

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik I

22. 02. 2021

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

Klausur Aerodynamik I

Fragenteil, Konforme Abbildung, Tropfentheorie

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

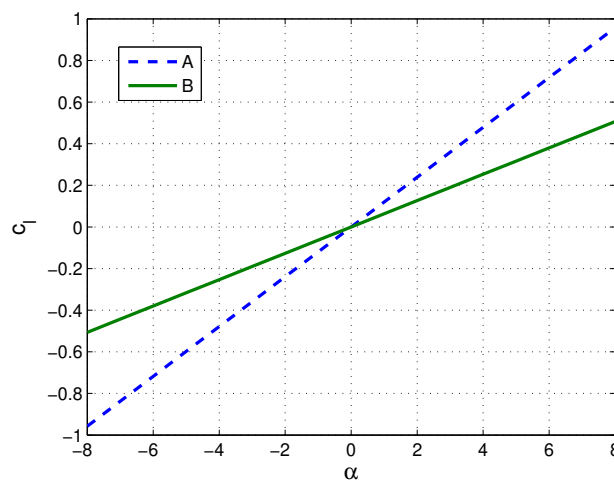
- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x}{ax+b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax+b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax+b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

1. Prandtl-Glauert-Ackeret Regel:

In nachstehender Abbildung ist die Verteilung des Auftriebsanstiegs über dem Anstellwinkel eines NACA-Profiles für eine sub- und für eine supersonische Machzahl dargestellt.

- Ordnen Sie die Machzahlen $M_1 = 0.4$ und $M_2 = 2.0$ den Verläufen A und B zu und begründen Sie kurz Ihre Entscheidung.
- Wenden Sie die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel auf den Auftriebsanstieg $\frac{\partial c_l}{\partial \alpha}$ des Profils an und stellen Sie diesen Verlauf als Funktion der Machzahl graphisch dar.
- Welche Vergleichsmachzahlen liegen in den beiden Fällen A und B für die Kompressibilitätskorrekturen zugrunde? Zeichnen Sie diese Punkte in Ihrem Diagramm ein.
- Markieren Sie die Gültigkeitsbereiche für die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel in dem Diagramm.
- Welche Wölbungseigenschaften besitzt das Profil?



2. Wirbelsätze:

- Wie lautet der Satz von Thompson und unter welchen Voraussetzungen ist dieser gültig?
- Welche Rolle spielt der Satz von Thompson bei der Analyse des Anfahrvorgang eines Profils aus der Ruhe heraus?
- Welche Rolle spielt die Reibung bei dem Anfahrvorgang bei scharfer Hinterkante?

3. Crocco'scher Wirbelsatz:

Der Crocco'sche Wirbelsatz lautet:

$$T \nabla s + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla h_0$$

Beweisen Sie, dass eine zweidimensionale, isoenergetische, stationäre und reibungsfreie Parallelströmung nach durchlaufen eines gekrümmten Verdichtungsstoßes nicht mehr drehungsfrei ist.

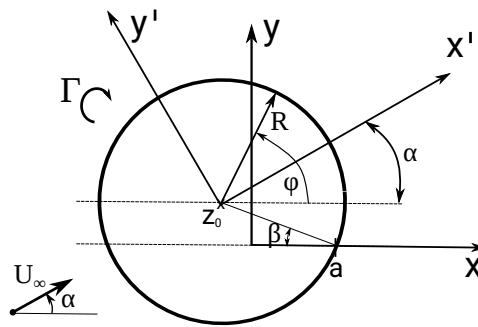
4. Biot-Savart:

Leiten Sie aus der allgemeinen Form des Biot-Savart'schen Gesetzes

$$V_i = -\frac{\Gamma}{4\pi} \oint \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{|\vec{r}|^3}$$

die Gleichung für den Betrag der induzierte Geschwindigkeit eines unendlich langen, geraden Wirbels her.

2. Aufgabe: Konforme Abbildung (15 Punkte)



Ein exzentrisch gelagerter, rotierender Zylinder, der unter einem Anstellwinkel α mit der Geschwindigkeit U_∞ angeströmt wird, soll mithilfe der Abbildungsfunktion nach Zhukovski abgebildet werden.

$$\text{Zhukovski-Abbildungsfunktion für den Koordinatenursprung: } \zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

Für den Radius dieses Bildkreises gilt $z - z_0 = R \cdot e^{i\varphi}$ und für die Hinterkante ($z = a$) gilt $a - z_0 = R \cdot e^{-i\beta}$.

