

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik I

11. 02. 2020

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

Klausur Aerodynamik I

Fragenteil, Biot-Savart, Tropfentheorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

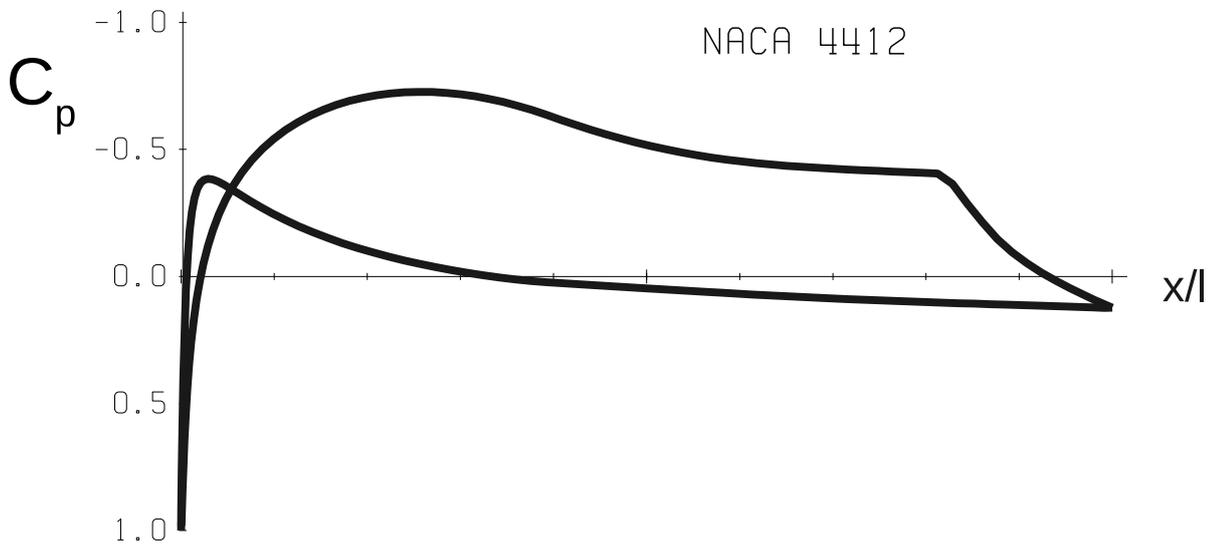
Integrale

- $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x}{ax + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax + b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (13 Punkte)

1. Skelett-Theorie

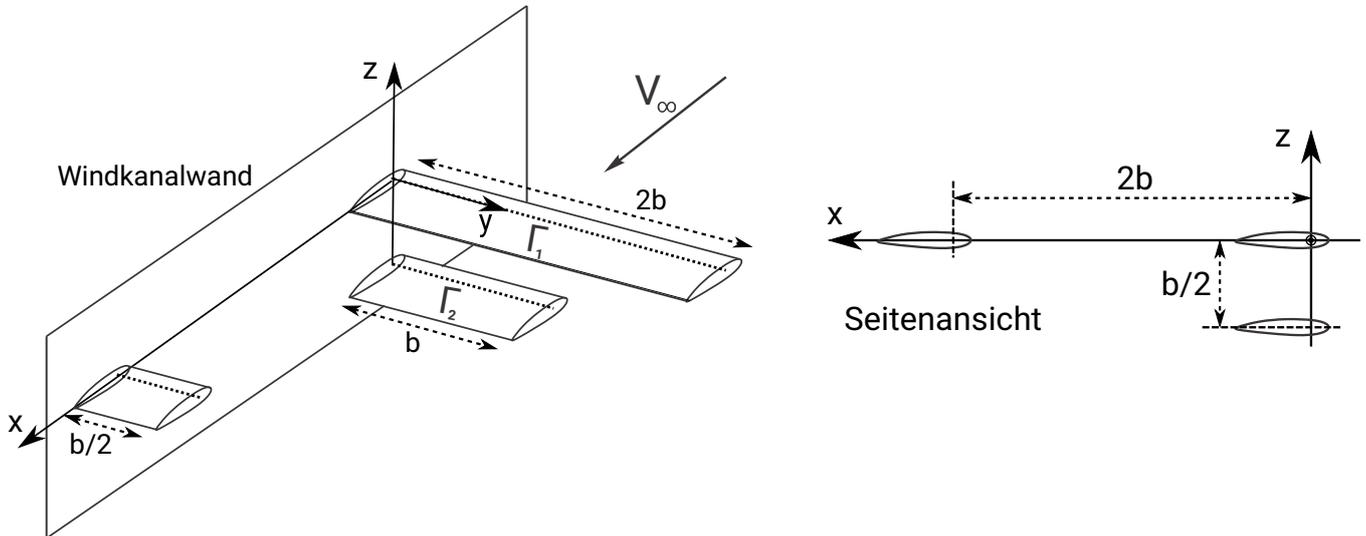
- (a) Nennen Sie die Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Skelett-Theorie. Welche Größen lassen sich mithilfe der Skelett-Theorie berechnen und welche Einflussfaktoren werden berücksichtigt? Gehen Sie dabei besonders auf die Unterschiede zur Tropfen-Theorie ein.
 - (b) Formulieren Sie die Kernaussage der kinematischen Strömungsbedingung in eigenen Worten. Skizzieren Sie hierzu die Geschwindigkeiten an der Skelettlinie für einen Anstellwinkel $\alpha > 0$.
2. Gegeben ist folgendes c_p -Diagramm bei einer Anström-Machzahl von 0.1, einem Anstellwinkel von $\alpha = 0^\circ$ und einer Reynoldszahl von 10^5 . Beschreiben Sie die auftretenden Strömungsphänomene, die sich aus dem c_p -Diagramm ergeben und skizzieren Sie zu dieser Strömung ein passendes c_f -Diagramm für die Profillober- und unterseite.



