....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

09. 04. 2021

1. Aufgabe

a)

mit : $$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \Delta\vec{v} = \nabla^2\vec{v} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Volumenkräfte werden vernachlässigt: $\nabla f = 0$

x-Impulsgleichung: $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$

y-Impulsgleichung: $\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$

b) Bernoulli zur Bestimmung der Referenzgeschwindigkeit: $u_{ref} = \sqrt{2\frac{p_0 - p_a}{\rho_w}}$
Dimensionslose Größen :

$$\overline{x} = \frac{x}{D}; \quad \overline{y} = \frac{y}{D}; \quad \overline{p} = \frac{p}{p_0 - p_a} : \quad \overline{u} = \frac{u}{\sqrt{2\frac{p_0 - p_a}{\rho_w}}}; \quad \overline{v} = \frac{v}{\sqrt{2\frac{p_0 - p_a}{\rho_w}}}; \quad \overline{t} = \frac{t}{\frac{D}{u_{ref}}} = \frac{t}{\frac{D\sqrt{\rho_w}}{\sqrt{2(p_0 - p_a)}}}$$

In die x-Impulsgleichung einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}}\frac{2(p_0 - p_a)}{\rho_w D} \quad + \quad & \left(\overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}}\right)\frac{2(p_0 - p_a)}{\rho_w D} = \\ - \quad & \frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}}\frac{(p_0 - p_a)}{\rho_w D} + \frac{\eta_w}{\rho_w}\sqrt{\frac{2(p_0 - p_a)}{\rho_w}}\frac{1}{D^2}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}\right) \\ \rightarrow \frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{t}} \quad + \quad & \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{x}} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial \overline{y}} = -\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{p}}{\partial \overline{x}} + \underbrace{\frac{\eta_w}{\rho_w}\sqrt{\frac{\rho_w}{2(p_0 - p_a)}}\frac{1}{D}}_{K_1}\left(\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{x}^2} + \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial \overline{y}^2}\right) \end{aligned}$$

$K_1 = \frac{\eta_w}{D\sqrt{2\rho_w(p_0 - p_a)}}$

c) Mit $u_{ref} = \sqrt{2\frac{p_0 - p_a}{\rho_w}} \rightarrow K_1 = \frac{\eta_w}{\rho_w u_{ref} D} = \frac{1}{\text{Re}}$

Die Reynoldszahl gibt das Verhältnis von Trägheits- zu Reibungskräften an.

d) Die Kennzahlen müssen im Experiment und der Realität übereinstimmen. $\rightarrow K_1 = K_1'$

$$\frac{\eta_w}{D\sqrt{2\rho_w(p_0 - p_a)}} = \frac{\eta_w'}{D'\sqrt{2\rho_w'(p_0' - p_a')}}$$

$$\text{mit :} \quad \eta_w = \eta_w', \quad \rho_w = \rho_w', \quad p_a = p_a', \quad \frac{D'}{D} = \frac{1}{3}$$

$$D\sqrt{p_0 - p_a} = D'\sqrt{p_0' - p_a}$$

$$\rightarrow p_0' = 9p_0 - 8p_a$$

2. Aufgabe

a) Bilden der Rotation der Impulsgleichung:

$$\nabla \times \left[\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \nabla f\right]$$

$$\nabla \times (\nabla p) = \text{rot}(\text{grad}\, p) = 0, \qquad \nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\rightarrow \qquad \nabla \times \left[\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \eta \Delta \vec{v}\right]$$

$$\nabla \times \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \rho \frac{\partial \nabla \times \vec{v}}{\partial t} = 2\rho \frac{\partial \omega_z}{\partial t}$$

$$\begin{aligned}
\nabla \times \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} &= \rho \nabla \times \left[\underbrace{(\nabla \times \vec{v})}_{2\omega_z} \times \vec{v} + \frac{1}{2} \nabla \underbrace{(\vec{v} \cdot \vec{v})}_{\text{Skalar}}\right] \\
&= \rho \nabla \times (2\omega_z \times \vec{v}) + \frac{1}{2}\rho \underbrace{\nabla \times \nabla q^2}_{=0} \qquad \text{mit: } q^2 = u^2 + v^2 \\
&= 2\rho \left[(\vec{v} \cdot \nabla)\omega_z - \underbrace{(\omega_z \cdot \nabla)\vec{v}}_{=0\ (2D)} + \omega_z \underbrace{\nabla \cdot \vec{v}}_{=0\ (\text{Konti})} - \vec{v} \underbrace{\nabla \cdot \omega_z}_{\text{div}(\text{rot}\vec{v})=0}\right] \\
&= 2\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\omega_z
\end{aligned}$$

$$\nabla \times (\eta \Delta \vec{v}) = 2\eta \Delta \omega_z$$

$$\Rightarrow \qquad 2\rho \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + 2\rho(\vec{v} \cdot \nabla)\omega_z = 2\eta \Delta \omega_z$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}\right)$$

