....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik II“

28. 03. 2022

1. Aufgabe

a)
- Einflussgrößen: $\rho_L, T_L, L_L, u_L, W_L, R_L, \eta_L$
- Grunddimensionen: m, s, kg, K
- wiederkehrende Variablen: ρ_L, T_L, L_L, u_L
- Kennzahlen ermitteln:

	ρ_L	T_L	L_L	u_L	W_L	R_L	η_L
m	-3	0	1	1	1	2	-1
s	0	0	0	-1	-2	-2	-1
kg	1	0	0	0	1	0	1
K	0	1	0	0	0	-1	0
kg	1	0	0	0	1	0	1
K	0	1	0	0	0	-1	0
m+3kg+s	0	0	1	0	2	0	1
-s	0	0	0	1	2	2	1

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \Pi_1 &= \frac{W_L}{\rho_L L_L^2 u_L^2} \rightarrow \frac{W_L}{\frac{\rho_L}{2} A_L u_L^2} = c_{w,L} \quad \text{(Widerstandsbeiwert)} \\
\Pi_2 &= \frac{R_L T_L}{u_L^2} \rightarrow \frac{\gamma_L R_L T_L}{u_L^2} = \frac{1}{Ma_L^2} \quad \text{(Machzahl)} \\
\Pi_3 &= \frac{\eta_L}{\rho_L L_L u_L} = \frac{1}{Re_L} \quad \text{(Reynoldszahl)}
\end{aligned}$$

b) Widerstandsbeiwert $c_w = \dfrac{W}{\frac{\rho}{2} A u^2}$ als dimensionslose Kenngröße, die in Original und Experiment gleich gehalten wird (alternativ kann auch A durch L^2 ersetzt werden).

$$\begin{aligned}
c_{w,L} &= c_{w,W} \\
\frac{W_L}{\frac{\rho_L}{2} u_L^2 A_L} &= \frac{W_W}{\frac{\rho_W}{2} u_W^2 A_W} \\
W_L &= W_W \frac{\rho_L}{\rho_W} \frac{u_L^2}{u_W^2} \frac{A_L}{A_W}
\end{aligned}$$

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten wird über die Reynoldszahl ermittelt.

$$\begin{aligned}
Re_L &= Re_W \\
\frac{\rho_L u_L L_L}{\eta_L} &= \frac{\rho_W u_W L_W}{\eta_W} \\
\frac{u_L}{u_W} &= \frac{\rho_W}{\rho_L} \frac{L_W}{L_L} \frac{\eta_L}{\eta_W}
\end{aligned}$$

mit $\dfrac{L_W}{L_L} = \dfrac{1}{100}$ und $\dfrac{A_L}{A_W} \sim \left(\dfrac{L_L}{L_W}\right)^2 = 100^2$ folgt

$$W_L = W_W \frac{\rho_L}{\rho_W} \frac{\rho_W^2}{\rho_L^2} \frac{L_W^2}{L_L^2} \frac{\eta_L^2}{\eta_W^2} \frac{A_L}{A_W} = W_W \frac{\rho_W}{\rho_L} \frac{\eta_L^2}{\eta_W^2}$$

c) Die Schallgeschwindigkeit im Experiment wird über die Machzahl ermittelt.

$$\begin{aligned} Ma_L &= Ma_W \\ \frac{u_L}{\sqrt{\gamma_L R_L T_L}} &= \frac{u_W}{c_W} \\ c_W &= \frac{u_W}{u_L}\sqrt{\gamma_L R_L T_L} \end{aligned}$$

Mit dem Geschwindigkeitsverhältnis aus Teil b) folgt:

$$c_W = \frac{\rho_L}{\rho_W}\frac{L_L}{L_W}\frac{\eta_W}{\eta_L}\sqrt{\gamma_L R_L T_L} = 100\frac{\rho_L}{\rho_W}\frac{\eta_W}{\eta_L}\sqrt{\gamma_L R_L T_L}$$

Die Wassertemperatur wird über den gegebenen Zusammenhang zwischen Schallgeschwindigkeit und Temperatur berechnet.

$$\begin{aligned} c_W &= \frac{1}{\sqrt{\rho_W\left(K_1 - K_2 T_W\right)}} \\ T_W &= \frac{K_1 - \frac{1}{\rho_W c_W^2}}{K_2} \\ T_W &= \frac{K_1 - \frac{1}{\rho_W\left(100\frac{\rho_L}{\rho_W}\frac{\eta_W}{\eta_L}\sqrt{\gamma_L R_L T_L}\right)^2}}{K_2} \end{aligned}$$

2. Aufgabe

Die Geschwindigkeit wird durch zweifache Integration der x-Impulsgleichung berechnet.

