

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik I

18. 02. 2022

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

Klausur Aerodynamik I

Fragenteil, Konforme Abbildung, Tropfen- und Skelett-Theorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

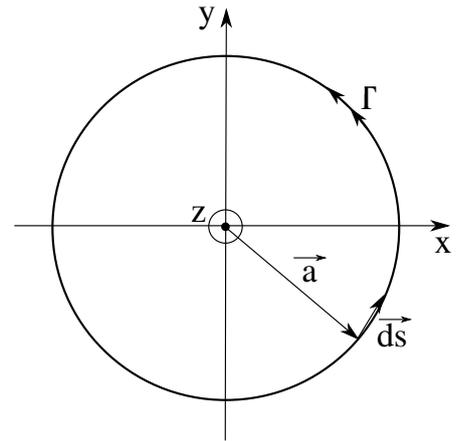
- $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x}{ax + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax + b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (13 Punkte)

1. Leiten Sie aus der allgemeinen Form des Biot-Savart Gesetzes:

$$d\vec{u}_i = -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\vec{a} \times d\vec{s}}{|\vec{a}|^3},$$

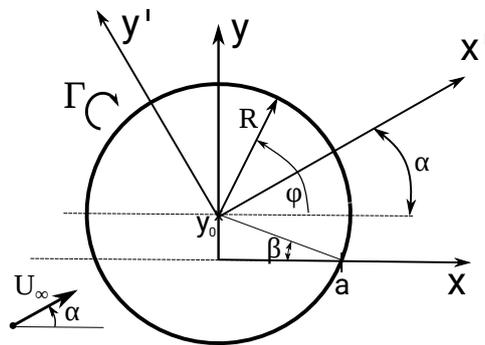
den induzierten Geschwindigkeitsbetrag im Mittelpunkt eines Kreiswirbels (siehe Abbildung rechts) in Abhängigkeit des Radius R und der Zirkulation Γ her.



2. Wozu dient die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel und was sind die Voraussetzungen für ihre Gültigkeit? Wenden Sie die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel auf den Auftriebsgradienten $\partial c_l / \partial \alpha$ einer ebenen Platte an und stellen Sie diesen Verlauf graphisch dar. Geben Sie die Werte für $\partial c_l / \partial \alpha$ bei entsprechenden Vergleichsmachzahlen an und markieren Sie die Gültigkeitsbereiche in der Skizze.
3. Erläutern Sie die Kutta'sche Abflussbedingung anhand eines Tragflügelprofils mit scharfer Hinterkante. Welche Relevanz hat diese für den Auftrieb?
4. Erklären Sie ausführlich die Entstehung des sogenannten Anfahrwirbels. Gehen Sie dabei auch auf den Satz von Thomson ein. Bei welchen Vorgängen tritt der Anfahrwirbel auf?

2. Aufgabe: Konforme Abbildung (17 Punkte)

Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius R und dem Mittelpunkt $z_0 = iy_0$, welcher sich in einer Parallelströmung mit der Zirkulation Γ befindet. Dabei bildet die Anströmgeschwindigkeit U_∞ den Winkel α mit der x -Achse.



Mit Hilfe der Abbildungsfunktion $\zeta(z)$ von Zhukhovski kann der Kreis in die ζ -Ebene übertragen werden:

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

- Beschreiben Sie die Auswirkung der y -Verschiebung des Bildkreises auf das Zhukhovski Profil in der ζ -Ebene. Was würde eine zusätzliche Verschiebung in x -Richtung bewirken? Skizzieren Sie die drei verschiedenartigen Körperformen in der ζ -Ebene, die sich bei den unterschiedlichen Verschiebungen (x , y , x - y) des Bildkreises ergeben können. Kennzeichnen Sie die charakteristischen Maße und Positionen der Profile.
- Stellen Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ für den gegebenen Fall auf.
- Berechnen Sie die konjugiert komplexe Geschwindigkeitsverteilung $\bar{w}_z(z)$.
- Wie lautet die Kutta'sche Abflussbedingung in der ζ -Ebene bzw. in der z -Ebene? Bestimmen Sie anschließend die Zirkulation Γ als Funktion der gegebenen Größen, so dass die Kutta'sche Bedingung erfüllt wird.
- Bestimmen Sie die komplexe Kraft F_z auf das Profil in der z -Ebene mit Hilfe der 1. Blasius'schen Formel:

$$F_z = \frac{i\rho_\infty}{2} \oint \bar{w}_z(z)^2 dz$$

Hinweis: Verwenden Sie nur die für das Residuentheorem bzw. die Kraftberechnung notwendigen Terme und folgende Vereinfachung:

$$\frac{1}{1-c} \approx 1+c, \quad \frac{1}{z-z_0} \approx \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2}, \quad \frac{1}{(z-z_0)^2} \approx \frac{1}{z^2} + \frac{2z_0}{z^3}$$