Alternativer Lösungsweg:

$$\text{Massenerhaltungsgleichung:} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\text{x-Impuls:} \quad \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{df}{dx} \quad \Bigg| \cdot \frac{\partial}{\partial y} \quad (1)$$

$$\text{y-Impuls:} \quad \rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{df}{dy} \quad \Bigg| \cdot \frac{\partial}{\partial x} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial}{\partial y}\frac{du}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \eta \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\frac{df}{dx} \quad (1)$$

$$\Rightarrow \rho \frac{\partial}{\partial x}\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \eta \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\frac{df}{dy} \quad (2)$$

(2) - (1)

$$\Rightarrow \rho \left[-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{du}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dv}{dt}\right)\right] = \eta \left[-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \rho \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}u + \frac{\partial u}{\partial y}v\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x}u + \frac{\partial v}{\partial y}v\right)\right]$$
$$= \eta \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] = -\eta \nabla^2 2\omega_z$$

mit $\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}v\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}u\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}v\right) = -\frac{\eta}{\rho}\nabla^2 2\omega_z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}u + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}v - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}v - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}u$$
$$+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) - \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{=0 \quad \text{(Konti)}} = -\frac{\eta}{\rho}\nabla^2 2\omega_z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) + v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\eta}{\rho}\nabla^2 2\omega_z$$

$$\Rightarrow -2\frac{\partial \omega_z}{\partial t} - 2u\frac{\partial \omega_z}{\partial x} - 2v\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = -\frac{\eta}{\rho}\nabla^2 2\omega_z$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 \omega_z$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}\right)$$

b)

$$
\begin{aligned}
\vec{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{pmatrix} \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\rightarrow \omega_z &= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \\
\rightarrow \vec{\omega} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\omega_z}{dt} &= \frac{\partial \omega_z}{\partial t} + u\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \underbrace{\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2}\right)}_{\rightarrow 0 \quad \text{(reibungsfrei)}} \\
\vec{v} &\neq f(t) \rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial t} = 0 \\
0 &= u\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_z}{\partial y} \\
\frac{\partial \omega_z}{\partial x} &= -\frac{x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ; \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = -\frac{y}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
u\frac{\partial \omega_z}{\partial x} + v\frac{\partial \omega_z}{\partial y} &= -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{y}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\
&= \frac{xy - xy}{2(x^2+y^2)^2} = 0
\end{aligned}
$$

Somit erfüllt das gegebene Geschwindigkeitsfeld die Wirbeltransportgleichung unter Annahme eine reibungsfreien Strömung.

d) Die Strömung muss drehungsfrei sein: $\vec{\omega} = \vec{0}$

3. Aufgabe

a) Parallelströmung + Quellenströmung: $F(z) = u_0 z + \frac{E}{2\pi}\ln(z)$

b) Potentialfunktion: $\phi = Re(F(z)) = u_0 x + \frac{E}{2\pi}\ln(\sqrt{x^2+y^2})$

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial\phi}{\partial x} = u_0 + \frac{E}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \\ v &= \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{E}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Im Staupunkt gilt $u = 0, v = 0$

$$\begin{aligned} v = 0 \quad &: \qquad y_s = 0 \\ u = 0 \quad &: \qquad x_s = -\frac{E}{2\pi u_0} \\ (x_s, y_s) \quad &= \quad \left(-\frac{E}{2\pi u_0}, 0\right), \text{bzw.} \quad (r_s, \varphi_s) = \left(\frac{E}{2\pi u_0}, \pi\right) \end{aligned}$$

Die Oberfläche des Berges entspricht einer Konturstromlinie, die auch durch den Staupunkt geht.

$$\begin{aligned} \text{Stromfunktion:} \qquad \Psi &= Im(F(z)) = u_0 y + \frac{E}{2\pi}\varphi \\ \text{im Staupunkt:} \qquad \Psi_s &= \frac{E}{2} \\ \text{für } x \to \infty : y = H \Rightarrow \Psi_0 &= u_0 H \\ \Psi_0 &= \Psi_s \quad \to u_0 H = \frac{E}{2} \\ E &= 2Hu_0 \end{aligned}$$

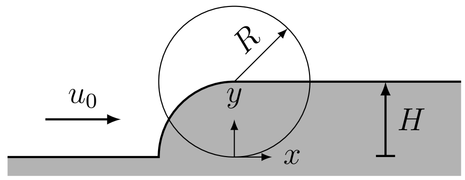
c) Gesucht ist der Bereich, in dem die v-Komponente der Strömung größer ist als die Sinkgeschwindigkeit v_F des Segelflugzeugs.

