflüssigkeit

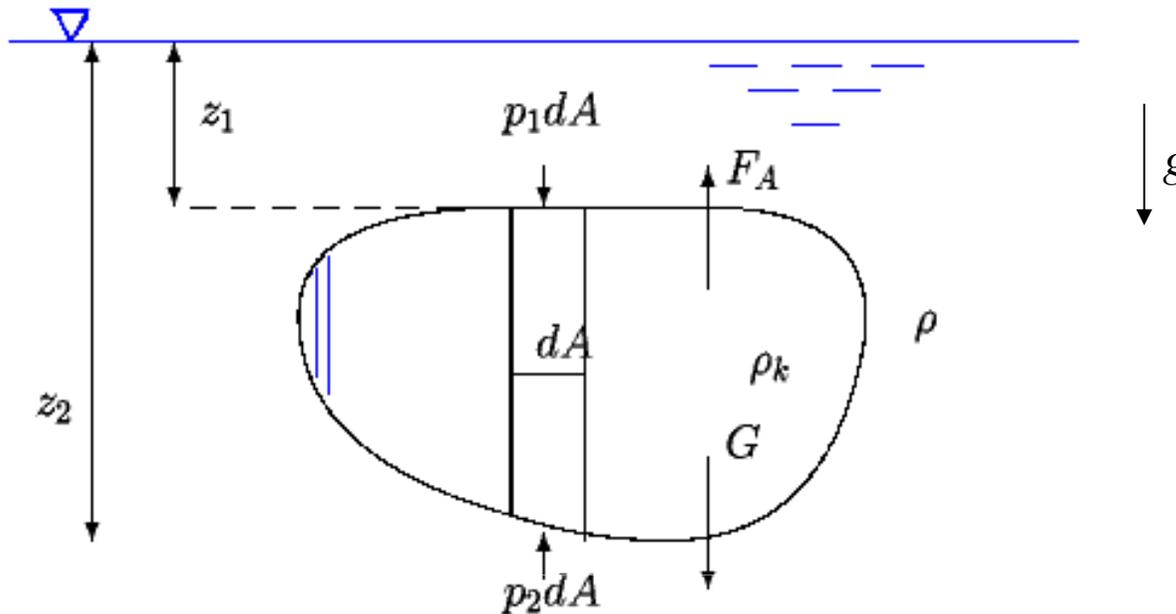


Lösung 4 :

$$p_0 = p_a + \rho_1 g (z - \Delta z) = p_a + \rho_2 g z$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\rho_2 = \rho_1 \frac{z - \Delta z}{z}}}$$

Bsp. 5 : Bestimmung des Auftriebs eines eingetauchten Körpers

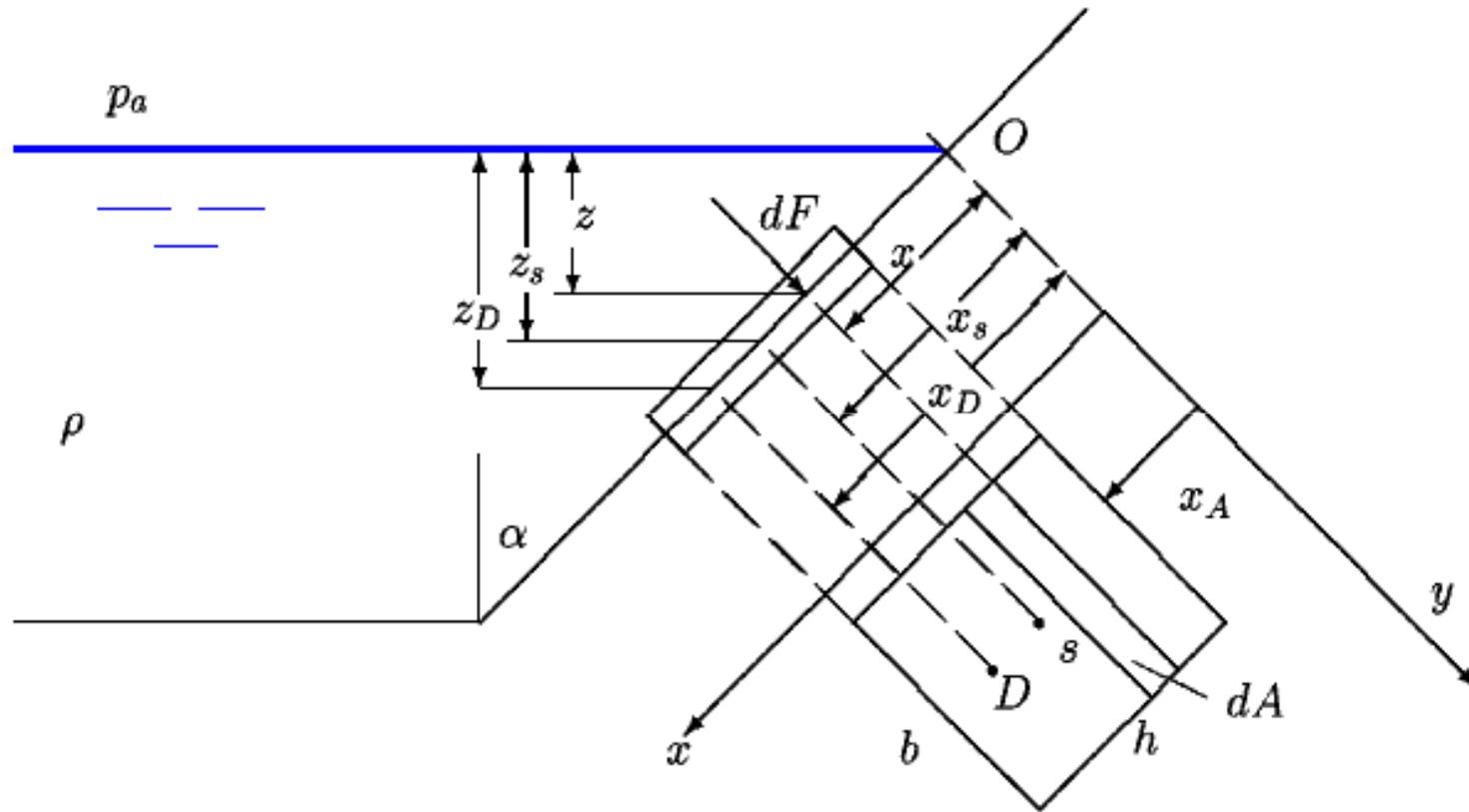


Lösung 5 :

$$\begin{aligned}
 dF_A &= p_2 dA - p_1 dA \\
 &= (p_a + \rho g z_2) dA - (p_a + \rho g z_1) dA \\
 &= \rho g (z_2 - z_1) dA \\
 \underline{\underline{F_A}} &= \rho g \int_A (z_2 - z_1) dA = \underline{\underline{\rho g V}} \quad ; \quad \rho = \rho_{\text{Fluid}}
 \end{aligned}$$

Bsp. 6 :

Ein offenes Gefäß ist mit Flüssigkeit gefüllt. Bestimmen Sie die aufgrund des Flüssigkeitsdrucks auftretende Kraft auf die geneigte Seitenwand und deren Angriffspunkt



Lösung 6 :

$$p = p_a + \rho g z = p_a + \rho g x \cos \alpha$$

$$dF = (p - p_a) dA = \rho g x \cos \alpha dA$$

$$F = \rho g \int_A x \cos \alpha dA$$

statisches Moment um ‘‘O‘‘

$$\int x dA = x_s A$$

$$\Rightarrow F = \rho g x_s \cos \alpha A = \rho g z_s A = (p_s - p_a) A$$

$$p = f(z) \Rightarrow \text{Angriffspunkt } D \text{ von } F$$

≠ Schwerpunkt S von A

Momentengleichgewicht um y-Achse $\rightarrow x_D$ (Koordinate von D)

$$x_D \cdot F = \int_A x dF$$

$$dF = \rho g x \cos \alpha dA = \rho g z dA \quad \text{bzw.}$$

$$F = \rho g x_s \cos \alpha A = \rho g z_s A$$

$$\int x^2 \rho g \cos \alpha dA = x_D x_s \rho g \cos \alpha A = I_y \rho g \cos \alpha$$

Trägheitsmoment I_y von A bezüglich y

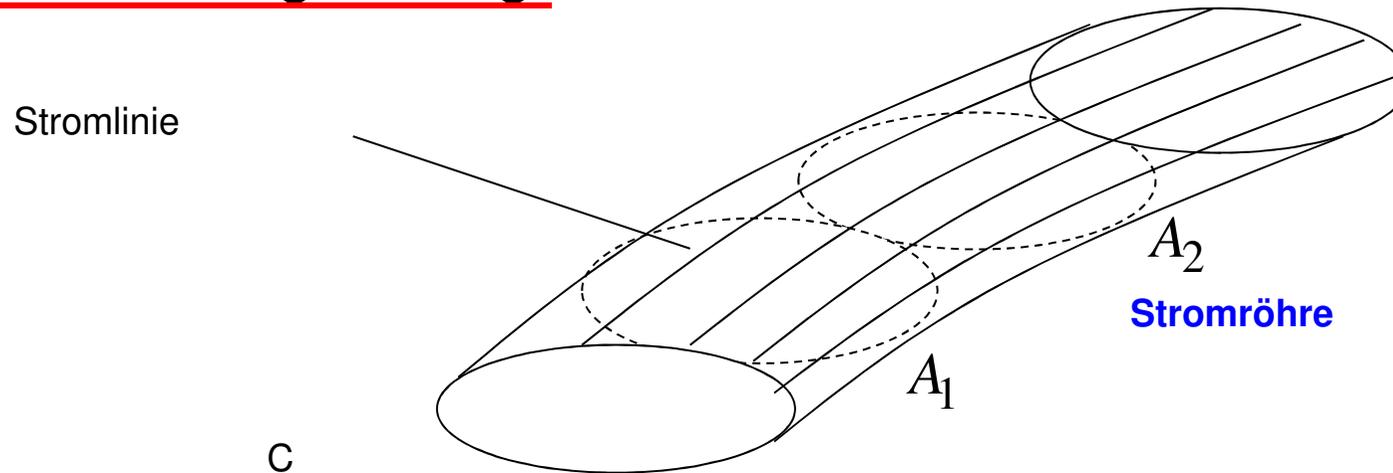
$$I_y = \int x^2 dA = I_s + Ax_s^2$$

I_s : Flächenträgheitsmoment der Achse durch S || zu y

$$\Rightarrow x_D = \frac{I_y}{x_s A} = x_s + \frac{I_s}{x_s A}$$

Kontinuitätsgleichung und Bernoulli Gleichung

Kontinuitätsgleichung:



$$\rho_1 v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 = \dot{m} = \text{konst}$$

inkompressible (dichtebest.) Fluide

$$\Rightarrow \rho_1 v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 = \dot{m} = \rho \dot{V} \quad (\text{Massenstrom})$$

$$\dot{V} = vA = \dot{m} / \rho \quad (\text{Volumenstrom})$$

Bsp. 1 : Durch eine Rohrleitung mit einem äußeren Durchmesser von 320mm und 10mm Wandstärke strömen 120000kg/h Öl mit $\rho = 0.9 \text{ kg/dm}^3$

a) Bestimmen Sie die Strömungsgeschwindigkeit.

b) Bestimmen Sie den lichten Durchmesser für $v_2 = 1 \text{ m/s}$

Lösung 1:

$$\dot{V} = vA$$

a)
$$v = \frac{\dot{V}}{A} = \frac{\dot{m}4}{\rho\pi d_i^2} = 0.524 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b)
$$\dot{V} = \text{konst}$$

$$v_1 = v = 0.524 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v_2 = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 v_1 = \frac{\pi}{4} d_2^2 v_2, d_1 = 0.3 \text{m}$$

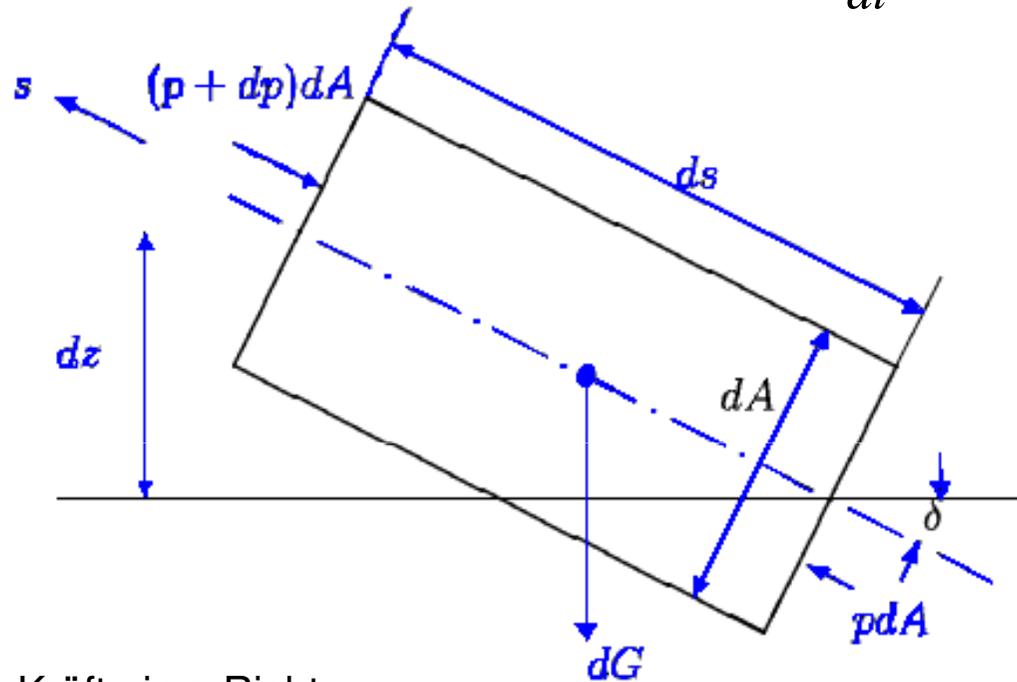
$$\underline{d_2} = d_1 \sqrt{\frac{v_1}{v_2}} = \underline{\underline{0.217 \text{m}}}$$

Bernoulli Gleichung



2. Newtonsches Gesetz

$$\sum d\vec{F} = dm \frac{d\vec{v}}{dt}$$



Reibungskräfte werden vernachlässigt!

Kräfte in s-Richtung :

$$\sum d\vec{F} = -dG \sin \delta + p dA - (p + dp)dA$$

mit

$$dG = gdm = \rho g ds dA$$

$$\sin \delta = \frac{dz}{ds}$$

$$\rho ds dA \frac{dv}{dt} = -\rho g ds dA \frac{dz}{ds} - dp dA$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\rho g \frac{dz}{ds} - \frac{dp}{ds}$$

$$v = v(s, t) \quad \Rightarrow \quad dv = \frac{\partial v}{\partial t} dt + \frac{\partial v}{\partial s} ds$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(v^2/2)}{\partial s}$$

substantielle Beschleunigung = **lokale Beschleunigung** + **konvektive Beschleunigung**

$$\Rightarrow \quad \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\rho}{2} \frac{\partial v^2}{\partial s} + \frac{dp}{ds} + \rho g \frac{dz}{ds} = 0$$

Annahme: stationäre Strömung, inkompressible Fluide

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g z = konst$$

Bernoulli Gleichung

p : statischer Druck

$\frac{\rho}{2} v^2$: dynamischer Druck; kinetischer Druck; Geschwindigkeitsdruck; Staudruck

$p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g z$: Total- oder Gesamtdruck

bei horizontal liegendem Kontrollfaden

$p + \frac{\rho}{2} v^2 = p_0$: Totaldruck

Division durch ρg

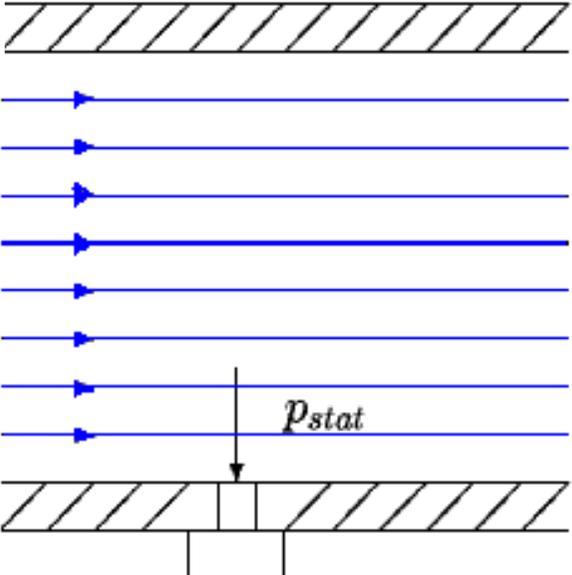
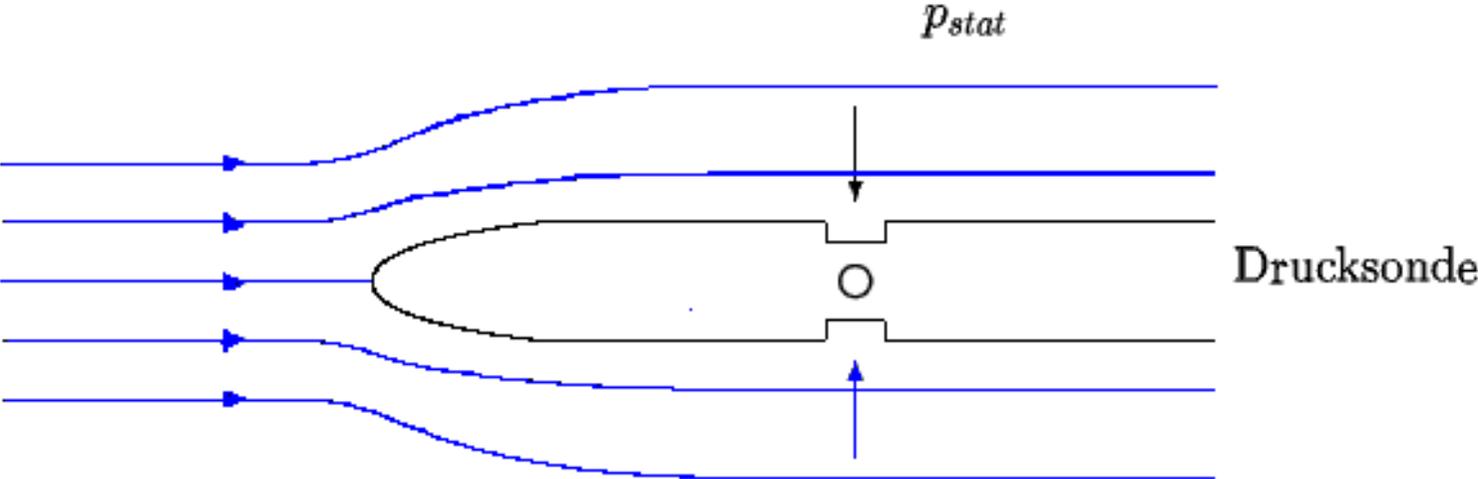
$$z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} = \widetilde{\text{konst}}$$

geodätische Höhe + Druckhöhe + Geschwindigkeitshöhe = $\widetilde{\text{konstant}}$

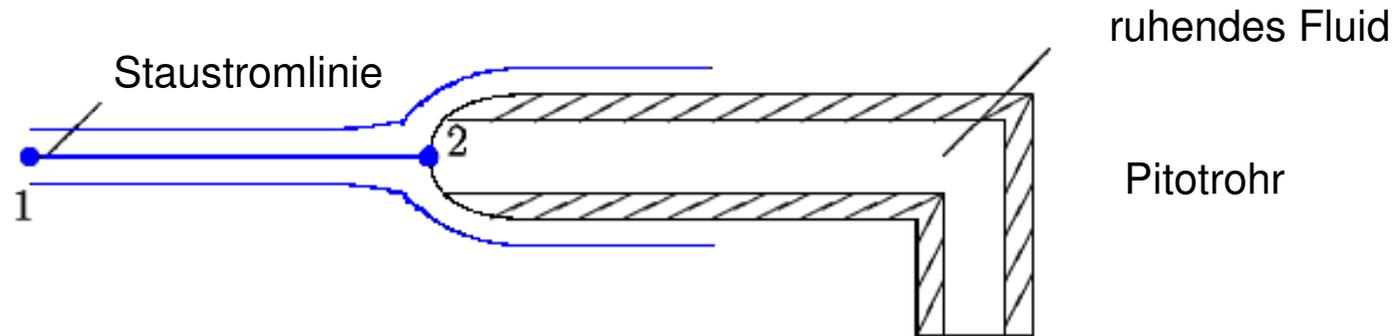
Bemerkung: Die Bernoulli Gleichung in obiger Form gilt für stationäre, reibungsfreie, inkompressible Strömungen entlang einer Stromlinie.

Anwendungen der Bernoulli Gleichung

statischer Druck

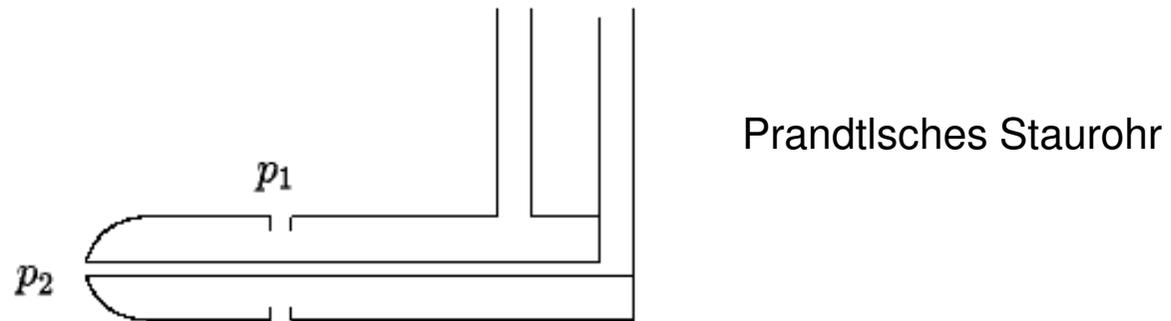


Totaldruck



$$p_{Ges} = p_0 = p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 \quad (\text{Pitotdruck})$$

Staudruck



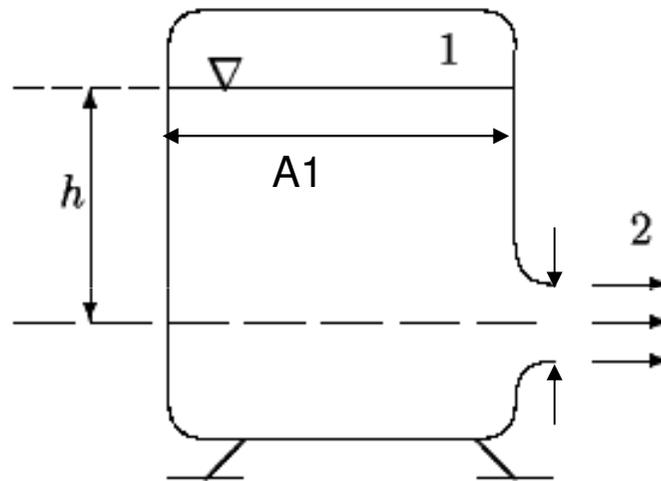
$$p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2$$

$$q_1 = \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 - p_1 = \rho g \Delta z$$

⇒ Strömungsgeschwindigkeit

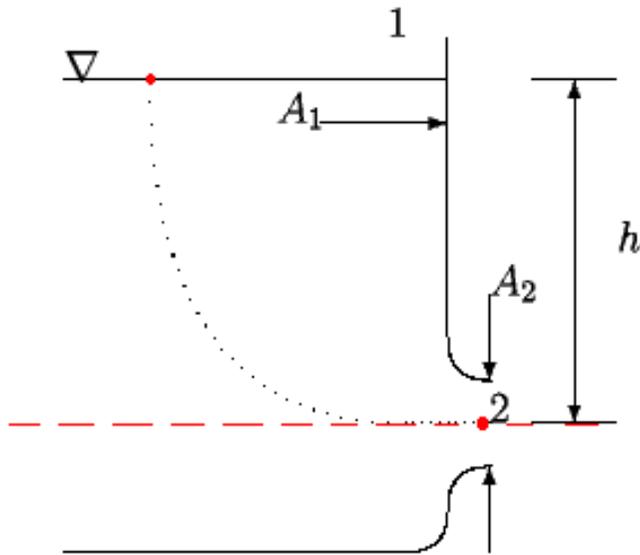
$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\rho}} = \sqrt{2g\Delta z}$$

Bsp. 2 :



Bestimmen Sie eine Beziehung zur Berechnung von v_2 ;
gegeben $A_1 \gg A_2, h$

Lösung 2 :



$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

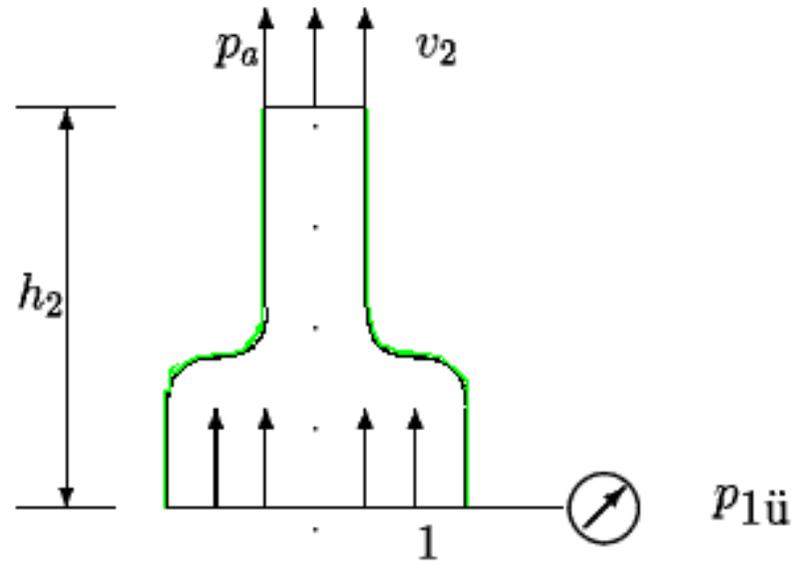
$$\frac{\rho}{2} v_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = p_1 - p_2 + \rho g h$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2 p_1 - p_2 + \rho g h}{\rho \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right]}}$$

$$1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \approx 1 \quad , \quad \text{da } A_2 \ll A_1$$

$$\underline{\underline{v_2 = \sqrt{2gh}}} \quad (\text{Torricelli})$$

Bsp. 3 :