- Bestimmen Sie den Auftriebsbeiwert des Profils bezogen auf die Bezugslänge l in Abhängigkeit von α und β .

Gegeben: $R, U_\infty, \rho_\infty, \alpha, \beta, l, 0 < y_0 \ll R$

Hinweise:

Potentialströmungen:

Translationsströmung: $F(z') = U_\infty z'$

Dipol: $F(z') = \frac{M}{2\pi z'}$ mit $M = 2\pi U_\infty R^2$

Potentialwirbel: $F(z') = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$

Residuentheorem:

$$\oint f(z) dz = i2\pi B_1 \quad \text{für} \quad f(z) = B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \dots + \frac{B_n}{z^n} + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n$$

3. Aufgabe: Tropfen- und Skelett-Theorie (20 Punkte)

Betrachtet wird ein einzelnes Seitenleitwerk des in Abbildung 1 dargestellten Flugzeugs. Es sollen sowohl die Verdrängungseffekte des Leitwerks im Geradeausflug als auch die Leitwerkskräfte im Schiebeflug untersucht werden. Im Rahmen dieser Aufgabe können 3D-Effekte vernachlässigt und die Anströmung als ungestört angenommen werden.



Abbildung 1: Blackburn Beverley

1. Welche Methode eignet sich für die Berechnung der Verdrängungseffekte und welche für die Berechnung der Leitwerkskräfte. Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Nennen Sie die notwendigen Voraussetzungen, damit die genannten Methoden anwendbar sind.

Das Flugzeug befindet sich zunächst mit einer Geschwindigkeit von u_∞ im schiebewinkelfreien Horizontalflug. Das Profil des Leitwerks lässt sich durch folgende Konturgleichung beschreiben:

$$Z^{(t)}(X) = A\sqrt{X - X^2} (1 - X^2), \quad X = \frac{x}{l}, \quad Z^{(t)} = \frac{z^{(t)}}{l}, \quad X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi)), \quad X \in [0, 1]$$

3. Skizzieren Sie qualitativ das Stromlinienfeld, welches sich für die hier zu verwendende Methode ergibt.
4. Transformieren Sie die Profilkontur in das φ -Koordinatensystem und bestimmen Sie die Koeffizienten des Fourierreihenansatzes nach Riegels:

$$Z^{(t)}(\varphi) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\varphi)$$

5. Bestimmen Sie mithilfe des Riegelsfaktors die axiale Geschwindigkeit u_k auf der Kontur in Abhängigkeit von φ .

Das Flugzeug wird nun unter dem Schiebewinkel β angeströmt und das Leitwerk als ebene Platte angenähert.

6. Skizzieren Sie qualitativ das Stromlinienfeld, welches sich für die nun zu verwendende Methode ergibt. Geben Sie ein Koordinatensystem an und tragen Sie den Winkel β ein.
7. Berechnen Sie den Kraftbeiwert des Leitwerks in Abhängigkeit von β . Formulieren Sie dazu zunächst die kinematische Randbedingung $\frac{w}{u_\infty} = \frac{dZ^{(s)}}{dX} - \alpha$ für das gegebene Problem. Bestimmen Sie daraus die Koeffizienten des Birnbaum-Ackermannschen Reihenansatzes.
8. Diskutieren Sie in wenigen Sätzen die Grenzen der von Ihnen angewandten Methoden mit Bezug auf das in Abbildung 1 dargestellte Flugzeug.