3. Welche wesentlichen Ähnlichkeitsparameter der Strömungsmechanik müssen bei der Untersuchung der aerodynamischen Eigenschaften eines Flugzeugmodells im Windkanalversuch im Hinblick auf die Übertragbarkeit der Messergebnisse auf ein reales Modell eingehalten werden?
- ## 4. Konforme Abbildungen
- (a) Wie ist die Grundgeometrie in der komplexen z -Ebene zu wählen, um durch die Transformation mittels der konformen Zhukovski-Abbildungsfunktion $\zeta = z + \frac{a^2}{z}$ in der komplexen ζ -Ebene ein Dickenprofil zu bekommen?
 - (b) Wie lautet die Bedingung in der komplexen z -Ebene, damit die Kuttasche Abflussbedingung in der ζ -Ebene erfüllt ist?

2. Aufgabe: Biot-Savart (19 Punkte)

Zur experimentellen Untersuchung der Flügelaerodynamik wird eine Doppeldeckerkonfiguration einseitig bei $y = 0$ an der Windkanalwand eingespannt (siehe Abbildung). Beide Halbflügel können durch gerade Flügelsegmente angenähert werden. Der Oberflügel besitzt die Zirkulation Γ_1 und der Unterflügel die Zirkulation Γ_2 . Zur Auslegung des Experimentes wird der Aufbau im Nachfolgenden reibungsfrei betrachtet.



1. Skizzieren Sie das vollständige Wirbelsystem des Ober- und Unterflügels und erläutern Sie den zugrunde liegenden Wirbelsatz. Geben Sie dabei den Wert und die Drehrichtung der Zirkulation jedes Wirbels explizit an.
2. Leiten Sie aus der allgemeinen Form des Biot-Savartschen Gesetzes

$$d\vec{u}_i = -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{|\vec{r}|^3}$$

die Gleichung für den induzierten Geschwindigkeitsbetrag einer geraden endlichen Wirbellinie

$$|\vec{u}_i| = \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

her.

3. Es soll der Einfluss des Wirbelsystems des Ober- und Unterflügels auf das Höhenleitwerk untersucht werden. Bestimmen Sie dafür die im Höhenleitwerk induzierte Geschwindigkeitskomponente $u_z(2b, y, 0)$ für $0 \leq y \leq b/2$ im in der Abbildung gegebenen Koordinatensystem.

Gegeben: Γ_1, Γ_2, b .

3. Aufgabe: Tropfentheorie (18 Punkte)

Es wird die Umströmung um einen dünnen Profiltropfen aus zwei Teilsegmenten untersucht. Während für den vorderen Teil die Quellverteilung $q_1(\varphi)$ bekannt ist, ist für den hinteren Teil die Form des Profiltropfens $Z_2^{(t)}(X)$ vorgeschrieben:

$$q_1(\varphi) = 2u_\infty \left(A_1 \frac{\cos(\varphi)}{\sin(\varphi)} + B_1 + D_1(1 + \cos(\varphi)) \right) \quad \varphi \in [\pi, \pi/2]$$
$$Z_2^{(t)}(X) = A_2 + B_2X - D_2(2X - 1)^2 \quad X \in [0.5, 1] \quad \text{mit } X = x/t \text{ und } Z^{(t)} = z^{(t)}/t.$$

Das Profil wird ohne Anstellwinkel in einer Parallelströmung mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt. Es können $B_1 = 0.1$, $D_1 = 0.03$ und $A_2 = -0.0075$, $B_2 = 0.13$, $D_2 = -0.1225$ als gegebene Konstanten verwendet werden.