Gegeben : $p_{1\ddot{u}} = 4\text{bar}$, $h_2 = 0.2\text{m}$,

Benzin $\rho = 780 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $d_1 = 10\text{mm}$

$d_2 = 2\text{mm}$, $p_{1\ddot{u}}$: Überdruck geg. p_a

Gesucht : v_2

Lösung 3 :

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g h_2 + p_a$$

$$p_{1\ddot{u}} + \frac{\rho}{2} v_1^2 = \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g h_2$$

$$v_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = v_2 \frac{\pi d_2^2}{4}$$

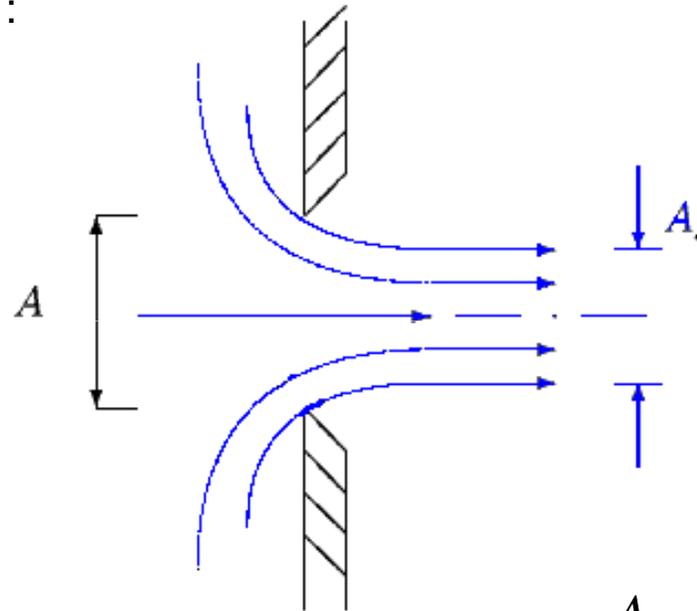
$$v_1 = v_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2$$

$$\underline{v_2} = \sqrt{\frac{\frac{2 p_{1\ddot{u}}}{\rho} - 2 g h_2}{1 - \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^4}}$$

$$\underline{\underline{v_2 = 32 \text{ m/s}}}$$

bis jetzt wurden gerundete Düsen betrachtet

scharfkantiger Ausfluss :



Definition der Kontraktionszahl ψ

$$\psi = \frac{A_s}{A} \quad \Rightarrow \quad \psi \leq 1$$

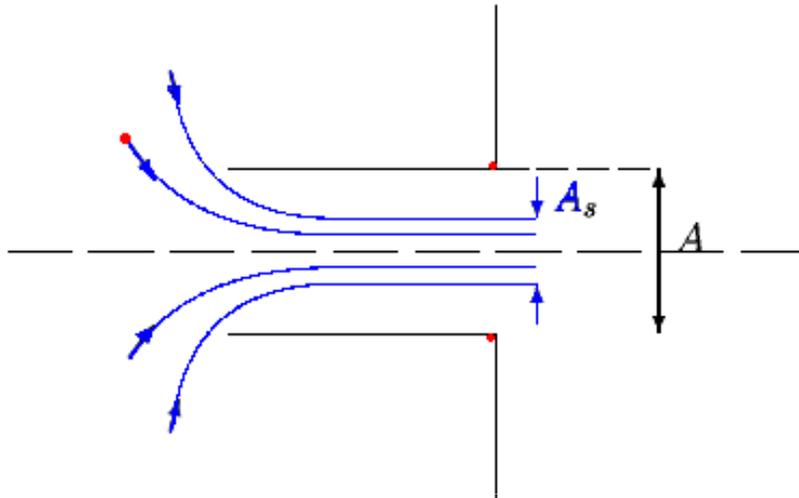
zum Beispiel : schlitzartige Öffnungen oder kreisförmige Löcher

$$\psi_{\text{Näherg.}} = \frac{\pi}{2 + \pi} = 0.611$$

$$\psi_{\text{exp}} = 0.607$$

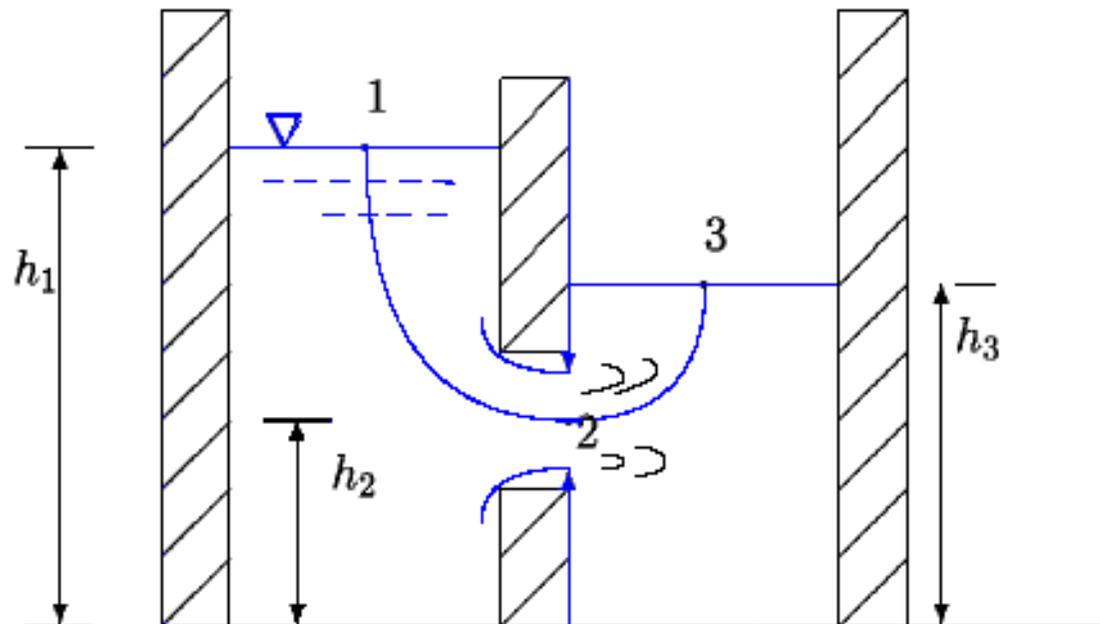
gerundete Düse : $\psi \approx 1$

Borda-Mündung hat die größte Strahlkonzentration : $\psi = 0.5$



$$0.5 \leq \psi \leq 1$$

gültig für Ausströmen in Luft
oder in Wasser



$$p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g h_2 = p_1 + \rho g h_1 \quad \text{mit } p_3 = p_1$$

$$p_2 = p_1 + \rho g (h_3 - h_2)$$

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_3)}$$

Bernoulli von 1 zu 2 OK

auf keinen Fall Bernoulli Glg von 2 nach 3 ,da die Strömung verlustbehaftet ist.

$$\text{Volumenstrom : } \dot{V} = v_2 A_s = \psi A \sqrt{2g(h_1 - h_3)}$$

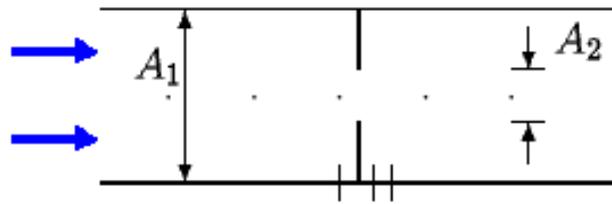
Messung des Durchflussvolumens und der Geschwindigkeit

→ Drosselgeräte

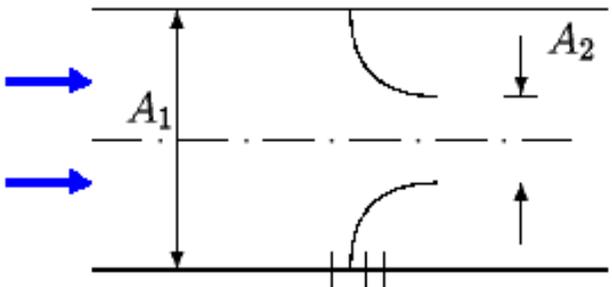
Messung von $\Delta p_w \sim v$ bzw. $\Delta p_w \sim \dot{V}$

Durchflusszahl α , um idealen Wert an die Realität anzupassen

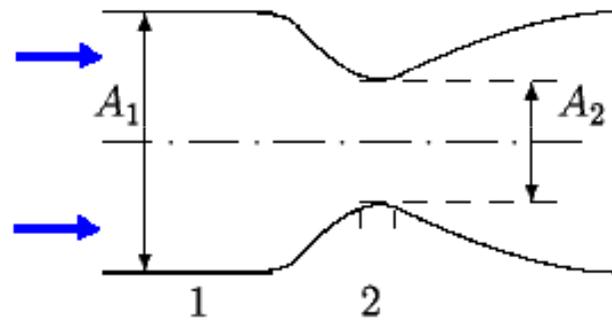
Berechnung und Konstruktion von Drosselgeräten in DIN 1952



Normblende



Normdüse



Venturidüse

verlustfreie Strömung :

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

Flächenverhältnis m :

$$m = \frac{A_2}{A_1}$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(1 - m^2)}} = \sqrt{\frac{2 \Delta p_w}{\rho(1 - m^2)}} = \sqrt{\frac{1}{1 - m^2}} \sqrt{\frac{2 \Delta p_w}{\rho}}$$

theoretischer Volumenstrom \dot{V}_{th}

$$\dot{V}_{th} = v_2 A_2$$

tatsächlicher Volumenstrom \dot{V}_{re}

$$\dot{V}_{re} = \alpha A_2 \sqrt{\frac{2\Delta p_w}{\rho}}$$

Durchflusszahl α

$$\alpha = f(\text{Form}, m, A_2, v_2, \rho, \eta)$$

Rohrleitungsanlagen

energieändernde Anlagenteile

⇒ erweiterte Bernoulli Gleichung, die Zu- und Abfuhr von Arbeit enthält

Annahme : Strömung von (1) nach (2)

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + e_a = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + e_v$$

e_a : Arbeitsglied ; >0 bei Arbeitszufuhr

e_v : Verlustglied ; immer >0

Auswirkungen der Reibung \Rightarrow Druckverlustterm Δp_v

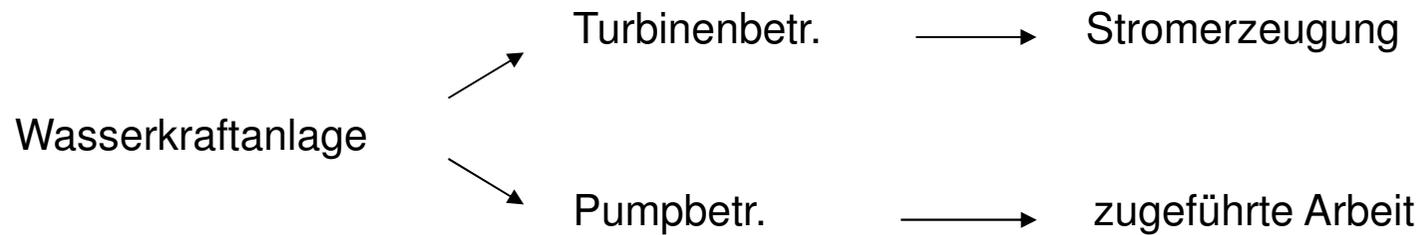
allgemeine Angabe :
$$\Delta p_v = \zeta \rho \frac{v^2}{2}$$

$$\Delta p_v = \Delta p_{vR} + \Delta p_{vE}$$

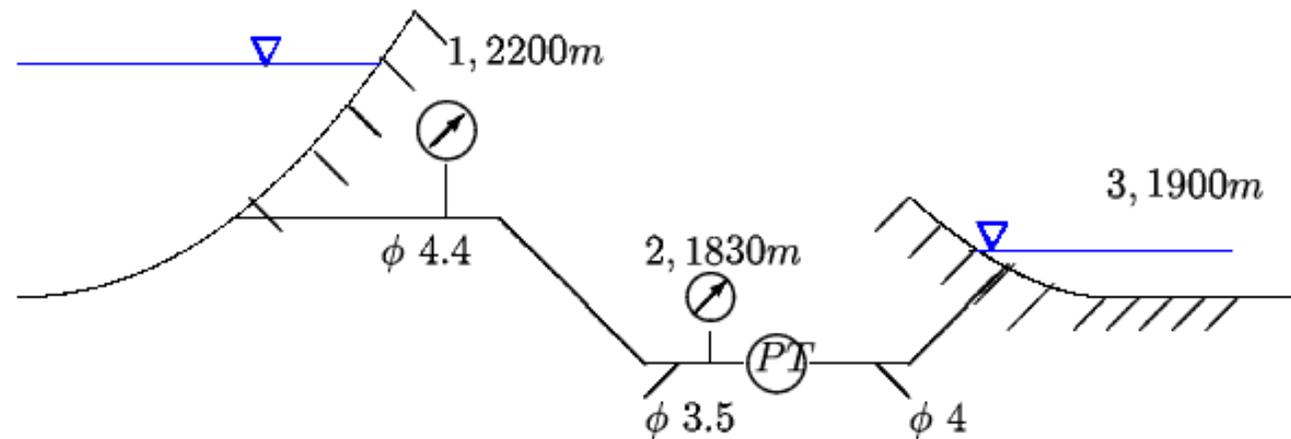
Δp_{vR} : Reibungsverluste des geraden Rohrs

Δp_{vE} : Verluste durch Einbauten

Bsp. 4 :



Überdruckwerte von 2
Stellen an der
Messstation



Druck	ϕ	Höhe über Meeresspiegel
$p_1 = 9bar$	$d_1 = 4.4m$	$h_1 = 2200m$
$p_2 = 48bar$	$d_2 = 3.5m$	$h_2 = 1830m$

$$\dot{V} = 60 \frac{m^3}{s}$$

- a) Turbinen- oder Pumpbetrieb ?
- b) Verluste an mechanischer Energie zwischen 1 und 2 ausgedrückt in Δp_v und

$$\Delta h_v = \frac{\Delta p_v}{\rho g} \quad ?$$

- c) Reibungsverluste zwischen 2 und 3 mit $\zeta = 3.0$ treten auf. Der Maschinenwirkungsgrad η_p der Pumpe oder Turbine ist 90%,

$$\text{wobei} \quad \eta_p = \frac{P_h}{P_w}$$

P_h : Zuwachs an mechan. Leistung zw. Aus – und Eintritt

P_w : zugeführte Leistung

Bestimmen Sie die Turbinen- oder Pumpleistung!

Lösung 4 :

- a) Annahme : Turbinenbetrieb, daher Strömung von 1 \rightarrow 2

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \Delta p_{v,1-2}$$

$$v_1 = \dot{V}/A_1 = 3.95 \text{ m/s} \quad ; \quad v_2 = \dot{V}/A_2 = 6.24 \text{ m/s}$$

$$\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$h_1 = 2200 \text{ m} \quad , \quad h_2 = 1830 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \Delta p_{v,1-2} = -2.82 \text{ bar}$$

$$\Delta p_{v,1-2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Strömung von 2} \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\text{Pumpbetrieb}}}$$

b) $\Delta p_{v,2-1} = 2.82 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$

$$\Delta h_v = \frac{\Delta p_v}{\rho g} = 28.7 \text{ m}$$

- c) P_w ist gesucht

Bernoulli von 3 \rightarrow 1

$$p_3 + \rho g h_3 + \frac{\rho}{2} v_3^2 + Z = p_1 + \rho g h_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \Delta p_{v,2-1} + \Delta p_{v,3-2}$$

Z/ρ : übertragene mechanische Arbeit / kg

$$P_h = \dot{m} \frac{Z}{\rho} = \dot{V} Z$$

$$v_3 \rightarrow 0$$

$$p_1 \text{ entspricht dem Überdruck} \rightarrow p_3 = 0$$

$$\Delta p_{v,3-2} = \zeta \frac{\rho}{2} v^2 \quad \text{mit} \quad v = \frac{\dot{V}}{A}$$

$$\Rightarrow Z = 4.167 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

zugeführte mechanische Leistung P_w ?

$$P_h = \dot{m} \left(\frac{Z}{\rho} \right) = \dot{V} Z = 250 \cdot 10^6 \text{ N m/s} = 250 \text{ MW}$$

$$\eta_p = \frac{P_h}{P_w}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_w}} = \frac{P_h}{\eta_p} = \underline{\underline{278 \text{ MW}}}$$

Verluste in der Pumpe

$$P_w - P_h = 28 \text{ MW}$$

Energiegleichung für **instationäre Strömungen**

$$v = f(s, t)$$

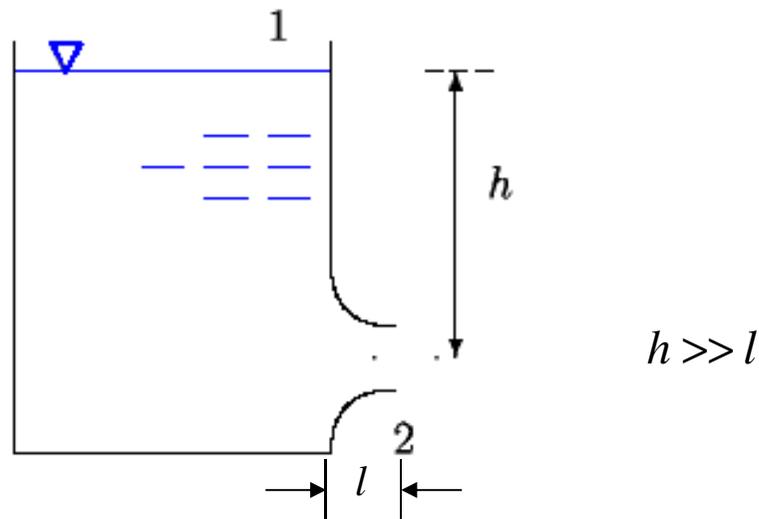
$$\Rightarrow \rho \int \frac{\partial v}{\partial t} ds + p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g z = f(t)$$

quasistationär :

$$\rho \int \frac{\partial v}{\partial t} ds \ll p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho g z$$

Im Allgemeinen wird $h(t)$ oder der Anfahrvorgang $v(t)$ untersucht!

Bsp. 5 : Entleerungsvorgang eines Wassertanks ist zu untersuchen



Lösung 5 :
$$\rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho gh$$

$$p_1 = p_2$$

$$\rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \rho gh$$

$$2\rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + \rho (v_2^2 - v_1^2) = 2\rho gh$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$h(t=0) \gg l:$
$$\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{dv_1}{dt}; \quad \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds \approx \int_1^2 \frac{dv_1}{dt} ds \approx \frac{dv_1}{dt} h$$

aus Kontinuitätsgleichung :
$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{A_2}{A_1} \frac{dv_2}{dt}$$

\Rightarrow
$$2h \frac{A_2}{A_1} \frac{dv_2}{dt} + v_2^2 \left[1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right] = 2gh(t) \quad \text{I)}$$

1 Gleichung für 2 Unbekannte : $v_2(t)$

zusätzliche Gleichung :

$$v_1 = -\frac{dh}{dt} \quad \longrightarrow \quad \underline{\underline{h(t) = h_0 - \int_0^t v_1 dt}} \quad \text{II)}$$

Gleichung I) und II) sind gleichzeitig zu lösen.

ODER Abschätzung von $2h(t) \frac{A_2}{A_1} \frac{dv_2}{dt}$

stationäres Ausströmen : $v_2 = \sqrt{2gh}$

Differentiation : $\frac{dv_2}{dt} = \frac{g}{\sqrt{2gh}} \frac{dh}{dt} = -\frac{g}{\sqrt{2gh}} v_1 = -\frac{g}{\sqrt{2gh}} v_2 \frac{A_2}{A_1}$

$$2h \frac{A_2}{A_1} \frac{dv_2}{dt} = -2gh \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 = -v_2^2 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{v_2^2}{2h} \frac{A_2}{A_1} = -g \frac{A_2}{A_1}$$

$A_1 \gg A_2 \Rightarrow \frac{dv_2}{dt}$ ist vernachlässigbar

\Rightarrow quasistationäre Strömung

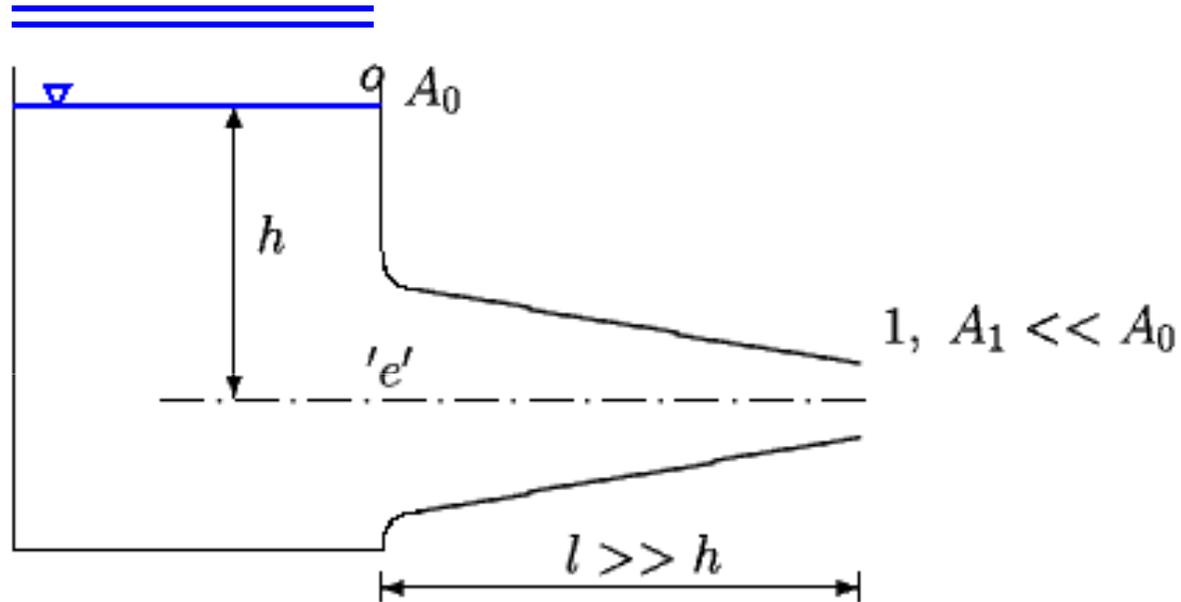
\Rightarrow I) $v_2(t) = \sqrt{2gh}$

$$\frac{dh}{dt} = -v_1 = -\sqrt{2gh(t)} \frac{A_2}{A_1}$$

$$T = -\frac{A_1}{A_2} \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_h^0 \frac{dh}{\sqrt{h}}$$

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g} \frac{A_1^2}{A_2^2}}$$

Bsp. 6 :



Gegeben: $h = \text{konst}$ (durch geregelten Zufluss); Ausströmvorgang wird zum Zeitpunkt $t=0$ in Gang gesetzt.

Gesucht: $v_1(t)$

Lösung 6 :

$$p_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 + \rho g h = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$p_1 = p_0 = p_a$$

$$v_0 = v_1 \frac{A_1}{A_0}, A_0 \gg A_1, v_0 \ll v_1$$

$$\frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \rho g h$$

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds : ?$$

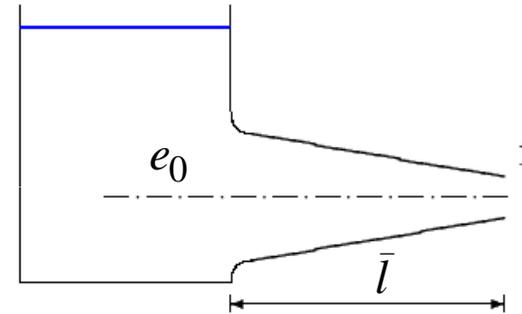
$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \int_0^e \frac{\partial v}{\partial t} ds + \int_e^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$\rightarrow 0$

$$v(s, t) A(s) = v_1(t) A_1$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv_1}{dt} \frac{A_1}{A(s)}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \int_e^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{dv_1}{dt} \int_0^1 \frac{A_1}{A(s)} ds = \frac{dv_1}{dt} \bar{l}$$



$$\Rightarrow \frac{dv_1}{dt} \bar{l} + \frac{v_1^2}{2} = gh \quad \bar{l} \neq l$$

stationäre Ausströmung :

$$v_{1,s} = \sqrt{2gh}$$

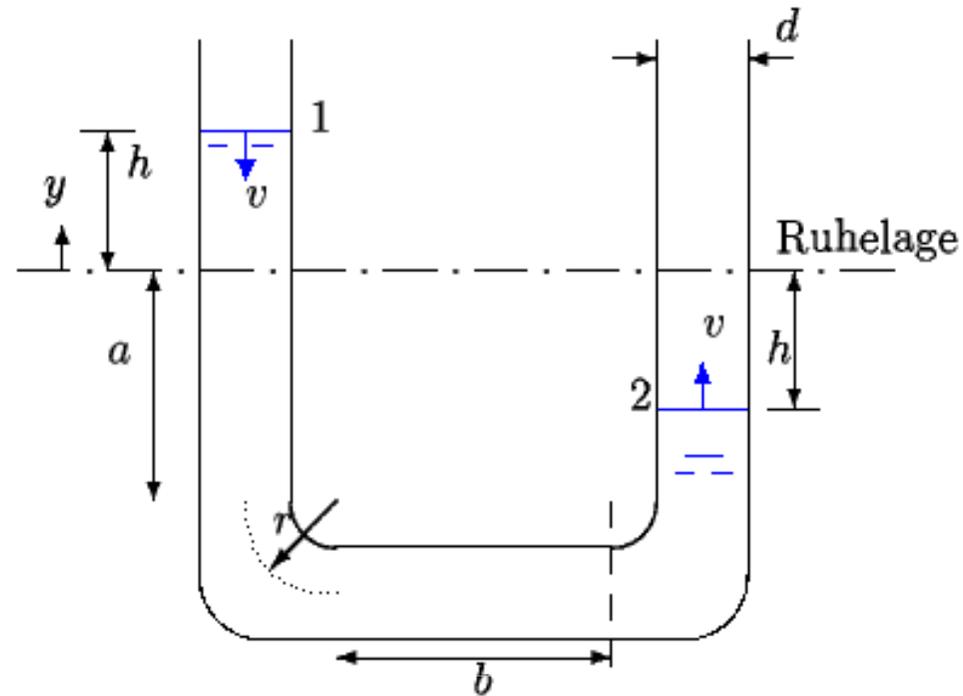
$$2\bar{l} \frac{dv_1}{dt} = v_{1,s}^2 - v_1^2$$

$$\frac{dv_1}{v_{1,s}^2 - v_1^2} = \frac{1}{2\bar{l}} dt$$

$$\frac{1}{2v_{1,s}^2} \ln \frac{v_{1,s} + v_1}{v_{1,s} - v_1} = \frac{1}{v_{1,s}} \tanh^{-1} \left(\frac{v_1}{v_{1,s}} \right) = \frac{t}{2\bar{l}}$$

$$\underline{\underline{v_1 = v_{1,s} \tanh \left(\frac{v_{1,s} t}{2\bar{l}} \right)}}$$

Bsp. 7 :



Wasser in einem U-Rohr wird durch eine Störung aus der Ruhelage gelenkt. Gegeben sind die Größen a, b, r, h, d ; gesucht wird der Schwingungsverlauf.