Gegeben: u_∞, A, β

Hinweise:

$$\sin^3(\varphi) = \frac{1}{4} (3\sin(\varphi) - \sin(3\varphi))$$

$$u(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

$$\kappa(X) = \sqrt{1 + \left(\frac{dZ^{(t)}(X)}{dX} \right)^2}$$

$$\gamma(\varphi) = 2u_\infty \left(A_0 \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \sum_{n=1}^N A_n \sin(n\varphi) \right)$$

$$\frac{w(\varphi)}{u_\infty} = -A_0 - \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\varphi)$$

$$c_p = \mp \frac{\gamma(\varphi)}{u_\infty}$$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (13 Punkte)

1. Herleitung:

mit $|\vec{a}| = \text{konst.} = R$ folgt:

$$d\vec{u}_i = -\frac{\Gamma}{4\pi R^3} \cdot \vec{a} \times d\vec{s}.$$

Für den Betrag kann das Kreuzprodukt umgeschrieben werden mit $|\vec{a} \times d\vec{s}| = R \cdot ||d\vec{s}|| \cdot \sin(\alpha)$ wobei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist. Somit ergibt sich durch die Intergration entlang des Kreises

$$|\vec{u}_i| = \left| \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \oint ||d\vec{s}|| \right|.$$

Mit der Transformation nach φ durch $||d\vec{s}|| = d\varphi R$ ergibt sich

$$|\vec{u}_i| = \left| \frac{\Gamma}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\varphi \right|.$$

Das Integral löst sich mit Einsetzen der Grenzen zu

$$|\vec{u}_i| = \left| \frac{\Gamma}{2R} \right|.$$

Alternativ kann das Linienintegral über den Kreis verwendet werden, aus dem sich direkt der Kreisumfang

$$\oint ||d\vec{s}|| = 2\pi R$$

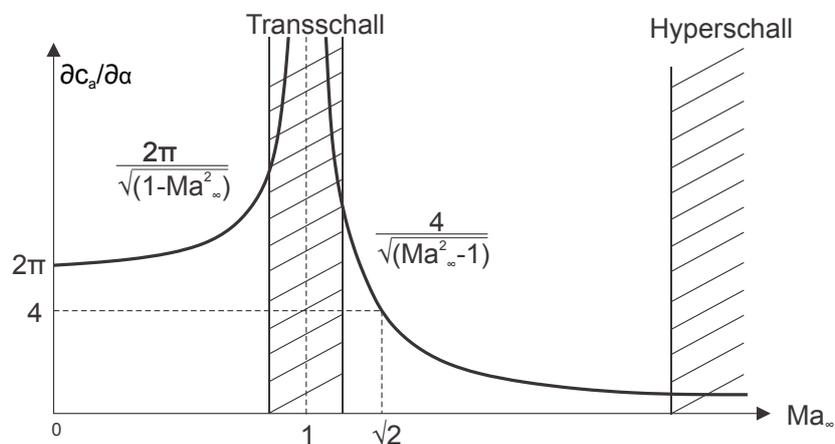
ergibt.

2. Die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel ist eine Korrektur für inkompressible Daten bezüglich der Kompressibilitätseffekte. Voraussetzungen sind schlanke Körper, geringe Anstellwinkel, reibungsfreie und drehungsfreie Strömung. Weiterhin ist die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel lediglich für $Ma_\infty \lesssim 0.7$ bzw. im Bereich $1.2 \lesssim Ma_\infty \lesssim 5$ gültig.

Nach der Prandtl-Glauert-Ackeret Regel wird der Auftriebsanstieg für eine kompressible Strömung aus der Skalierung der Steigung des Auftriebsbeiwertes bei Vergleichsmachzahlen bestimmt.

Vergleichsmachzahlen:

$Ma_v = 0$ für $Ma_\infty \lesssim 0.7$ mit $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}|_{Ma_v=0} = 2\pi$ (aus der Theorie der konformen Abbildungen) $Ma_v = \sqrt{2}$ für $1.2 \lesssim Ma_\infty \lesssim 5$ mit $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}|_{Ma_v=\sqrt{2}} = 4$ (aus der Theorie dünner Flügel) Der Skalierungsfaktor ist $\frac{1}{\sqrt{|1-Ma_\infty^2|}}$.



3. Die Zirkulation um ein Tragflügelprofil stellt sich derart ein, dass keine Umströmung der Hinterkante eintritt. Das Fluid strömt an der scharfen Hinterkante glatt ab.

Wird ein angestellter Tragflügel ohne Zirkulation umströmt, so liegt der hintere Staupunkt auf der Oberseite des Profils. Die Kuttasche Abflussbedingung wird nicht erfüllt. Die Zirkulation verschiebt den Staupunkt. Theoretisch kann sich eine beliebige Zirkulation einstellen. Praktisch wird sich die Zirkulation so einstellen, dass der Staupunkt genau auf der Hinterkante liegt. Nach dem Satz von Kutta-Zhukhovski ist der Auftrieb proportional zur Zirkulation.