1. Geben Sie die Form des Profiltropfens $Z_1^{(t)}(\varphi)$ für den vorderen Teil des Profils an.
Hinweis: Formulieren Sie zunächst einen Ausdruck für den φ -Gradienten des Profiltropfens.
2. Geben Sie die Form des Profiltropfens $Z_1^{(t)}(X)$ für den vorderen Teil des Profils an.
3. Bestimmen Sie die fehlende Konstante A_1 , sodass die beiden Segmente einen geschlossenen Profiltropfen ergeben und zeigen Sie, dass die Schließungsbedingung erfüllt ist.
Hinweis: Sollten Sie A_1 nicht bestimmen können verwenden Sie im Folgenden $A_1 = 0$.
4. Leiten Sie aus dem folgenden Ansatz der induzierten Geschwindigkeit am Punkt P

$$dv_{ind,P} = \frac{q(x)dx}{2\pi r} \quad \text{mit } r \text{ als Abstand des Punktes P zur Quelle } q(x)dx$$

die Beziehung für die dimensionslose induzierte Axialstörgeschwindigkeit

$$u_a(X) = u(X)/u_\infty = \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

her und bestimmen Sie diese für das gegebene Profil.

5. Begründen Sie, ob sich das Dickenmaximum des kombinierten Profils im vorderen oder im hinteren Teil des Profils befindet.

Gegeben: u_∞ , B_1 , D_1 , A_2 , B_2 , D_2 und A_1 in Teilaufgaben 1 und 2

Hinweise:

Verwenden Sie folgende Transformationsregel:

$$X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$$

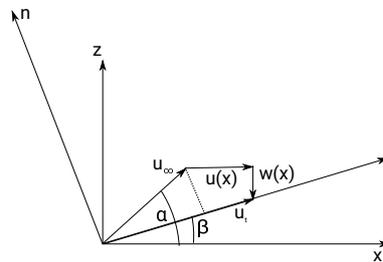
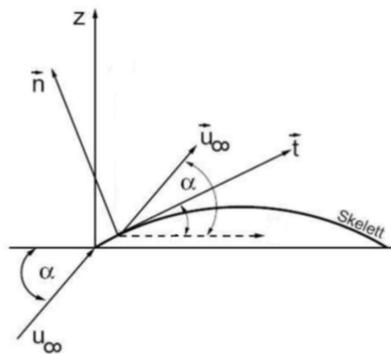
Quellverteilung:

$$q(X) = 2u_\infty \frac{dZ^{(t)}(X)}{dX}$$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (13 Punkte)

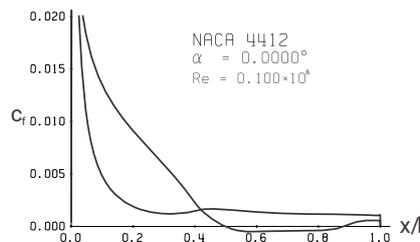
(LÖSUNG)

1. (a) Die Skelett-Theorie geht von unendlich dünnen Profilen, kleinen Anstellwinkeln, kleiner Wölbung und inkompressibler, stationärer, rotationsfreier und reibungsfreier Strömung aus. Es wird der Anstellwinkel- und Wölbungseinfluss des Profils auf die Umströmung dargestellt. Somit lässt sich der 2-dimensionale Auftriebsbeiwert des Profils abschätzen. Im Gegensatz zur Tropfentheorie wird der Verdrängungseffekt des Profils vernachlässigt. Eine Aussage über den Widerstand des Profils kann nicht getroffen werden!
- (b) Die kinematische Strömungsbedingung besagt, dass die Skelettlinie eine Stromlinie ist. Das heißt, dass kein Massentransport normal zur Skelettlinie stattfindet. Der resultierende Geschwindigkeitsvektor an der Skelettlinie ist tangential zu dieser, die Geschwindigkeitskomponente normal zur Skelettlinie muss verschwinden. Bei Anströmung unter einem positivem Anstellwinkel ergibt sich eine Geschwindigkeitsdifferenz (Geschwindigkeitssprung) zwischen Profilober- und unterseite.



$$u_{\infty} \sin(\alpha - \beta) - u(x) \sin(\beta) + w(x) \cos(\beta) = 0$$

2. Auf der Profiloberseite : schwache Saugspitze, Ablöseblase mit Wiederanlegen der Strömung zur Hinterranke;
Auf der Profilunterseite : Staupunkt in der Nase, ebenfalls eine Saugspitze bedingt durch die starke Wölbung und den geringen Anstellwinkel;



3. Ähnlichkeitsparameter:

Reynoldssche Ähnlichkeit ($Re = \frac{\rho u l}{\eta}$)

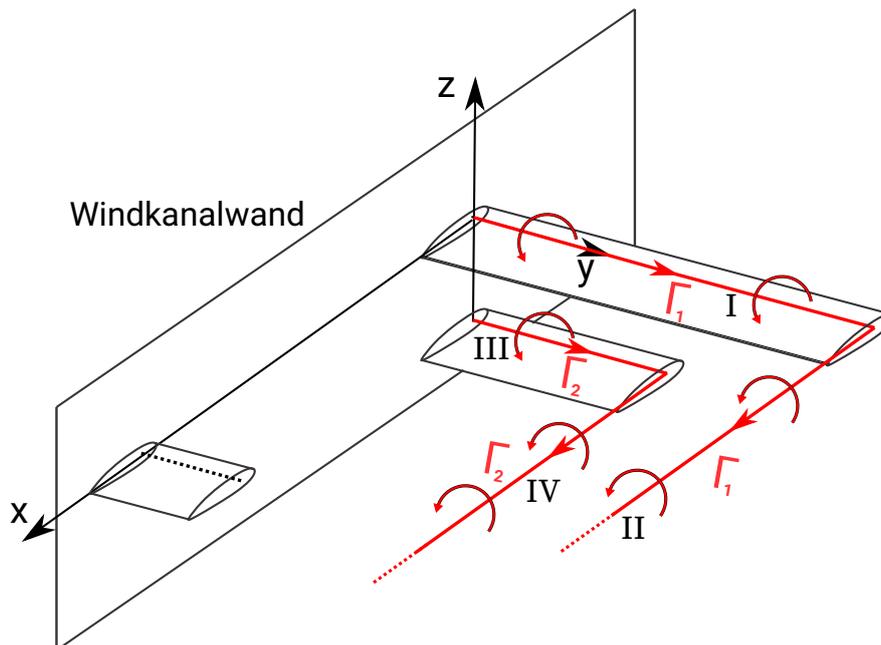
Machsche Ähnlichkeit ($Ma = \frac{u}{a}$)

Außerdem sind die Randbedingungen und die Geometrie für Modelle im Windkanal mit denen der umströmten Körper in Originalgröße gleich zu halten.

4. (a) In der komplexen z -Ebene ist ein Kreiszylinder mit dem Zentrum im Punkt $(x_0; 0)$ (horizontale Verschiebung um x_0) zu definieren.
- (b) $\overline{w_z(a)} = 0$ (Staupunkt am Zylinder in der HK in der komplexen z -Ebene)

Lösung 2. Aufgabe: Biot-Savart (19 Punkte) (LÖSUNG)

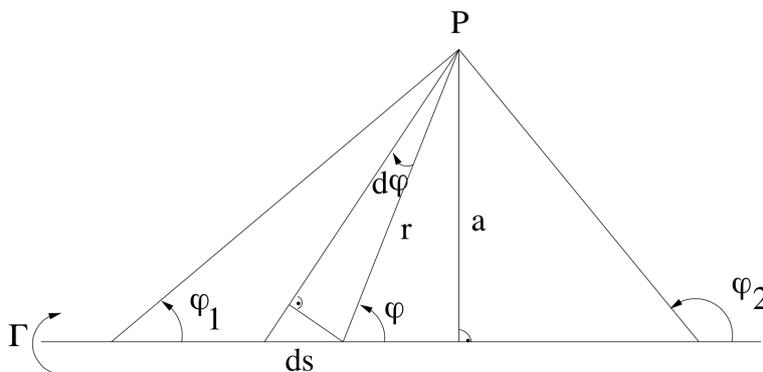
1. Wirbelsystem:



3. Helmholtz'scher Wirbelsatz:

Wirbellinien bilden geschlossene Kurven und enden nur auf einer Wand oder im Unendlichen.

2. Herleitungen:



Kreuzprodukt und Geometrie:

$$|\vec{r} \times d\vec{s}| = |\vec{r}| |d\vec{s}| \sin \varphi = a \cdot ds \quad (\text{Fläche Parallelogramm})$$

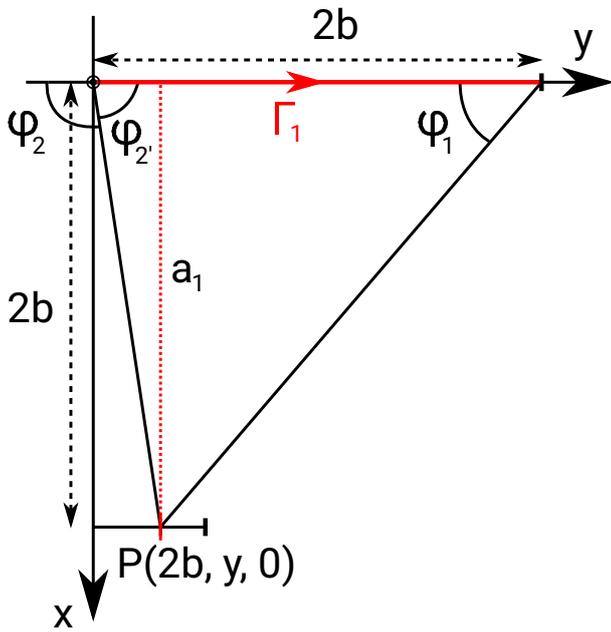
$$\sin(\varphi) = \frac{a}{r} = \frac{rd\varphi}{ds}$$

$$\rightarrow \frac{ds}{r^2} = \frac{d\varphi}{a} \quad \text{und} \quad a = r \sin(\varphi)$$