Lösung 7 :

$$\underline{\rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds} + p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \underline{\rho g y_2} = p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \underline{\rho g y_1}$$

$$p_1 = p_2$$

$$v_1^2 = v_2^2$$

$$y_1 = a + r + y$$

$$y_2 = a + r - y$$

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = 2gy$$

$$d = \text{konstant} \Rightarrow v = v(t)$$

$$2gy = \frac{dv}{dt} l$$

mit $l = 2a + b + \pi r$ und $v = -\frac{dy}{dt}$ ergibt sich

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2g}{l} y = \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

Schwingungsgleichung der harmonischen Bewegung

allg. Lösung :

$$y = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

bzw. $y = \alpha \cos(\omega t - \Theta)$

mit $\alpha = \sqrt{A^2 + B^2}, \tan(\Theta) = \frac{B}{A}$

Anfangs- und Randbedingungen :

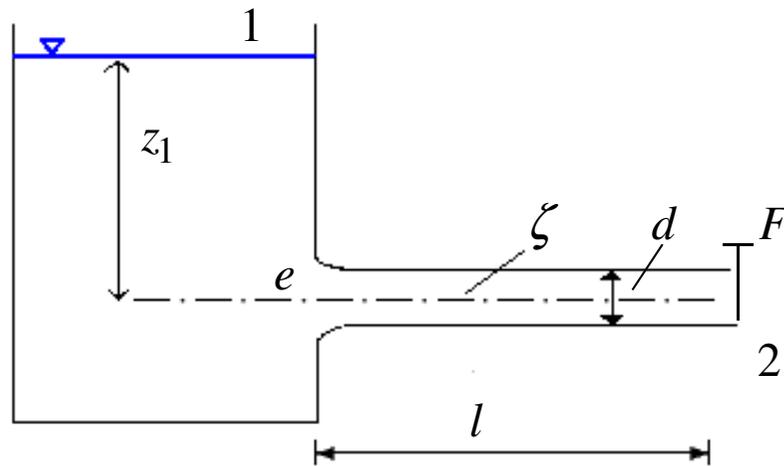
$$t = 0: y = h \quad \text{und} \quad v = v_0$$

$$y = h \cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

$$y = \sqrt{h^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega t - \Theta)$$

$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{-v_0}{\omega h}\right)$$

Bsp. 8 :



Gegeben : $z_1 = 4.3m$, $l = 85m$, $\zeta = 8.1$, $d = 80mm$

Gesucht : Schieber F wird plötzlich geöffnet ; $v_2(t)$ bis zum stationären Zustand?

Lösung 8 :

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g z_2 + \Delta p_v + \rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$p_1 = p_2, \quad v_1 \approx 0, \quad z_2 = 0$$

$$l \gg z_1 \quad : \quad \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{dv_2}{dt} l$$

$$\Delta p_v = \zeta \frac{\rho}{2} v_2^2$$

$$l \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2^2}{2} (1 + \zeta) = g z_1$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{l} \left[g z_1 - \frac{v_2^2}{2} (1 + \zeta) \right] = \frac{1 + \zeta}{2l} \left[\frac{2 g z_1}{1 + \zeta} - v_2^2 \right]$$

mit $a_1^2 = \frac{2gz_1}{1+\zeta}$ ergibt sich

$$\frac{1}{2a_1} \ln\left(\frac{a_1 + v_2}{a_1 - v_2}\right) = \frac{1+\zeta}{2l} t$$

$$t = \frac{1}{a_2} \ln\left(\frac{a_1 + v_2}{a_1 - v_2}\right)$$

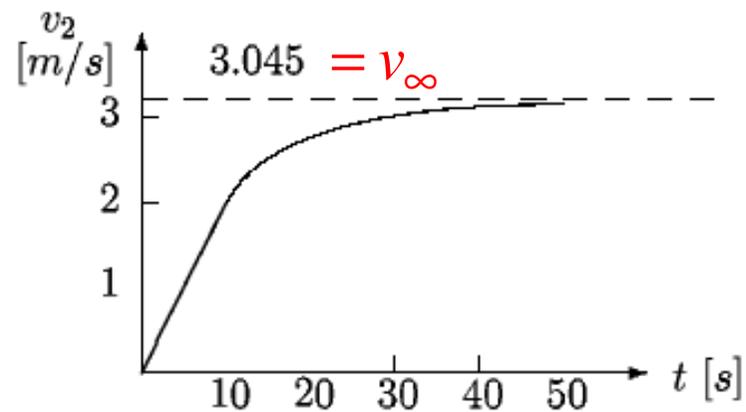
wobei $a_2 = a_1 \frac{(1+\zeta)}{l}$; mit $e^{a_2 t} = \frac{a_1 + v_2}{a_1 - v_2}$ erhält man

$$v_2 = a_1 \frac{1 - e^{-a_2 t}}{1 + e^{-a_2 t}} = \sqrt{\frac{2gz_1}{1 + \zeta}} \frac{(1 - e^{-a_2 t})^2}{(1 + e^{-a_2 t})^2}$$

$$t \rightarrow \infty : e^{-\infty} \rightarrow 0$$

$$v_{2,\infty} = a_1 = \sqrt{\frac{2gz_1}{1 + \zeta}} = 3.045 \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_{2,\infty} \frac{1 - e^{-a_2 t}}{1 + e^{-a_2 t}}$$



Impulssatz und Impulsmomentensatz

Anwendung: Bestimmung der Kräfte der Strömung auf die Umgebung



Impulssatz

Impuls : $\vec{I} = m\vec{v}$

bzw. $d\vec{I} = \vec{v}\rho dV$

Impuls des Systems : $\vec{I} = \int_{sys} \vec{v}\rho dV$

2. Newtonsches Gesetz $\frac{d}{dt} \int_{sys} \vec{v}\rho dV = \sum \vec{F}_{sys}$

zum Zeitpunkt t sei $KS=KV$

$$\longrightarrow \sum \vec{F}_{sys} = \sum \vec{F}_{KV}$$

anhand des Transporttheorems mit $B_{sys} = \vec{I}$ und $b = \vec{v}$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{sys} \vec{v}\rho dV}_{KS} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \vec{v}\rho dV + \int_{KF} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA}_{KV}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} \rho \vec{v} dV + \int_{KF} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F}_{KV}} \quad \text{Impulssatz}$$

stationäre Strömung

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_{KF} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \sum \vec{F}_{KV}$$

äußere Kräfte : Volumenkräfte, Oberflächenkräfte

Volumenkräfte → Gravitationskraft

$$\vec{F}_g = \int_{KV} \rho \vec{g} dV$$

Oberflächenkräfte → Reibungskraft \vec{F}_r

→ Druckkraft \vec{F}_p

$$\vec{F}_p = - \int_{KF} p \vec{n} dA$$

$$p = p_a = konst \Rightarrow \vec{F}_p \rightarrow 0$$

weiterhin \rightarrow Stützkraft \vec{F}_s

\vec{F}_s : Kraft von einem festen Körper auf das strömende Fluid.

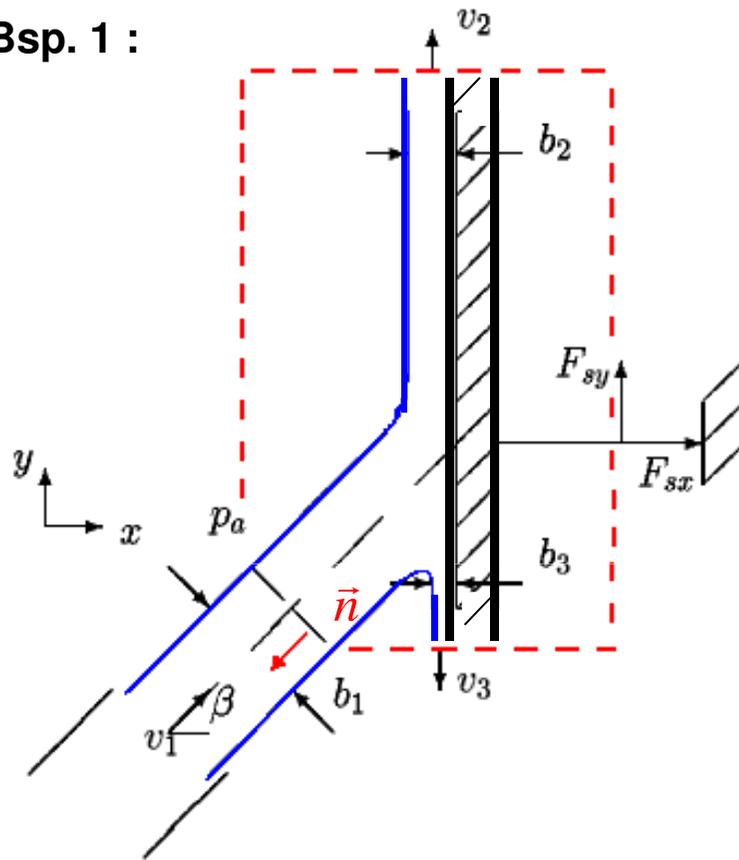
\longrightarrow Impulssatz für stationäre Strömungen mit den jeweiligen Kraftanteilen

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_{KF} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA = \vec{F}_g + \vec{F}_s + \vec{F}_p + \vec{F}_r$$

Bemerkung : Kontrollfläche muss einfach zusammenhängend sein

Beispiele zum Impulssatz

Bsp. 1 :



geg : $p_a = \text{konst, keine Verluste, } v_1, b_1, \beta$

ges : F_{sx}, F_{sy}, b_2, b_3

Lösung 1 :

Bernoulli:
$$p_a + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_2^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_3^2$$

\Rightarrow

$$v_1 = v_2 = v_3$$

Kontinuitätsgleichung : $v_1 b_1 = v_2 b_2 + v_3 b_3$

$$\Rightarrow b_1 = b_2 + b_3$$

Komponenten der Stützkraft aus Impulssatz

x-Richtung : $-\rho v_1 \underline{\cos \beta} v_1 b_1 + 0 = \underline{F_{sx}}$

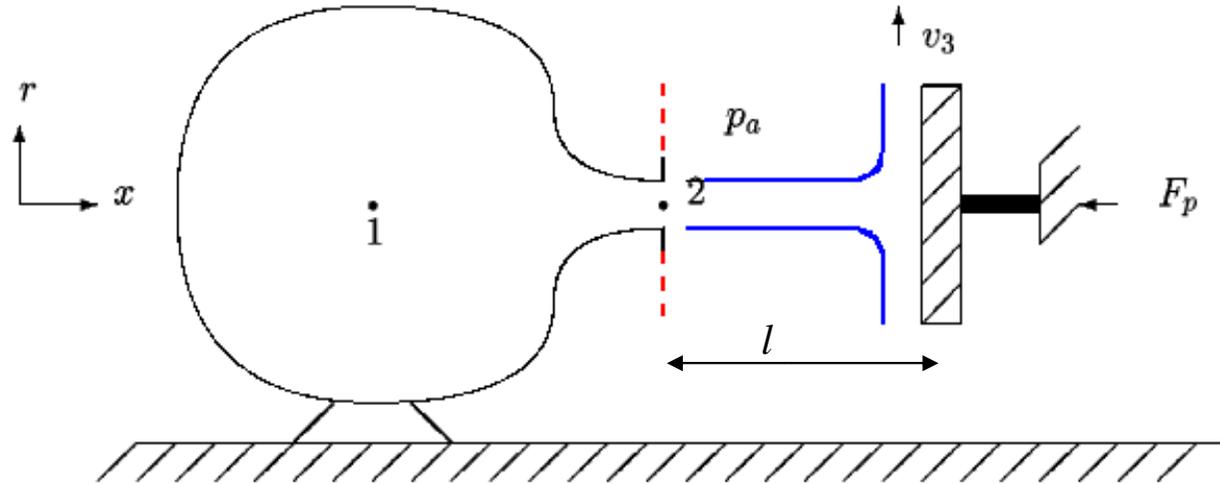
y-Richtung : $-\rho \textcircled{v_1} \sin \beta \textcircled{v_1} \textcircled{b_1} + \rho v_2^2 b_2 - \rho v_3^2 b_3 = \underline{\underline{F_{sy}}}$

$$\Rightarrow -b_1 \sin \beta + b_2 - b_3 = 0$$
$$-b_1 \sin \beta + b_2 - b_1 + b_2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{b_2}} = \frac{b_1}{2} (1 + \sin \beta)$$

$$\underline{\underline{b_3}} = \frac{b_1}{2} (1 - \sin \beta)$$

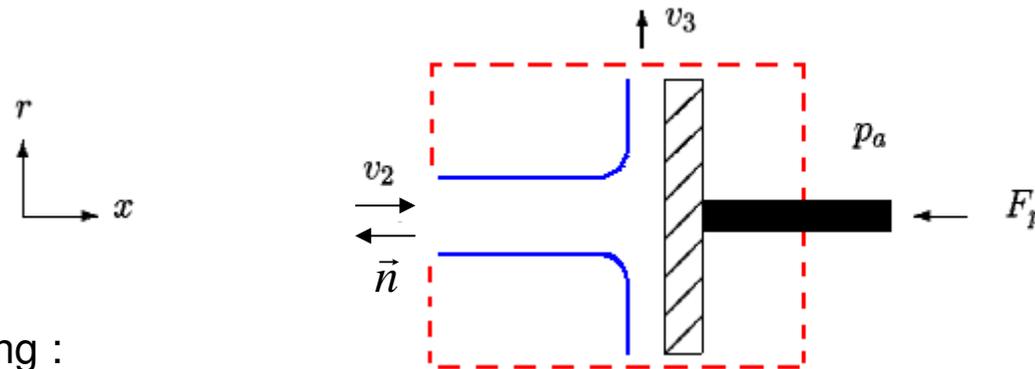
Bsp. 2 :



Aus einem Behälter austretendes Fluid wird durch eine Prallplatte um 90° umgelenkt.
 Gegeben sind : Fluid: Wasser, $p_{1ü} = 2\text{bar}$, $d_2 = 5\text{mm}$

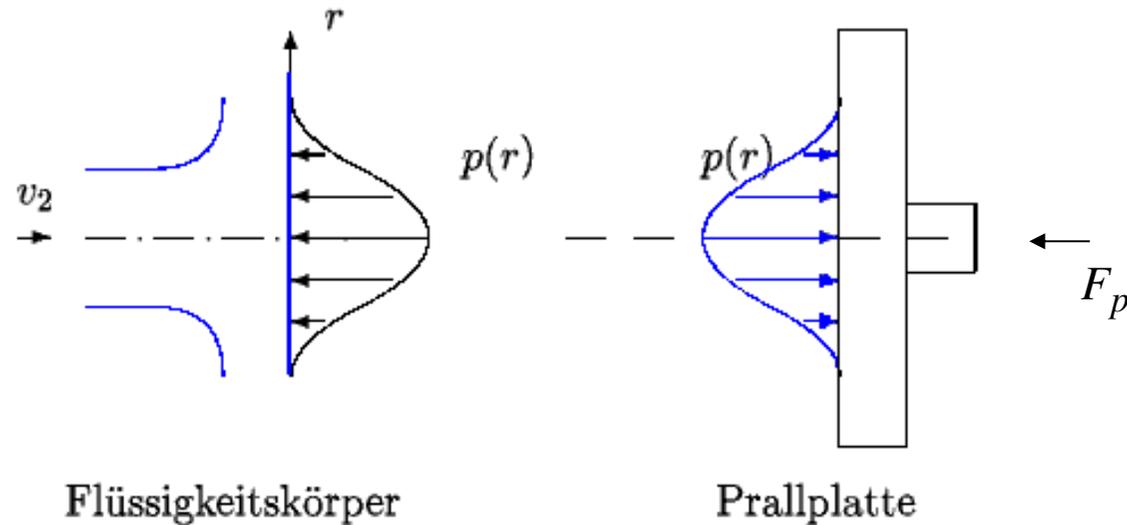
Gesucht : F_p

Lösung 2 :



Impulssatz x-Richtung :

$$-\rho v_2^2 A_2 = -F_p \quad \longrightarrow \quad F_p = \dot{m} v_2$$



Umlenkung $\rightarrow p(r)$ - Verteilung

ohne Impulssatz : F_p aus Integral von $p(r)$, d. h. Kenntnis der Strömung innerhalb der Kontrollfläche nötig.

mit Impulssatz : Kenntnisse der Strömungsverhältnisse innerhalb der Kontrollfläche nicht erforderlich

$$\underbrace{p_{1\ddot{u}} + p_a}_{p_1} = p_a + \rho v_2^2 / 2$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2 p_{1\ddot{u}} / \rho} = 20 \text{ m/s}$$

$$\dot{m} = \rho v_2 \frac{\pi d_2^2}{4} = 0.393 \text{ kg / s}$$

$$\underline{\underline{F_p}} = \dot{m} v_2 = 7.85 \text{ N}$$

F_p entspricht der Rückstoßkraft auf den Behälter

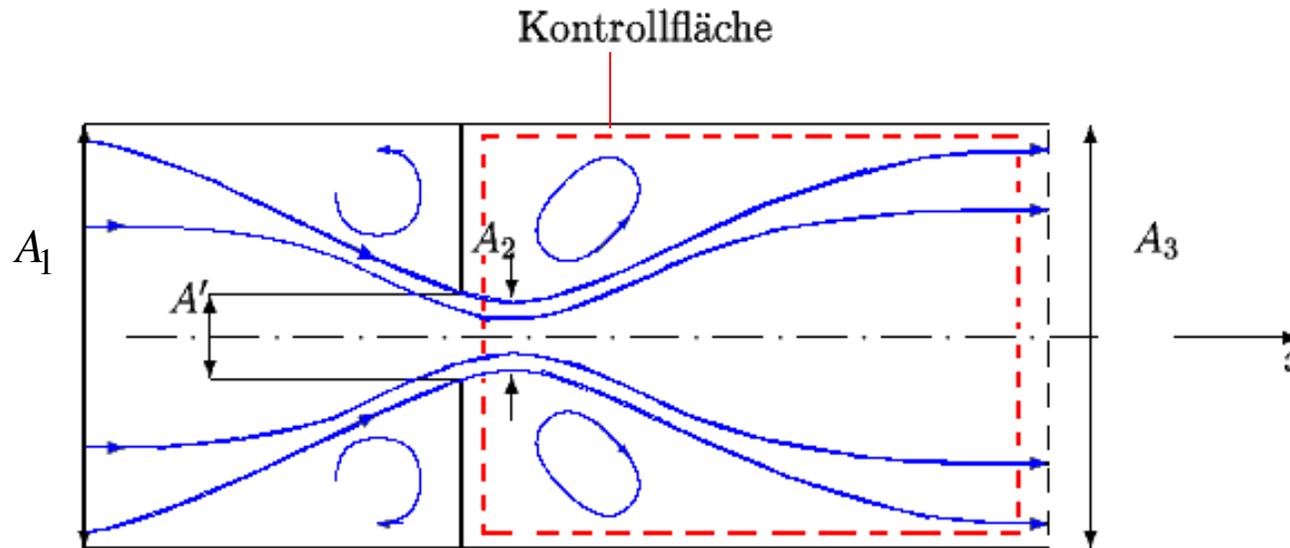
Änderung von F_p , wenn l verkleinert wird, $l \rightarrow 0$?

$$F_p = \dot{m} v_2 = A_2 \rho v_2^2 = 2 A_2 p_1 \ddot{u}$$

$$\Rightarrow F_p = 2 F_{l=0}$$

$$F_{l=0} = \frac{F_p}{2}, \text{ da } \dot{m} \rightarrow 0 \text{ für } l \rightarrow 0$$

Bsp. 3 :



Gegeben : $m = \frac{A'}{A_1}$, $\psi = \frac{A_2}{A'}$

Gesucht : $\Delta p_v / \frac{\rho}{2} v_1^2 = f(\psi, m)$

Lösung : Druckverlust $\Delta p_v = p_{o2} - p_{o3}$
 $\Delta p_v = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 - (p_3 + \frac{\rho}{2} v_3^2)$
 $\Delta p_v = p_2 - p_3 + \frac{\rho}{2} v_2^2 \left[1 - \left(\frac{v_3}{v_2} \right)^2 \right]$

Imp. x-Richtung : $\rho v_3^2 A_3 - \rho v_2^2 A_2 = (p_2 - p_3) A_3$

$$p_2 - p_3 = \rho v_3^2 - \rho v_2^2 \frac{A_2}{A_3} = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left[2 \left(\frac{A_2}{A_3} \right)^2 - 2 \left(\frac{A_2}{A_3} \right) \right]$$

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left[1 - 2 \left(\frac{A_2}{A_3} \right) + \left(\frac{A_2}{A_3} \right)^2 \right]$$

$$\Delta p_v = \frac{\rho}{2} v_2^2 \left[1 - \frac{A_2}{A_3} \right]^2$$

$$\frac{\Delta p_v}{\frac{\rho}{2} v_2^2} = \left[1 - \frac{A_2}{A_3} \right]^2$$

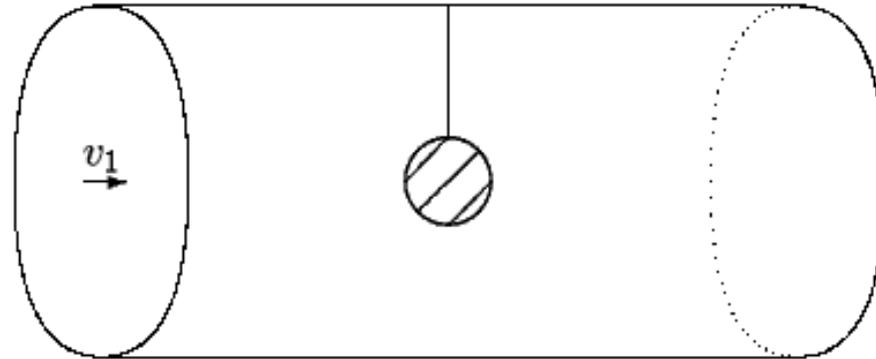
Carnotsche Gleichung der un stetigen Rohrerweiterung.

mit $v_2 = v_1 \frac{A_1}{A_2} = v_1 \frac{1}{\psi m}$ bzw $\frac{A_2}{A_3} = \frac{A_2}{A_1} = \psi m = \frac{A_2}{A'} \frac{A'}{A_1}$

$$\frac{\Delta p_v}{\frac{\rho}{2} v_1^2} = \zeta_B = \left[\frac{1 - \psi m}{\psi m} \right]^2$$

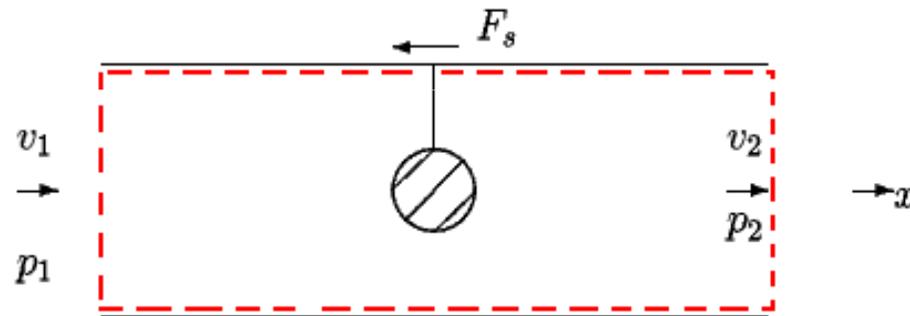


Bsp. 4 :



Geben Sie unter Vernachlässigung der Reibungskraft eine Beziehung für die Widerstandskraft des Einbaus an.