4. Wird ein zuerst ruhendes Profil bewegt, so bildet sich anfänglich eine Strömung aus, bei der der hintere Staupunkt auf der Oberseite des Profils liegt. Die Hinterkante des Profils wird mit einer sehr hohen Geschwindigkeit umströmt. Durch den Einfluss der Reibung bildet sich innerhalb sehr kurzer Zeit eine Grenzschicht aus und die kinetische Energie reicht nicht mehr aus, den Druckanstieg zwischen Hinterkante und hinterem Staupunkt zu überwinden. Die Strömung löst ab. Es bildet sich eine Scherschicht, die sich aufrollt und an der Stelle verharrt, an der das Profil in Bewegung gesetzt worden ist. Dieser Wirbel wird Anfahrwirbel genannt. Betrachtet man eine Kontrollfläche, die sowohl die Anfangs- als auch die Endposition des Profils beinhaltet, so muss nach dem Satz von Thomson die Zirkulation innerhalb dieser Fläche Null sein, da sie zu Beginn ebenfalls Null war ($d\Gamma/dt = 0$ ist für eine barotrope, reibungsfreie Strömung mit konservativen Volumenkräften gültig).

Anfahrwirbel entstehen bei der Änderung der Geschwindigkeit oder des Anstellwinkels.

Lösung 2. Aufgabe: Konforme Abbildung (17 Punkte) (LÖSUNG)

1. Auswirkung der y -Verschiebung: dünne, gewölbte Skelettlinie in der ζ -Ebene

Zusätzliche x -Verschiebung: Skelettlinie wird zum gewölbten Profil mit endlicher Dicke in der ζ -Ebene

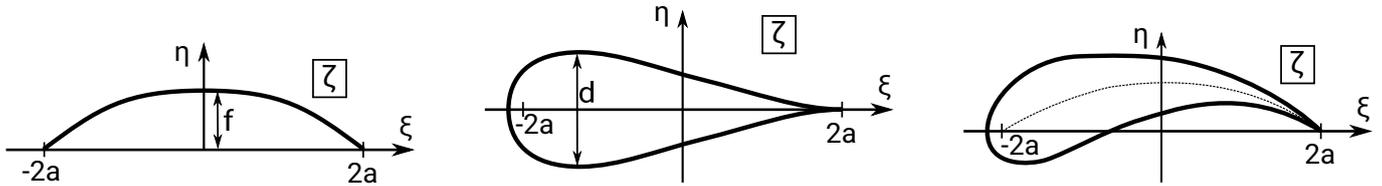


Abbildung 2: *

Abbildung: Körperformen in ζ -Ebene: 1) y -Verschiebung: dünne, gewölbte Skelettlinie 2) x -Verschiebung: symmetrischer Profiltropfen mit endlicher Dicke 3) x - y -Verschiebung: Profil mit Wölbung und Dicke

2. komplexe Potentialfunktion $F(z')$:

Kombination von Anströmung, Dipol und Wirbel

$$F(z') = U_\infty z' + \frac{U_\infty R^2}{z'} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$$

Transformation in z :

um $z_0 = iy_0$ verschoben und um α gedreht da der Dipol senkrecht zur Anströmung steht.

$$z = R e^{i\varphi} + z_0 = R e^{i(\varphi'+\alpha)} + z_0 = R e^{i\varphi'} e^{i\alpha} + z_0 = z' e^{i\alpha} + z_0$$

$$z' = (z - z_0) e^{-i\alpha}$$

Potentialfunktion $F(z)$:

$$F(z) = U_\infty e^{-i\alpha} (z - iy_0) + \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{z - iy_0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - iy_0) + \text{const}$$

3. komplex konjugierte Geschwindigkeitsfunktion $\bar{w}_z(z)$:

$$\bar{w}_z(z) = \frac{dF(z)}{dz} = U_\infty e^{-i\alpha} - \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{(z - iy_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z - iy_0)}$$

4. Die Kutta'sche Abflussbedingung besagt, dass es an einer unendlich dünnen Hinterkante nicht zur Umströmung kommt und das Fluid glatt abfließt. In der ζ -Ebene muss somit die Geschwindigkeit an der Hinterkante $\bar{w}_\zeta(z = a)$ endlich sein. Betrachtet man jedoch den Kreiszyylinder in der z -Ebene, so befindet sich an der Stelle $z = a$ ein Staupunkt, womit die Bedingung $\bar{w}_z(z = a) = 0$ erfüllt sein muss.