1. Welche Eigenschaft besitzt eine konforme Abbildung und wie muss ein Körper beschaffen sein, damit das Strömungsfeld um ihn mithilfe der konformen Abbildung berechnet werden kann? Für welche Art von Strömungen kann die Methode der konformen Abbildung verwendet werden?
2. Geben Sie die komplexe Strömungsfunktion $F(z)$ für den oben dargestellten Fall an.
3. Welchen Effekt hat die Verschiebung des Mittelpunktes um x_0 und y_0 auf das resultierende Profil?
4. Erläutern Sie die Kutta'sche Abflußbedingung und berechnen Sie die konjugiert komplexe Geschwindigkeit \bar{w}_ζ sodass diese erfüllt ist.
5. Zeichnen Sie qualitativ die Umströmung des Kreiszyinders in der z -Ebene und die des zugehörigen Profils in der ζ -Ebene für den Fall, dass die Kutta'sche Abflussbedingung an der Hinterkante des Profils erfüllt ist.
6. Nennen Sie zwei Nachteile der Methode der Konformen Abbildung?

Gegeben: Anstellwinkel α , Radius R , Anströmgeschwindigkeit U_∞ , a , x_0 , y_0

$$\text{Parallelströmung: } F(z') = U_\infty z'$$

$$\text{Potentialwirbel: } F(z') = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$$

$$\text{Quelle/Senke: } F(z') = \frac{\pm E}{2\pi} \ln(z')$$

$$\text{Staupunktströmung: } F(z') = a z'^2$$

$$\text{Dipol: } F(z') = \frac{M}{2\pi z'}$$

mit $M = 2\pi U_\infty R^2$

3. Aufgabe: Tropfentheorie (20 Punkte)

1. Beschreiben Sie kurz die grundlegende Idee der Tropfentheorie. Was versteht man unter der Schließbedingung und wie lautet sie für die Tropfentheorie?
2. Leiten Sie die Bestimmungsgleichung für die Quellverteilung $q(X)$ her.
3. Gegeben ist die Gleichung für ein Zhukhovski-Profil

$$Z^t = 2\epsilon\sqrt{X(1-X)^3}.$$

- (a) Bestimmen Sie die Quellverteilung $q(x)$ für das Zhukhovski-Profil mit der oben ermittelten Gleichung.
- (b) Bestimmen Sie die maximale Dicke, die Dickenrücklage und die Winkel τ_1 an der Vorderkante sowie τ_2 an der Hinterkante.
- (c) Bestimmen Sie die Koeffizienten b_n aus dem Fourieransatz nach Riegels für das gegebene Profil.
- (d) Bestimmen Sie mithilfe des Riegels-Faktor κ die Geschwindigkeit $u_k(\varphi)$ auf der Kontur durch Überlagerung der Störgeschwindigkeit $u_s(\varphi)$ mit der freien Anströmung u_∞ .

Gegeben: u_∞, ϵ

Hinweis:

$$u_s(X) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'}$$

Fourieransatz nach Riegels:

$$Z^t = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n \sin(n\varphi')$$

Riegelsfaktor:

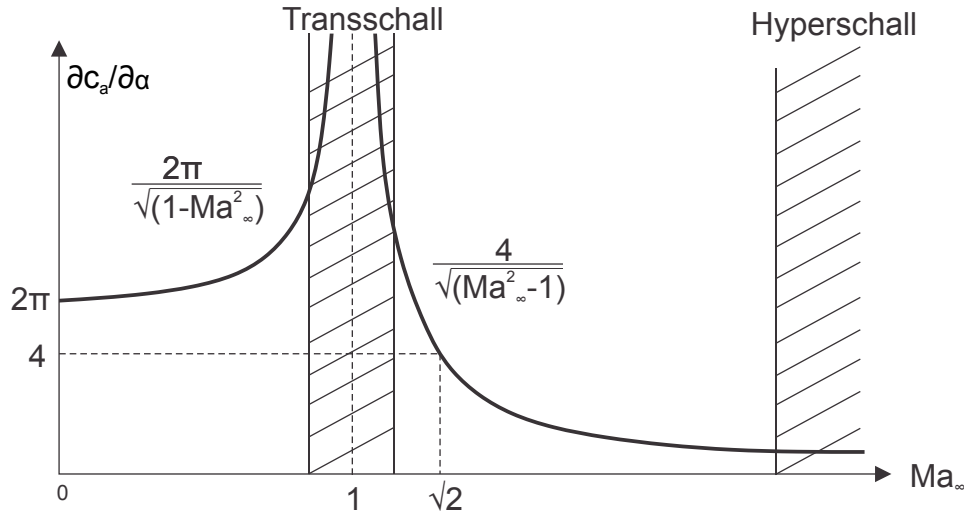
$$\kappa = \sqrt{1 + \left(\frac{dZ}{dX}\right)^2}$$