Lösung 4 :

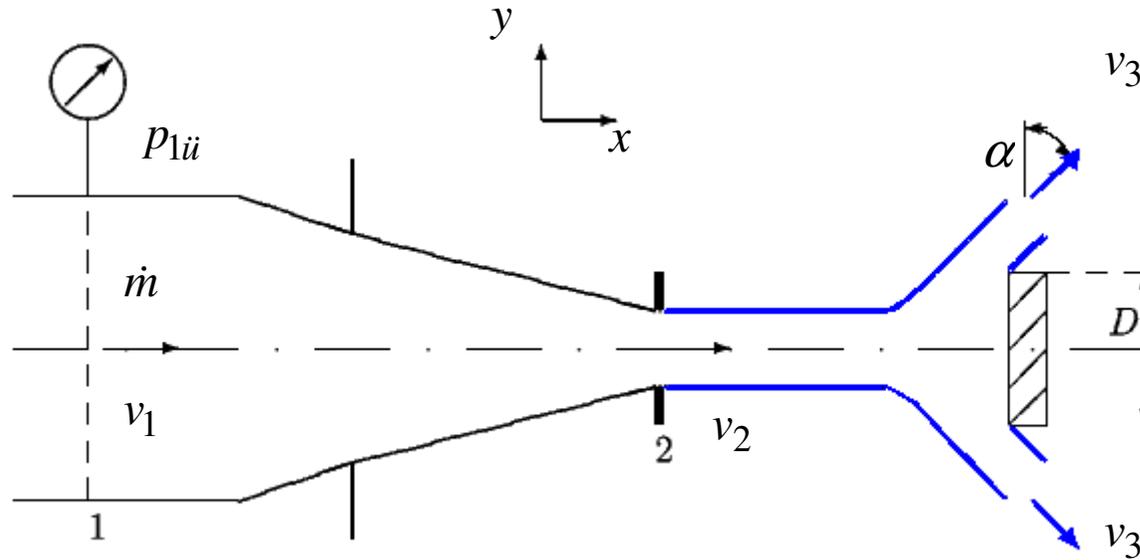


Kontinuitätsgleichung : $v_1 = v_2$

Impulssatz in x-Richtung : $\dot{m}(v_2 - v_1) = (p_1 - p_2)A - F_s = 0$

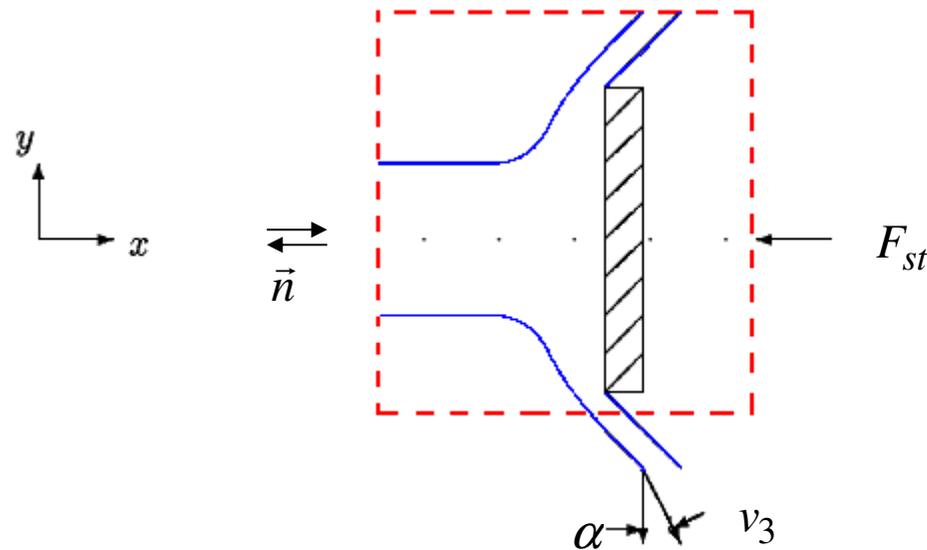
$$\longrightarrow F_\omega = -F_s = (p_2 - p_1)A$$

Bsp. 5 :



Geben Sie für die Wasserspritze die Kraft F_{st} an, die der Strahl auf die Platte ausübt; es ist $p_{1ü} = 4\text{bar}$, $d_1 = 60\text{mm}$, $d_2 = 20\text{mm}$ die Strömung sei reibungsfrei.

Lösung 5 :



Bernoulli 2-3 :
$$p_a + \frac{\rho}{2} v_2^2 = p_a + \frac{\rho}{2} v_3^2$$

$$\Rightarrow v_2 = v_3$$

Impulssatz in x-Richtung :
$$\dot{m}(v_2 \sin \alpha - v_2) = -F_{st}'$$

Es sei $\alpha=0$
$$\Rightarrow F_{st}' = \dot{m}v_2$$

F_{st}' : Kraft von der Platte auf den Wasserstrahl

F_{st} : Kraft des Strahls auf die Platte

F_{st} entspricht - F_{st}'

Bernoulli 1-2 :

$$p_{1ü} + \frac{\rho}{2} v_1^2 = \frac{\rho}{2} v_2^2$$

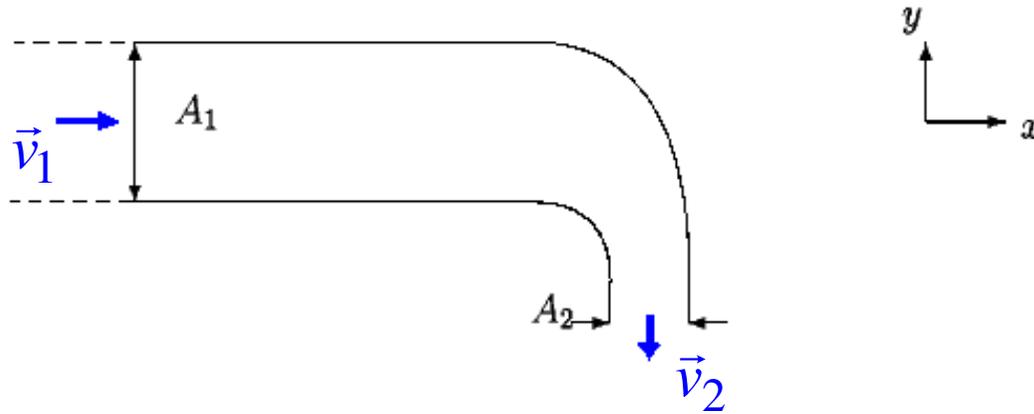
$$v_1 = \sqrt{\frac{2p_{1ü}}{\rho \left[\left(\frac{d_1}{d_2} \right)^4 - 1 \right]}}$$

mit $p_{1ü} = p_1 - p_a$

mit $v_2 = v_1 \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2$

$$\underline{\underline{F_{st} = \dot{m}v_2 = 254.5 N}}$$

Bsp. 6 :



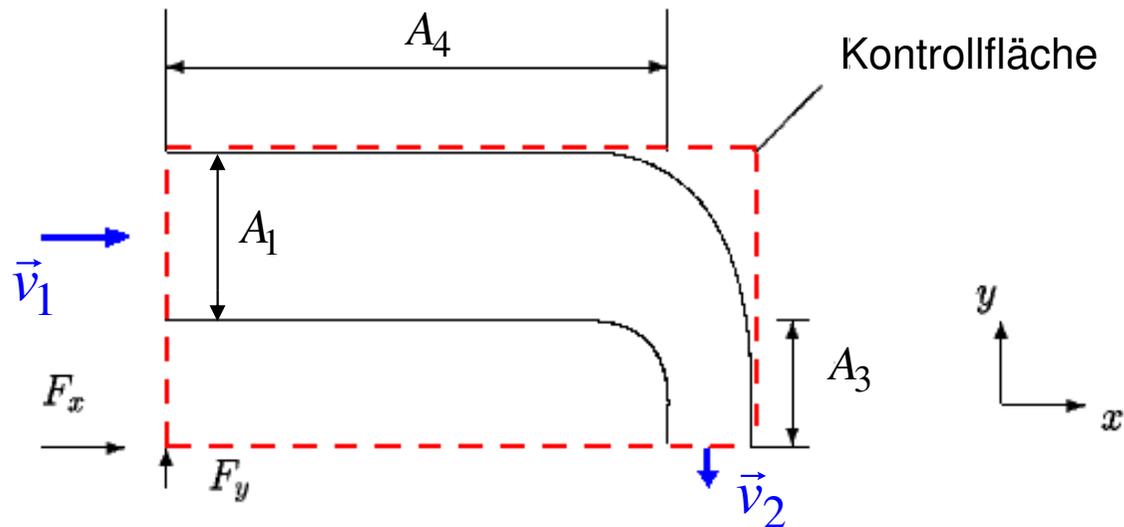
Gegeben : reibungsfreie Strömung durch 90° Krümmer und

$$p_1 = 221 \text{ kPa}, \quad \vec{v}_2 = -16 \vec{j} \text{ m/s}$$

$$A_1 = 0.01 \text{ m}^2, \quad A_2 = 0.0025 \text{ m}^2, \quad p_a = 101 \text{ kPa}, \quad \text{Wasser}$$

Gesucht : $F_x; F_y$

Lösung 6 :



Impulssatz in x-Richtung :

$$-\rho v_1^2 A_1 = p_1 A_1 + p_a A_3 - p_a (A_1 + A_3) + F_x$$

$$F_x = -\rho v_1^2 A_1 - (p_1 - p_a) A_1$$

Kontinuitätsgleichung :

$$v_1 = v_2 \frac{A_2}{A_1} = 4 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{F_x = -1.36 \text{ kN}}}$$

F_x weist anders als angenommen in die negative x-Richtung.

Impulssatz in y-Richtung :

$$-\rho v_2^2 A_2 = p_a A_4 + p_a A_2 - p_a A_2 - p_a A_4 + F_y$$

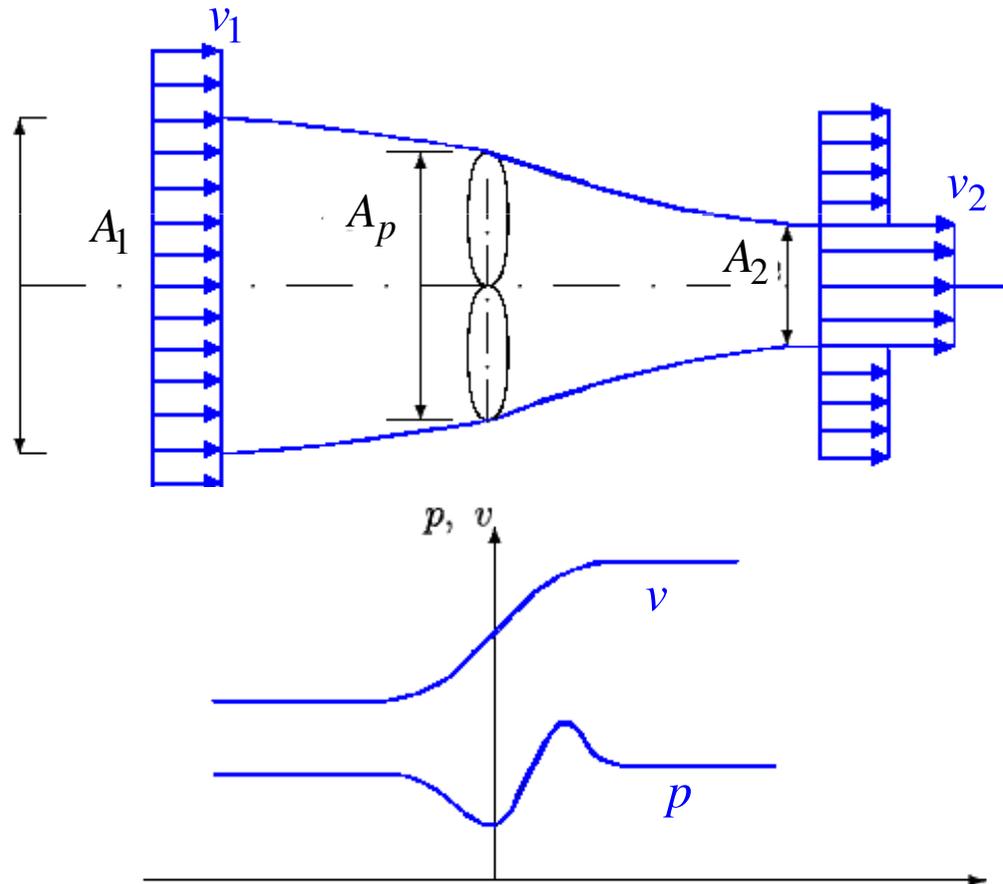
$$\underline{\underline{F_y = -\rho v_2^2 A_2 = -639 \text{ N}}}$$

$\Rightarrow F_y$ weist in die negative y-Richtung.

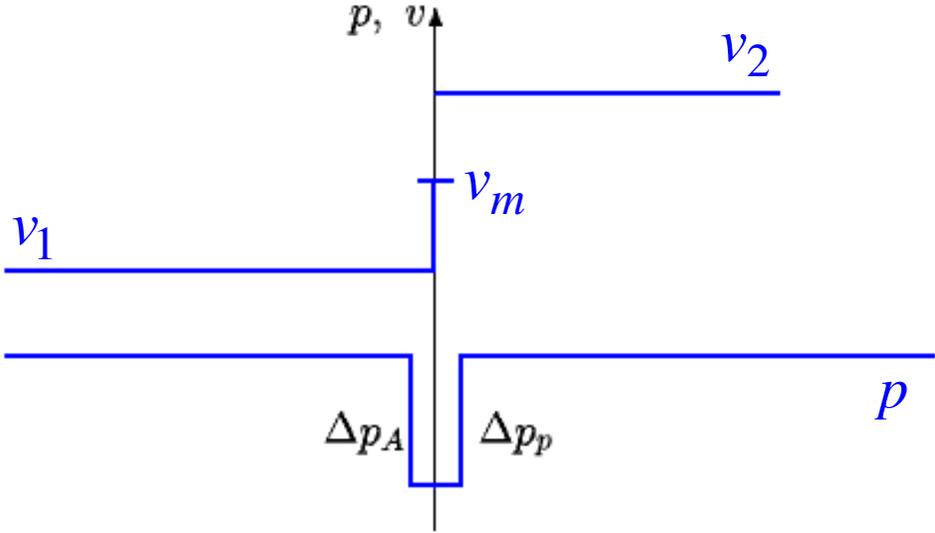
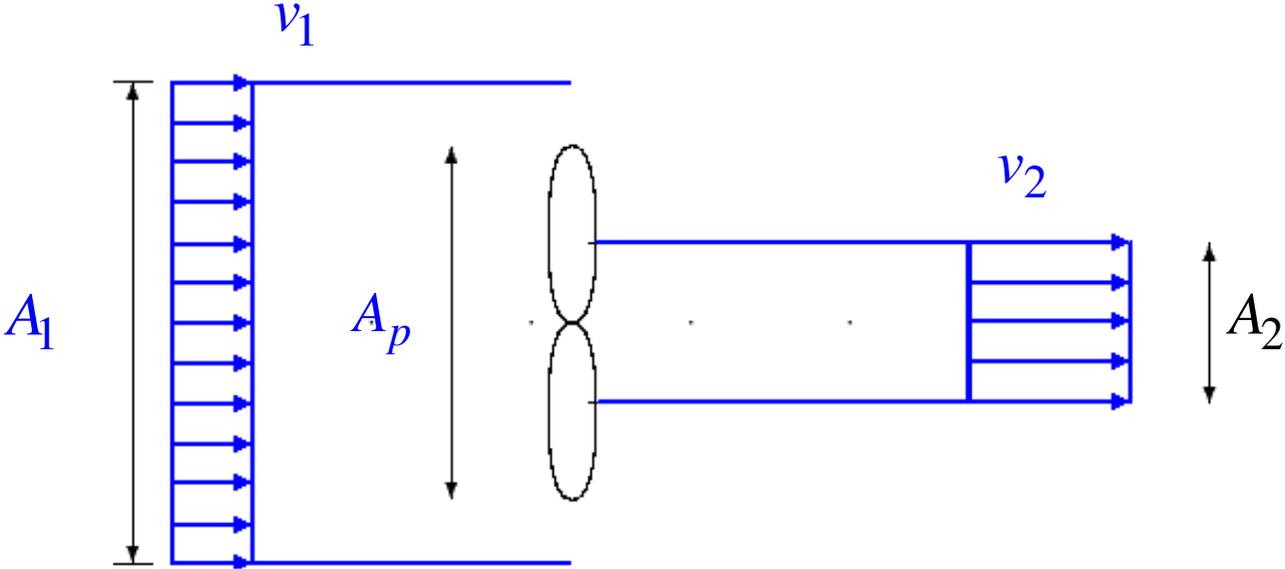
Vereinfachte Propellertheorie

- Annahmen :
- Anzahl der Flügel ohne Einfluss auf den Schub
 - Strahldrehung ohne Einfluss auf ax. Geschwindigkeit
 - keine Verluste bei Beschleunigung und Verzögerung

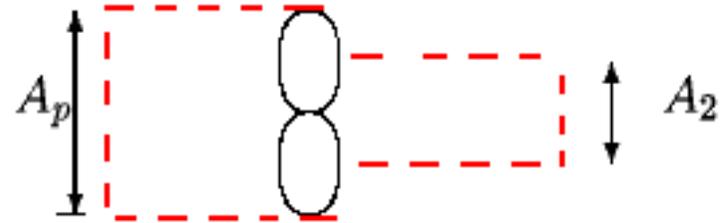
Analyse für ein mitbewegtes Kontrollvolumen; Umgebungsdruck ist konstant



Darstellung der Annahmen :

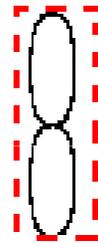


Impulssatz in x-Richtung :



$$F_s = \dot{m}(v_2 - v_1) = \rho v_m A_p (v_2 - v_1) = A_p \Delta p_p$$

v_m aus



$$F_s = A_p \Delta p_p = \rho v_m A_p (v_2 - v_1)$$

$$F_s = A_p (p_r - p_e)$$

und Bernoulli :

$$p_a + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_l + \frac{\rho}{2} v_m^2$$

$$p_a + \frac{\rho}{2} v_2^2 = p_r + \frac{\rho}{2} v_m^2$$

$$\Delta p_A = \Delta p_p = p_r - p_l = \frac{\rho}{2} (v_2^2 - v_1^2)$$

mit

$$\frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2} (v_2 + v_1)(v_2 - v_1) = v_m (v_2 - v_1)$$

folgt

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

Bemerkung : Analoges Ergebnis für Windenergieanlage

Vortriebsgrad η_p enthält mechanische Mindestverluste

$$\eta_p = \frac{\text{Nutzen}}{\text{Aufwand}} = \frac{F_s v_1}{\frac{1}{2} \dot{m} (v_2^2 - v_1^2)} = \frac{\dot{m} (v_2 - v_1) v_1}{\frac{1}{2} \dot{m} (v_2^2 - v_1^2)} = \frac{F_s v_1}{F_s v_m}$$

$$\eta_p = \frac{2v_1}{v_2 + v_1} = \frac{2}{1 + \frac{v_2}{v_1}} = \frac{F_s v_1}{F_s v_m}$$

$\Rightarrow F_s$ gegeben $\rightarrow \eta_p \uparrow$, wenn $v_2 - v_1$ klein bzw. A_p groß

Impulsmomentensatz

Drehmoment ist für viele Probleme wesentlich

Impulsmomentensatz liefert den Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehimpuls

Herleitung mittels Bildung des Momentes des Impulssatzes.

\vec{v} : Teilchengeschwindigkeit

ρ : Dichte

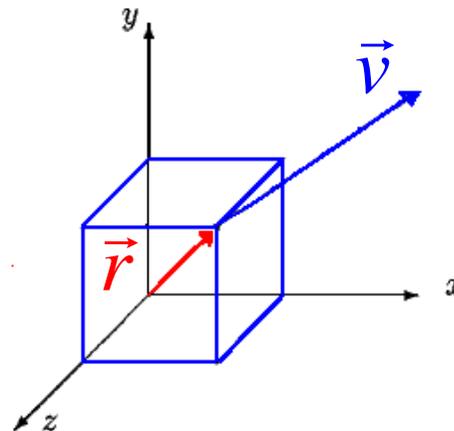
ΔV : infinit. Partikelvolumen

$\Delta \vec{F}_p$: resultierende äußere Kraft

2. Newtonsches Gesetz $\frac{d}{dt}(\vec{v}\rho\Delta V) = \Delta \vec{F}_p$

Moment bzgl. Ursprung

$$\underline{\underline{\vec{r} \times \frac{d}{dt}(\vec{v}\rho\Delta V) = \vec{r} \times \Delta \vec{F}_p}}$$



es ist :

$$\frac{d}{dt} [(\vec{r} \times \vec{v}) \rho \Delta V] = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} \rho \Delta V + \vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{v} \rho \Delta V) = \vec{v} \times \vec{v} \rho \Delta V + \vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{v} \rho \Delta V) = \vec{r} \times \frac{d}{dt} (\vec{v} \rho \Delta V)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} [(\vec{r} \times \vec{v}) \rho \Delta V] = \vec{r} \times \Delta \vec{F}_p$$

Summation und Vertauschung liefert :

$$\frac{d}{dt} \int_{sys} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{sys}$$

zeitliche Änderung des Drehimpulses entspricht der Summe der äußeren Drehmomente

zur Zeit t gilt: $KV \cong KS$

$$\Rightarrow \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{sys} = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{KV}$$

Reynolds Transporttheorem

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \int_{\text{sys}} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV + \int_{KF} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV + \int_{KF} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA = \sum (\vec{r} \times \vec{F})_{KV} = \sum \vec{M}$$

Impulsmomentensatz

... ist wesentlich bei der Analyse von Verdichtern, Turbinen etc.

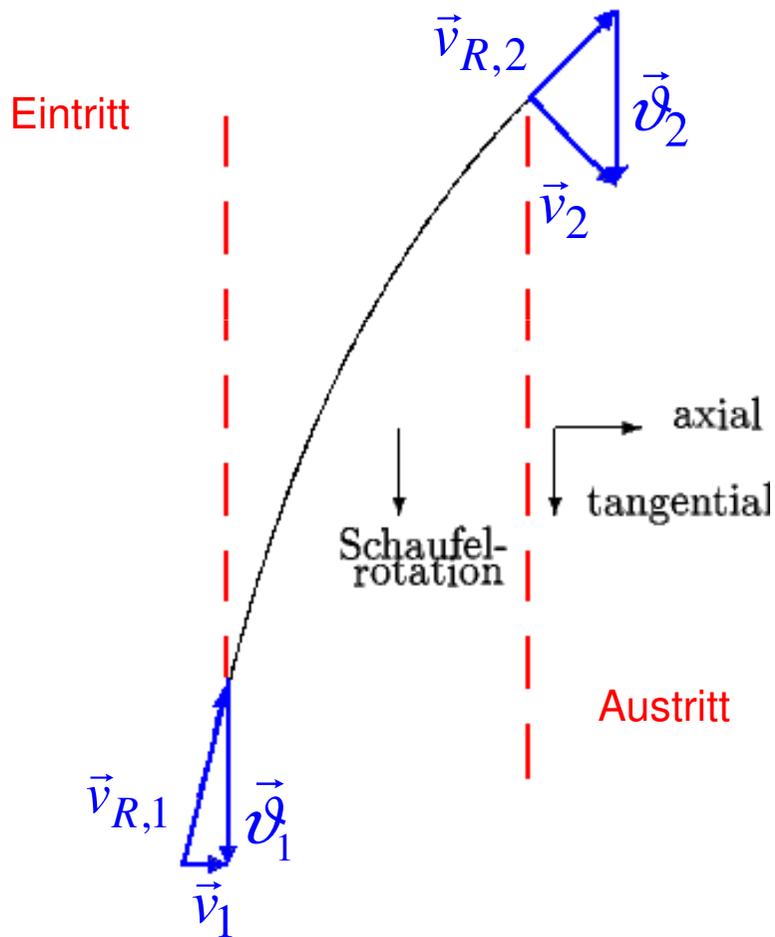
im Folgenden schematische Darstellung eines **Ventilators** und einer **Windmühle**.

Ventilator :

Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \text{konst.}$	
Schaufelgeschwindigkeit	$v = \omega r$	
absolute Geschwindigkeit	\vec{v}	(ruh. Beobachter)
relative Geschwindigkeit	\vec{v}_R	(mitbew. Beobachter)

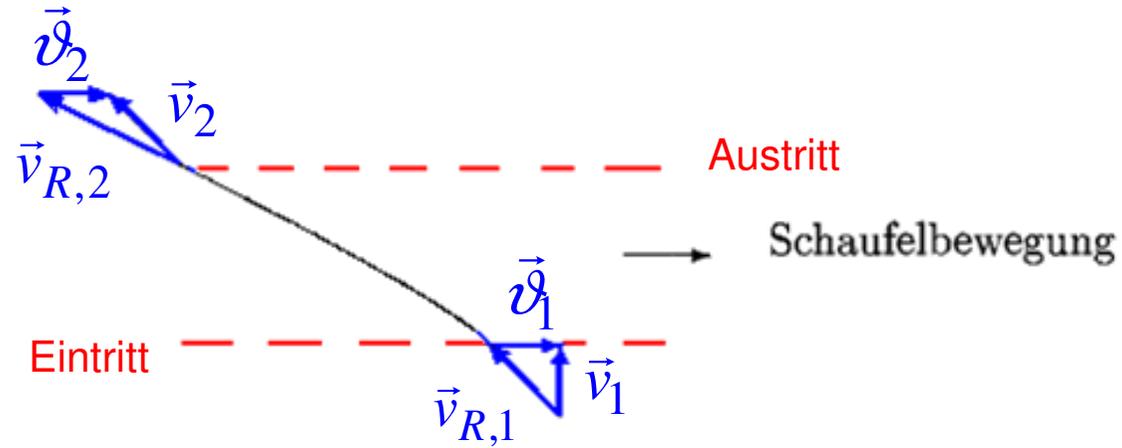
absolute Fluidgeschwindigkeit : $\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}$

- Annahmen :
- Fluidein- und -austritt bei $r = \text{konstant}$ $\omega r = v_1 = v_2$
 - Strömung parallel zur rotierenden Schaufel



Auströmen in axialer Richtung \vec{v}_1 ;
 \vec{v}_2 besitzt Tangentialkomponente $\vec{v}_{2,t}$;
 $\vec{v}_{2,t}$ und \vec{v} gleiche Richtung \rightarrow Pumpe ;
d. h. Arbeit von Schaufel an Fluid.