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} &= \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y + C_1 \\ u(x,y) &= \frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{y^2}{2} + C_1 y + C_2\end{aligned}$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} y = 0 &: \quad u = 0 \rightarrow C_2 = 0 \\ y = h(x) &: \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}h(x) \end{aligned}$$

$$\rightarrow u(x,y) = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}h^2(x)\left(2 - \frac{y}{h(x)}\right)\frac{y}{h(x)}$$

Der Druckgradient wird über Integration der y-Impulsgleichung und anschließender Ableitung berechnet.

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g \\ \int_p^{p(h(x))=p_a} \partial p &= \int_y^{y=h(x)} -\rho g \partial y \\ p &= p_a + \rho g\left(h(x) - y\right) \\ \frac{\partial p}{\partial x} &= \rho g \frac{\partial h(x)}{\partial x}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Geschwindigkeitsverteilung zu

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\eta}\rho g \frac{\partial h(x)}{\partial x}h^2(x)\left(2 - \frac{y}{h(x)}\right)\frac{y}{h(x)}.$$

Über den Volumenstrom $\dot{V}(x) =$ konst. wird nun die Filmhöhe berechnet.

$$\begin{aligned}\dot{V} &= B\int_0^{h(x)} u(x,y)dy \neq f(x) \\ \dot{V} &= -B\frac{1}{2\eta}\rho g\frac{\partial h(x)}{\partial x}h^2(x)\left[\frac{2}{h(x)}\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3h^2(x)}\right]_0^{h(x)} \\ \dot{V} &= -B\frac{1}{3\eta}\rho g\frac{\partial h(x)}{\partial x}h^3(x) \\ \int_0^x -\dot{V}\frac{3\eta}{\rho g B}dx &= \int_{h_0}^{h(x)} h^3 dh \\ -\dot{V}\frac{3\eta}{\rho g B}x &= \frac{h^4(x)}{4} - \frac{h_0^4}{4} \\ \rightarrow h(x) &= \sqrt[4]{-\dot{V}\frac{12\eta}{\rho g B}x + h_0^4}\end{aligned}$$

Die Gleichung ist gültig für $x \ll 0$ (ausreichende Entfernung zur Hinterkante)

3. Aufgabe

a) Kreiszylinderumströmung: Dipol und Parallelströmung

$$F(z) = u_M z + \frac{M}{2\pi z}$$

b)

$$\begin{aligned}
F(z) &= u_M z + \frac{M}{2\pi z} \\
&= u_M r e^{i\varphi} + \frac{M}{2\pi r e^{i\varphi}} \\
&= u_M r \left(cos\varphi + isin\varphi\right) + \frac{M}{2\pi r}\left(cos\varphi - isin\varphi\right)
\end{aligned}$$

$$\Phi(r,\varphi) = Re(F(z)) = u_M r cos\varphi + \frac{M}{2\pi r} cos\varphi$$

c)

$$\begin{aligned}
v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = u_M cos\varphi - \frac{M}{2\pi r^2} cos\varphi \\
v_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\left(-u_M r sin\varphi - \frac{M}{2\pi r} sin\varphi\right) = -sin\varphi\left(u_M + \frac{M}{2\pi r^2}\right)
\end{aligned}$$

d) an der Außenwand des Turmes gilt $r = R$

$$\begin{aligned}
v_r(R,\varphi) &= cos\varphi\left(u_M - \frac{M}{2\pi R^2}\right) \\
v_\varphi(R,\varphi) &= -sin\varphi\left(u_M + \frac{M}{2\pi R^2}\right)
\end{aligned}$$

Da die Außenwand durch eine Stromlinie repräsentiert wird, ist die radiale Geschwindigkeitskomponente $v_r(R,\varphi) = 0$. Daraus folgt, dass $u_M = \frac{M}{2\pi R^2}$.