Transformation:

$$X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (15 Punkte)

1. (a) Der Auftriebsanstieg A entspricht $M_1=0.4$ und B demnach $M_2=2.0$. Der inkompressible Auftriebsgradient liegt bei 2π , während der Auftriebsgradient für Machzahlen größer als $\sqrt{2}$ unterhalb von 4 liegen muss und somit weniger steil verläuft.
- (b) Skizze mit Gültigkeitsbereichen



- (c) Im Unterschall liegt die Vergleichsmachzahl bei $M_{vergl.} = 0$.
Für die Überschallströmungen liegt die Vergleichsmachzahl bei $M_{vergl.} = \sqrt{2}$.
- (d) Die Prandtl-Glauert-Ackeret Regel ist lediglich für $Ma_\infty \lesssim 0.7$ und im Bereich $1.2 \lesssim Ma_\infty \lesssim 5$ gültig.
- (e) Da alle Verläufe durch den Nullpunkt gehen und die Steigung konstant im untersuchten Anstellwinkelbereich ist, muss ein symmetrisches Profil ohne Wölbung vorliegen.

2. Wirbelsätze

- (a) Die Zirkulation Γ entlang einer sich mit dem Fluid bewegenden geschlossenen Kurve ist zeitlich konstant

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0.$$

Es ist unter der Voraussetzung gültig, dass es sich um reibungsfreie, barotrope Strömungen mit konservativen Volumenkräften handelt. Daraus folgt, dass Strömungen, die anfänglich in Drehung waren, diese Drehung beibehalten, während drehungsfreie Strömungen drehungsfrei bleiben.

- (b) Vor dem Anfahren des Profils gilt für die Zirkulation um das Profil $\Gamma = 0$. Beim Anfahrvorgang bildet sich ein Wirbel (Γ_1) an der Hinterkante des Profils, der stromab abschwimmt. Am Profil entsteht die Zirkulation (Γ_2), welche die Kutta'sche Abflussbedingung erfüllt. Eine Linienintegration über die gleichen Luftteilchen wie vor dem Anfahren führt über den Satz von Thomson zum Ergebnis, dass $\Gamma_1 = \Gamma_2$ sein muss.
- (c) In einer reibungsfreien Strömung liegt der hintere Staupunkt auf der Oberseite des Profils. Das setzt eine Umströmung der Hinterkante mit unendlich großer Geschwindigkeit voraus, bei der keine Zirkulation entsteht.

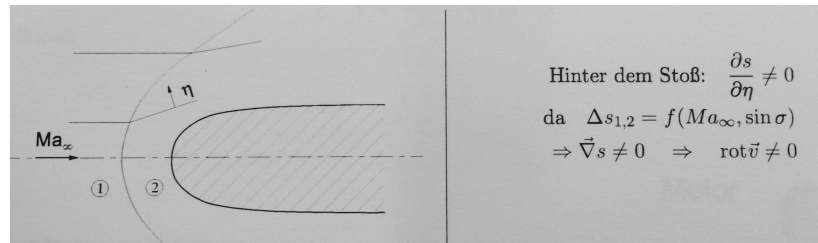
Im reibungsbehafteten Fall wird die Umströmung der Hinterkante durch die Schubspannungen verhindert. Bei einer nicht abgelösten Stömung ist ein glattes Abströmen an der Hinterkante zu beobachten. Infolge dessen stellt sich eine Zirkulation ein, die das glatte Abströmen an der Hinterkante erlaubt.