Windmühle:

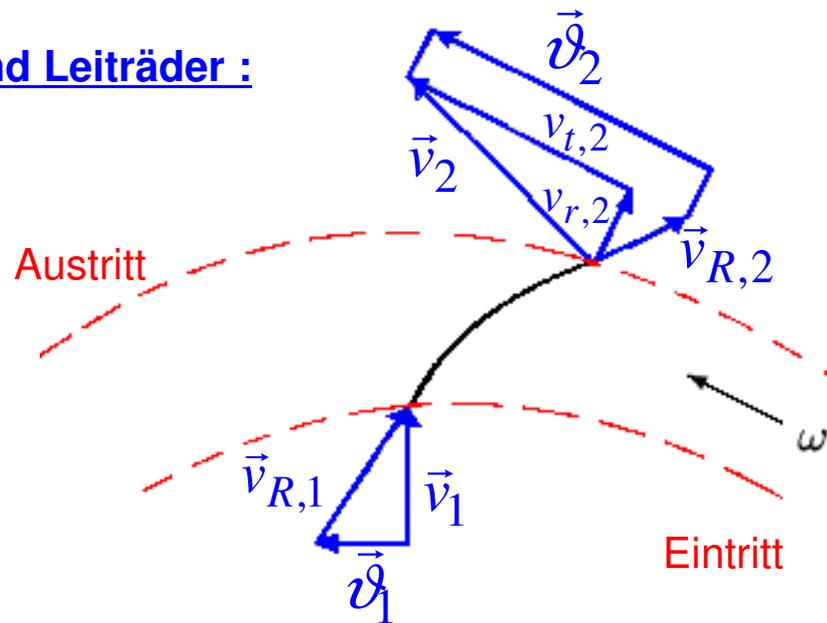


$v_{2,t}$ und ϑ in entgegengesetzte Richtungen

⇒ Arbeit von Fluid an Schaufel

⇒ Turbine

radial durchströmte Lauf- und Leiträder :



\vec{v} : Schaufel- bzw. Fluidgeschw.

\vec{v}_R : Relativgeschwindigkeit (zum Rotor)

\vec{v} : absolute Geschwindigkeit (Fluidgeschwindigkeit rel. zum Gehäuse)

lediglich die **tangentiale Geschwindigkeit v_t** beeinflusst das Moment der Rotorachse

Annahme : stationäre Strömung

$$\rightarrow M = \int_{KF} v_t r (\rho \vec{v}_R \cdot \vec{n} dA) = \int_{KF} v_t r dm$$

$$\text{Eulersche Turbinengleichung: } M = \dot{m}(v_{t_2} r_2 - v_{t_1} r_1)$$

$v_t > 0$ sofern v_t und ωr gleiche Richtung

Leistung des Rotors :

$$P = M \omega = \dot{m}(v_{t_2} \omega r_2 - v_{t_1} \omega r_1)$$

Leistung vom Rotor an das Fluid, wenn $v_t > 0$ und $P > 0$.

Bsp. 7 : Vereinfachungen des Impulsmomentensatzes

- 1D Strömung
- stationäre bzw. im Mittel stationäre zyklische Strömung

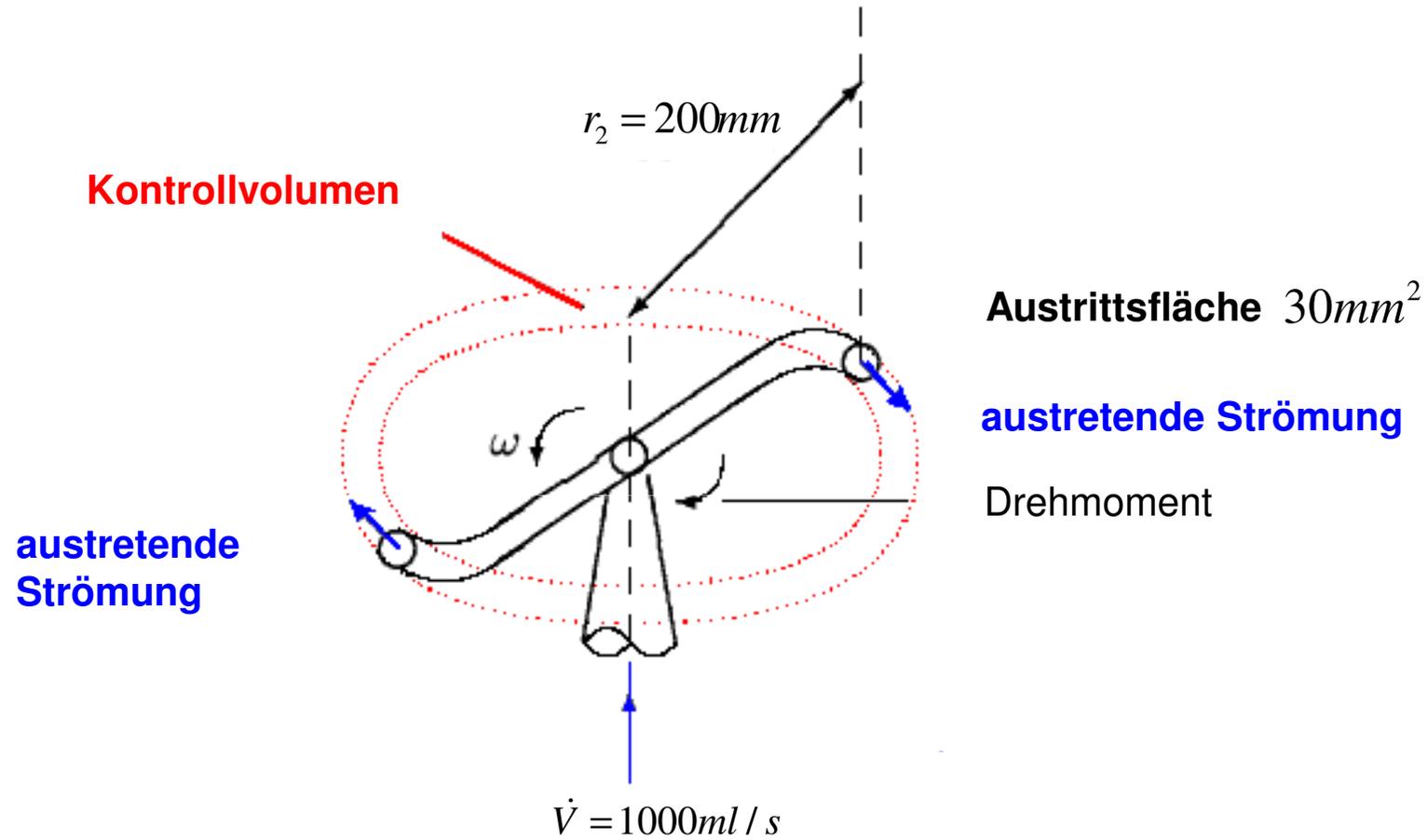
$$\longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_{KV} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho dV = 0$$

- Komp. in Rotorachsenrichtung wesentlich

Wasservolumenstrom von 1000 ml/s speist einen Rasensprenger; Strömung tritt tangential durch 2 Düsen der Fläche von 30 mm² aus; der Radius des Sprengers ist 200 mm .

- a) Drehmoment, um den Sprengerkopf festzuhalten?
- b) Drehmoment bei 500 U/min ?
- c) Winkelgeschwindigkeit für M=0 ?

Skizze :



Lösung 7 : Drehmoment der Welle ist eine Schnittgröße; Strömung ist zyklisch, jedoch im zeitlichen Mittel stationär.

a)

$$\text{Eintritt : } \vec{v} \perp \vec{r}, \vec{r} \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \times \vec{r} = \vec{0}$$

$$\text{Austritt : } \vec{r} \times \vec{v} (\text{ax. Komponente}) \quad \rightarrow r_2 v_{t2}$$

v_{t2} Tangentialkomponente von \vec{v}

$$\Rightarrow \left[\int_{KF} (\vec{r} \times \vec{v}) \rho \vec{v} \cdot \vec{n} dA \right]_{ax} = -r_2 v_{t2} \dot{m}$$

Minus, da v_t und $r\omega$ entgegengesetzt.

$$M_a = -r_2 v_{t2} \dot{m}$$

$$\vec{\vartheta} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_R$$

$$v_{t2} = v_{R,2} = \frac{\dot{m}}{2\rho A_2} = \frac{\dot{V}}{2A_2} = 16.7 \text{ m/s}$$

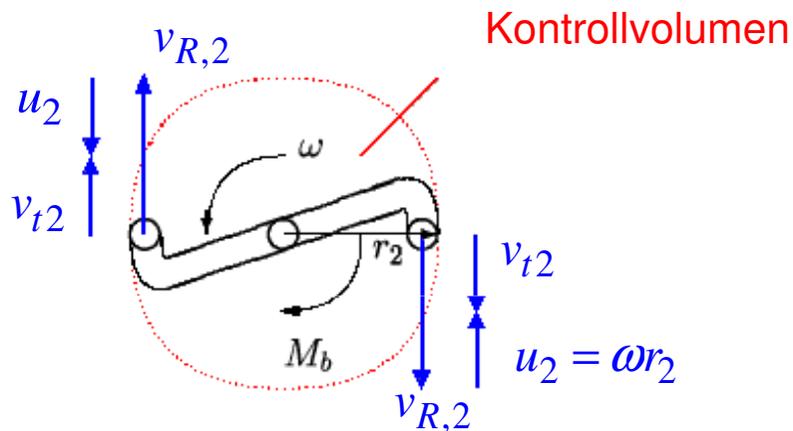
$$\rightarrow M_a = \underline{\underline{-3.34 \text{ Nm}}}$$

b) $n = 500 \text{ U/min}$

$$v_{\theta 2} = u_2 = \omega r_2 = 2\pi n r_2$$

bzw. $v_{t_2} = v_{R,2} - u_2 = v_{R,2} - r_2 2\pi n$

$$v_{t_2} = 16.7 \text{ m/s} - 10.5 \text{ m/s} = 6.2 \text{ m/s}$$



$$\underline{\underline{M_b = -1.24 \text{ Nm}}}$$

$$|M_b| < |M_a|$$

c) Impulsmomentensatz

$$M_c = -r_2 (v_{R,2} - r_2 \omega) \dot{m} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\omega = \frac{v_{R,2}}{r_2} = 83.5 \text{ rad/s}}}$$

bzw. $\underline{\underline{n = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{83.5 \text{ rad/s} \cdot 60 \text{ s/min}}{2\pi \text{ rad/U}} = 797 \text{ U/min}}}$

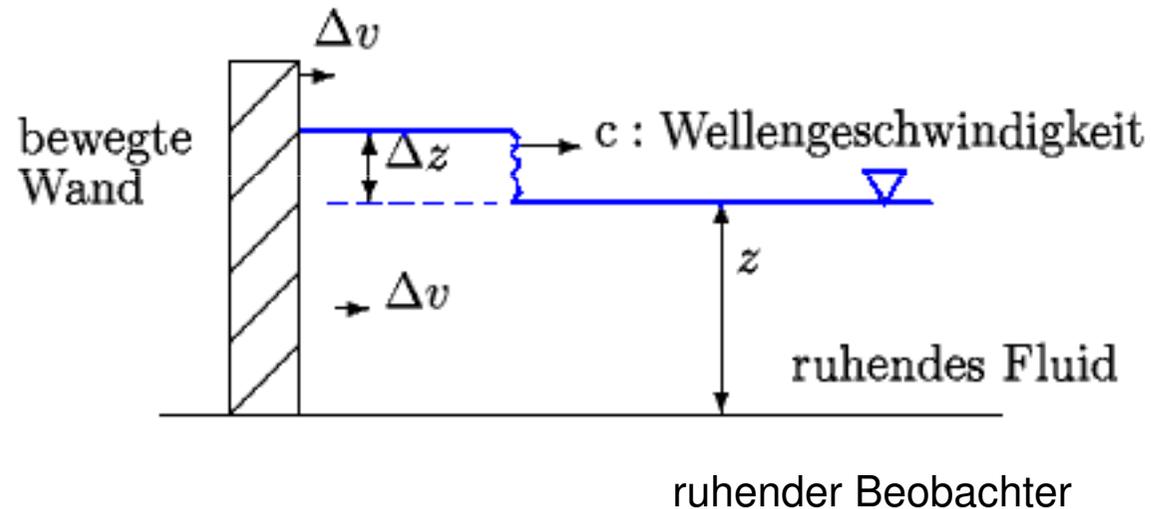
auch für $M_c = 0$ ist n endlich!

Strömung in offenen Gerinnen

wesentlicher Unterschied zur Rohrströmung → freie Oberfläche mit Atmosphärendruck

Annahme : Gerinneberandung ist fest

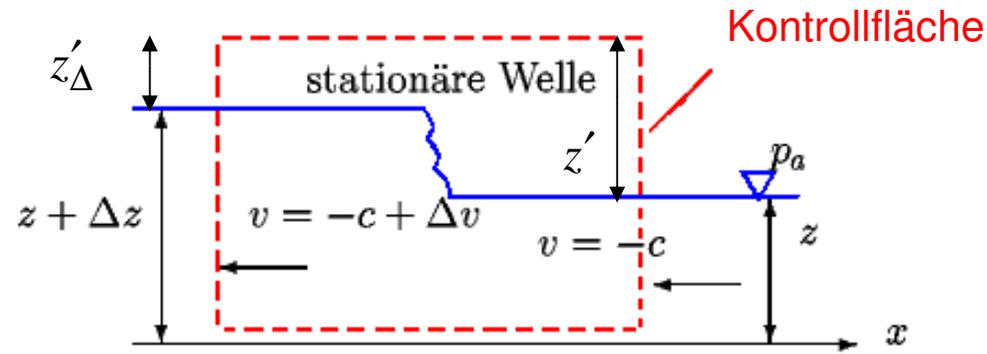
Wellengeschwindigkeit



Δz : Höhe der Elementarwelle

Δv : Geschwindigkeit der Wand (plötzlich in Bewegung gesetzt)

$t = 0$: ruhendes Fluid



mitbewegter Beobachter

Geschwindigkeit des Bezugssystems : c

Kontinuitätsgleichung :

$$-czb = (-c + \Delta v)(z + \Delta z)b$$

$$\Rightarrow c = \frac{(z + \Delta z)\Delta v}{\Delta z} \Rightarrow c = z \frac{\Delta v}{\Delta z} \quad , \text{ mit } \frac{\Delta z}{z} \ll 1$$

Impulssatz in x-Richtung :

$$p_a b z'_\Delta + \int_0^{z+\Delta z} (p_a + \rho g z) b dz - p_a b z' - \int_0^z (p_a + \rho g z) b dz = \rho c b z (-c + \Delta v + c)$$

$$\frac{1}{2} \rho g b z^2 - \frac{1}{2} \rho g b (z + \Delta z)^2 = -\rho c b z \Delta v$$

mit $\Delta z \ll z$ bzw. $\Delta z^2 \ll z\Delta z$ folgt

$$\frac{\Delta v}{\Delta z} = \frac{g}{c} = \frac{c}{z} \Rightarrow c^2 = gz$$

Geschwindigkeit einer Welle kleiner Amplitude : $c = \sqrt{gz}$

derartige Wellenbewegungen durch das Verhältnis von Gewichtskräften ($\sim \rho g$) und Trägheitskräften ($\sim \rho$) bestimmt.

Strömungsformen der Gerinneströmung

bis jetzt: Ausbreitung einer Welle mit c in einem ruhenden Fluid mit $v=0$

Wellengeschwindigkeit c (nach rechts)	Fluidgeschwindigkeit v (nach links)	Geschwindigkeit relativ zum ruhenden Beobachter
c	$v < c$	$c - v$ (nach rechts)
c	$v = c$	0
c	$v > c$	$v - c$ (nach links)

Darstellung mittels $Fr = \frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{gz}}$

$v < c$: Strömung stromauf wahrnehmbar; $Fr < 1 \rightarrow$ unterkritische Strömung

$v > c$: Strömung nur stromab feststellbar; $Fr > 1 \rightarrow$ überkritische Strömung

$v = c$: $Fr = 1 \rightarrow$ kritische Strömung

→ die Froudezahl Fr bestimmt den Charakter der Strömung

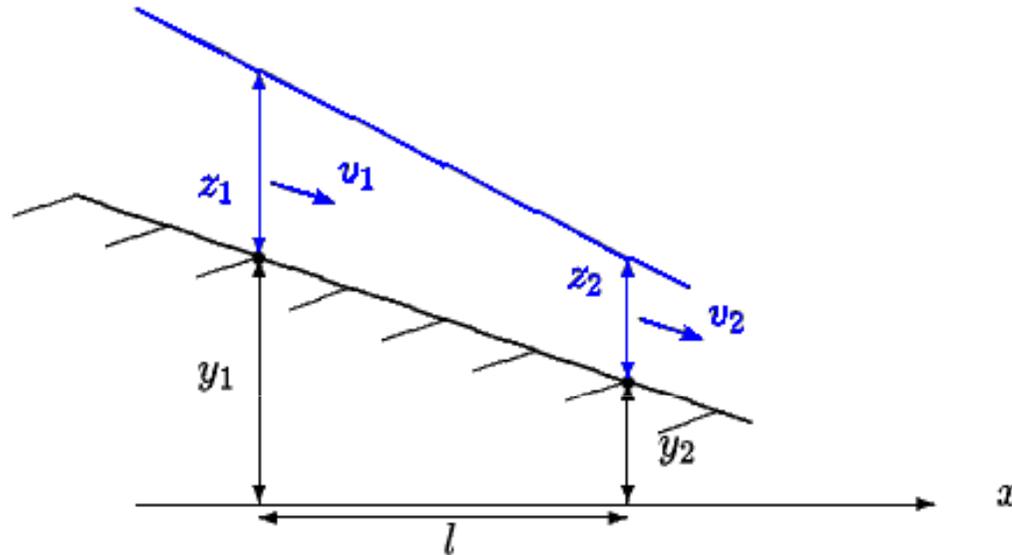
$Fr < 1$: Veränderungen sind stetig und glatt

$Fr > 1$: Veränderungen können nahezu diskontinuierlich sein

Energiehöhendigramm

→ Zusammenfassung der verschiedenen Strömungsformen!

Herleitung der Zshgs. Energiehöhe = $f(z)$



Steigung der Sohle : $s_0 = \frac{y_1 - y_2}{l}$ (im allgemeinen sehr klein)

1-D Energiegleichung: $z_1 + \frac{v_1^2}{2g} + s_0 l = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_v$

h_v : Verlustterm; mit $s_v = \frac{h_v}{l}$

$$z_1 - z_2 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + (s_v - s_0)l$$

verlustfreies, horizontales Gerinne

$$z_1 - z_2 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \quad H_1 = H_2$$

$$H = z + \frac{v^2}{2g} = \textit{konst}$$

geneigte, verlustfreie Sohle

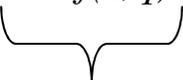
$$H_1 + y_1 = H_2 + y_2 = \textit{konst}$$

Gerinne mit rechteckigem Querschnitt

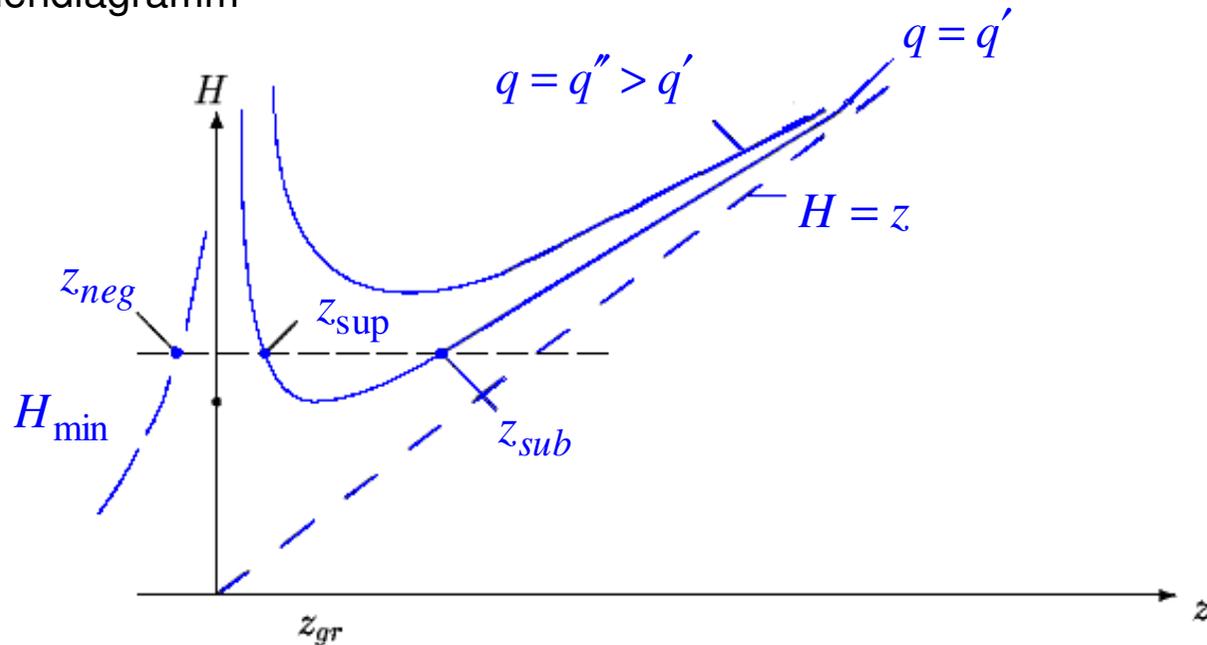
$$\dot{V} = vzb \quad \rightarrow \quad q = \frac{\dot{V}}{b} = vz$$

$$H = z + \frac{q^2}{2gz^2} \Rightarrow H = f(z)$$

$q, 2g$: konstant

→ Darstellung : $H = f(z; q)$

 Energiehöhendigramm

Energiehöhendigramm



zur Darstellung:

H, q bekannt \rightarrow kub. Gleichung in z

\rightarrow 3 Lösungen: $z_{sub}, z_{sup}, z_{neg}$ für $H > H_{min} = f(q)$

z_{neg} unphysikal. \Rightarrow 2 Tiefen für eine Parameterkombination H, q

Grenzfälle für H sehr groß :

- langsamer großer Kanal $H \rightarrow z$ für $z \rightarrow \infty$ bzw. $z_{sub} \rightarrow H$
- Flachwasserkanal mit v sehr groß

$$H \rightarrow \frac{v^2}{2g} \quad \text{für} \quad z \rightarrow 0 \quad \text{bzw.} \quad z_{sup}' \rightarrow 0$$

Bedeutung von H_{\min}

$$\frac{dH}{dz} = 1 - \frac{q^2}{gz^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_{gr} = \left(\frac{q^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{Grenztiefe}$$

$$\Rightarrow \quad H_{\min} = z_{gr} + \frac{1}{2} z_{gr} = \frac{3}{2} z_{gr} = H(z_{gr})$$

$$\text{bzw.} \quad v_{gr} = \frac{q}{z_{gr}} = \frac{z_{gr}^{\frac{3}{2}} g^{\frac{1}{2}}}{z_{gr}} = \sqrt{g z_{gr}} \quad \text{Grenzgeschwindigkeit}$$

$$\text{bzw.} \quad Fr_{gr} = \frac{v_{gr}}{\sqrt{g z_{gr}}} = 1$$

\Rightarrow im Punkt $H_{\min} = f(g)$ ist $Fr = 1$

$z = z_{sub} > z_{gr} \rightarrow v < v_{gr}$, da $q = vz = \text{konst.}$

$Fr < 1$ unterkritische Strömung

$z = z_{sup} < z_{gr} \rightarrow v > v_{gr}$

$Fr > 1$ überkritische Strömung

für $H > H_{\min}$ ergeben sich 2 Lösungen pro $q = \text{konstant}$

kubische Gleichung für z_2 : $z_2^3 - 0.5791z_2^2 + 0.0145 = 0$

$$z_{2,1} = 0.5243m$$

$$z_{2,2} = 0.1945m$$

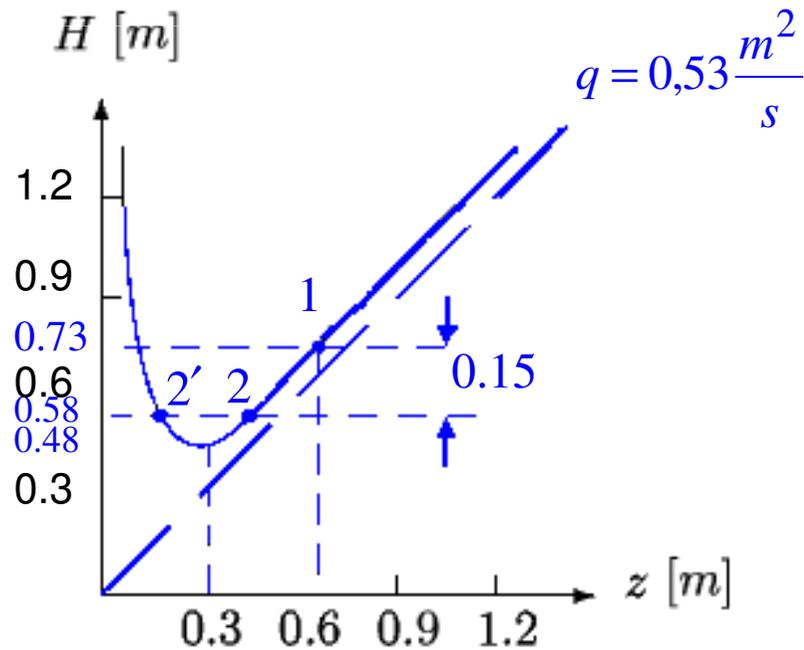
$$z_{2,3} = -0.1420m \quad \leftarrow \text{nicht physikalisch}$$

\Rightarrow 2 Lösungen :

$$z_2 + y_2 = 0.5243m + 0.1524m = 0.6767m$$

$$z_2 + y_2 = 0.1945m + 0.1524m = 0.3469m$$

welche Lösung ergibt sich?