e) Bernoulli zwischen einem Punkt in der freien Anströmung (Index M) und auf der Außenwand des Turmes (Index W):

$$p_M + \frac{\rho}{2} u_M^2 + \rho g h_M = p_W + \frac{\rho}{2} \vec{v}_W^2 + \rho g h_W(\varphi)$$

An der freien Oberfläche herrscht überall Umgebungsdruck, daher gilt $p_W = p_M$:

$$\frac{1}{2} u_M^2 + g h_M = \frac{1}{2} \vec{v_W}^2 + g h_W(\varphi)$$

Da die Außenwand des Turmes durch eine Stromlinie dargestellt wird, ist entlang der Wand $v_r = 0$ und $\vec{v}_W$ entspricht der Tangentialkomponente $v_\varphi(r = R, \varphi)$.

$$\begin{aligned}
h_W(\varphi) &= \frac{1}{2g} u_M^2 + h_M - \frac{1}{2g} v_\varphi^2(R,\varphi) \\
h_W(\varphi) &= \frac{1}{2g} u_M^2 + h_M - \frac{sin^2\varphi}{2g}\left(u_M + \frac{M}{2\pi R^2}\right)^2
\end{aligned}$$

Alternative I) Für die maximale Höhe $h_{W,max}$ gilt: $\dfrac{dh_W}{d\varphi} \overset{!}{=} 0, \dfrac{d^2h_W}{d^2\varphi} < 0.$

$$\begin{aligned}
\frac{dh_W}{d\varphi} &= -\frac{1}{2g}2cos\varphi sin\varphi\left(u_M + \frac{M}{2\pi R^2}\right)^2 \\
\frac{d^2h_W}{d^2\varphi} &= -\frac{1}{g}\left(cos^2\varphi - sin^2\varphi\right)\left(u_M + \frac{M}{2\pi R^2}\right)^2
\end{aligned}$$

Aus $\dfrac{dh_W}{d\varphi} \overset{!}{=} 0$ folgt $cos\varphi = 0 \vee sin\varphi = 0$, d.h. $\varphi = [0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}]$.
$\dfrac{d^2h_W}{d^2\varphi}|_{\varphi=0,\pi} < 0$, d.h. die Maxima liegen bei $\varphi = [0, \pi]$.

$$h_{W,max} = h_M + \frac{u_M^2}{2g}$$

Alternative II) Aus der Gleichung für h_W ist aufgrund der quadrierten Geschwindigkeit ersichtlich, dass die Höhe im Staupunkt, d.h., bei $v_\varphi^2(R,\varphi) = 0$, maximal wird. Daher folgt: $h_{W,max} = h_M + \dfrac{u_M^2}{2g}$

f) Verschiebung entlang der x-Achse in Hauptströmungsrichtung: $\dfrac{M}{2\pi\left(z-a\right)}$

Verschiebung entlang der y-Achse: $\dfrac{M}{2\pi\left(z-ib\right)}, \dfrac{M}{2\pi\left(z+ib\right)}$

$$F(z) = u_M z + \frac{M}{2\pi z} + \frac{M}{2\pi\left(z-a\right)} + \frac{M}{2\pi\left(z-ib\right)} + \frac{M}{2\pi\left(z+ib\right)}$$

4. Aufgabe

a) – Winkel von $30°$ zur Horizontalen: $\left|\beta\frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{3} \Rightarrow m = -\frac{1}{7}$

– Euler-Gleichung für reibungsfreie Außenströmung:

$$U\frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} \quad \Rightarrow \frac{dp}{dx} = -\rho U\frac{dU}{dx}$$

mit $U = ax^m$ und $\frac{dU}{dx} = max^{m-1}$ folgt

$$\frac{dp}{dx} = -\rho ax^m \cdot max^{m-1} = \frac{1}{7}\rho a^2 x^{-9/7} = \left.\frac{dp}{dx}\right|_{GS}$$

b) Grenzschicht ist ablösegefährdet, wenn $\frac{dp}{dx} > 0$

$$\frac{dp}{dx} = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\frac{1}{7}}_{>0}\underbrace{\rho}_{>0}\underbrace{a^2}_{>0}}_{>0}\underbrace{\underbrace{x}_{>0}\overbrace{\underbrace{}_{<0}}^{-9/7}}_{>0}}_{>0} = \frac{1}{7}\rho a^2 x^{-\frac{9}{7}}$$