3. Crocco'scher Wirbelsatz:

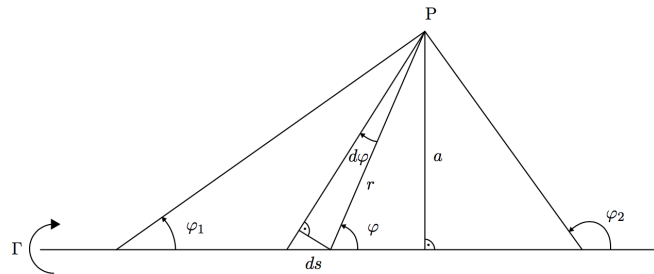
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{\nabla} h_0 = T \vec{\nabla} s + \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$

stationär und isoenergetisch:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad \vec{\nabla} h_0 = 0 \quad \Rightarrow T \vec{\nabla} s = -\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v})$$



4. Biot-Savart: Skizze:



Geometrische Zusammenhänge/Kreuzprodukt:

$$|\vec{r} \times d\vec{s}| = a \cdot ds$$

$$\sin(\varphi) = \frac{a}{r} = \frac{r \cdot d\varphi}{ds}$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{r^2} = \frac{d\varphi}{a} \quad \text{und} \quad a = r \cdot \sin(\varphi)$$

Daraus kann die allgemeine Form des Biot-Savart'schen Gesetzes wie folgt umgeformt werden:

$$|\vec{V}_i| = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \oint \frac{|\vec{r} \times d\vec{s}|}{|\vec{r}|^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \int_s \frac{a \cdot ds}{r^3} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \int_s \frac{r \cdot \sin(\varphi) ds}{r^3}$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \int_s \frac{\sin(\varphi) ds}{r^2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sin(\varphi) d\varphi}{a} = \frac{\Gamma}{4\pi a} \cdot \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin(\varphi) d\varphi$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi a} \cdot (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2))$$

Für einen unendlich langen Wirbel gilt:

$$\varphi_1 \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \cos \varphi_1 = 1$$

$$\varphi_2 \rightarrow \pi \quad \Rightarrow \cos \varphi_2 = -1$$

$$\Rightarrow |\vec{V}_i| = \frac{\Gamma}{2\pi a}$$

Lösung 2. Aufgabe: Konforme Abbildung (15 Punkte)

- Die konforme Abbildung ist winkelerhaltend und exakt.
 - Es muss sich bei dem Körper um ein einfach geschlossenes Gebiet handeln (keine Lücken etc.)
 - Zweidimensionale inkompressible Potentialströmung (d.h. reibungsfrei und drehungsfrei) und stationär. Außerdem werden kleine Störungen vorausgesetzt (d.h. kleine Anstellwinkel und Profile mit geringer Dicke).
- komplexe Potentialfunktion $F(z')$:
Kombination von Anströmung, Dipol und Wirbel

$$F(z') = U_\infty z' + \frac{U_\infty R^2}{z'} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$$

Transformation in z :

um z_0 verschoben und um α gedreht, da der Dipol senkrecht zur Anströmung steht.

$$z = Re^{i\varphi} + z_0 = Re^{i(\varphi'+\alpha)} + z_0 = Re^{i\varphi'} e^{i\alpha} + z_0 = z' e^{i\alpha} + z_0$$

$$z' = (z - z_0) e^{-i\alpha}$$

Potentialfunktion $F(z)$:

$$F(z) = U_\infty e^{-i\alpha} (z - z_0) + \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{z - z_0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) + \left(\frac{\Gamma\alpha}{2\pi} \right)$$

- Die Verschiebung des Mittelpunktes in negative x-Richtung bewirkt eine Erhöhung der maximalen Dicke. Durch die Verschiebung in y-Richtung wird das resultierende Profil gewölbt.
- Die Kuttasche Abflussbedingung besagt, dass bei Profilen mit scharfer Hinterkante keine Umströmung der Hinterkante auftritt. Das Fluid fließt an der Hinterkante glatt ab. In der ζ -Ebene muss somit die Geschwindigkeit an der Hinterkante $\bar{w}_\zeta(z = a)$ endlich sein. Betrachtet man jedoch den Kreiszyylinder in der z -Ebene, so befindet sich an der Stelle $z = a$ ein Staupunkt. Es gilt also:

$$\begin{aligned} \text{Hinterkante: } & a - z_0 = R e^{-i\beta} \\ \text{Staupunkt: } & \bar{w}_z(z = a) = 0. \end{aligned}$$