Mit $a - iy_0 = R \cdot e^{-i\beta}$ an der Hinterkante folgt:

$$\bar{w}_z(z = a) = \left(U_\infty e^{-i\alpha} - U_\infty e^{i\alpha} e^{i2\beta} + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{i\beta} \right) = 0$$

$$\Rightarrow i\Gamma = -2\pi R U_\infty e^{-i\alpha} e^{-i\beta} + 2\pi R U_\infty e^{i\alpha} e^{i\beta}$$

$$i\Gamma = 2\pi R U_\infty \left(-e^{-i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha+\beta)} \right)$$

$$i\Gamma = 2\pi R U_\infty \left(-\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) \right)$$

$$\Gamma = 4\pi R U_\infty \sin(\alpha + \beta)$$

5. Bestimmung der komplexen Kraft:

$$F_z = \frac{i\rho_\infty}{2} \oint \bar{w}_z(z)^2 dz$$

Dabei gilt:

$$\bar{w}_z^2(z) = \left(U_\infty e^{-i\alpha} - \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{(z - z_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z - z_0)} \right)^2$$

Mit den Hinweisen aus der Aufgabenstellung und den Abkürzungen

$$A_0 = U_\infty e^{-i\alpha} \quad A_1 = \frac{i\Gamma}{2\pi} \quad A_2 = -U_\infty e^{i\alpha} R^2$$

folgt:

$$\begin{aligned} \bar{w}_z^2(z) &= \left(A_0 + A_1 \left(\frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} \right) + A_2 \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{2z_0}{z} \right) \right)^2 \\ &= \left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_1 z_0}{z^2} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{2A_2 z_0}{z^3} \right)^2 \\ &= A_0^2 + \frac{2A_0 A_1}{z} + \frac{2(A_0 A_1 z_0 + A_0 A_2) + A_1^2}{z^2} + \mathcal{O}(z^{-3}) \end{aligned}$$

Damit folgt für die komplexe Kraft:

$$F_z = i \frac{\rho_\infty}{2} \oint \left(A_0^2 + \frac{2A_0 A_1}{z} + \frac{2(A_0 A_1 z_0 + A_0 A_2) + A_1^2}{z^2} + \mathcal{O}(z^{-3}) \right) dz$$

Integration unter Beachtung des Residuentheorems (nur Term mit $\frac{1}{z}$ relevant für Integration) liefert dann:

$$\begin{aligned} F_z &= i \frac{\rho_\infty}{2} (2\pi i) (2A_0 A_1) = -\rho_\infty \pi (2A_0 A_1) \\ &= -2\rho_\infty \pi U_\infty e^{-i\alpha} \frac{i\Gamma}{2\pi} = -i\rho_\infty U_\infty \Gamma e^{-i\alpha} \\ &= -i4\pi R \rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) e^{-i\alpha} \\ &= 4\pi R \rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

6. Bestimmung des Auftriebs:

$$L = |F_z| = |4\pi R \rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})}| = 4\pi R \rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \quad \text{für } 0 \leq \alpha, \beta \ll 1$$

Bestimmung des Auftriebsbeiwertes (Bezugslänge l):

$$c_l = \frac{L}{\frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 l} = \frac{4\pi R \rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta)}{\frac{\rho_\infty}{2} U_\infty^2 l} = 8\pi \frac{R}{l} \sin(\alpha + \beta)$$

Lösung 3. Aufgabe: Tropfen- und Skelett-Theorie (20 Punkte) (LÖSUNG)

1. Verdrängungseffekte → Tropfentheorie
Leitwerkskräfte → Skeletttheorie

Die Tropfentheorie setzt eine parallele Anströmung voraus und kann daher im Schiebeflug nicht angewendet werden. Die Skeletttheorie hingegen erlaubt auch die Betrachtung angestellter Profile. Da das Profil jedoch auf die Skelettlinie reduziert wird, ist die Skeletttheorie nicht in der Lage Verdrängungseffekte zu berücksichtigen.