$\Rightarrow \frac{dp}{dx} > 0$ für alle erlaubten Werte von a und x

c) ⓐ $u(x,y) = U(x)\left[a_0(x) + a_1(x)\frac{y}{\delta} + a_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]$

ⓑ $\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = U(x)\left[a_1(x)\frac{1}{\delta} + 2a_2(x)\frac{y}{\delta^2} + 3a_3(x)\frac{y^2}{\delta^3}\right]$

ⓒ $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = U(x)\left[2a_2(x)\frac{1}{\delta^2} + 6a_3(x)\frac{y}{\delta^3}\right]$

Bestimmung der Koeffizienten über Randbedingungen:

1) Haftbedingung: $y = 0 : u(x,y) = 0 \rightarrow$ in ⓐ $\Rightarrow a_0 = 0$

2) Grenzschichtrand-Rand: $y = \delta : u(x,\delta) = U(x)$

$\rightarrow$ in ⓐ $\Rightarrow U(x) = U(x)\left[a_1(x) + a_2(x) + a_3(x)\right]$

ⓓ $\Rightarrow a_1(x) + a_2(x) + a_3(x) = 1$

3) Wandbindungsgleichung:

$$y = 0 : \frac{dp}{dx} = \eta\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}$$

$\frac{dp}{dx}$ ist aus a) bekannt; eingesetzt in ⓒ ergibt sich:

$$\frac{1}{7}\rho a^2 x^{-9/7} = \eta U(x)\frac{2a_2(x)}{\delta^2}$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{\frac{1}{7}\rho a^2 x^{-9/7}\delta^2}{2\eta U(x)} = -\frac{\delta^2 \frac{1}{7}\rho a^2 x^{-9/7}}{2\eta a x^{-1/7}}$$

$$\Rightarrow a_2(x) = \frac{\delta^2 \rho a}{14\eta} x^{-8/7}$$

4) Glatter Übergang am Grenzschichtrand:

$y = \delta : \frac{\partial u(x,\delta)}{\partial y} = 0 \rightarrow$ in ⓑ

$$0 = \frac{U(x)}{\delta}\left[a_1(x) + 2a_2(x) + 3a_3(x)\right]$$

$$a_1(x) + 2a_2(x) + 3a_3(x) = 0$$

ⓔ $a_1(x) = -2a_2(x) - 3a_3(x) \rightarrow$ in ⓓ

$$-2a_2(x) - 3a_3(x) + a_2(x) + a_3(x) = 1$$

$$-a_2(x) - 2a_3(x) = 1$$

$$a_3(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_2(x)$$

mit a_2 aus 3):

$$\Rightarrow a_3(x) = -\frac{1}{2} - \frac{\delta^2 \rho a}{28\eta} x^{-8/7}$$

eingesetzt in ⓔ

$$a_1(x) = -2a_2(x) - 3\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_2(x)\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}a_2(x)$$

$$\Rightarrow a_1(x) = \frac{3}{2} - \frac{\delta^2 \rho a}{28\eta} x^{-8/7}$$

d) Ablösung bei x_{AB}:

$$\tau_w = \eta \frac{\partial u(x_{AB}, y=0)}{\partial y} = 0$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0;x=x_{AB}} = U(x_{AB}) \left[a_1(x_{AB}) \frac{1}{\delta(x_{AB})}\right] = 0$$

$$\Rightarrow a_1(x_{AB}) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{\delta^2 \rho a}{28\eta} x_{AB}^{-8/7} = 0$$

$$\delta(x_{AB}) = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{28\eta}{\rho a} x_{AB}^{8/7}} = \sqrt{\frac{42\eta}{\rho a} x_{AB}^{8/7}}$$

5. Aufgabe

a) Kondensationstemperatur:

$$\frac{p_K}{p_B} = \frac{T_K}{T_B} \quad \Rightarrow \quad T_K = T_B \frac{p_K}{p_B}$$