Für die komplex konjugierte Geschwindigkeit \bar{w}_ζ gilt mit:

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{dz} &= 1 - \frac{a^2}{z^2} \quad \text{und} \\ \bar{w}_\zeta &= \frac{dF(z)}{d\zeta} = \frac{dF(z)}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \frac{dF(z)}{dz} \frac{1}{\frac{d\zeta}{dz}}. \quad \text{Daraus folgt:} \\ &= \left[U_\infty e^{-i\alpha} - U_\infty e^{+i\alpha} \frac{R^2}{(z - z_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z - z_0} \right] \frac{1}{1 - \frac{a}{z^2}} \end{aligned}$$

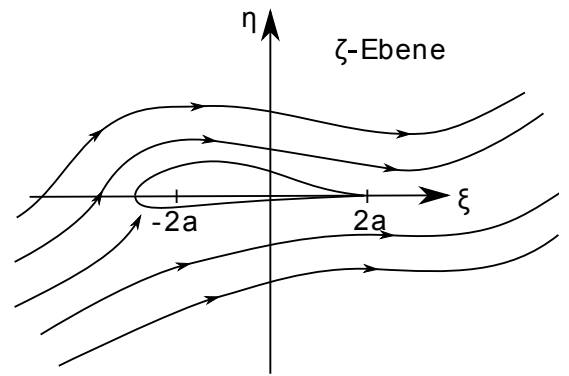
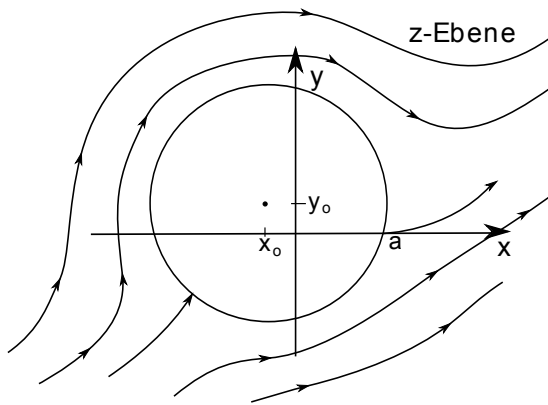
An der Hinterkante gilt folglich:

$$\begin{aligned} \bar{w}_z(z = a) &= \left(U_\infty e^{-i\alpha} - U_\infty e^{i\alpha} e^{i2\beta} + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{i\beta} \right) = 0 \\ \Rightarrow i\Gamma &= -2\pi R U_\infty e^{-i\alpha} e^{-i\beta} + 2\pi R U_\infty e^{i\alpha} e^{i\beta} \\ i\Gamma &= 2\pi R U_\infty \left(-e^{-i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha+\beta)} \right) \\ i\Gamma &= 2\pi R U_\infty (-\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)) \\ \Gamma &= 4\pi R U_\infty \sin(\alpha + \beta) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für \bar{w}_ζ :

$$\Rightarrow \bar{w}_\zeta = \left[U_\infty e^{-i\alpha} - U_\infty e^{+i\alpha} \frac{R^2}{(z - z_0)^2} + i \frac{2R U_\infty \sin(\alpha + \beta)}{z - z_0} \right] \frac{1}{1 - \frac{a^2}{z^2}}$$

5. Skizze:



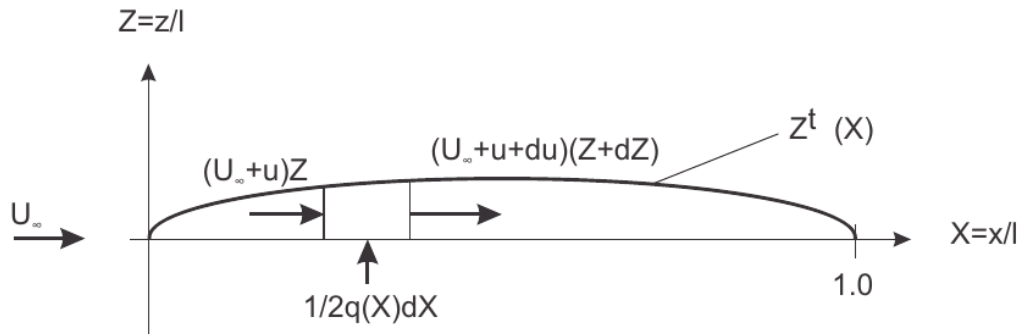
- 6.
- Die Bestimmung der Abbildungsfunktion aus der Profilkontur kann aufwendig sein.
 - Die Methode der Konformen Abbildung ist nur für 2D-Fälle gültig.