Bestimmen der Bereichsgrenze, welche die Gebiete $v < v_F$ und $v > v_F$ voneinander trennt.

$$v_F = \frac{E}{2\pi}\frac{y_F}{x_F^2 + y_F^2}$$

$$\begin{aligned} \to \qquad x_F^2 &+ \left(y_F - \frac{E}{4\pi v_F}\right)^2 = \left(\frac{E}{4\pi v_F}\right)^2 \\ \to \qquad x_F^2 &+ \left(y_F - \frac{Hu_0}{2\pi v_F}\right)^2 = \left(\frac{Hu_0}{2\pi v_F}\right)^2 \end{aligned}$$

Die Gleichung entspricht der Gleichung eines Kreises mit dem Radius $R = \frac{Hu_0}{2\pi v_F}$ und dem Kreismittelpunkt bei $(x, y) = \left(0, \frac{Hu_0}{2\pi v_F}\right)$. Die Bereichsgrenze ist also eine Kreislinie und der Kreismittelpunkt befindet sich im Abstand R über der x-Achse auf der y-Achse. Innerhalb des Kreises ist $v(x, y) > v_F$.



Anmerkung: Der Mittelpunkt des Kreises muss nicht auf dem Höhenzug liegen.

d) Zur Berechnung von (x_{max}, y_{max}) wird die Bestimmungsgleichung der Bereichsgrenze nach der x-Koordinate abgeleitet und gleich 0 gesetzt. Die ermittelte x-Koordinate wird anschließend in die Bestimmungsgleichung eingesetzt, um die y-Koordinate zu berechnen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x_{max} = 0$$

$$0 + \left(y_{max} - \frac{Hu_0}{2\pi v_F}\right)^2 = \left(\frac{Hu_0}{2\pi v_F}\right)^2$$

$$y_{max} = \frac{Hu_0}{\pi v_F} \quad \vee \quad y_{max} = 0$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x_{max} \\ y_{max} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{Hu_0}{\pi v_F} \end{pmatrix}$$

4. Aufgabe

a) Bestimmung der Koeffizienten $a_0,\ a_1,\ a_2$

(I) Haftbedingung: $v_\theta(r=R,\theta)=\omega R \rightarrow a_0=\frac{\omega R}{v_\delta}$

(II) Übergang am Grenzschichtrand: $v_\theta(r=R+\delta,\theta)=v_\delta \rightarrow 1=a_0+a_1+a_2$

(III) Wandbindungsgleichung: $\left(\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{r=R}=\eta\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial r}-\frac{v_\theta}{r^2}\right)_{r=R}$

zu (III)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta}\right)_{r=R} &= \frac{2\rho u_\infty^2}{R}\cos(\theta)(\omega c_1-2\sin\theta)\\
\left(\frac{v_\theta}{r^2}\right)_{r=R} &= v_\delta\frac{a_0}{R^2}\\
\frac{\partial v_\theta}{\partial r} &= v_\delta\left(\frac{a_1}{\delta(\theta)}+\frac{2a_2(r-R)}{\delta(\theta)^2}\right) \quad\rightarrow\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=R}=v_\delta\frac{a_1}{\delta(\theta)}\\
\left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2}\right)_{r=R} &= v_\delta\frac{2a_2}{\delta(\theta)^2}
\end{aligned}
$$

Einsetzen in die Wandbindungsgleichung:

$$
\begin{aligned}
&\frac{2\rho u_\infty^2}{R}\cos(\theta)(\omega c_1-2\sin(\theta))\\
&\qquad= \eta\left(v_\delta\frac{2a_2}{\delta(\theta)^2}+\frac{1}{R}v_\delta\frac{a_1}{\delta(\theta)}-v_\delta\frac{a_0}{R^2}\right)\\
&\qquad= \frac{\eta}{\delta(\theta)^2}v_\delta\cdot\left[a_2\left(\underbrace{2-\frac{\delta(\theta)}{R}}_{\approx 2}\right)+\frac{\delta(\theta)}{R}-a_0\frac{\delta(\theta)}{R}\left(\underbrace{\frac{\delta(\theta)}{R}+1}_{\approx 1}\right)\right]\\
&\qquad= \frac{\eta}{\delta(\theta)^2}\left[2a_2v_\delta+v_\delta\frac{\delta(\theta)}{R}-\omega\delta(\theta)\right]
\end{aligned}
$$

