....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur „Strömungsmechanik II“

28. 03. 2022

1. Aufgabe (13 Punkte)

Zur Auslegung eines Flugzeugs werden Experimente in einem Wasserkanal mit einem Modellflugzeug im Maßstab $1:100$ durchgeführt, d.h. die charakteristische Länge des Flugzeugs L wird um den Faktor 100 im Vergleich zur Originalausführung verringert. Die Experimente sollen unter anderem Rückschluss auf die Widerstandskraft W_L des Flugzeugs geben. Die Luftströmung der Originalausführung besitzt die Dichte ρ_L, die dynamische Viskosität η_L, die Temperatur T_L, den Isentropenexponent γ_L und die spezifische Gaskonstante R_L.
Nehmen Sie an, dass im Modellversuch alle für die Anwendung der Ähnlichkeitstheorie notwendigen Rahmenbedingungen eingehalten werden. Beide Strömungen sind laminar, stationär und besitzen nur eine Geschwindigkeitskomponente u in Hauptströmungsrichtung.

a) Bestimmen Sie mithilfe des Π-Theorems die für die Flugzeugumströmung relevanten Kennzahlen und drücken Sie diese als bekannte Kennzahlen der Strömungsmechanik aus. Ergänzen Sie dafür gegebenenfalls die berechneten Kennzahlen mit zusätzlichen, dimensionslosen Größen.
Verwenden Sie für die Berechnung der Kennzahlen ausschließlich die Parameter der Originalausführung. Diese müssen nicht als gegeben vorausgesetzt werden.

b) Bestimmen Sie die Widerstandskraft W_L der Originalausführung auf Basis der im Experiment ermittelten Widerstandskraft W_W.

c) Berechnen Sie, auf welche Temperatur T_W das Wasser aufgeheizt werden muss, um die Ähnlichkeitsparameter einzuhalten.

Gegeben:

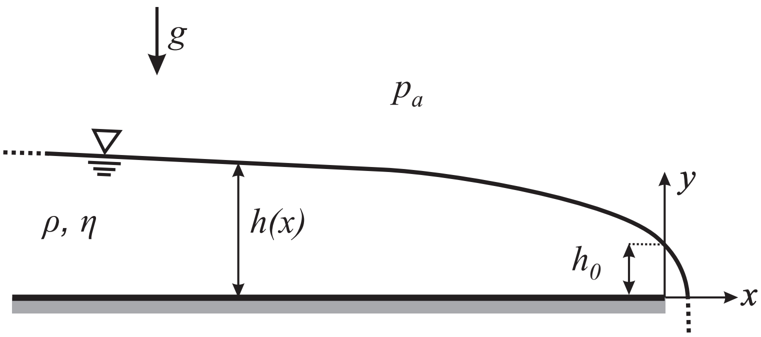
$W_W, \rho_W, \rho_L, \eta_W, \eta_L, \gamma_L, R_L, T_L, K_1, K_2,$ Maßstab $1:100$

Index W: Wasser, Index L: Luft

Hinweise:

- Die Einheit der spezifischen Gaskonstante R beträgt $\left[\dfrac{m^2}{s^2 K}\right]$.
- Die Widerstand erzeugende Fläche des Flugzeugs A skaliert quadratisch mit der Länge L.
- Die Schallgeschwindigkeit im Wasser kann näherungsweise mit $c = \dfrac{1}{\sqrt{\rho(K_1 - K_2 T)}}$ berechnet werden.

2. Aufgabe (8 Punkte)



Über eine große, horizontale Platte der Tiefe B fließt ein Flüssigkeitsfilm. Die Strömung wird durch Zufuhr eines konstanten Volumenstroms $\dot{V}$ weit von der Plattenhinterkante entfernt aufrecht erhalten. An der Plattenhinterkante strömt die Flüssigkeit ab. Die schleichende Strömung im Flüssigkeitsfilm wird durch die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} &= \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho g\end{aligned}$$

beschrieben.

Bestimmen Sie den Verlauf der Filmdicke $h(x)$.

Gegeben:

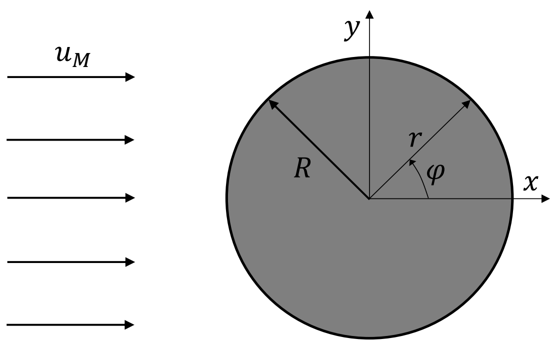
$\dot{V}$, ρ, η, g, h_0, B

Hinweise:

- Die Filmströmung kann als zweidimensional und laminar angesehen werden. Effekte nahe der Hinterkante sind zu vernachlässigen.
- Die Reibung zwischen der umgebenden Luft und der Filmoberfläche kann vernachlässigt werden.
- Es kann angenommen werden, dass an der Plattenhinterkante $h(x = 0) = h_0$ gilt.

3. Aufgabe (12 Punkte)

Ein neuer Offshore-Windpark soll ausgelegt werden. Dazu wird zunächst eine einzelne Windkraftanlage betrachtet. Der kreisförmige Querschnitt des Turms ist im betrachteten Bereich näherungsweise konstant und besitzt den Radius R. Ebenso wird die Meeresströmung u_M und die Meeresspiegelhöhe h_M in weiter Entfernung vor der Windkraftanlage als konstant angenommen.
Für die Auslegung wird lediglich die Wasseroberfläche betrachtet, sodass die ebene Strömung mit der Potentialtheorie beschreibbar ist.



a) Stellen Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ für die oben beschriebene und in der Draufsicht skizzierte Strömung auf. Nehmen Sie dafür an, dass die Meereströmung lediglich die Geschwindigkeitskomponente u_M in x-Richtung besitzt.

b) Berechnen Sie die Potentialfunktion $\Phi(r, \varphi)$ aus der in Teil a) aufgestellten, komplexen Potentialfunktion.

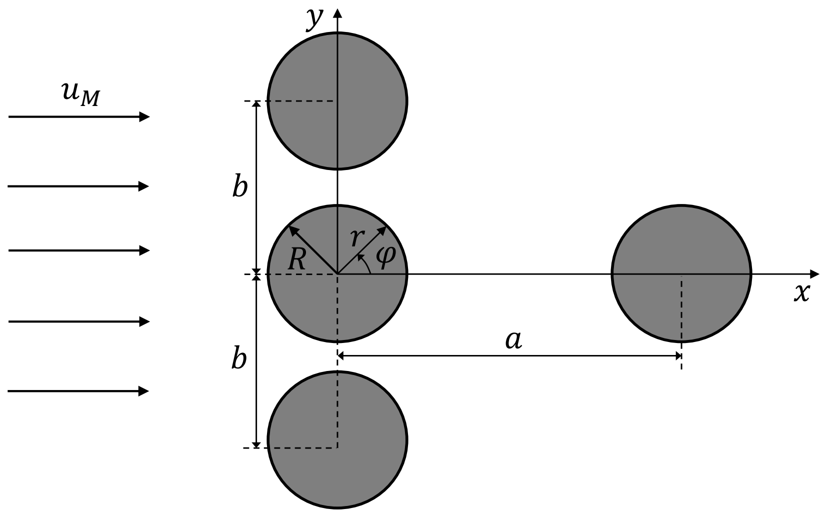
c) Berechnen Sie die radiale und die azimutale Geschwindigkeitskomponente $v_r(r, \varphi), v_\varphi(r, \varphi)$.

d) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponenten entlang der Außenwand des Turms und leiten Sie den Zusammenhang zwischen der Meeresströmungsgeschwindigkeit u_M und der/den Konstanten der Elementarströmung(en) her.

e) Berechnen Sie zur Abschätzung der Materialanforderungen, bis zu welcher Höhe $h_{W,max}$ die Wasseroberfläche maximal an der Außenwand der Windkraftanlage reicht.

Bitte beachten Sie, dass die Aufgabe auf der nächsten Seite fortgeführt wird!

f) Nach einer ersten Abschätzung anhand einer einzelnen Windkraftanlage soll nun das Zusammenspiel mehrerer Windkraftanlagen betrachtet werden. Stellen Sie dafür die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ für den im Folgenden skizzierten Windpark auf. Das Zentrum der in den vorherigen Aufgabenteilen betrachteten Windkraftanlage befindet sich nach wie vor im Ursprung des Koordinatensystems.



Gegeben:

$p_a, g, u_M, h_M, R, a, b,$ alle Konstanten der Elementarströmungen

Bekannte komplexe Potentialfunktionen:

Potentialwirbel:	$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$
Quelle/Senke:	$F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$
Dipol:	$F(z) = \frac{M}{2\pi z}$
Staupunktströmung:	$F(z) = \alpha z^2$
Parallelströmung:	$F(z) = (u_\infty - iv_\infty)z$

Winkeltabelle:

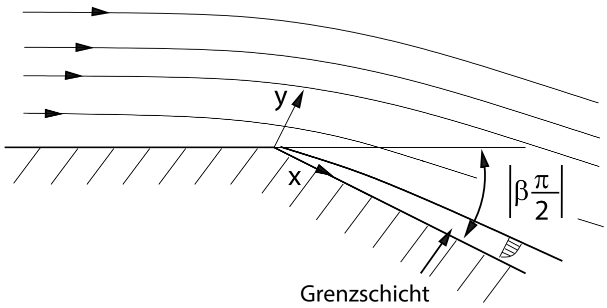
φ	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
$\sin\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0
$\cos\varphi$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

Hinweise:

$$v_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} \qquad v_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = -\frac{\partial\Psi}{\partial r} \qquad z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

4. Aufgabe (12 Punkte)

Die Kontur eines Windkanalmodells weist einen Winkel von 30° gegenüber der Horizontalen auf. Bei der Umströmung dieser Ecke bildet sich eine laminare, inkompressible Grenzschicht aus, ohne dass die Strömung an der scharfen Kante ablöst.



Die Geschwindigkeit U am Grenzschichtrand kann dabei durch ein Potenzgesetz der Form

$$U = ax^m = ax^{\frac{\beta}{2-\beta}} \quad \text{für} \quad -2 \leq \beta \leq 0$$

beschrieben werden.
Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht wird durch den folgenden Polynomansatz approximiert:

$$\frac{u(x,y)}{U(x)} = a_0(x) + a_1(x)\frac{y}{\delta} + a_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 .$$

a) Bestimmen Sie den Koeffizienten $m = \frac{\beta}{2-\beta}$ und den Verlauf des Druckgradienten $\frac{dp}{dx}(x)$ am Grenzschichtrand.

b) Weisen Sie mathematisch auf Basis der in Aufgabenteil a) berechneten Strömungsgrößen nach, dass die Strömung für $x > 0$ ablösegefährdet ist.

c) Ermitteln Sie die Koeffizienten des Geschwindigkeitsprofils in Abhängigkeit von der Grenzschichtdicke δ.

d) Berechnen Sie die Dicke der Grenzschicht im Ablösepunkt $\delta(x_{AB})$ unter der Annahme, dass die Grenzschichttheorie bis zum Ablösepunkt gültig ist. Die Position der Ablösung x_{AB} ist als gegeben anzusehen.

Gegeben:

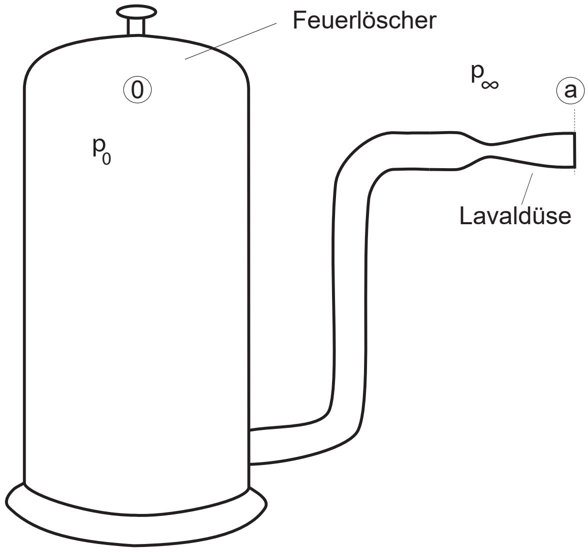
$a, \quad \rho, \quad \eta, \quad |\beta\frac{\pi}{2}| = 30°$

Hinweise:

- Die Strömung ist bis zur Stelle $x = 0$ als reibungsfrei zu betrachten, sodass sich an der horizontalen, ebenen Platte keine Grenzschicht ausbildet.
- x-Impulsgleichung für reibungsfreie Außenströmung: $U\dfrac{dU}{dx} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dx}$

5. Aufgabe (8 Punkte)

Bei einem zur Brandbekämpfung eingesetzten CO_2-Feuerlöscher soll eine angepasste Laval-Düse ($p_a = p_\infty$) erprobt werden. Die Strömung verläuft reibungsfrei, isentrop (reversibel adiabat) und subsonisch. Die Kondensationstemperatur des CO_2 ist druckabhängig, sodass sie mithilfe von Bezugsgrößen T_B, p_B berechnet werden kann (siehe Hinweis).



a) Bestimmen Sie den Druck p_0 in der Flasche, der nötig ist, damit am Düsenaustritt (Zustand a) das gasförmige CO_2 zu Schnee kondensiert. Wie hoch ist dann die Machzahl M_a am Düsenaustritt?

b) Der austretende Massenstrom des Feuerlöschers soll $\dot{m}$ betragen. Wie groß muss die Austrittsfläche A_a sein?

Gegeben:

T_0, T_B, p_∞, p_B, γ, c_p, $\dot{m}$

Index K: Kondensation, Index B: Bezugsgröße

Hinweise:

- Die Ergebnisse aus Teilaufgabe a) dürfen in Teilaufgabe b) als bekannt vorausgesetzt werden.
- Das Kohlenstoffdioxid und der „CO_2-Schnee“ verhalten sich wie ein ideales Gas. Dies gilt auch entlang der Phasengrenze.
- Für die Kondensationstemperatur gilt: $\dfrac{T_K}{T_B} = \dfrac{p_K}{p_B}$
- $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$
- Für isentrope Strömungen gilt: $\dfrac{T}{T_0} = \left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1}$

6. Aufgabe (7 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für eine ebene Strömung $\left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = 0$ gilt.

b) Skizzieren Sie das mit inneren Einheiten normierte Geschwindigkeitsprofil $\dfrac{u}{u*} = f(y^+)$ in einer turbulenten Grenzschicht in halblogarithmischer Form. Markieren Sie, in welchem Bereich sich die zähe Unterschicht, die Zwischenschicht und die logarithmische Schicht befinden.

c) Bei einem senkrechten Verdichtungsstoß wird die Temperatur vor dem Stoß mit T_1 und die Temperatur hinter dem Stoß mit T_2 bezeichnet. Wie verändert sich die Ruhetemperatur T_0 über den senkrechten Verdichtungsstoß?