(1) stromauf die Rampe

stromab entweder unterkritisch (2)
oder überkritisch (2')

$$H = z + \frac{q^2}{2gz^2} = z + \frac{0.0145}{z^2}$$

aus $H + y = konst.$ folgt :

$$H_1 = H_2 + (y_2 - y_1) = H_2 + 0.1524$$

für die überkritische Lösung muss $H_{\min} = \frac{3}{2} z_{gr} = \frac{3}{2} \left(\frac{q^2}{g} \right)^{1/3} = 0.4613m$

zutreffen; notwendige Sohlenhöhe

$$\rightarrow H_{\min} + y_{gr} = H_1 + y_1$$

$$H_1 - H_{\min} = y_{gr} - y_1 = 0.7315m - 0.4613m = 0.2702m$$

sofern y_{gr} vorhanden \rightarrow stromab $Fr > 1$

da $y \leq y_2 < y_{gr}$ folgt : unterkritische Strömung $Fr < 1$

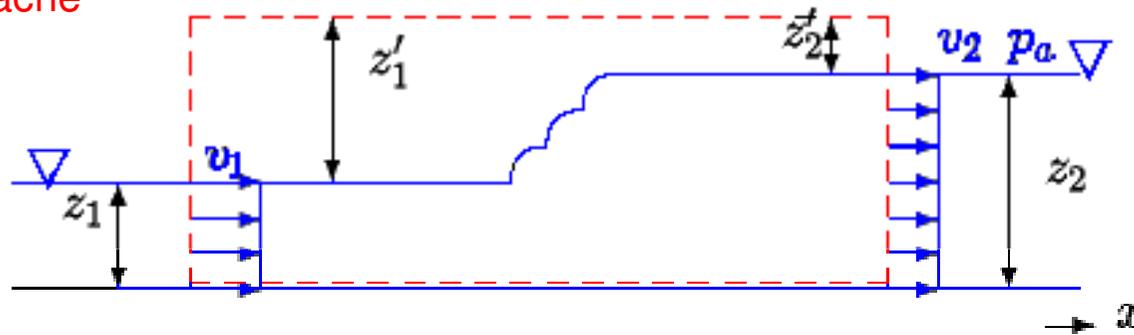
$$\rightarrow \underline{\underline{z_2 + y_2 = 0.6767m}} < z_1 + y_1 = 0.701$$

Wassersprung

aus Beobachtungen : nahezu diskontinuierliche Änderung der Wassertiefe von flachem zu tiefem Wasser möglich; zum Beispiel stromab von Schleusentoren.

Annahme: horizontal rechteckiger Kanal stat. , reibungsfrei, 1D Strömung

Kontrollfläche



Impulssatz :
$$\dot{m}(v_2 - v_1) = p_a b z'_1 + \int_0^{z_1} (p_a + \rho g z) b dz - p_a b z'_2 - \int_0^{z_2} (p_a + \rho g z) b dz$$

Kontinuitätsgleichung :
$$\dot{m} = \rho v_1 b z_1 = \rho v_2 b z_2$$

$$\Rightarrow (v_2 - v_1) \frac{v_1 z_1}{g} = \frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{2}$$

verlustbehaftete Energiegleichung

$$z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{v_2^2}{2g} + h_v$$

ohne Wassersprung : $z_1 = z_2, v_1 = v_2, h_v = 0$

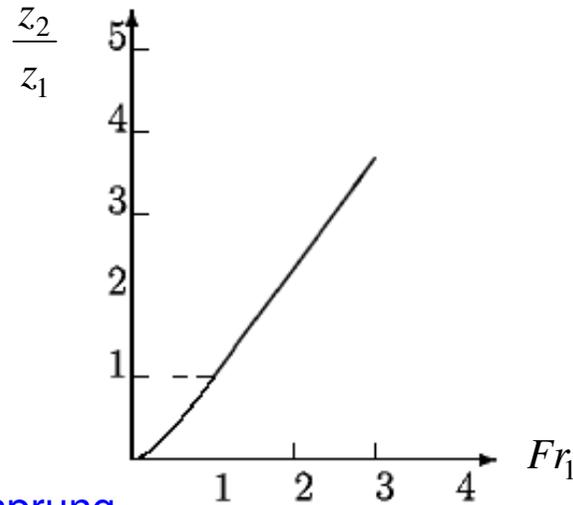
Nichtlinearität \Rightarrow mehrere Lösungen

$$\frac{z_1^2}{2} - \frac{z_2^2}{2} = \frac{v_1 z_1}{g} \left(\frac{v_1 z_1}{z_2} - v_1 \right) = \frac{v_1^2 z_1}{g z_2} (z_1 - z_2) = \frac{1}{2} (z_1 + z_2) (z_1 - z_2)$$

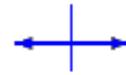
$$\Rightarrow \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1} \right) - 2Fr_1^2 = 0$$

bzw.
$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{1}{2} (-1 \pm \sqrt{1 + 8Fr_1^2})$$

+ Vorzeichen ist relevant



kein Wassersprung
möglich



Wassersprung ist möglich

$\frac{z_2}{z_1} > 1$ nur, wenn $Fr > 1$ bzw. bei überkritischer Strömung

Gleichung : $\frac{z_2}{z_1} = f(Fr)$ für $Fr > 1$ und $Fr < 1$ gültig?

$$\frac{h_v}{z_1} = 1 - \frac{z_2}{z_1} + \frac{v_1^2}{2gz_1} - \frac{v_2^2}{2gz_1}$$

$$\frac{h_v}{z_1} = 1 - \frac{z_2}{z_1} + \frac{Fr_1^2}{2} \left[1 - \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 \right] \quad \text{mit} \quad \frac{z_2}{z_1} = f(Fr_1) \rightarrow \frac{h_v}{z_1} < 0 \text{ für } Fr < 1$$

unmöglich \Rightarrow Gleichung für $\frac{z_2}{z_1}$ nur für $Fr > 1$ gültig

der Wassersprung kann von Vorteil sein :

überkritische Strömung im Überlaufkanal eines Staudamms → Beschädigung des Abströmkanals möglich.

Maßnahme : Wassersprung → erhebliche Dissipation → unterkritische Strömung

- Bemerkung :
- Struktur des Wassersprungs sehr komplex
 - Wassersprung ebenfalls in anderen Querschnittsformen vorhanden

Laminare reibungsbehaftete Strömung

Reibungseinflüsse von Bedeutung bei vielen Strömungsphänomenen

Tangentialspannungen → Reibung

└─ Tangentialkräfte ~ Zähigkeit

Zähigkeitsgesetz

Newtonsche Fluide

Nicht-Newtonsche Fluide

reibungsbehaftete Strömungen

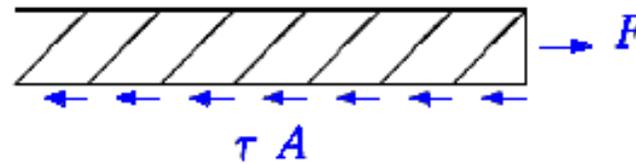
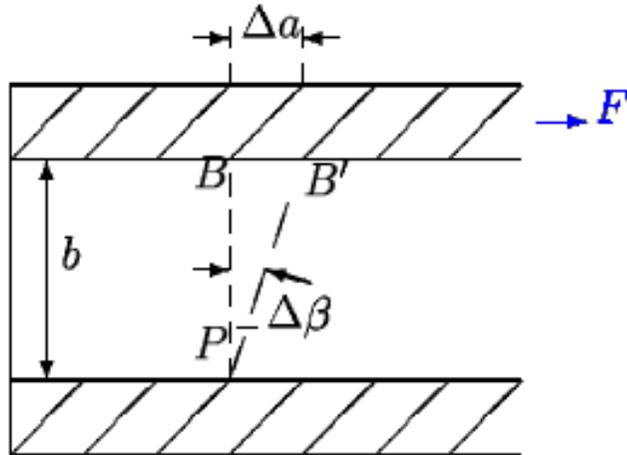
laminare Strömungen
(geschichtet, geordnet)

turbulente Strömungen
(ungeordnet, chaotisch)

zusätzliche
Reibungsspannungen

Viskosität

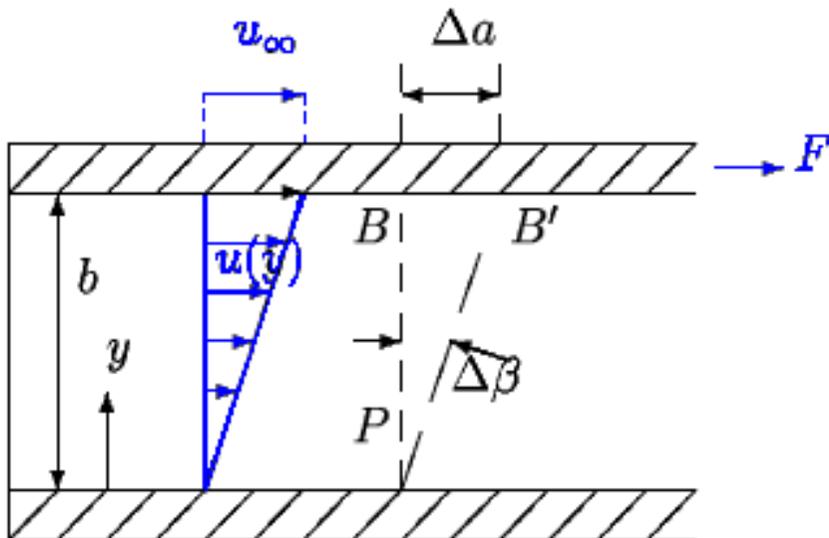
hypothetisches Experiment



elastischer Festkörper

$$\tau \sim \Delta\beta$$

Festkörper wird durch Fluid ersetzt



$$u(y) = u_{\infty} \frac{y}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dy} = \frac{u_{\infty}}{b} = konst.$$

⇒ Überlegungen zur Zähigkeit

in Δt von PB nach PB'

$$\Rightarrow \tan \Delta\beta \approx \Delta\beta = \frac{\Delta a}{b} \quad \Delta\beta = \frac{u_\infty \Delta t}{b}$$

$$u_\infty = f(F) \rightarrow \Delta\beta = h(F, t)$$

Schergeschwindigkeit : $\dot{\gamma} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\beta}{\Delta t}$

$$\rightarrow \dot{\gamma} = \frac{u_\infty}{b} = \frac{du}{dy}$$

weitere Untersuchungen $\Rightarrow \tau \sim \dot{\gamma}$

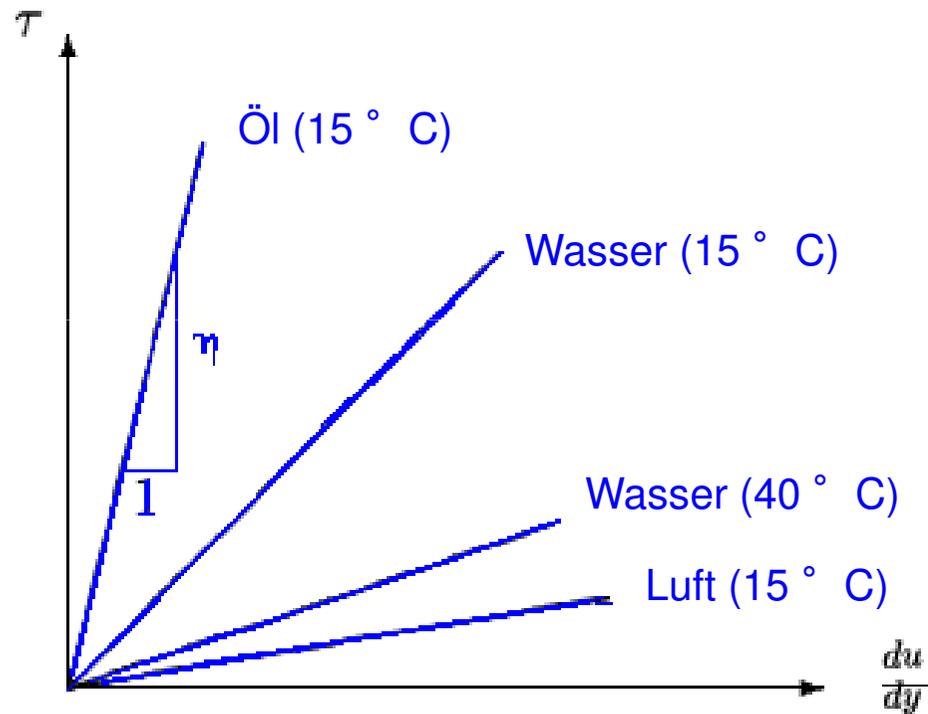
$$\tau \sim \frac{du}{dy} \quad \Rightarrow \quad \tau = \eta \frac{du}{dy}$$

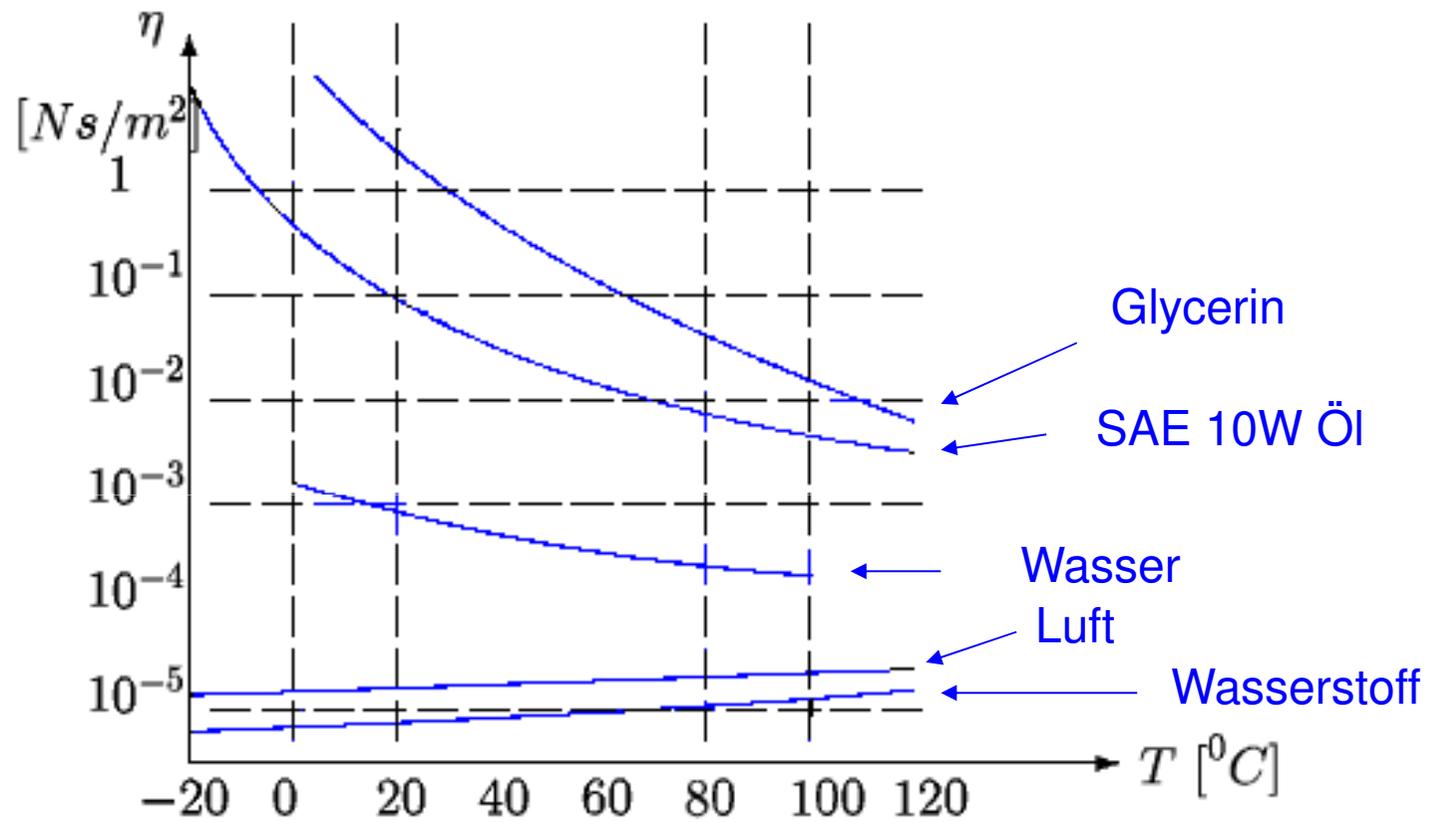
Proportionalitätskonstante η : dynamische Viskosität

Einteilung der Fluide anhand $\tau = f\left(\frac{du}{dy}\right)$ - Darstellung

$$\tau = \eta \frac{du}{dy} \quad \text{Newton. Elementargesetz der Reibung}$$

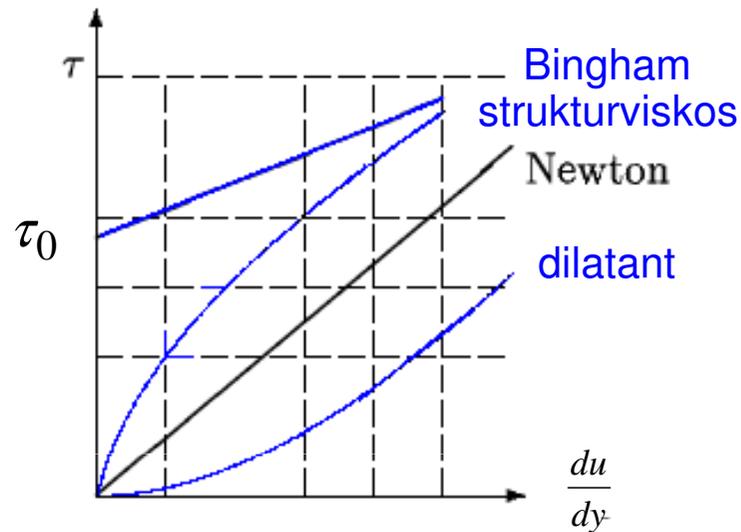
→ Newtonsche oder normalviskose Fluide





neben $\eta \rightarrow$ kinematische Viskosität ν $\nu = \frac{\eta}{\rho} \left[\frac{m^2}{s} \right]$

Nicht-Newtonsche oder anormalviskose Fluide weichen vom Newtonschen Elementargesetz ab.



strukturviskos : $\frac{du}{dy} \uparrow \rightarrow \eta \downarrow$ Polymere \rightarrow Latexfarbe

dilatant : $\frac{du}{dy} \uparrow \rightarrow \eta \uparrow$ Treibsand

Bingham (Plastik) : weder Fluid noch Festkörper

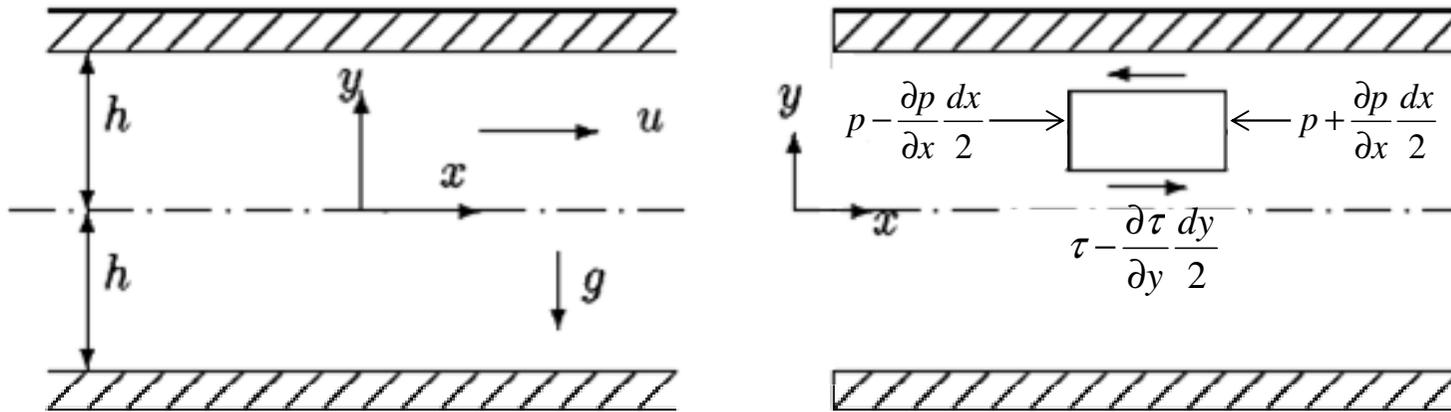
$\tau < \tau_0$: keine Bewegung \rightarrow kein Fluid

$\tau > \tau_0$: Strömung \rightarrow kein Festkörper \rightarrow Zahnpasta, Mayonnaise

Stationäre Strömung zwischen parallelen Platten

Druckgradient in x-Richtung \rightarrow Strömung $u, v = 0$

\rightarrow Gleichgewicht zwischen Druck- und Reibungskräften



stationäre Strömung $\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0$; $\sum F$ in x - Richtung

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy + \left(\tau - \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$$

mit $\tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial y}$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

ΣF in y - Richtung

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \rho g dx dy = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g = 0$$

bzw. $p = -\rho g y + f_1(x)$

Bestimmung von $u(y)$:

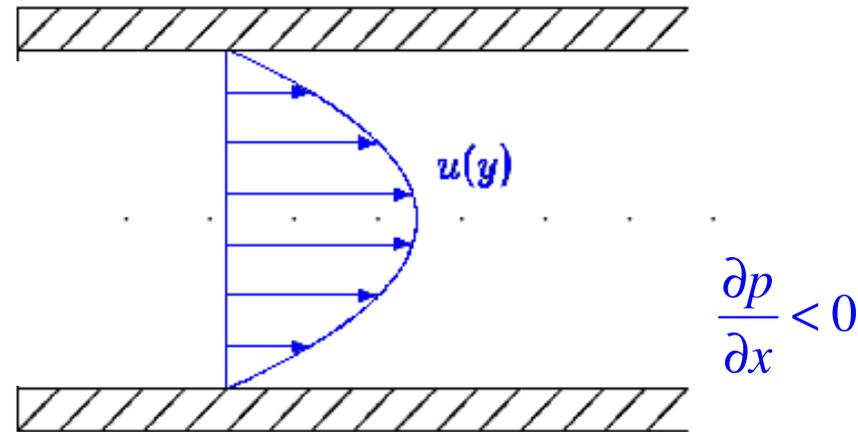
Integration von Gleichung (1)

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y + c_1 \quad u(y) = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2$$

Randbedingungen : $y = \pm h \quad u = 0$

$$0 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2} \pm c_1 h + c_2$$

$$c_1 = 0 \quad c_2 = -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{h^2}{2} \quad \Rightarrow \quad u(y) = \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - h^2)$$



$$\frac{\dot{V}}{b} = q = \int_{-h}^h u(y) dy = \int_{-h}^h \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - h^2) dy$$

$$q = \frac{2h^3 \Delta p}{3\eta l} > 0$$

es sei $\frac{\Delta p}{l} = -\frac{\partial p}{\partial x} \Rightarrow q = -\frac{2h^3}{3\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$

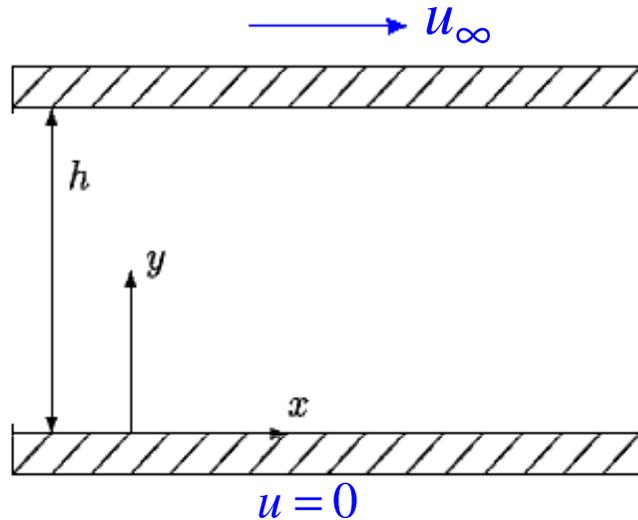
mittlere Geschwindigkeit \bar{u} : $\bar{u} = \frac{1}{2hb} \int_{-h}^h u(y) b dy = \frac{q}{2h} = \frac{h^2 \Delta p}{3\eta l}$

maximale Geschwindigkeit $u_{\max} = u(y=0)$:

$$u_{\max} = -\frac{h^2}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad u_{\max} = \frac{3}{2} \bar{u}$$

D. h. $\frac{\partial p}{\partial x}, \eta, h$ bekannt $\Rightarrow u(y), \bar{u}, u_{\max}, q$

Couette Strömung



Randbedingungen : $y = 0 : u = 0$
 $y = h : u = u_\infty$

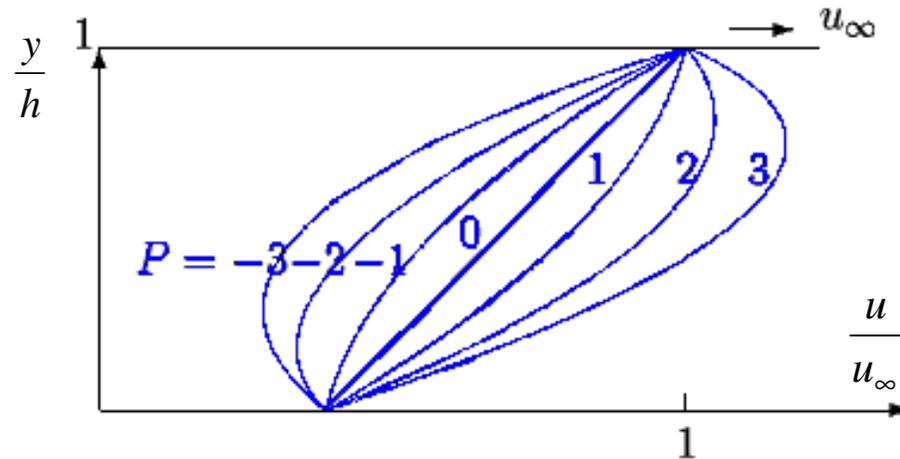
$$\Rightarrow c_1 = \frac{u_\infty}{h} - \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) h$$

$$c_2 = 0$$

$$\Rightarrow u(y) = u_\infty \frac{y}{h} + \frac{1}{2\eta} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (y^2 - hy)$$

$$\frac{u(y)}{u_\infty} = \frac{y}{h} - \frac{h^2}{2\eta u_\infty} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \left(\frac{y}{h} \right) \left(1 - \frac{y}{h} \right)$$

abhängig i. w. von $\frac{\partial p}{\partial x}$; es folgt $u(y)$



$$P = -\frac{h^2}{2\eta u_\infty} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$$