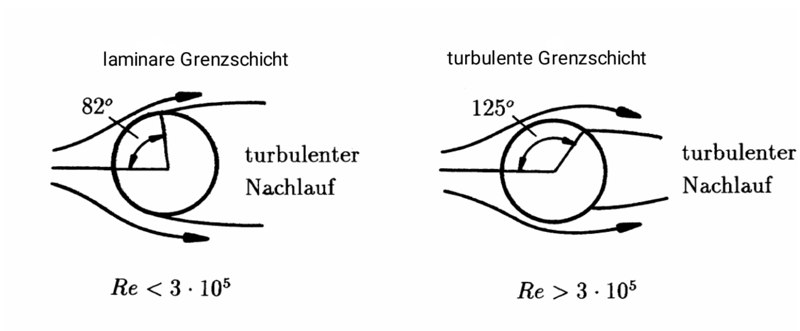
$$
\begin{aligned}
\rightarrow a_2 &= \frac{\rho u_\infty^2\delta(\theta)^2}{\eta R v_\delta}\cos(\theta)(\omega c_1-2\sin(\theta))+\frac{\omega\delta(\theta)}{2v_\delta}-\frac{\delta(\theta)}{2R}\\
\rightarrow a_1 &= 1-\frac{\omega R}{v_\delta}-\frac{1}{2v_\delta}\left[\frac{2\rho u_\infty^2\delta(\theta)^2}{\eta R}\cos(\theta)(\omega c_1-2\sin(\theta))+\omega\delta(\theta)-v_\delta\frac{\delta(\theta)}{R}\right]
\end{aligned}
$$

b) Ablösung bei $\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=R}=0$

$$
\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\right)_{r=R}=v_\delta\frac{a_1}{\delta(\theta)} \qquad\rightarrow\qquad a_1=0
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= 1 - 0 - \frac{1}{2v_\delta}\left[\frac{2\rho u_\infty^2 \delta(\theta)^2}{\eta R}\cos(\theta)(0 - 2\sin(\theta)) + 0 - v_\delta \frac{\delta(\theta)}{R}\right] \\
\leftrightarrow -\underbrace{\left(1 + \frac{\delta}{2R}\right)}_{\approx 1} &= \frac{\rho u_\infty^2 \delta(\theta)^2}{\eta R\, v_\delta}\underbrace{2\sin(\theta)\cos(\theta)}_{\sin(2\theta)} \\
\sin(2\theta) &= \frac{2\eta}{\rho\, u_\infty R\, c_2^2} = \frac{2}{c_2^2\, Re} \\
\rightarrow (r_a, \theta_a) &= \left(R, \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{2}{c_2^2\, Re}\right)\right)
\end{aligned}
$$

c) $Re_1 = \mathcal{O}(10^4)$: laminare Grenzschicht; $Re_2 = \mathcal{O}(10^6)$: turbulente Grenzschicht



Die turbulente Grenzschicht kann aufgrund ihrer höheren kinetischen Energie stärkere Druckgradienten überwinden. Daher löst die Grenzschicht später ab und der turbulente Nachlauf ist geringer als bei der laminaren Grenzschichtablösung.

5. Aufgabe

a)

$$-\int_{KF} p\vec{v}d\vec{A} = \int_{KF}\left(e+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)\rho\vec{v}d\vec{A}$$
$$\int_{KF}\left(\frac{p}{\rho}+e+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)\rho\vec{v}d\vec{A}=0$$
$$\int_{KF}\left(\frac{p}{\rho}\frac{\gamma}{\gamma-1}+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)\rho\vec{v}d\vec{A}=0$$

Mit dem idealen Gasgesetz $\frac{p}{\rho}=RT$ und der spezifischen Wärmekapazität $c_p=\frac{\gamma R}{\gamma-1}$ kann die Gleichung umgeformt werden.

$$\int_{KF}\left(RT\frac{\gamma}{\gamma-1}+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)\rho\vec{v}d\vec{A}=0$$
$$\int_{KF}\left(c_pT+\frac{\vec{v}^2}{2}\right)\rho\vec{v}d\vec{A}=0$$
$$\int_{KF} h_0\rho\vec{v}d\vec{A}=0$$
$$h_0\int_{KF}\rho\vec{v}d\vec{A}=0$$
$$\int_{KF}\rho\vec{v}d\vec{A}=0$$