2. Tropfentheorie und Skeletttheorie:
 - Potentialströmung (drehungsfrei, reibungsfrei, inkompressibel)
 - schlankes Profil / kleine Störungen

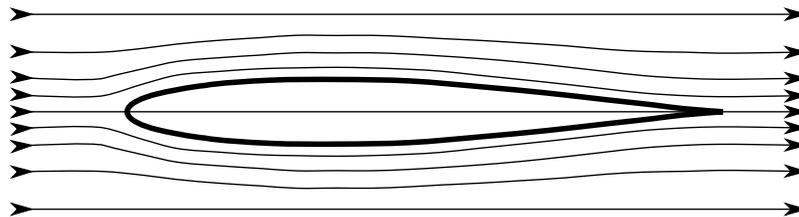
nur Tropfentheorie:

- $\alpha = 0$ (siehe 1.)
- symmetrisches Profil

nur Skeletttheorie:

- kleine Anstellwinkel (siehe 1.)
- geringe Wölbung

3. Stromlinienfeld unter Verwendung der Tropfentheorie:



- 4.

$$Z^{(t)}(X) = A\sqrt{X - X^2} (1 - X^2)$$

$$\begin{aligned} Z^{(t)}(\varphi) &= A\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi)) - \frac{1}{4}(1 + 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi))} \left[1 - \frac{1}{4}(1 + 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi)) \right] \\ &= A\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2(\varphi)} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\varphi) + \frac{1}{4}(1 - \cos^2(\varphi)) \right] \\ &= \frac{A}{4} \sin(\varphi) \left[1 - \cos(\varphi) + \frac{1}{2}\sin^2(\varphi) \right] \\ &= \frac{A}{4} \left[\sin(\varphi) - \sin(\varphi)\cos(\varphi) + \frac{1}{2}\sin^3(\varphi) \right] \\ &= \frac{A}{4} \left[\sin(\varphi) - \frac{1}{2}\sin(2\varphi) + \frac{1}{8}(3\sin(\varphi) - \sin(3\varphi)) \right] \\ &= \frac{A}{4} \left[\frac{11}{8}\sin(\varphi) - \frac{1}{2}\sin(2\varphi) - \frac{1}{8}\sin(3\varphi) \right] \\ &= \frac{A}{2} \left[\frac{11}{16}\sin(\varphi) - \frac{1}{4}\sin(2\varphi) - \frac{1}{16}\sin(3\varphi) \right] \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Koeffizienten des Fourierreihenansatzes nach Riegels zu folgenden Werten bestimmen:

$$b_1 = \frac{11}{16}A, \quad b_2 = -\frac{1}{4}A, \quad b_3 = -\frac{1}{16}A, \quad b_n = 0 \quad \forall n > 3$$

5.

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{\kappa} (u_\infty + u) \\ &= \frac{1}{\kappa} \left(u_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'} \right) \\ &= \frac{u_\infty}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dZ}{dX'} \frac{dX'}{X - X'} \right) \\ &= \frac{u_\infty}{\kappa} \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{d\varphi'} \frac{d\varphi'}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} \right) \end{aligned}$$

Mit dem Fourierreihenansatz nach Riegels gilt:

$$\frac{dZ}{d\varphi'} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n n \cos(n\varphi')$$

Damit folgt:

$$u_k = \frac{u_\infty}{\kappa} \left(1 - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N b_n n \int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} \right)$$

Unter Verwendung des Glauert-Integrals ergibt sich:

$$u_k = \frac{u_\infty}{\kappa} \left(1 + \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)} \right)$$

Für die Transformation des Riegelsfaktors in das φ -Koordinatensystem gilt:

$$\kappa = \sqrt{1 + \left(\frac{dZ}{dX} \right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dZ}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dX} \right)^2}$$

$$\frac{dX}{d\varphi} = -\frac{1}{2} \sin(\varphi) \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dX} = \frac{-2}{\sin(\varphi)}$$

Unter Verwendung des Fourierreihenansatzes nach Riegels folgt:

$$\kappa = \sqrt{1 + \left(\frac{-2}{\sin(\varphi)} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n n \cos(n\varphi) \right)^2}$$