Kondensation im Austrittsquerschnitt $\Rightarrow p_K = p_a = p_\infty \quad \Rightarrow \quad T_a = T_K = T_B \frac{p_\infty}{p_B}$

Isentrope Zustandsänderung: $\frac{T_0}{T_a} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2$

$$\frac{p_0}{p_a} = \left(\frac{T_0}{T_a}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad \Rightarrow \quad p_0 = p_\infty \left(\frac{T_0}{T_B} \frac{p_B}{p_\infty}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Machzahl: $M_a = \sqrt{\left(\frac{T_0}{T_a} - 1\right) \frac{2}{\gamma - 1}} = \sqrt{\left(\frac{T_0}{T_B} \frac{p_B}{p_\infty} - 1\right) \frac{2}{\gamma - 1}}$

b) $\dot{m} = \rho_a u_a A_a \quad \Rightarrow \quad A_a = \frac{\dot{m}}{\rho_a u_a}$

$$\rho_a = \frac{p_\infty}{R T_a}$$

mit $R = \frac{\gamma - 1}{\gamma} c_p \quad \Rightarrow \quad \rho_a = \frac{p_\infty \gamma p_B}{(\gamma - 1) c_p T_B p_\infty} = \frac{\gamma p_B}{(\gamma - 1) c_p T_B}$

$$u_a = M_a \sqrt{\gamma R T_a} = M_a \sqrt{(\gamma - 1) c_p T_B \frac{p_\infty}{p_B}}$$

$$\Rightarrow A_a = \frac{\dot{m}\,(\gamma - 1) c_p T_B}{\gamma p_B M_a \sqrt{(\gamma - 1) c_p T_B \frac{p_\infty}{p_B}}}$$

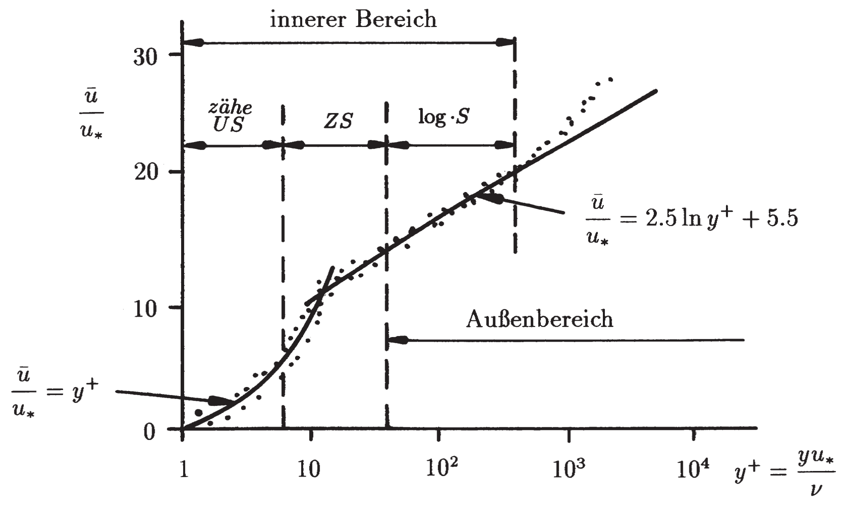
6. Aufgabe

a) $\vec{\omega} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right) \quad \text{mit} \quad w = 0, \dfrac{\partial}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$

$$\left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = \left(\vec{\omega}^T \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = \begin{pmatrix} \cancel{\omega_x} \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\omega_y} \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z \frac{\cancel{\partial u}}{\cancel{\partial z}} \\ \cancel{\omega_x} \frac{\partial v}{\partial x} + \cancel{\omega_y} \frac{\partial v}{\partial y} + \omega_z \frac{\cancel{\partial v}}{\cancel{\partial z}} \\ \cancel{\omega_x} \frac{\partial w}{\partial x} + \cancel{\omega_y} \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z \frac{\cancel{\partial w}}{\cancel{\partial z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alternativ: im ebenen Fall stehen Wirbelvektor und Nabla-Operator senkrecht aufeinander, sodass deren Skalarprodukt Null ist. Daraus folgt, dass $\left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = 0$.

b) Geschwindigkeitsprofil:



c) Die Ruhetemperatur bleibt über den Stoß konstant.