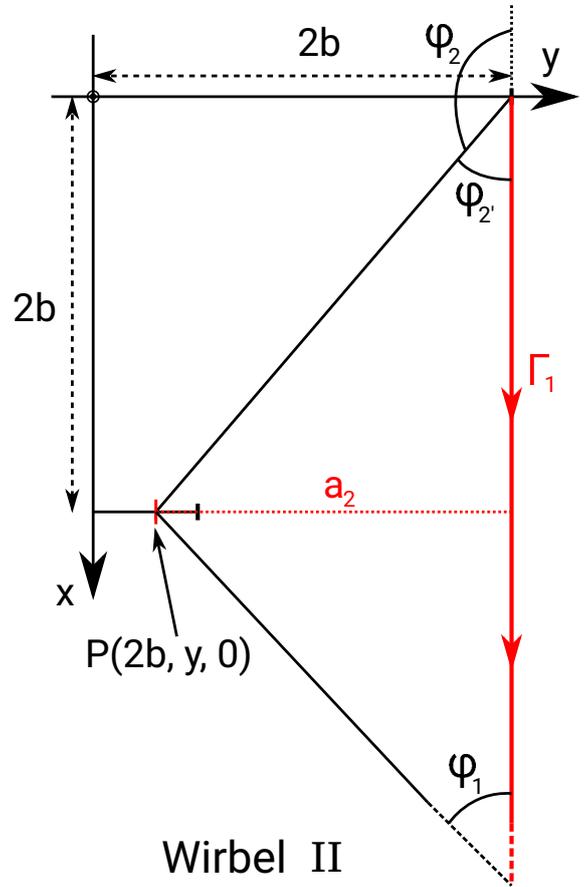
$$\begin{aligned} |\vec{u}_i| &= \frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{|\vec{r} \times d\vec{s}|}{|\vec{r}|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{a \cdot ds}{r^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{r \sin \varphi ds}{r^3} \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{\sin \varphi ds}{r^2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin \varphi d\varphi}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$|\vec{u}_i| = \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$$

3. Induzierte Geschwindigkeit u_z im Punkt $P(2b, y, 0)$ für $0 \leq y \leq b/2$:



Wirbel I



Wirbel II

gebundener Wirbel im Oberflügel (I):

$$|u_1| = \left| \frac{\Gamma_1}{4\pi a_1} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \right|, \quad a_1 = 2b$$

$$\cos(\varphi_1) = \frac{2b - y}{\sqrt{4b^2 + (2b - y)^2}}$$

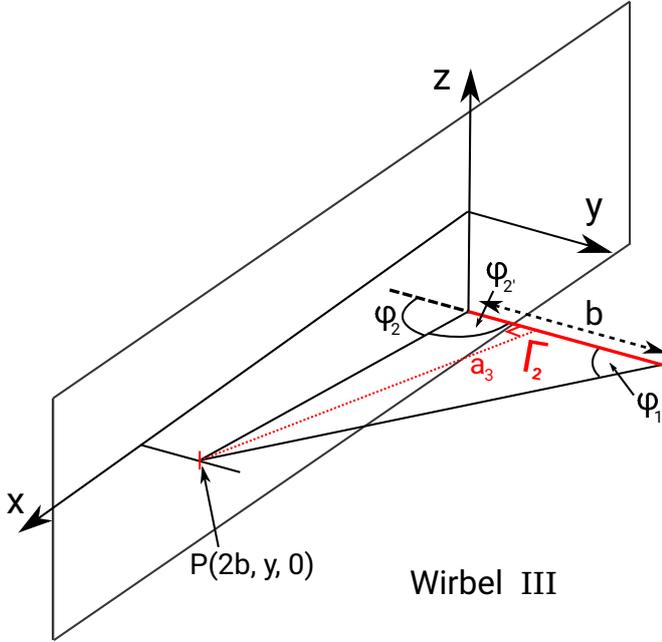
$$\cos(\varphi_2) = \cos(\pi - \varphi_{2'}) = -\cos(\varphi_{2'}) = \frac{-y}{\sqrt{y^2 + 4b^2}}$$

$$u_{1,z}(2b, y, 0) = -|u_1| = \frac{-\Gamma_1}{8\pi b} \left(\frac{2b - y}{\sqrt{4b^2 + (2b - y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4b^2}} \right)$$

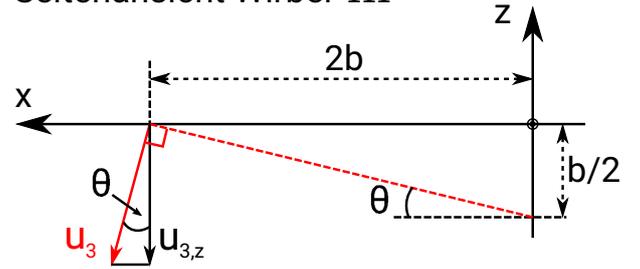
freier Wirbel am Oberflügel (II):

$$|u_2| = \left| \frac{\Gamma_1}{4\pi a_2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \right|, \quad a_2 = 2b - y$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 = 0 &\Rightarrow \cos(\varphi_1) = 1 \\ \cos(\varphi_2) &= -\cos(\varphi_{2'}) = \frac{-2b}{\sqrt{4b^2 + (2b - y)^2}} \\ u_{2,z}(2b, y, 0) &= -|u_2| = \frac{-\Gamma_1}{4\pi(2b - y)} \left(1 + \frac{2b}{\sqrt{4b^2 + (2b - y)^2}} \right)\end{aligned}$$



Seitenansicht Wirbel III

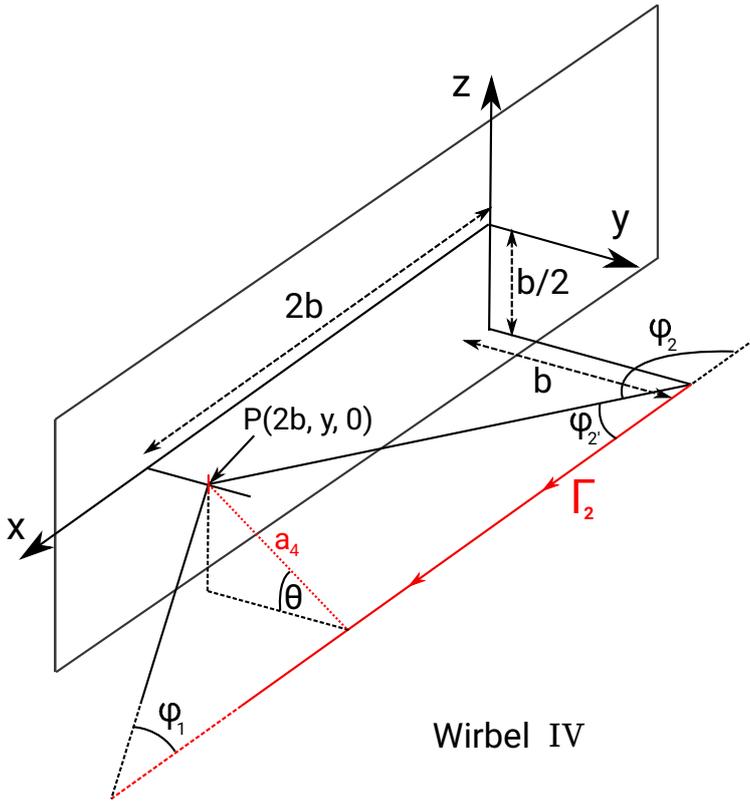


gebundener Wirbel im Unterflügel (III):

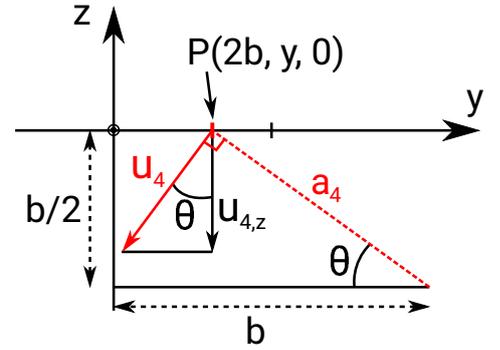
$$\begin{aligned}|u_3| &= \left| \frac{\Gamma_2}{4\pi a_3} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \right|, \quad a_3 = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 4b^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}b \\ \cos(\varphi_1) &= \frac{b - y}{\sqrt{a_3^2 + (b - y)^2}} = \frac{b - y}{\sqrt{\frac{17}{4}b^2 + (b - y)^2}} \\ \cos(\varphi_2) &= -\cos(\varphi_{2'}) = \frac{-y}{\sqrt{a_3^2 + y^2}} = \frac{-y}{\sqrt{\frac{17}{4}b^2 + y^2}} \\ \cos(\theta) &= \frac{2b}{a_3} \\ u_{3,z}(2b, y, 0) &= -\cos(\theta)|u_3| = -\frac{2b}{a_3} \left| \frac{\Gamma_2}{4\pi a_3} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \right| \\ &= -\frac{2\Gamma_2}{17\pi b} \left(\frac{b - y}{\sqrt{\frac{17}{4}b^2 + (b - y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{\frac{17}{4}b^2 + y^2}} \right)\end{aligned}$$

freier Wirbel am Unterflügel (IV):

$$|u_4| = \left| \frac{\Gamma_2}{4\pi a_4} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \right|, \quad a_4 = \sqrt{\frac{b^2}{4} + (b - y)^2}$$