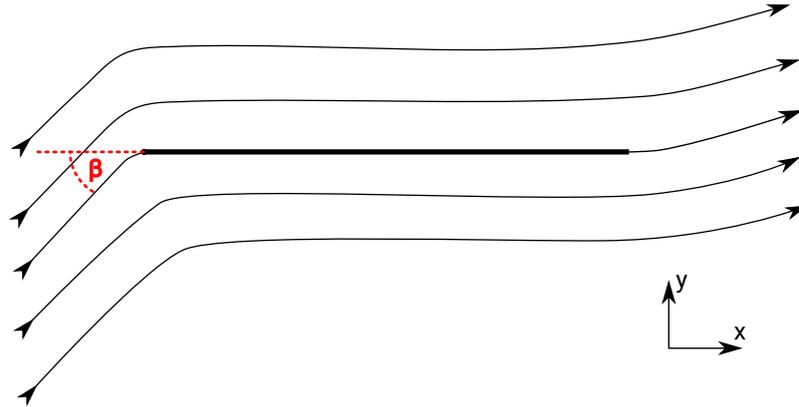
Damit ergibt sich die Geschwindigkeit auf der Kontur zu:

$$u_k(\varphi) = \frac{u_\infty}{\sqrt{1 + \left(\frac{-2}{\sin(\varphi)} \right)^2 \left(\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n n \cos(n\varphi) \right)^2}} \left(1 + \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin(\varphi)} \right)$$

Einsetzen der Fourierkoeffizienten liefert:

$$u_k(\varphi) = \frac{u_\infty}{\sqrt{1 + \left(\frac{A}{\sin(\varphi)} \right)^2 \left(\frac{11}{16} \cos(\varphi) - \frac{1}{2} \cos(2\varphi) - \frac{3}{16} \cos(3\varphi) \right)^2}} \left(1 + \frac{11A}{16} - \frac{A \sin(2\varphi)}{2 \sin(\varphi)} - \frac{3A \sin(3\varphi)}{16 \sin(\varphi)} \right)$$

6. Stromlinienfeld nach der Skeletttheorie bei Anströmung unter dem Winkel β :



7. Die kinematische Randbedingung mit dem Schiebewinkel β lautet:

$$\frac{dZ}{dX} = \beta + \frac{w}{u_\infty}$$

Für die Skelettlinie der ebenen Platte gilt $\frac{dZ}{dX} = 0$:

$$\beta = -\frac{w}{u_\infty}$$

Für die Koeffizienten der Zirkulationsverteilung nach Birnbaum-Ackermann gilt:

$$A_n = 0 \quad \forall \quad n > 0$$

$$\rightarrow \gamma(\varphi) = 2A_0 u_\infty \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Aus dem Hinweis folgt:

$$\frac{w}{u_\infty} = -A_0$$

Einsetzen in die kinematische Randbedingung liefert:

$$A_0 = \beta$$

Damit ist die Zirkulationsverteilung bekannt und der Druckbeiwert auf beiden Seiten des Leitwerks kann bestimmt werden:

$$c_p(\varphi) = \mp \frac{\gamma(\varphi)}{u_\infty} = \mp 2\beta \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Der Kraftbeiwert ergibt sich aus dem Integral über die Druckdifferenz:

$$c_Y = \int_0^1 \Delta c_p(X) dX$$

$$= \int_\pi^0 \Delta c_p(\varphi) \frac{dX}{d\varphi} d\varphi$$

$$= \int_\pi^0 4\beta \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \frac{dX}{d\varphi} d\varphi$$

$$= \int_0^\pi 2\beta \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin(\varphi) d\varphi$$

Mit dem Additionstheorem $\tan(\frac{\varphi}{2}) \sin(\varphi) = 1 - \cos(\varphi)$ folgt:

$$\begin{aligned} c_Y &= 2\beta \int_0^\pi (1 - \cos(\varphi)) d\varphi \\ &= 2\pi\beta \end{aligned}$$

8. Sowohl die Skelett- als auch die Tropfentheorie (in der bekannten Form) behandeln lediglich quasi-zweidimensionale Probleme. Bei dem Leitwerk des abgebildeten Flugzeugs handelt es sich jedoch um einen Körper endlicher Tiefe. 3D-Effekte wie beispielsweise Randwirbel können daher nicht berücksichtigt werden. Auch die Interaktion des Seitenleitwerks mit dem Höhenleitwerk sowie Störungen in der Anströmung durch andere Teile des Flugzeugs können durch die verwendeten Methoden nicht abgebildet werden.