Lösung 3. Aufgabe: Tropfentheorie (20 Punkte)

1. Bei der Tropfentheorie wird eine Quellen- und Senkenverteilung entlang der Profilschne mit einer Parallelströmung überlagert. Dadurch entsteht ein symmetrisches Profil mit endlicher Dicke. Damit das Profil geschlossen ist, muss die Schließbedingung eingehalten werden. Diese besagt, dass sämtliche Masse $q(X)$, die durch die Quellen austritt, von den Senken wieder aufgenommen werden muss.

$$\int_0^1 q(X) dX = 0 \quad \text{mit:} \quad X = \frac{x}{l}$$

2. (a) Mithilfe der Kontinuitätsgleichung:



$$(U_\infty + u)Z + \frac{1}{2}q(X)dX = (U_\infty + u + du)(Z + dZ)$$

$$U_\infty Z + uZ + \frac{1}{2}q(X)dX = U_\infty Z + uZ + duZ + U_\infty dZ + udZ + dudZ$$

Nach der Linearisierung (Vernachlässigung Terme 2. Ordnung) ergibt sich:

$$\frac{1}{2}q(X) = Z \frac{du}{dX} + U_\infty \frac{dZ}{dX} + u \frac{dZ}{dX} = \frac{d(U_\infty + u)}{dX} Z + (U_\infty + u) \frac{dZ}{dX}$$

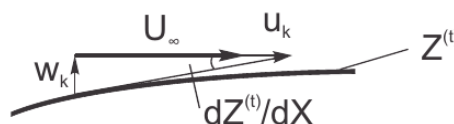
aus der Produktregel folgt:

$$\frac{1}{2}q(X) = \frac{d}{dX}((U_\infty + u)Z)$$

und mit $U_\infty \gg u$ (nicht gültig im Staupunkt) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q(X) &= \frac{d(U_\infty Z)}{dX} = U_\infty \frac{dZ}{dX} \\ q(X) &= 2U_\infty \frac{dZ}{dX} \end{aligned}$$

- (b) Alternativ mithilfe der kinematischen Randbedingung:



$$\frac{dZ}{dX} = \frac{w_k}{U_\infty + u_k}$$

Für dünne Profile und außerhalb des Staupunktes gilt $u_k \ll U_\infty$, außerdem gilt $w_k \approx \frac{q(X)}{2}$.
Somit ergibt sich für die Quellendichte $q(X)$:

$$q(x) = 2U_\infty \frac{dZ}{dX}$$

3. (a) Bestimmen der Ableitung $dZ(X)/dX$:

$$\begin{aligned} \frac{dZ(X)}{dX} &= \frac{2\epsilon}{2\sqrt{X(1-X)}^3} [(1-X)^3 - 3X(1-X)^2] \\ &= \frac{\epsilon}{\sqrt{X}}(1-X)^{\frac{3}{2}} - 3\epsilon\sqrt{X(1-X)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Quellverteilung $q(X)$ zu:

$$q(X) = 2u_\infty \left[\frac{\epsilon}{\sqrt{X}}(1-X)^{\frac{3}{2}} - 3\epsilon\sqrt{X(1-X)} \right]$$

(b) Bestimmung der Dickenrücklage:

$$\begin{aligned} \frac{dZ(X)}{dX} &= \frac{2\epsilon}{2\sqrt{X(1-X)}^3} [(1-X)^3 - 3X(1-X)^2] = 0 \\ \Rightarrow 0 &= (1-X) - 3X \\ \Rightarrow X_d &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichung der Profilkontur zur Bestimmung der maximalen Dicke:

$$\begin{aligned} Z\left(X_d = \frac{1}{4}\right) &= \frac{d_{max}/l}{2} = \frac{\delta}{2} \\ &= 2\epsilon\sqrt{\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)^3} = \epsilon\frac{3}{8}\sqrt{3} \\ \Rightarrow \delta &= \frac{3}{4}\sqrt{3}\epsilon \end{aligned}$$