Seitenansicht Wirbel IV



Wirbel IV

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 = 0 &\Rightarrow \cos(\varphi_1) = 1 \\
 \cos(\varphi_2) &= -\cos(\varphi_2') = \frac{-2b}{\sqrt{a_4^2 + 4b^2}} = \frac{-2b}{\sqrt{(b-y)^2 + \frac{17}{4}b^2}} \\
 \cos(\theta) &= \frac{b-y}{a_4} \\
 u_{4,z}(2b, y, 0) &= -\cos(\theta)|u_4| = -\frac{b-y}{a_4} \left| \frac{\Gamma_2}{4\pi a_4} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \right| \\
 &= \frac{(y-b)\Gamma_2}{\pi \left(b^2 + 4(b-y)^2 \right)} \left(1 + \frac{2b}{\sqrt{(b-y)^2 + \frac{17}{4}b^2}} \right)
 \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich die induzierte Geschwindigkeit u_z im Punkt $P(2b, y, 0)$ für $0 \leq y \leq b/2$ zu:

$$\begin{aligned}
 u_{ges,z}(2b, y, 0) &= u_{1,z} + u_{2,z} + u_{3,z} + u_{4,z} \\
 &= \frac{-\Gamma_1}{8\pi b} \left(\frac{2b-y}{\sqrt{4b^2 + (2b-y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 4b^2}} \right) \\
 &\quad - \frac{\Gamma_1}{4\pi(2b-y)} \left(1 + \frac{2b}{\sqrt{4b^2 + (2b-y)^2}} \right) \\
 &\quad - \frac{2\Gamma_2}{17\pi b} \left(\frac{b-y}{\sqrt{\frac{17}{4}b^2 + (b-y)^2}} + \frac{y}{\sqrt{\frac{17}{4}b^2 + y^2}} \right) \\
 &\quad + \frac{(y-b)\Gamma_2}{\pi \left(b^2 + 4(b-y)^2 \right)} \left(1 + \frac{2b}{\sqrt{(b-y)^2 + \frac{17}{4}b^2}} \right)
 \end{aligned}$$

Lösung 3. Aufgabe: Tropfentheorie (18 Punkte) (LÖSUNG)

1. Die partielle Ableitung der Transformationsregel ergibt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial X} = \frac{-2}{\sin(\varphi)}.$$

Aus der Transformation in φ und dem Hinweis für die Quellverteilung folgt

$$q(\varphi) = 2u_\infty \frac{\partial Z^{(t)}(\varphi)}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial X}.$$

Somit lässt sich die Steigung des Profiltropfens im vorderen Teil als

$$\frac{\partial Z_1^{(t)}(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{q_1(\varphi)}{2u_\infty} \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial X}}$$

formulieren. Es ergibt sich:

$$\frac{\partial Z_1^{(t)}(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{-A_1}{2} \cos(\varphi) - \frac{B_1}{2} \sin(\varphi) - \frac{D_1}{2} (1 + \cos(\varphi)) \sin(\varphi)$$

Aus der Integration nach φ folgt:

$$Z_1^{(t)}(\varphi) = \frac{-A_1}{2} \sin(\varphi) + \frac{B_1}{2} \cos(\varphi) + \frac{D_1}{4} (1 + \cos(\varphi))^2 + C_1$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten C_1 kann die Bedingung $Z_1^{(t)}(\pi) = 0$ verwendet werden. Somit ergibt sich:

$$Z_1^{(t)}(\varphi) = \frac{-A_1}{2} \sin(\varphi) + \frac{B_1}{2} \cos(\varphi) + \frac{D_1}{4} (1 + \cos(\varphi))^2 + \frac{B_1}{2}$$

bzw.

$$Z_1^{(t)}(\varphi) = \frac{-A_1}{2} \sin(\varphi) + 0.05 \cos(\varphi) + 0.0075 (1 + \cos(\varphi))^2 + 0.05$$

2. Aus $Z_1^{(t)}(\varphi)$ in Teil 1. lässt sich $Z_1^{(t)}(X)$ mit der gegebenen Transformation bestimmen. Die Transformationsregel im Hinweis kann zu

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &= 2\sqrt{X - X^2} \quad \text{und} \\ \cos(\varphi) &= 2X - 1 \end{aligned}$$

umformuliert werden. Es ergibt sich:

$$Z_1^{(t)}(X) = -A_1 \sqrt{X - X^2} + B_1 X + D_1 X^2.$$

Alternativ kann auch $q_1(\varphi)$ erst nach X transformiert werden und anschließend $Z_1^{(t)}(X)$ mit dem Hinweis für die Quellverteilung berechnet werden. Durch eine Rücktransformation in φ lässt sich auch $Z_1^{(t)}(\varphi)$ in Teil 1. bestimmen.