Da die Ruheenthalpie h_0 für das betrachtete Strömungsfeld konstant ist, kann die Energieerhaltungsgleichung auf die Massenerhaltungsgleichung reduziert werden.

b) Temperaturverhältnis aus der Energiegleichung:

$$\begin{aligned} c_pT_0 &= c_pT_1+\frac{u_1^2}{2}\\ \Leftrightarrow\quad \frac{\gamma RT_0}{\gamma-1} &= \frac{\gamma RT_1}{\gamma-1}+\frac{u_1^2}{2}\\ \Leftrightarrow\quad \frac{T_0}{T_1} &= 1+\frac{\gamma-1}{2}M_1^2 \end{aligned}$$

Aus der Isentropenbeziehung folgt: $$\frac{p_{0,I}}{p_{1,I}}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{1,I}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Äquivalent für Zustand 2: $$\frac{p_{0,II}}{p_{1,II}}=\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{1,II}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rightarrow\frac{p_{1,II}}{p_{1,I}}=\frac{p_{0,II}}{p_{0,I}}\frac{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{1,I}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_{1,II}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}\qquad(1)$$

Aus der Druckbeziehung über den Verdichtungsstoß und $p_{2,I} = p_{2,II} = p_a$ folgt:

$$\frac{p_{1,II}}{p_{1,I}} = \frac{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_{1,I}^2 - 1\right)}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_{1,II}^2 - 1\right)} \tag{2}$$

(1) und (2) Gleichsetzen:

$$\frac{p_{0,II}}{p_{0,I}} = \frac{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_{1,I}^2 - 1\right)}{1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_{1,II}^2 - 1\right)} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{1,II}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{1,I}^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}$$

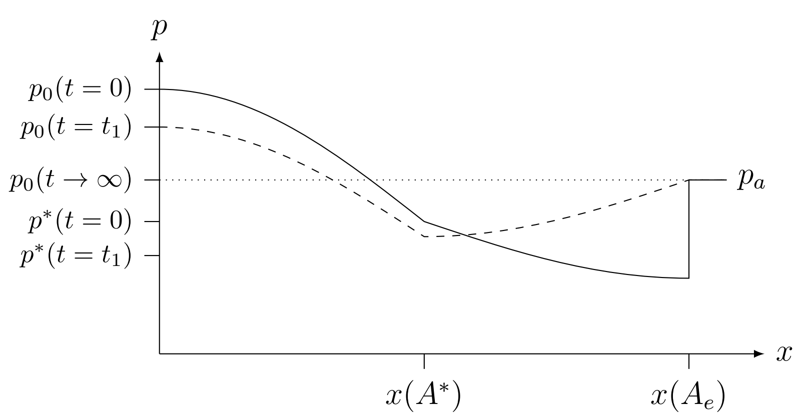
c) Über den Stoß gilt: $M_{1,II}^* \cdot M_{2,II}^* = 1 \;\rightarrow\; u_{1,II}u_{2,II} = c_{II}^{*2}$

$$\begin{aligned} u_{2,II} &= \frac{c_{II}^{*2}}{u_{1,II}} \quad \text{mit} \quad c_{II}^* = \sqrt{\gamma R T_{II}^*}, \quad u_{1,II} = M_{1,II}\sqrt{\gamma R T_{1,II}} \\ u_{2,II} &= \frac{\gamma R T_{II}^*}{M_{1,II}\sqrt{\gamma R T_{1,II}}} = \frac{\sqrt{\gamma R}}{M_{1,II}} \frac{T_{II}^*}{T_{0,II}} \sqrt{\frac{T_{0,II}}{T_{1,II}}} \sqrt{T_{0,II}} \end{aligned}$$

Energiegleichung: $\frac{T_{0,II}}{T_{1,II}} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{1,II}^2$
für $M_{II}^* = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{T_{II}^*}{T_{0,II}} = \frac{2}{\gamma+1}$
Ideale Gasgleichung: $T_{0,II} = \frac{p_{0,II}}{\rho_{II} R}$

$$u_{2,II} = \frac{\sqrt{\gamma R}}{M_{1,II}} \frac{2}{\gamma+1} \sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{1,II}^2} \sqrt{\frac{p_{0,II}}{\rho_{0,II} R}}$$

d) 1: Strömung wird überkritisch, Verdichtungsstoß am Düsenauslass
2: Strömung bleibt unterkritisch
3: $p_0(t \rightarrow \infty) = p_a$



Alternative Skizze: