....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

23. 08. 2021

1. Aufgabe

a) Die Strömung ist reibungsfrei. $\Rightarrow \quad \eta = 0$

Daher existiert des Weiteren keine Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung.

$$\Rightarrow v = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Damit folgt aus der Kontinuitätsgleichung $\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 0$.
Somit kann die Impulserhaltungsgleichung vereinfacht werden zu:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x$$

b) Einführen der dimensionslosen Größen.

$$\bar{t} = t \cdot f; \quad \bar{u} = \frac{u}{f \cdot h}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\Delta p}; \quad \bar{x} = \frac{x}{h}; \quad \bar{g_x} = \frac{g_x}{g}$$

Die dimensionslosen Größen in die vereinfachte Impulsgleichung einsetzen und umformen.

$$\begin{aligned}
\rho f^2 h \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} &= -\frac{\Delta p}{h} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \rho g \bar{g_x} \\
\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} &= -\frac{\Delta p}{\rho f^2 h^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{g}{f^2 h} \bar{g_x} \\
K_1 &= \frac{\Delta p}{\rho f^2 h^2} \\
K_2 &= \frac{g}{f^2 h}
\end{aligned}$$

c) Überführen der Kennzahlen in bekannte Kennzahlen der Strömungsmechanik.

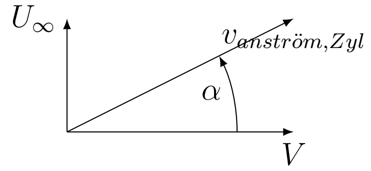
$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{\Delta p}{\rho (f h)^2} = Eu \\
K_2 &= \frac{g}{h f^2} = \frac{g h}{(h f)^2} = \frac{1}{Fr^2}
\end{aligned}$$

d) Eu: Die Eulerzahl beschreibt das Verhältnis von Druck- zu Trägheitskräften. Sie ist relevant, wenn das Strömungsfeld und die Druckdifferenz vom herrschenden Druckniveau abhängen.

Fr: Die Froudezahl ist definiert als das Verhältnis von Trägheits- zu Schwerkraft. Sie muss berücksichtigt werden, wenn Flüssigkeitsströmungen mit freier Oberfläche untersucht werden, wenn Schwerewellen das physikalische Problem beeinflussen oder bei der Analyse von Wasserbauproblemen.

2. Aufgabe

a) Die Anströmgeschwindigkeit des Zylinders $v_{anström,Zyl}$ setzt sich aus der Windgeschwindigkeit U_∞ und der Fahrtgeschwindigkeit V zusammen. Für ein mitbewegtes Koordinatensystem ergeben sich die resultierende Geschwindigkeit und der Anströmwinkel des Zylinders gemäß der nachstehenden Skizze.



$$v_{anström,Zyl} = \sqrt{U_\infty^2 + V^2}$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{U_\infty}{V}\right)$$

b) Der Auftriebssatz von Kutta-Zhukhovski stellt eine Beziehung zwischen dem Auftrieb pro Einheitslänge L, der Zirkulation Γ und der Anströmgeschwindigkeit $v_{anström}$ her.

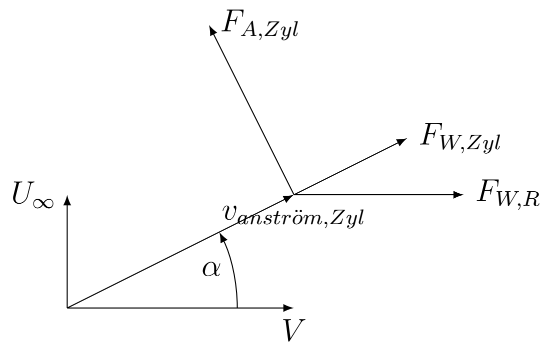
$$
\begin{aligned}
L &= \rho_L v_{anström} |\Gamma| \\
\text{mit:} \quad \Gamma &= \oint \vec{v} d\vec{s} \qquad \text{(Satz von Stokes)} \\
&= 2 \int \omega_Z dA \\
&= -\frac{1}{2}\pi D^2 \omega \qquad \text{(Rechtsdrehende Zirkulation)}
\end{aligned}
$$

Die Auftriebskraft auf den Zylinder ergibt sich somit zu

$$
\begin{aligned}
F_{A,Zyl} &= LH \\
&= \frac{\pi D^2}{2} H \rho_L \omega v_{anström,Zyl}
\end{aligned}
$$

c) Der Rumpf des Schiffes wird mit der Geschwindigkeit V angeströmt, während der Zylinder schräg mit $v_{anström,Zyl}$ angeströmt wird. Widerstandskräfte wirken in Richtung der Anströmung während die Auftriebskraft senkrecht zur resultierenden Anströmgeschwindigkeit wirkt.

Index R : Rumpf
Index Zyl : Zylinder



Zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit des Flettner-Rotors wird zunächst ein Kräftegleichgewicht in x-Richtung aufgestellt.

$$\begin{aligned}
\sum F_x = F_{W,R} + F_{W,Zyl}\cos(\alpha) - F_{A,Zyl}\sin(\alpha) &= 0 \\
\text{Widerstandskraft Rumpf:} \qquad F_{W,R} &= \frac{1}{2}\rho_W V^2 A_R c_{W,R} \\
\text{Widerstandskraft Zylinder:} \qquad F_{W,Zyl} &= \frac{1}{2}\rho_L v_{anström,Zyl}^2 D H c_{W,Zyl} \\
\text{Auftriebskraft Zylinder (aus b)):} \qquad F_{A,Zyl} &= \frac{\pi D^2}{2} H \rho_L \omega v_{anström,Zyl}
\end{aligned}$$

In das Kräftegleichgewicht einsetzen und nach ω umformen.

$$\omega = \frac{2\left(F_{W,R} + F_{W,Zyl}\cos(\alpha)\right)}{\sin(\alpha)\pi D^2 \rho_L H v_{anström,Zyl}}$$

Wenn Aufgabenteil b) nicht gelöst werden konnte, wird die in der Aufgabenstellung gegebene Definition der Auftriebskraft in das Kräftegleichgewicht eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\text{Auftriebskraft Zylinder:} \qquad F_{A,Zyl} &= F_{W,Zyl}\frac{c_{A,Zyl}}{c_{W,Zyl}} \\
&= \frac{F_{W,Zyl}\omega D}{2 c_{W,Zyl} v_{anström,Zyl}} \\
\text{Winkelgeschwindigkeit:} \qquad \omega &= \frac{2 c_{W,Zyl} v_{anström,Zyl}\left(F_{W,R} + F_{W,Zyl}\cos(\alpha)\right)}{F_{W,Zyl} D \sin(\alpha)}
\end{aligned}$$

d) Die Kraft auf den Rotor quer zur Fahrtrichtung des Schiffes setzt sich aus der y-Komponente der Auftriebskraft und der Widerstandskraft des Rotors zusammen.

$$F_{Q,Zyl} = F_{A,Zyl}\cos(\alpha) + F_{W,Z}\sin(\alpha)$$

e) Die Vortriebsleistung des Rotors wird über das Produkt von Vortriebskraft und Fahrtgeschwindigkeit des Schiffes bestimmt.

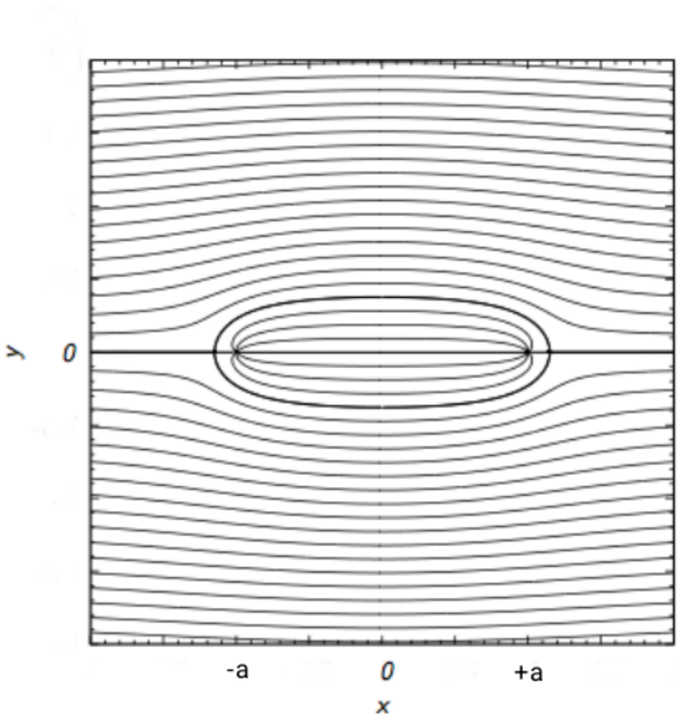
$$P = \left(F_{A,Zyl}\sin(\alpha) - F_{W,Zyl}\cos(\alpha)\right) V$$

3. Aufgabe

a) Parallelströmung + Quellenströmung bei $x=-a$ + Senkenströmung bei $x=+a$.

$$F(z) = U_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln(z+a) - \frac{E}{2\pi}\ln(z-a)$$

b) Stromlinienbild



c)

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dz} &= U_\infty + \frac{E}{2\pi}\left(\frac{1}{z+a} - \frac{1}{z-a}\right)\\
\frac{dF}{dz} &= U_\infty + \frac{E}{2\pi}\left(\frac{(x+a)-iy}{((x+a)+iy)((x+a)-iy)} - \frac{(x-a)-iy}{((x-a)+iy)((x-a)-iy)}\right)\\
\frac{dF}{dz} &= U_\infty + \frac{E}{2\pi}\left(\frac{(x+a)-iy}{(x+a)^2+y^2} - \frac{(x-a)-iy}{(x-a)^2+y^2}\right)\\
\text{mit:}\quad \frac{dF}{dz} &= \overline{w} = u - iv\\
u &= U_\infty + \frac{E}{2\pi}\left(\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\right)\\
v &= \frac{E}{2\pi}\left(\frac{y}{(x+a)^2+y^2} - \frac{y}{(x-a)^2+y^2}\right)
\end{aligned}$$

d) Die Länge des umströmten Körpers entspricht dem Abstand der Staupunkte.
In den Staupunkten verschwinden die Geschwindigkeitskomponenten, daher gilt $u = v = 0$.

$$\begin{aligned} v = 0 &\quad\longrightarrow\quad y_{SP} = 0 \\ u = 0 &\quad\longrightarrow\quad 0 = U_\infty + \frac{E}{2\pi}\left(\frac{x_{SP}+a}{(x_{SP}+a)^2+y_{SP}^2} - \frac{x_{SP}-a}{(x_{SP}-a)^2+y_{SP}^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= U_\infty + \frac{E}{2\pi}\left(\frac{1}{x_{SP}+a} - \frac{1}{x_{SP}-a}\right) \\ 0 &= U_\infty + \frac{E}{2\pi}\frac{-2a}{x_{SP}^2-a^2} \\ \frac{2a}{x_{SP}^2-a^2} &= \frac{2\pi U_\infty}{E} \\ x_{SP} &= \pm\sqrt{\frac{2Ea}{2\pi U_\infty}+a^2} \\ &= \pm a\sqrt{1+\frac{E}{\pi U_\infty a}} \end{aligned}$$

Die Länge des umströmten Körpers ergibt sich somit zu

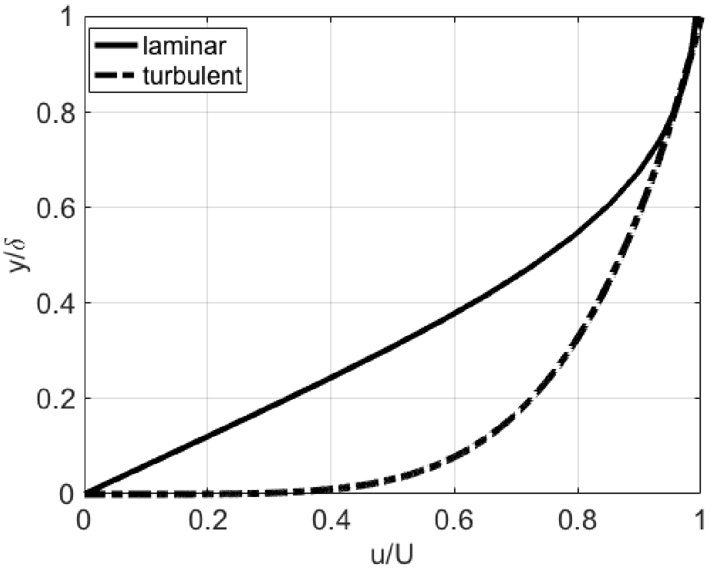
$$l = x_{SP1} - x_{SP2} = 2a\sqrt{1+\frac{E}{\pi U_\infty a}}.$$

e) Der Widerstand eines umströmten Körpers ist im Allgemeinen die Summe aus Reibungs- und Druckwiderstand. In der Potentialtheorie verschwinden beide Widerstandsanteile aufgrund von Reibungsfreiheit und aufgrund der Symmetrie der Strömung, so dass $F_W = 0$.

$$F_W = F_{reib} + F_{druck} = 0$$

4. Aufgabe

a) In der turbulenten Grenzschicht kommt es aufgrund der turbulenten Schwankungsbewegungen zu einem höheren Impulsaustausch normal zur Wand und dadurch zu einem fülligeren Geschwindigkeitsprofil.



b) Zur Berechnung der Wandschubspannung aus der Geschwindigkeitsverteilung wird die Ableitung des Geschwindigkeitsprofils an der Wand benötigt.

$$\begin{aligned} u &= U_\infty \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \\ \frac{du}{dy} &= \frac{U_\infty}{\delta^{\frac{1}{7}} \cdot 7} y^{-\frac{6}{7}} = \frac{U_\infty}{\delta^{\frac{1}{7}} \cdot 7 \cdot y^{\frac{6}{7}}} \end{aligned}$$

Für $y \to 0$ strebt $du/dy \to \infty$. Somit ergibt das Potenzgesetz eine unphysikalische Wandschubspannung.

c) Die Impulsverlustdicke δ_2 ist definiert als:

$$\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty}\left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy$$

Einsetzen des Potenzgesetzes in die Gleichung für die Impulsverlustdicke liefert den Zusammenhang zwischen Impulsverlustdicke δ_2 und Grenzschichtdicke δ.

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}\right) dy \\ \delta_2 &= \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{2}{7}} dy \\ &= \frac{7}{8}\frac{y^{\frac{8}{7}}}{\delta^{\frac{1}{7}}} - \frac{7}{9}\frac{y^{\frac{9}{7}}}{\delta^{\frac{2}{7}}}\Bigg|_0^\delta \\ &= \delta\left(\frac{7}{8} - \frac{7}{9}\right) \\ &= \frac{7}{72}\delta \end{aligned}$$

d) Die Gleichung der Wandschubspannung τ_W und der Impulsverlustdicke $\delta_2 = \frac{1}{10}\delta$ in die von Kármánsche Integralbeziehung einsetzen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{10} U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} &= \frac{0,0225 \rho U_\infty^2}{\rho} \left(\frac{U_\infty \delta}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}} \\
\int \delta^{\frac{1}{4}} d\delta &= 0,225 \left(\frac{U_\infty}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}} \int dx \\
\frac{4}{5}\delta^{\frac{5}{4}} &= 0,225 \left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot x + C \\
\delta &= \left(\frac{0,225 \cdot 5}{4}\right)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{\nu}{U_\infty}\right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} + C_1
\end{aligned}$$

Aus Plausibilitätsgründen verschwindet an der Vorderkante der ebenen Platte die Grenzschichtdicke, d.h. $\delta = 0$ bei $x = 0 \Rightarrow C_1 = 0$.
Um die Grenzschichtdicke in der Form $\delta = f(Re_x, x)$ zu erhalten, wird die Definition der Reynoldszahl $Re_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$ eingesetzt.

$$\begin{aligned}
\delta &= \left(\frac{0,225 \cdot 5}{4}\right)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{\nu}{U_\infty x}\right)^{\frac{1}{5}} x \\
\delta &= \left(\frac{0,225 \cdot 5}{4}\right)^{\frac{4}{5}} \frac{x}{Re_x^{\frac{1}{5}}}
\end{aligned}$$

5. Aufgabe

a) Die Machzahl ist definiert als das Verhältnis der Strömungsgeschwindigkeit zur lokalen Schallgeschwindigkeit.

$$M_e = \frac{u_e}{c_e} = \frac{u_e}{\sqrt{\gamma R T_e}}$$

Nutzen der Energiegleichung zur Bestimmung der Austrittsgeschwindigkeit u_e.

$$\begin{aligned} c_p T_0 &= c_p T_e + \frac{1}{2} u_e^2 \\ u_e^2 &= 2\frac{\gamma R}{\gamma - 1}(T_0 - T_e) \end{aligned}$$

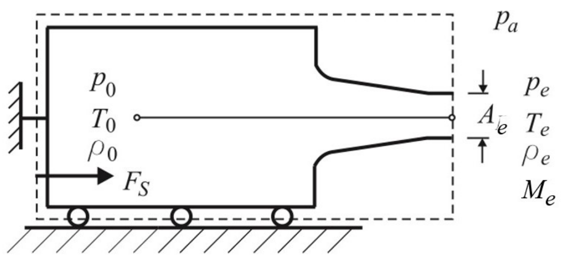
Einsetzen des Ausdrucks der Austrittsgeschwindigkeit in der Definition der Machzahl und umformen der Gleichung.