3. Für einen geschlossenen Profiltropfen muss Folgendes für die Profilstücke gelten:

Die Profilkontur muss an dem Übergang X_s stetig sein:

$$Z_1^{(t)}(X_s) = Z_2^{(t)}(X_s)$$

Die Schließungsbedingung verlangt, dass das Gesamtintegral der Quellverteilung über den Profiltropfen Null ergeben muss:

$$\int_0^{X_s} q_1(X)dx + \int_{X_s}^1 q_2(X)dx = 0$$

Für den gegebenen Profiltropfen folgt daraus:

$$Z_1^{(t)}(0.5) = Z_2^{(t)}(0.5)$$

Werden die einzelnen Profilstücke in die Bedingung eingesetzt ergibt sich:

$$Z_1^{(t)}(0.5) = -\frac{A_1}{2} + \frac{B_1}{2} + \frac{D_1}{4} = A_2 + \frac{B_2}{2} = Z_2^{(t)}(0.5)$$

woraus

$$A_1 = B_1 + \frac{D_1}{2} - 2A_2 - B_2 \quad \text{bzw. mit den gegebenen Konstanten} \quad A_1 = 0$$

folgt. Die Integralbedingung für den Profiltropfen ergibt

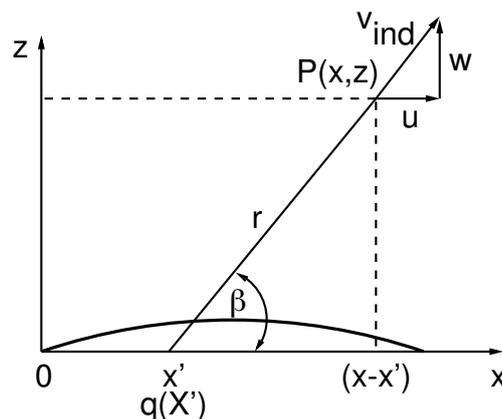
$$\int_0^{X_s} q_1(X)dx + \int_{X_s}^1 q_2(X)dx = Z_1^{(t)}(0.5) - Z_1^{(t)}(0) + Z_2^{(t)}(1) - Z_2^{(t)}(0.5).$$

Unter der Annahme, dass $Z_1^{(t)}(0) = 0$ und $Z_2^{(t)}(1) = 0$ gilt, ist die Integralbedingung allein durch die Stetigkeitsbedingung erfüllt!

4. Die induzierte Axialstörgeschwindigkeit lässt sich aus der Quell-/Senkenverteilung mit

$$dv_{ind} = \frac{q(x)dx}{2\pi r}$$

herleiten.



Es gilt:

$$r = \sqrt{Z^2 + (X - X')^2} \quad \text{sowie} \quad du_{ind} = \frac{X - X'}{r} dv_{ind}$$

somit folgt für die in Punkt P induzierte Axialstörgeschwindigkeit $u(X, Z)$:

$$u(X, Z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{q(X')(X - X')dX'}{Z^2 + (X - X')^2}$$

für dünne Profile $Z \rightarrow 0$ kann der Term umgeschrieben werden

$$u(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

bzw.

$$u_a(X) = \frac{u(X)}{u_\infty} = \frac{1}{2\pi u_\infty} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

Für den gegebenen Profiltropfen folgt:

$$u_a(X) = \frac{u(X)}{u_\infty} = \frac{1}{2\pi u_\infty} \left(\int_0^{0.5} q_1(X') \frac{dX'}{X - X'} + \int_{0.5}^1 q_2(X') \frac{dX'}{X - X'} \right)$$

Nach Einsetzen von q_1 und q_2 ergibt sich:

$$u_a(X) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{0.5} B_1 \frac{dX'}{X - X'} + \int_0^{0.5} 2D_1 X' \frac{dX'}{X - X'} + \int_{0.5}^1 (B_2 + 2D_2) \frac{dX'}{X - X'} - \int_{0.5}^1 8D_2 X' \frac{dX'}{X - X'} \right)$$

Nach der Integration

$$u_a(X) = \frac{1}{\pi} \left(B_1 [-\ln |X - X'|]_0^{0.5} + (B_2 + 2D_2) [-\ln |X - X'|]_{0.5}^1 \right. \\ \left. + 2D_1 [-X' - X \ln |X - X'|]_0^{0.5} - 8D_2 [-X' - X \ln |X - X'|]_{0.5}^1 \right)$$

und einer Vereinfachung folgt

$$u_a(X) = \frac{1}{\pi} \left(B_1 \ln \left| \frac{X}{X - 0.5} \right| + (B_2 + 2D_2) \ln \left| \frac{X - 1}{X - 0.5} \right| \right. \\ \left. + 2D_1 \left[0.5 + X \ln \left| \frac{X - 0.5}{X} \right| \right] - 8D_2 \left[-0.5 + X \ln \left| \frac{X - 1}{X - 0.5} \right| \right] \right)$$

5. Das Dickenmaximum des kombinierten Profils befindet sich im hinteren Teil des Profils. Es kann dazu gezeigt werden, dass sowohl die Steigung $\frac{\partial Z_1^{(t)}(\varphi)}{\partial \varphi}$ als auch die Quellstärke $q_1(\varphi)$ im vorderen Teil stets positiv ist:

$$q_1(\varphi) = 2u_\infty (B_1 + D_1(1 + \cos(\varphi)))$$

Mit $B_1 > 0$, $D_1 > 0$ und $\cos(\varphi) < 1$ muss stets $q_1(\varphi) > 0$ gelten.