Bestimmung der Winkel an Vorderkante ($X = 0$) und Hinterkante ($X = 1$):

$$\begin{aligned} \left. \frac{dZ(X)}{dX} \right|_{X=0} &= \infty = \tan \tau_1 \\ \Rightarrow \tau_1 &= \frac{\pi}{2} \\ \left. \frac{dZ(X)}{dX} \right|_{X=1} &= 0 = \tan \tau_2 \\ \Rightarrow \tau_2 &= 0 \end{aligned}$$

(c) Bestimmung von b_n :

Aus der Koordinatentransformation mit $X = \frac{1}{2}(1 + \cos(\varphi))$ folgt durch umformen:

$$\begin{aligned} 2X - 1 &= \cos(\varphi) = \sqrt{1 - \sin^2(\varphi)} \quad \text{bzw.} \\ \sin(\varphi) &= 2\sqrt{X(1-X)}. \end{aligned}$$

Somit lässt sich die Profilleichung nach φ transformieren:

$$Z^t = \epsilon \sin(\varphi) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(\varphi) \right) \quad \text{und umformen:}$$

$$Z^t = \frac{\epsilon}{2} \sin(\varphi)(1 - \cos(\varphi))$$

$$Z^t = \frac{\epsilon}{2} \sin(\varphi) - \frac{\epsilon}{2} \sin(\varphi) \cos(\varphi)$$

$$Z^t = \frac{\epsilon}{2} \sin(\varphi) - \frac{\epsilon}{4} \sin(2\varphi).$$

Der Koeffizientenvergleich mit dem Fourier-Ansatz nach Riegels liefert anschließend:

$$b_1 = \epsilon, \quad b_2 = \frac{\epsilon}{2} \quad \text{und} \quad b_n = 0 \quad \forall n > 2$$

(d) Riegels-Faktor:

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dZ}{dX} \right)^2}}$$

Die Geschwindigkeit auf der Kontur ergibt sich mit Hilfe des Riegels-Faktors aus:

$$u_k(X) = \frac{1}{\kappa} u_{ges} = \frac{1}{\kappa} (u_\infty + u_s)$$

$$\Rightarrow u_k(X) = \frac{1}{\kappa} \left(u_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 q(X') \frac{dX'}{X - X'} \right)$$

$$= \frac{u_\infty}{\kappa} \left(1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{dZ}{dX'} \frac{dX'}{X - X'} \right)$$

Koordinatentransformation $X = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi)$:

$$\kappa(\varphi) = \sqrt{1 + \left(\frac{-2dZ}{\sin \varphi d\varphi} \right)^2}$$

$$u_k(\varphi) = \frac{u_\infty}{\kappa(\varphi)} \left(1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dZ}{d\varphi'} \frac{d\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'} \right)$$

Für $\frac{dZ}{d\varphi}$ ergibt sich

$$\frac{dZ}{d\varphi} = \frac{\epsilon}{2} \cos(\varphi) - \frac{\epsilon}{2} \cos(2\varphi).$$

Mit dem Fourieransatz nach Riegels:

$$dZ^t = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N b_n n \cos(n\varphi') d\varphi'$$

$$\Rightarrow u_s(\varphi) = -u_\infty \sum_{n=1}^N b_n n \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi') d\varphi'}{\cos \varphi - \cos \varphi'}$$

Mit dem Glauert-Integral:

$$u_s(\varphi) = +u_\infty \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi}$$

Für die Geschwindigkeit auf der Kontur ergibt sich somit:

$$\begin{aligned}
 u_k(\varphi) &= \frac{u_\infty}{\kappa} \left(1 + \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \right) \\
 &= \frac{u_\infty}{\sqrt{1 + \left(\frac{-2dZ}{\sin \varphi d\varphi} \right)^2}} \left(1 + \sum_{n=1}^N b_n n \frac{\sin(n\varphi)}{\sin \varphi} \right)
 \end{aligned}$$

Mit den zuvor bestimmten Koeffizienten für b_n und der Profilsteigung ergibt sich:

$$u_k(\varphi) = \frac{u_\infty}{\sqrt{1 + \left(\frac{-\epsilon}{\sin \varphi} (\cos(\varphi) - \cos(2\varphi)) \right)^2}} \left(1 + \epsilon - \epsilon \frac{\sin(2\varphi)}{\sin(\varphi)} \right)$$