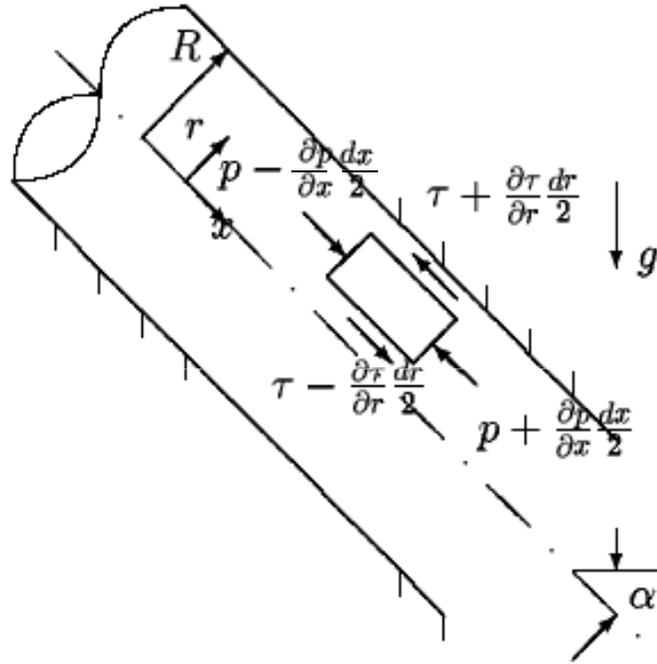
→ Couette-Strömung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{u}{u_\infty} = \frac{y}{h}$$

Bemerkung : Simulation durch 2 konzentrisch angeordnete Zylinder mit $h \ll R_i$

Stationäre Strömung in Röhren mit Kreisquerschnitt

parallel zur Rohrwand $v=w=0$, stationär $\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow 0$ achsensymmetrisch $\frac{\partial u}{\partial \Theta} \rightarrow 0$
 $\Rightarrow u = f(r)$



$\sum F$ in x - Richtung

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) 2\pi r dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) 2\pi r dr +$$

$$\left(\tau - \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{dr}{2} \right) 2\pi \left(r - \frac{dr}{2} \right) dx - \left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r} \frac{dr}{2} \right) 2\pi \left(r + \frac{dr}{2} \right) dx + \rho g 2\pi r dr dx \sin \alpha = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\tau}{r} - \frac{\partial \tau}{\partial r} + \rho g \sin \alpha = 0$$

bzw.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} + \rho g \sin \alpha = 0$$

Integration in radialer Richtung :

$$\tau = \left(- \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) + \rho g \sin \alpha \right) \frac{r}{2} + \frac{c_1}{r}$$

mit

$$\tau = -\eta \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$u = \frac{r^2}{4\eta} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho g \sin \alpha \right] - \frac{c_1}{\eta} \ln r + c_2$$

Randbedingungen : $r=0$ u : endlich
 $r=R$ $u=0$

$$r=0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0, \quad da \quad \ln(0) = -\infty$$

$$r=R \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{R^2}{4\eta} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho g \sin \alpha \right]$$

$$\Rightarrow \quad u(r) = \frac{1}{4\eta} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho g \sin \alpha \right] (r^2 - R^2)$$

Volumenstrom \dot{V}

$$\dot{V} = 2\pi \int_0^R u(r) r dr \qquad \dot{V} = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) - \rho g \sin \alpha \right]$$

es sei

$$\frac{\Delta p}{l} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\longrightarrow \dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \left[\frac{\Delta p}{l} + \rho g \sin \alpha \right]$$

für $\alpha = 0$ gilt:

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{l}$$

Poiseuille, Hagen ≈ 1840

Hagen-Poiseuille Gesetz der Rohrströmung

mittlere Geschwindigkeit :

$$\bar{u} = \frac{\dot{V}}{\pi R^2}$$
$$\bar{u} = \frac{R^2}{8\eta} \left[\left(\frac{\Delta p}{l} \right) + \rho g \sin \alpha \right]$$

maximale Geschwindigkeit :

$$u_{\max} = u(r=0)$$
$$u_{\max} = \frac{R^2}{4\eta} \left[\frac{\Delta p}{l} + \rho g \sin \alpha \right] = 2\bar{u}$$

bzw.
$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2$$

Vernachlässigung der Gravitation :

$$\tau = -\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) \frac{r}{2}$$

Wandschubspannung τ_w

$$\tau_w = \frac{R}{2} \frac{\Delta p}{l}$$

Betrachtungen zur Rohrreibung ($\alpha=0$)

$$\frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} \bar{u}^2} = \frac{8\eta l}{R^2 \frac{\rho}{2} \bar{u}} = \frac{64\eta}{D\rho\bar{u}} \frac{l}{D} = \frac{2\tau_w l}{R^2 \frac{\rho}{2} \bar{u}^2} = \frac{8\tau_w}{\rho\bar{u}^2} \frac{l}{D}$$

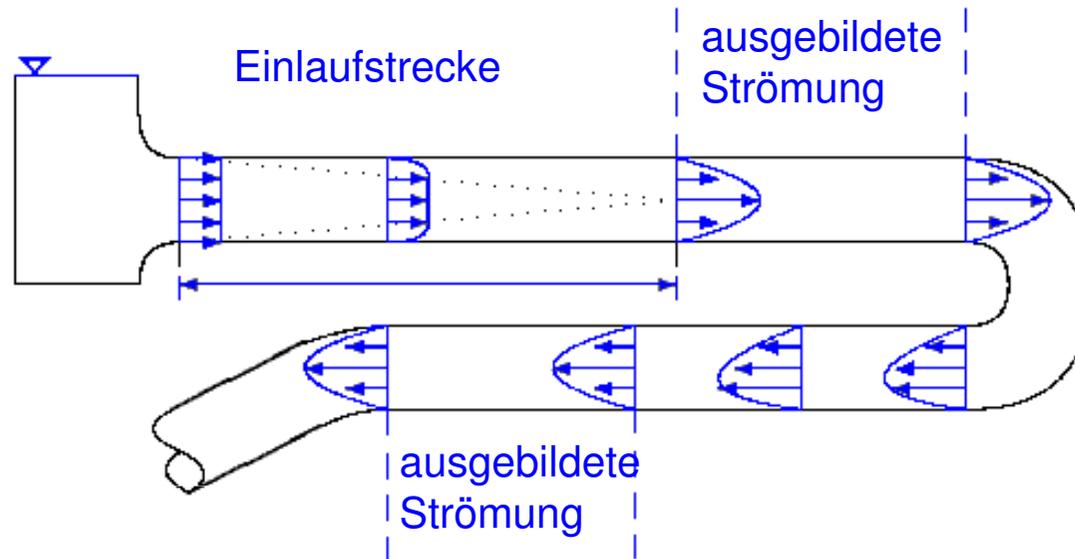
$$\frac{8\tau_w}{\rho\bar{u}^2} = \frac{64\eta}{D\rho\bar{u}} = \frac{64}{\text{Re}}$$

$\text{Re} = \frac{\rho\bar{u}D}{\eta} \longrightarrow$ Reynolds Zahl

man definiert die Rohrreibungszahl λ
$$\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho\bar{u}^2} = \frac{64}{\text{Re}} \quad (\text{laminare Strömung})$$

Rohreinlaufstrecke, ausgebildete Strömung

Einlaufstrecke : Bereich, in den das Fluid in das Rohr eintritt



Einlaufstrecke l_e : Strecke zur Umwandlung des Rechteckprofils in ausgebildetes Profil.

ausgebildete Strömung : $u \neq f(x)$

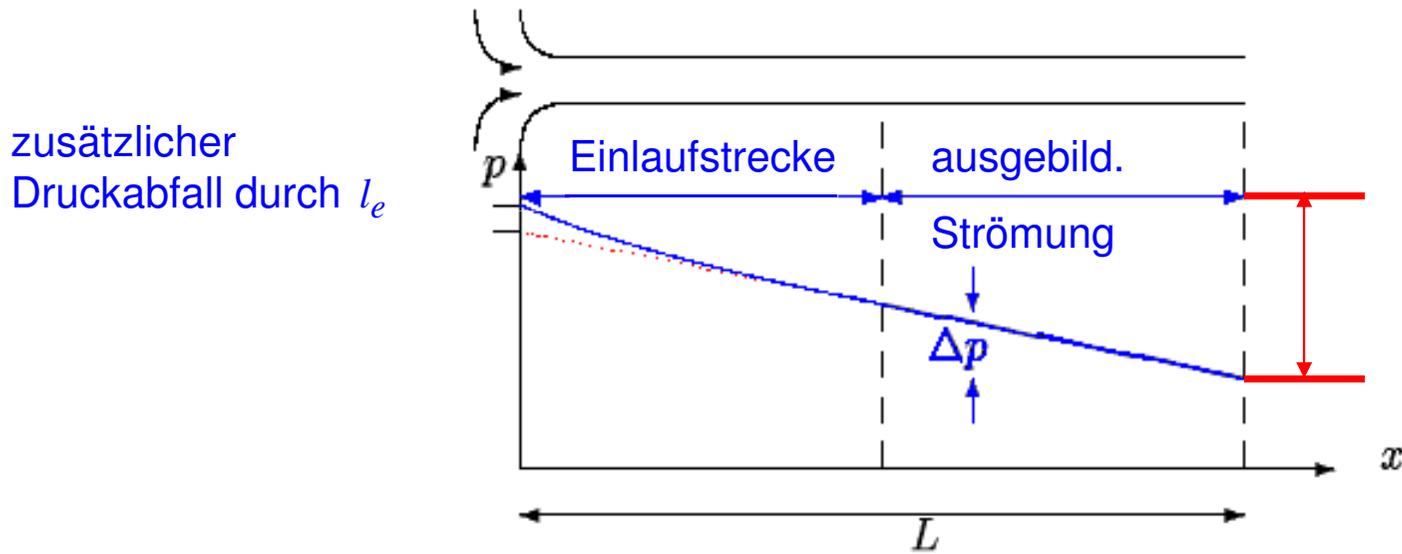
$$\frac{l_e}{D} = 0.06 \text{ Re} \quad \underline{\underline{\text{(laminare Strömung)}}$$

$$l_{e,turb.} < l_{e,lam.}$$

Einlaufstrecke bedingt zusätzlichen Druckverlust

$$\Rightarrow \frac{p_1 - p_2}{\frac{\rho}{2} \bar{u}^2} = \lambda \frac{L}{D} + \zeta_e$$

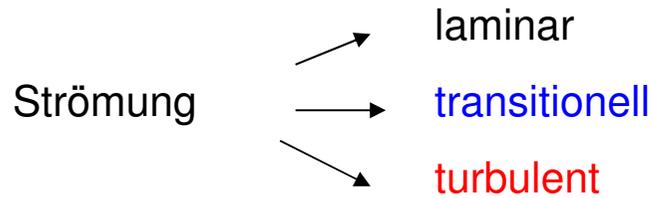
↑ ↑
Rohrreibung bei ausgebildeter Strömung Einlaufstrecke



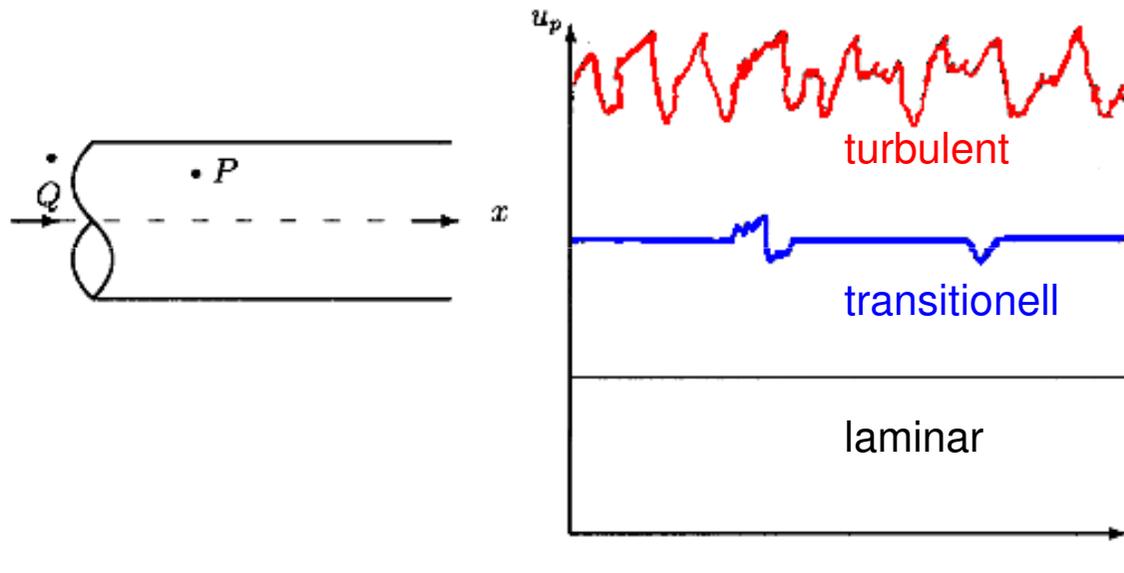
laminare Strömung durch kreisförmige Rohre

$$1.12 \leq \zeta_e \leq 1.45 \quad (\text{Experiment})$$

Turbulente Rohrströmung



zeitliches Verhalten im Punkt P



laminar : $u_p = konst , v_p = 0$

transitionell : $\dot{V}_{tr} > \dot{V}_{lam} ; u_p = f(t), t \in [t_{l,i}, t_{r,i}] \quad u_p = konst \quad t \notin [t_{l,i}, t_{r,i}]$

turbulent : $\dot{V}_{turb} > \dot{V}_{tr} ; u_p = f(t), v_p \neq 0$

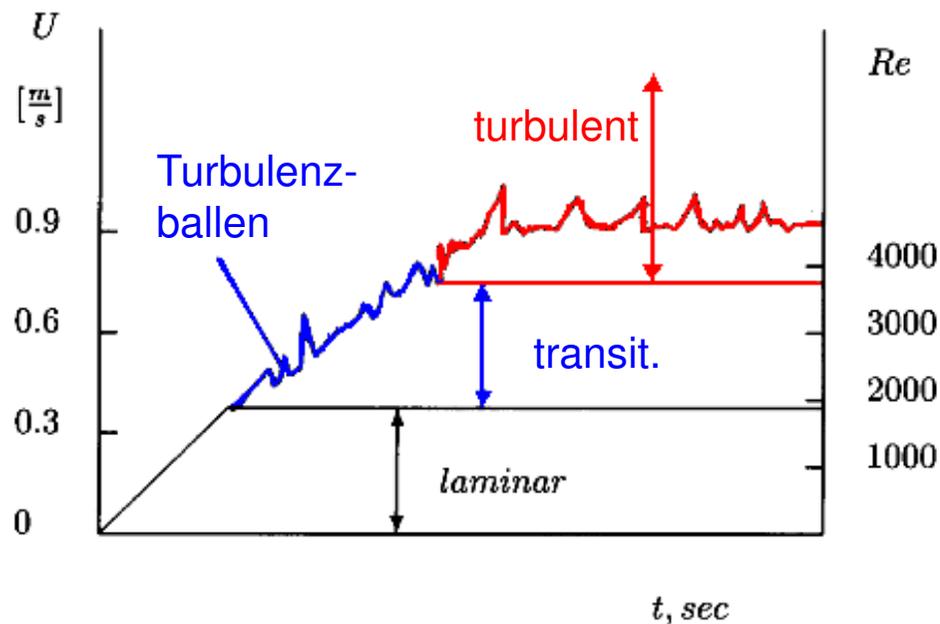
$$\text{Strömungsform} = f(u, \rho, \eta, D) \rightarrow g(Re)$$

Übergang laminar – turbulent = f(Geometrie des Einlaufs,
Oberflächenbeschaffenheit, Rohrvibr.)

Richtwerte für die Strömungsbereiche (kreisförmige Rohre) :

$Re \leq 2100$	laminar
$2100 < Re < 4000$	transitionell
$4000 \leq Re$	turbulent

mögliches Experiment zur Realisation



Turbulente Schubspannung



chaotische und zufällige Schwankungsbewegungen kennzeichnen turbulente Strömungen

Auflösung aller Skalen ist für technolog, relevante Fälle heutzutage unmöglich

⇒ Beschreibung durch **gemittelte** Größen

→ Zeitliche Mittelung nach Reynolds

Zerlegung nach Reynolds (f : beliebige Strömungsgröße)

$$f = \bar{f} + f'$$

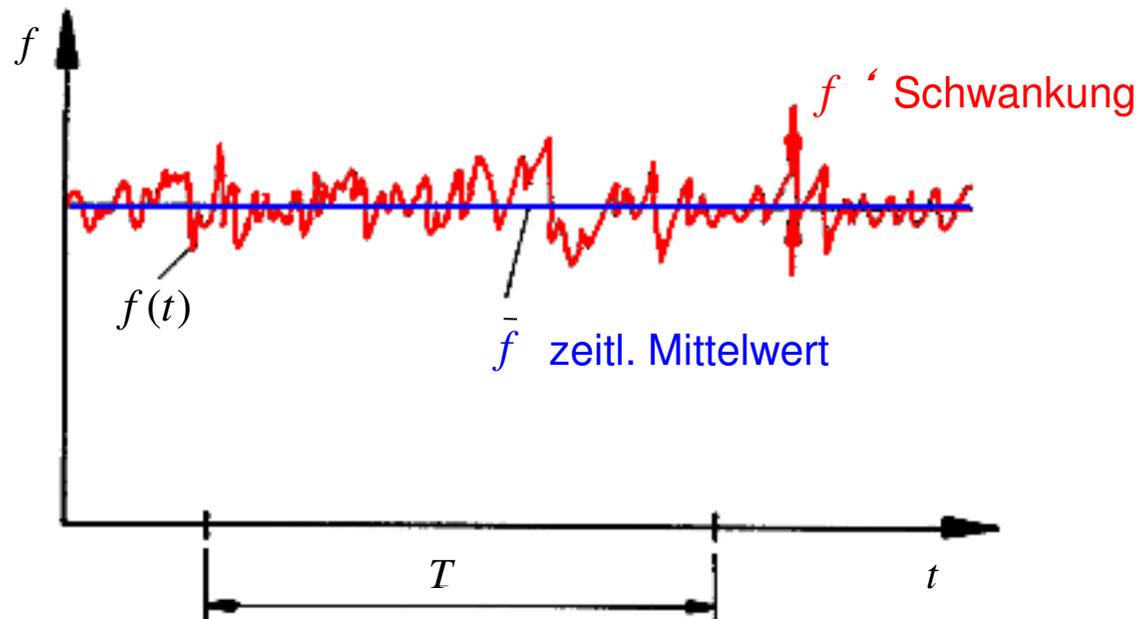
wobei

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x, y, z, t) dt \quad \text{zeitlicher Mittelwert}$$

$$f' \quad \text{Schwankungsanteil}$$

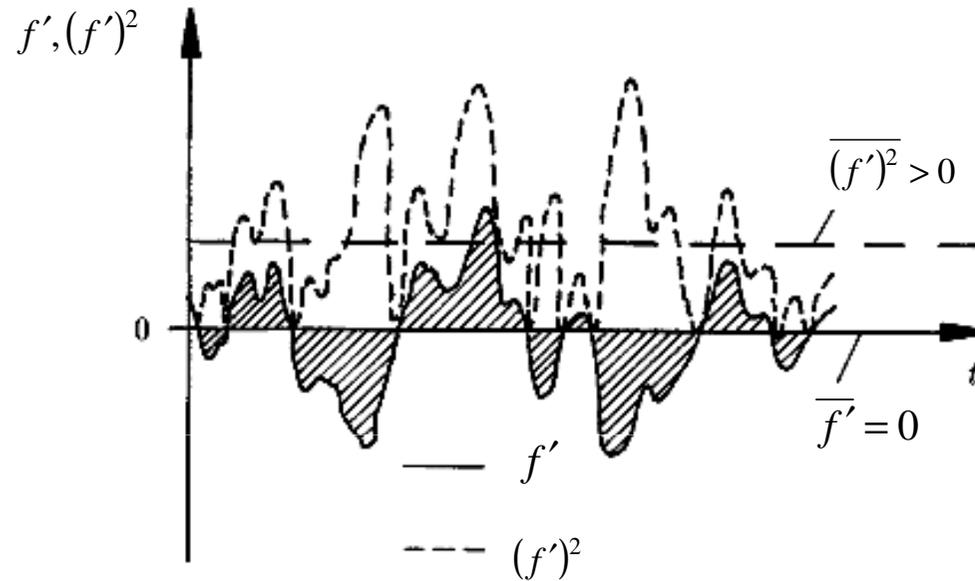
$T \gg$ Schwankungsdauer

$T \ll$ Instationarität



Es ist

$$\overline{f'} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (f - \bar{f}) dt = \frac{1}{T} \left[\int_t^{t+T} f dt - \bar{f} \int_t^{t+T} dt \right] = \frac{1}{T} (T\bar{f} - T\bar{f}) = 0$$



$$\overline{(f')^2} = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} (f')^2 dt > 0$$

ebenso : $\overline{f' g'} > 0$ oder $\overline{f' g'} < 0$ (i.a.)

selten : $\overline{f' g'} = 0$

weitere Operationen

$$\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g}$$

$$\overline{\overline{f \cdot g}} = \overline{f} \cdot \overline{g}, \quad \overline{\overline{f}} = \overline{f}$$

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial y} \qquad \overline{f \cdot g} \neq \overline{f} \cdot \overline{g}$$

$$\overline{\int f dy} = \int \overline{f} dy$$

Maß für die Turbulenz \rightarrow Turbulenzgrad Tu

$$Tu = \frac{1}{u_\infty} \sqrt{\frac{1}{3} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})}$$

isotrope Turbulenz :

$$u' = v' = w' \qquad \Rightarrow \qquad Tu = \sqrt{\frac{u'^2}{u_\infty^2}}$$

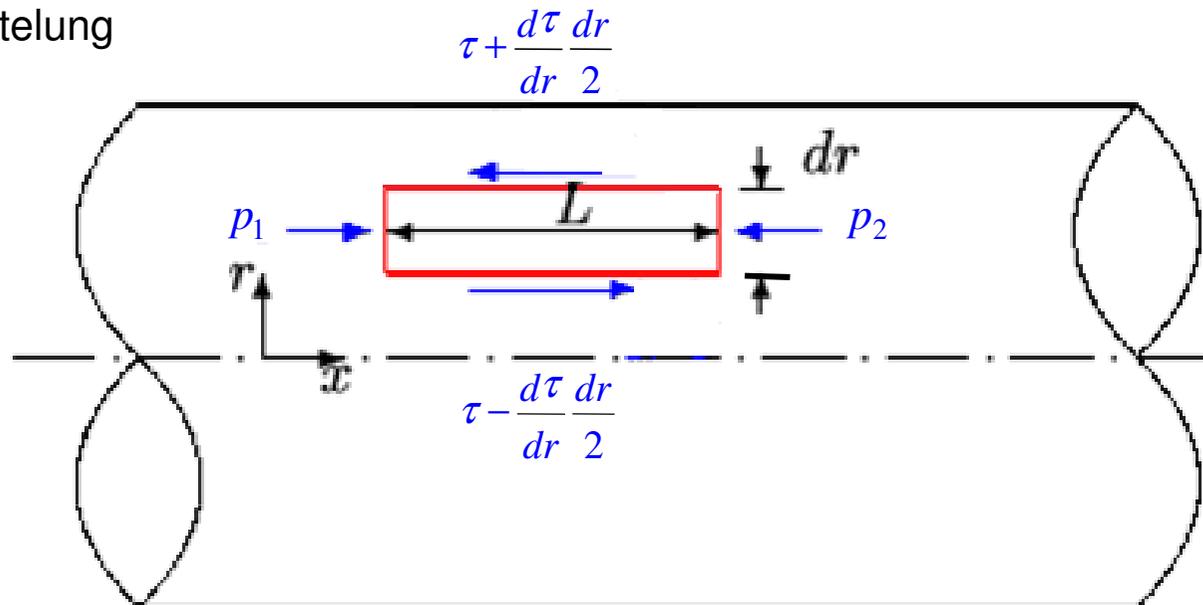
Windkanäle :

$$2 \times 10^{-4} \leq Tu \leq 10^{-2}$$

Analyse der turbulenten Rohrströmung

-Impulssatz

-zeitl. Mittelung



Impulssatz zeitlich gemittelt :

$$\frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_{KV} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{v}) dV + \int_{KF} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA \right] dt = \frac{1}{T} \int_0^T (\vec{F}_p + \vec{F}_r) dt$$

mit

$$\vec{v} = (\bar{u} + u') \vec{i} + v' \vec{j}$$

Druckkräfte

$$\text{Bilanz} \Rightarrow (p_1 - p_2)2\pi r dr$$

$$\longrightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \left[\int_0^r (p_1 - p_2)2\pi r dr \right] dt = (p_1 - p_2)\pi r^2$$

Reibungskräfte

$$\text{Bilanz} \Rightarrow -2\pi L d(r\tau) \quad (\text{vgl. laminare Rohrströmung})$$

$$\longrightarrow \frac{1}{T} \int_0^T \left[- \int_0^{r\tau} 2\pi L d(r\tau) \right] dt = -\tau 2\pi r L$$

lokale Beschleunigung : stationär $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \rightarrow 0$

$$\frac{\partial \bar{f}'}{\partial t} = \frac{\partial f'}{\partial t} = 0 \text{ mit } f' = \begin{cases} u' \\ v' \end{cases}$$

Impulsfluss durch KF

Impulsbilanz am Element liefert für

$$\int_{KF} \rho \vec{v} (\vec{v} \cdot \vec{n}) dA$$

$$\begin{aligned}
& -\rho(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')2\pi r dr + \rho(\bar{u} + u')(\bar{u} + u')2\pi r dr \\
& -\rho \left[(\bar{u} + u')v' - \frac{d(\bar{u} + u')v'}{dr} \frac{dr}{2} \right] 2\pi \left(r - \frac{dr}{2} \right) L \\
& + \rho \left[(\bar{u} + u')v' + \frac{d(\bar{u} + u')v'}{dr} \frac{dr}{2} \right] 2\pi \left(r + \frac{dr}{2} \right) L = \rho 2\pi L d(r(\bar{u} + u')v')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \int_0^{r(\bar{u}+u')v'} \rho 2\pi L d(r(\bar{u} + u')v') &= \rho 2\pi L r(\bar{u} + u')v' \\
\frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}v' dt &= \frac{\bar{u}}{T} \int_0^T v' dt = 0 \\
\frac{1}{T} \int_0^T \rho 2\pi L r(\bar{u} + u')v' dt &= \rho 2\pi L r \frac{1}{T} \int_0^T u'v' dt = \rho 2\pi L r \overline{u'v'}
\end{aligned}$$

Zusammenfassung aller Terme

$$2\pi r L \rho \overline{u'v'} = (p_1 - p_2)\pi r^2 + 2\pi r L \eta \frac{d\bar{u}}{dr}$$

bzw.

$$\underline{(p_2 - p_1) \frac{r}{2L}} = \underline{\underline{-\rho \overline{u'v'}}} + \underline{\eta \frac{d\bar{u}}{dr}}$$

$-\overline{\rho u'v'}$: turbulente Schubspannung τ_t

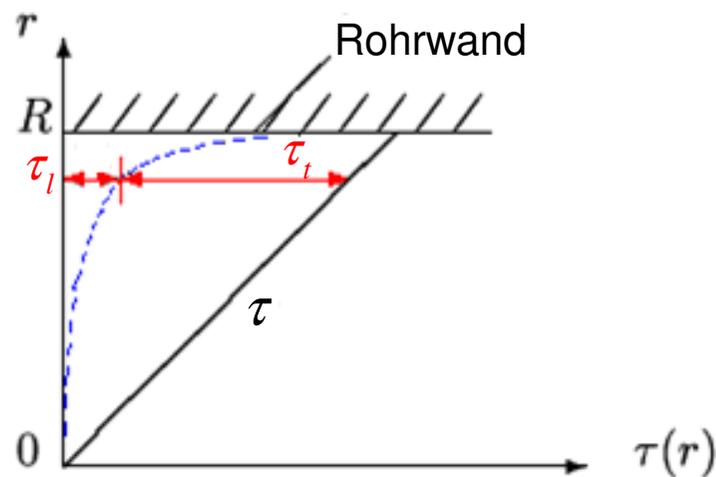
$$\rightarrow \tau = -\rho \overline{u'v'} + \eta \frac{d\bar{u}}{dr} = \tau_t + \tau_l$$

$$\tau_t > 0 \rightarrow \tau > \tau_l$$

Kräftegleichgewicht in differentieller Form

$$\frac{dp}{dx} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau) = 0 \quad p = f(x), \tau = f(r)$$

$$\rightarrow \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\tau) = \text{const.} \quad \text{bzw. } \tau \text{ linear in } r$$



viskose Unterschicht : molekulare Schubspannung wesentlich

äußere Schicht : turbulente Schubspannung $\tau_t \gg \tau_l$

$$\rightarrow \tau_t \approx (100 \div 1000) \tau_l$$

Bestimmung des Geschwindigkeitsprofils $u(r)$ nur möglich, wenn u' , v' bekannt

Gleichung für $-\overline{\rho u'v'}$?