$$\begin{aligned} M_e &= \frac{\sqrt{\frac{2\gamma R}{\gamma-1}(T_0 - T_e)}}{\gamma R T_e} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}\left(\frac{T_0}{T_e} - 1\right)} \end{aligned}$$

Isentropenbeziehung: $$\frac{T_0}{T_e} = \left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$\Rightarrow \qquad M_e = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}}\sqrt{\left(\frac{p_0}{p_e}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1}$$

b) Zur Bestimmung des Schubs wird der Impulserhaltungssatz für das System aufgestellt.



$$\begin{aligned} \rho_e u_e^2 A_e &= (p_a - p_e)A_e + F_S \\ \frac{F_S}{p_0 A_e} &= \frac{\rho_e u_e^2}{p_0} - \frac{p_a}{p_0} + \frac{p_e}{p_0} \end{aligned}$$

Mit der Definition von u_e aus a) und dem idealen Gasgesetz ($\rho_e = \frac{p_e}{RT}$) kann die Gleichung für den dimensionslosen Schub umgeformt werden.

$$
\begin{aligned}
\frac{F_S}{p_0 A_e} &= \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{p_e}{p_0}\left(\frac{T_0}{T_e}-1\right)-\frac{p_a}{p_0}+\frac{p_e}{p_0} \\
\Rightarrow \frac{F_S}{p_0 A_e} &= \frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_e}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p_e}{p_0}-\frac{p_a}{p_0}
\end{aligned}
$$

1) $\frac{p_a}{p_0}=1 \quad \rightarrow$ keine Strömung, $\quad p_e=p_a=p_0$

$$\Rightarrow \frac{F_S}{p_0 A_e}=0$$

2) $\frac{p_a}{p_0}=0,7>\frac{p^*}{p_0}=0,528 \quad \rightarrow$ unterkritische Strömung, $\quad p_e=p_a$

$$\Rightarrow \frac{F_S}{p_0 A_e}=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p_a}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$$

3) $\frac{p_a}{p_0}=0 \quad \rightarrow$ Strömung ins Vakuum, $\quad p_e=p^*=0,528p_0$

$$\Rightarrow \frac{F_S}{p_0 A_e}=\frac{2\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{p^*}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}}-\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{p^*}{p_0}$$

c) Bei der inkompressiblen Strömung herrscht Umgebungsdruck am Düsenauslass.

$$\rightarrow p_a=p_e$$

Der Impulssatz vereinfacht sich somit zu: $\quad F_S=\rho u_e^2 A_e$
Bernoulli zur Bestimmung der Austrittsgeschwindigkeit:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\rho u_e^2 &= p_0-p_a \\
u_e^2 &= \frac{2(p_0-p_a)}{\rho} \\
\Rightarrow \frac{F_S}{p_0 A_e} &= 2\left(1-\frac{p_a}{p_0}\right)
\end{aligned}
$$

6. Aufgabe

a) Bei Flachwasserwellen ($\frac{H}{\lambda} < 0.07$) ist die Phasengeschwindigkeit unabhängig von der Wellenlänge.

$$c = \sqrt{gH} \neq f(\lambda) \rightarrow \text{nicht dispersive Wellen.}$$

Wellen unterschiedlicher Wellenlänge breiten sich demnach gleich schnell aus.

b)

$$\text{rot}\,(\text{grad}\,a) = \nabla \times (\nabla a) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} \\ \frac{\partial a}{\partial y} \\ \frac{\partial a}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 a}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} = \vec{0}$$

c) Strömungen, in denen die Reibungskräfte deutlich größer sind als die Trägheitskräfte, werden als schleichende Strömungen betrachtet.

$$\frac{\text{Trägheitskräfte}}{\text{Reibungskräfte}} << 1$$

Schleichende Strömungen treten bei kleinen Geschwindigkeiten, sehr großen Viskositäten, sehr kleinen Raumabmessungen oder sehr geringen Dichten auf.

d) Für den Fall der Umströmung einer konvexen Ecke ist die Geschwindigkeit v antiproportional zum Abstand r vom Ursprung. $(v \propto \frac{1}{r})$
Für $r \rightarrow 0$ strebt $v \rightarrow \infty$.