Prandtlische Mischungsweghypothese

Reynoldsche Ansatz $\Rightarrow -\overline{\rho u'v'}$ als neue unbekannte Variable

\Rightarrow zu wenig Gleichungen zur Lösung

zur **Schließung** des Systems wird eine **zusätzliche Gleichung** benötigt

Schließung: Zusammenhang zwischen den gemittelten und den Schwankungsgrößen wird postuliert.

laminare Strömung : $\tau_l = \eta \frac{d\bar{u}}{dy}$

turbulente Strömung : $\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \eta_t \frac{d\bar{u}}{dy}$ (Boussinesq)

η_t : turbulente oder scheinbare Wirbelviskosität

Turbulenz (Bild der Struktur) :

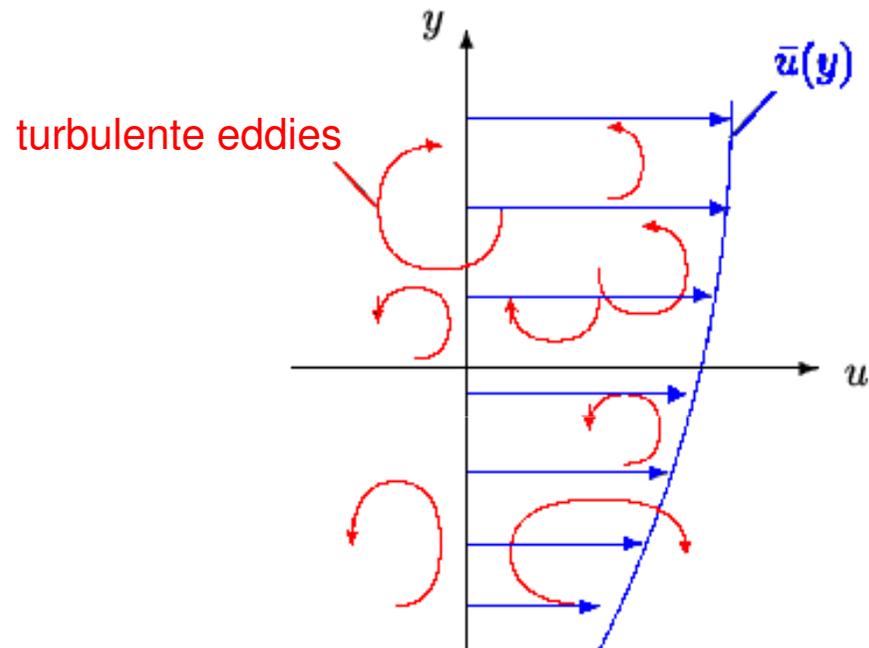
Kaskade der Wirbel → kleine Wirbel in der Größe der Partikel bis hin zu großen Wirbeln mit Durchmessern der charakteristischen Länge.

Wirbelbewegung ist zufällig.

Massentransport mit \bar{u}

⇒ gesteigerter Impulsaustausch

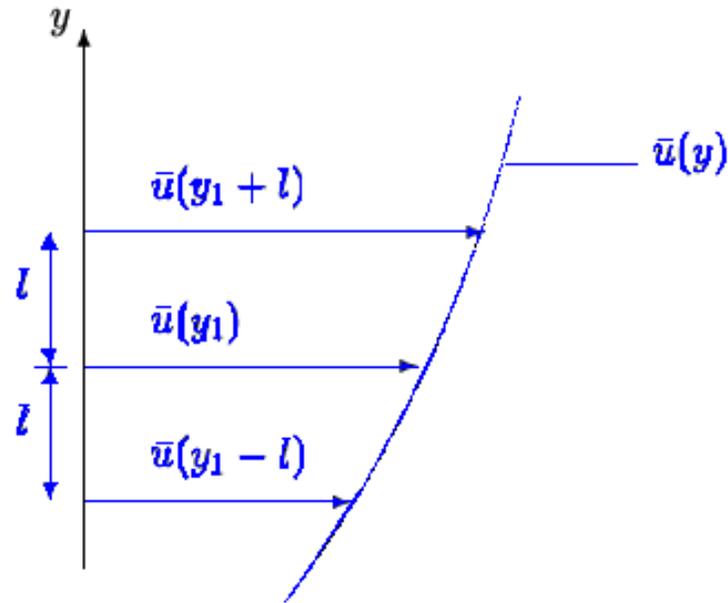
⇒ $\tau_t > \tau_l; \eta_t$ keine Stoffgröße



gesucht : $\eta_t = f(\bar{u}, \bar{v})$

Ansatz von Prandtl :

turbulente Grenzschicht enthält Strömungsballen, diese bleiben eine gewisse Zeit bestehen.



Transport zwischen $y_1 - l$ und y_1

$$\Delta u_- = \bar{u}(y_1) - \bar{u}(y_1 - l) \approx l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{y_1}$$

Transport zwischen $y_1 + l$ und y_1

$$\Delta u^+ = \bar{u}(y_1 + l) - \bar{u}(y_1) \approx l \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)_{y_1}$$

$\Delta u_-, \Delta u^+$: turbulente Schwankungen!

$$|\overline{u'}| = \frac{1}{2} (|\Delta u_-| + |\Delta u^+|) = l \left| \frac{d\overline{u}}{dy} \right|_{y_1}$$

l : Mischungsweg (Prandtl)

$$v' \sim u' \Rightarrow |\overline{v'}| = konst. \cdot |\overline{u'}| = konst. \cdot l \left| \frac{d\overline{u}}{dy} \right|$$

Zusammenhang : $\overline{u'v'}$ mit $|\overline{u'}|$ und $|\overline{v'}|$

$$v' > 0 \rightarrow u' < 0 \text{ (i. a.)}$$

$$v' < 0 \rightarrow u' > 0 \text{ (i. a.)}$$

$$\Rightarrow \overline{u'v'} < 0$$

$$\Rightarrow \overline{u'v'} = -konst. \cdot |\overline{u'}| |\overline{v'}| = -const. l^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy} \right)^2$$

$$\text{const. } l^2 = \sqrt{k}l\sqrt{k}l = \hat{l}^2$$

$$l = \hat{l}$$

$$\tau_t = -\rho \overline{u'v'} = \underbrace{\rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|}_{\eta_t} \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \rightarrow \quad \eta_t = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right|$$

Prandtl'sche Mischungsweghypothese

häufig : $l = f$ (charakteristische Länge) \rightarrow Lösung möglich

Universelles Wandgesetz

Impulssatz der Rohrströmung :

$$\frac{p_1 - p_2}{2L} (R - y) = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} + \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy}$$

mit $y = R - r$

Geschwindigkeitsverteilung nicht direkt mittels Integration zu bestimmen

\longrightarrow Annahmen bzgl. τ_l und τ_t

gesucht : $\bar{u}(y)$

es ist : $y_* \ll R!$

$y > y_*$: • turb. Terme \gg Trägheitsmomente, laminare Spannungsterme

$$\bullet \quad \tau_t \stackrel{!}{=} \text{konst.} \stackrel{!}{=} \tau_w = \rho l^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dy} \right| \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \text{für } 0 < y < y_*$$

Ansatz für l : $l = ky$, wobei $k = 0,4$ aus Exp.

$$\longrightarrow \tau_w = \rho k^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2$$

Annahme : $\bar{u} = \bar{u}(\rho, \tau_w, \nu, y)$

$$ky \frac{d\bar{u}}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} = u_* \quad : \text{ Schubspannungsgeschwindigkeit}$$

$$\frac{1}{u_*} d\bar{u} = \frac{1}{k} \frac{dy}{y}$$

Integration \rightarrow $\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln y + c_1$ für $y > y_*$

c_1 aus Anpassung von $\bar{u}|_{y>y_*}$ an $\bar{u}|_{y<y_*}$

$y < y_*$ (zähe Unterschicht)

$$\tau_w = \eta \frac{d\bar{u}}{dy} \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{\tau_w}{\rho} = u_*^2 = \nu \frac{d\bar{u}}{dy}$$

$$\rightarrow \frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{u_* y}{\nu} = y^+$$

y_* aus $\bar{u}(y = y_*) / u_* = \text{konst.} = c_2$

$$y_* = c_2 \frac{\nu}{u_*}$$

$\bar{u}_* = \bar{u}(y = y_*)$ in das ln-Gesetz einführen

$$\frac{\bar{u}_*}{u_*} = \frac{1}{k} \ln y_* + c_1 = \frac{1}{k} \ln \frac{\nu}{u_*} + \frac{1}{k} \ln c_2 + c_1 \Rightarrow c_1$$

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln y - \frac{1}{k} \ln \frac{\nu}{u_*} + \frac{\bar{u}_*}{u_*} - \frac{1}{k} \ln c_2$$

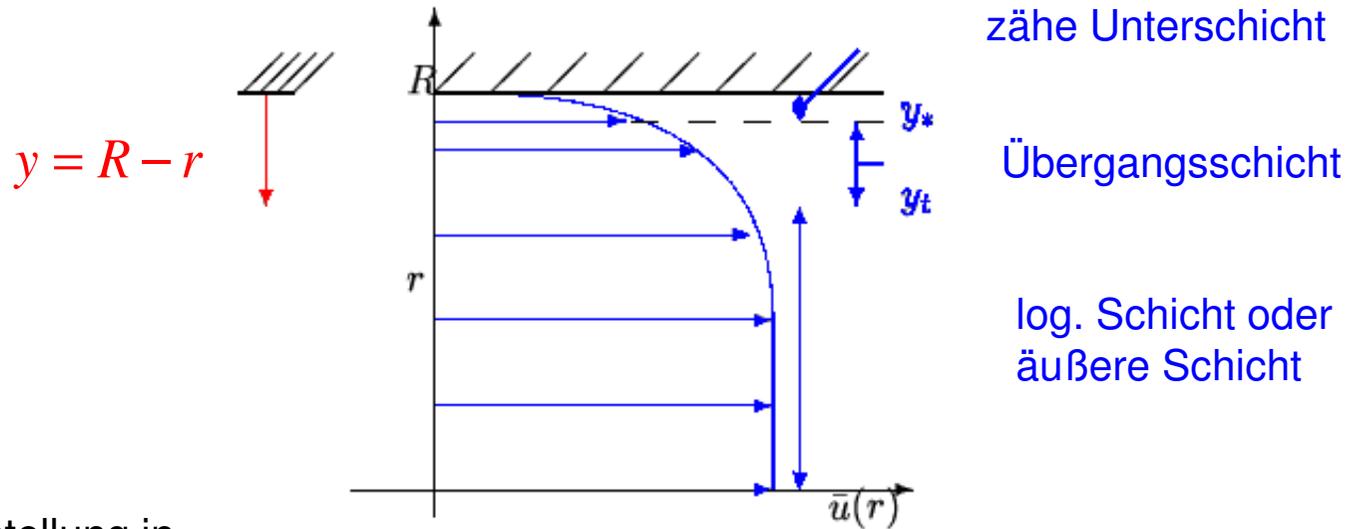
$$\boxed{\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{yu_*}{\nu} + C} \quad y \geq y_*$$

universelles Wandgesetz für turbulente Strömungen bzw. logarith. Wandgesetz

für $k = 0,4$; $C = 5,5$ (Exp. , glatte Rohre)

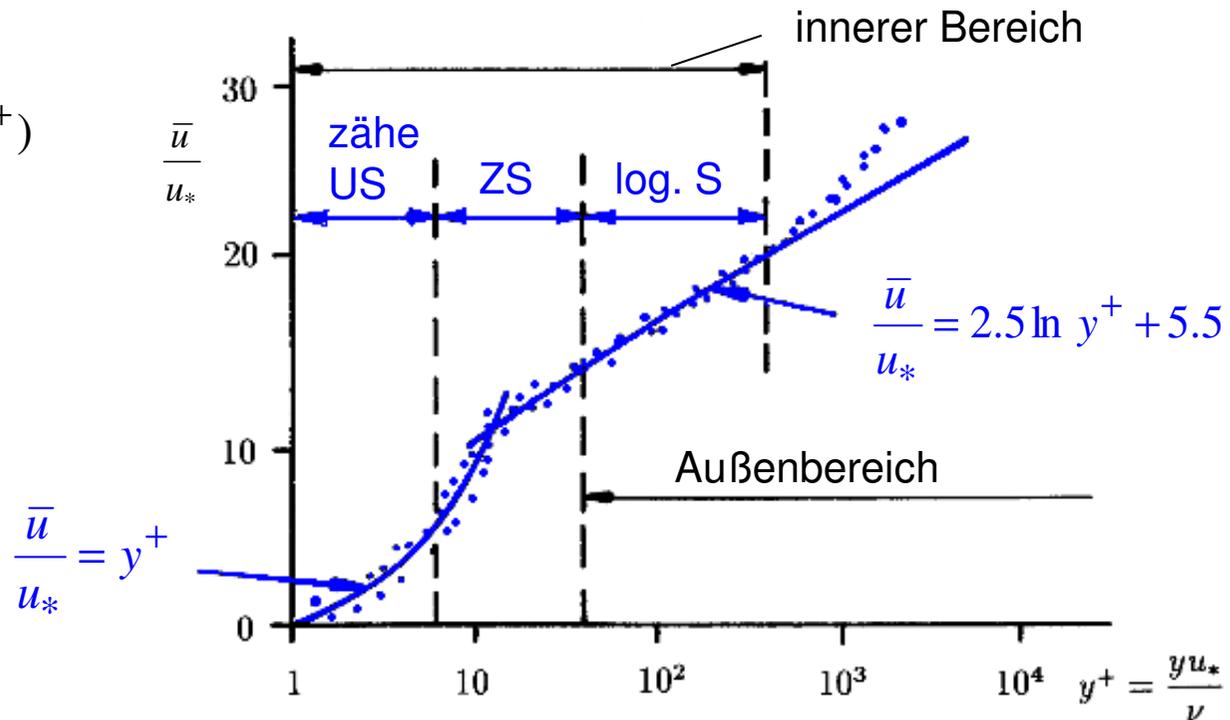
$$\boxed{\frac{\bar{u}}{u_*} = 2.5 \ln y^+ + C}$$

schematische Darstellung von $\bar{u}(r)$:



Darstellung in
dimensionsloser
Form :

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = f(y^+)$$



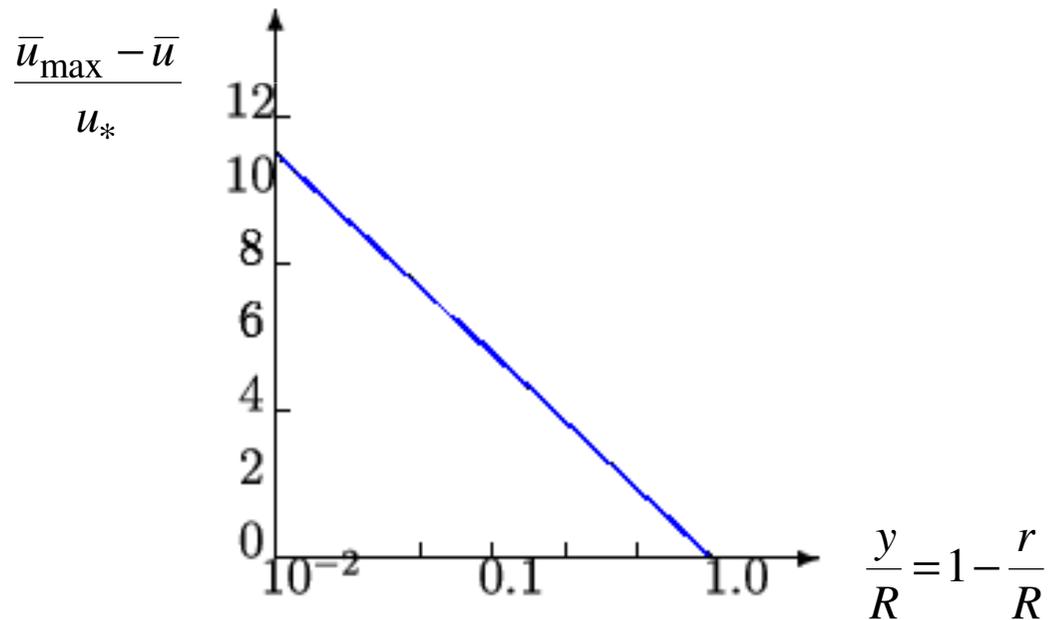
Bemerkung : Experimente zeigen, dass das universelle Wandgesetz

gültig ist für : $y_* < y \leq R$

mit der maximalen Geschwindigkeit $\bar{u}_{\max} = \bar{u}(y = R)$

$$\bar{u}_{\max} = u_* \left[2.5 \ln \frac{Ru_*}{\nu} + C \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}}{u_*} = -2.5 \ln \frac{y}{R} = -2.5 \ln \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$



Achtung : $r \rightarrow R$ $\frac{\bar{u}_{\max} - \bar{u}}{u_*} \rightarrow \infty$

mittlere Strömungsgeschwindigkeit \bar{u}_m

$$\bar{u}_m = \frac{\dot{V}}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R 2\pi \bar{u}(r) r dr = \frac{2}{R^2} \int_0^R \bar{u}(r) r dr$$

$$\bar{u}_m = 2 \int_0^1 \left[\bar{u}_{\max} + \hat{u}_* \ln\left(1 - \frac{r}{R}\right) \right] \frac{r}{R} d\left(\frac{r}{R}\right)$$

Integral des ln-Terms : mit $\frac{y}{R} = 1 - \frac{r}{R}$

$$\begin{aligned} & - \int_1^0 \ln\left(\frac{y}{R}\right) d\left(\frac{y}{R}\right) + \int_1^0 \left(\frac{y}{R}\right) \ln\left(\frac{y}{R}\right) d\left(\frac{y}{R}\right) \\ & = - \left[\frac{y}{R} \left(\ln\left(\frac{y}{R}\right) - 1 \right) \right]_1^0 + \left[\left(\frac{y}{R}\right)^2 \left(\frac{1}{2} \ln\left(\frac{y}{R}\right) - \frac{1}{4} \right) \right]_1^0 = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{u}_m}{u_*} = \frac{\bar{u}_{\max}}{u_*} - 3.75 \quad (\text{theoretisch})$$

experimentell ermittelt :

$$\frac{\bar{u}_m}{u_*} = \frac{\bar{u}_{\max}}{u_*} - 4.07$$

Universelles Widerstandsgesetz

in technischen Anwendungen ist der strömungsmechanische Verlust entscheidend.

→ Zusammenhang $\lambda = f(Re)$

Definition von λ

$$\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho \bar{u}_m^2} = 8 \frac{u_*^2}{\bar{u}_m^2}$$

es ist
$$\frac{\bar{u}_m}{u_*} = \frac{\bar{u}_{\max}}{u_*} - 3.75 = 2.5 \ln\left(\frac{Ru_*}{\nu}\right) + 5.5 - 3.75 = 2.5 \ln\left(\frac{Ru_*}{\nu} + 1.75\right)$$

mit
$$\frac{\bar{u}_m}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$$

$$\frac{Ru_*}{\nu} = \frac{u_*}{\bar{u}_*} \frac{\bar{u}_m 2R}{2\nu} = \text{Re} \sqrt{\lambda} \frac{1}{4\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln(\text{Re} \sqrt{\lambda}) + \frac{2.5}{\sqrt{8}} \ln\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right) + \frac{1.75}{\sqrt{8}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.884 \ln(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0.913$$

bzw. da $\ln(x) = \log(x) / \log(e)$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.035 \log(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0.913$$

Anpassung der Konstanten durch Experimente

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log(\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0.8}$$

universelles Widerstandsgesetz, vollturbulente Strömung, kreisförmige Rohre, hydraulisch glatt.

empirische Näherung von Blasius :

$$\lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{\text{Re}}}$$

Turbulente Strömung durch raue Rohre

strömungsmechanische Verluste in turbulenten Strömungen = f (Oberflächengüte)

turbulente Strömung \rightarrow zähe Unterschicht

$$y_* / D \ll 1$$

Größe der Rauigkeit $\rightarrow y_*$

\rightarrow Verluste = f (Wandrauhigkeit)

Maß für die Wandrauhigkeit

Bezeichnung rauh oder glatt abhängig von $\frac{\text{Rauheitshöhe}}{\text{Dicke der Unterschicht}} = \frac{k}{y_*}$

bzw. mit $y_* \sim \frac{v}{u_*}$ $\frac{k}{y_*} \sim \frac{ku_*}{v}$

$k < y_*$: hydraulisch glatte Rohre

$$y_* = f(\text{Re}) \Rightarrow \text{Rohrbezeichnung} = f(\text{Re})$$

$k > y_*$: vollkommen raue Rohre

vollkommen raue Strömung durch kreisförmige Rohre

$$\lambda = f\left(\frac{k_s}{R}\right) \quad \text{von Kármán} \quad k_s : \text{Sandrauheit}$$

Voraussetzung : $\frac{u_*}{v} \sim \frac{1}{k_s}$

$$\longrightarrow \frac{\bar{u}_m}{u_*} = 2.5 \ln\left(\frac{R}{k_s}\right) + \frac{4.75}{u_*} \quad (\text{angepasste Konstante})$$

mit $\frac{\bar{u}_m}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$ $\lambda = \frac{8\tau_w}{\rho \bar{u}_m^2}$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0.884 \ln\left(\frac{R}{k_s}\right) + 1.679$$

bzw. $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.035 \log\left(\frac{D}{k_s}\right) + 1.067$

experimentelle Anpassung :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log\left(\frac{D}{k_s}\right) + 1.14$$

quadratisches Widerstandsgesetz für λ , vollkommen raue Rohre, kreisförmiger Querschnitt

Übergangsbereich zwischen glatt und rauh

Colebrook auf der Basis von Messdaten von Nikuradse

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2.0 \log \left(\frac{\frac{k_s}{D}}{3.7} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \approx 2.0 \log \left[\frac{\text{Re} \sqrt{\lambda}}{1 + 0.1 \left(\frac{k_s}{D} \right) \text{Re} \sqrt{\lambda}} \right] - 0.8$$

gültig im gesamten nichtlaminaren Gebiet

$k_s \rightarrow 0$: hydraulisch glatte Rohre

$\text{Re} \rightarrow \infty$: vollkommen rauhe Rohre

die natürliche Rauheit in der Praxis wird anhand von Tabellen auf die Größe $\frac{k_s}{D}$ umgerechnet.

→ λ -Werte : Moody-Diagramm bestimmbar

