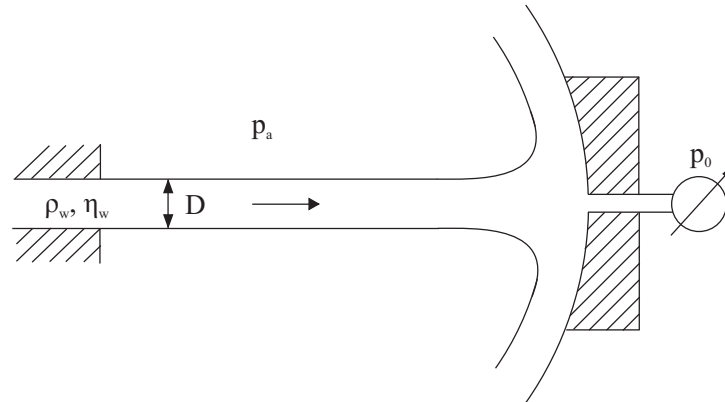


.....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

09. 04. 2021

1. Aufgabe (10 Punkte)



Eine Pelton-turbine soll experimentell untersucht werden. Bei der Strömung eines Wasserstrahles auf eine Turbinenschaufel wird an der Schaufel der Druck p_0 gemessen.

- a) Vereinfachen Sie die gegebene Impulsgleichung für eine zweidimensionale Strömung eines inkompressiblen Fluides unter Vernachlässigung der Volumenkräfte. Geben Sie die resultierenden Gleichungen in kartesischen Koordinaten an und formulieren Sie für die substantielle Ableitung der Geschwindigkeit den lokalen und konvektiven Beschleunigungsanteil.

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \nabla f$$

- b) Ermitteln Sie mit der Methode der Differentialgleichungen aus der vereinfachten x-Impulsgleichung die Kennzahl(en) des Problems. Beachten Sie bei der Wahl der Referenzgrößen, dass die Strömung durch die Druckdifferenz charakterisiert ist.
- c) Überführen Sie die gefundene(n) Kennzahl(en) in bekannte Kennzahlen der Strömungsmechanik und geben Sie an, welches Kräfteverhältnis diese Kennzahl beschreibt.
- d) Im experimentellen Versuchsaufbau wird ein Modell im Maßstab 1 : 3 untersucht. Bestimmen Sie den Druck p'_0 an der Turbinenschaufel, wenn die Stoffwerte des Wassers und der Umgebungsdruck konstant gehalten werden.

Gegeben: $D, p_0, p_a, \rho_w, \eta_w$

2. Aufgabe (13 Punkte)

Gegeben sind die Massen- und Impulserhaltungsgleichungen für inkompressible Fluide.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \nabla f$$

- a) Leiten Sie die zweidimensionale Wirbeltransportgleichung für ein Fluid mit konstanten Stoffwerten in kartesischen Koordinaten her. Begründen Sie den Wegfall einzelner Terme.

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\eta}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \omega_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial y^2} \right)$$

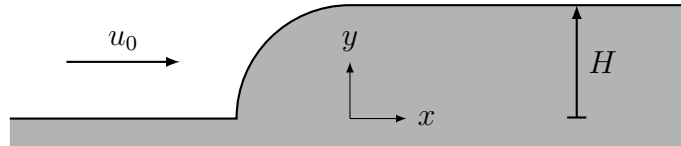
- b) Berechnen Sie für das folgende Geschwindigkeitsfeld den Wirbelvektor $\vec{\omega}$.

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

- c) Zeigen Sie, dass das gegebene Geschwindigkeitsfeld in einer reibungsfreien Strömung die Wirbeltransportgleichung erfüllt.
- d) Welche Bedingung(en) muss eine Strömung erfüllen, um potentialtheoretisch beschrieben werden zu können?

Gegeben: $\eta = konst.$, $\rho = konst.$

3. Aufgabe (11 Punkte)



Ein Höhenzug der Höhe H besitzt im Profilschnitt die Form eines ebenen Halbkörpers. Er wird mit der Geschwindigkeit u_0 angeströmt. Die sich einstellende Strömung kann näherungsweise über die Potentialtheorie beschrieben werden.

- Stellen Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ auf, mit der sich das Problem beschreiben lässt.
- Leiten Sie die Bestimmungsgleichung(en) für die Konstante(n) der komplexen Potentialfunktion her, um die Strömung mathematisch nachbilden zu können. Berechnen Sie hierfür zunächst die Koordinaten des Staupunktes.
- In welchem Bereich der $(x-y)$ -Ebene muss sich ein Segelflugzeug mit der Sinkgeschwindigkeit v_F (relativ zur Luft) aufhalten, damit es keine Höhe verliert?
- Wo liegt die höchste Stelle (x_{max}, y_{max}) , an der das Segelflugzeug den Hangaufwind nutzen kann, ohne an Höhe zu verlieren?

Gegeben: u_0, H, v_F

Hinweis:

- Ein Höhenzug ist eine kettenförmige Anordnung niedriger Berge.
- Der Höhenzug besitzt im Bereich $x \rightarrow \infty$ die Höhe H .
- $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$
- $v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

Bekannte komplexe Potentialfunktionen:

Potentialwirbel: $F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$

Quelle/Senke: $F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$

Dipol: $F(z) = \frac{M}{2\pi z}$

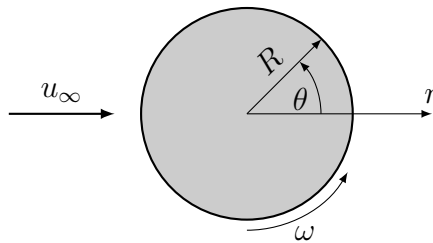
Staupunktströmung: $F(z) = \alpha z^2$

Parallelströmung: $F(z) = (u_0 - iv_0)z$

4. Aufgabe (13 Punkte)

Ein Kreiszyylinder mit dem Radius R rotiert mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω und wird mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt. Es bildet sich eine Grenzschicht aus, in der die Geschwindigkeitsverteilung wie folgt angegeben werden kann:

$$\frac{v_\theta(r, \theta)}{v_\theta(R + \delta, \theta)} = a_0 + a_1 \frac{r - R}{\delta(\theta)} + a_2 \frac{(r - R)^2}{\delta(\theta)^2} \quad \text{mit} \quad \frac{\delta(\theta)}{R} \ll 1$$



Aus potentialtheoretischen Überlegungen ist die Druckverteilung an der Körperoberfläche des Zylinders $p(R, \theta)$ bekannt:

$$p(R, \theta) - p_\infty = \frac{\rho u_\infty^2}{2} (1 - (\omega \cdot c_1 - 2 \sin \theta)^2)$$

- a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a_0, a_1, a_2 des Geschwindigkeitsprofils als Funktion der gegebenen Größen.

Gegeben für a): $R, \rho, \eta, p_\infty, u_\infty, \omega, c_1 = \text{konst.}, \delta(\theta), v_\theta(R + \delta, \theta) = v_\delta$

Hinweise für a):

- Beachten Sie, dass $\frac{\delta(\theta)}{R} \ll 1$ gilt!
- Die Wandbindungsgleichung in Polarkoordinaten lautet:

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)_{r=R} = \eta \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right)_{r=R}$$

- Einmal bestimmte Koeffizienten müssen nicht weiter eingesetzt werden.

Aufgabenteile b) und c) stehen auf der nächsten Seite!

- b) Bestimmen Sie den Ablösepunkt (r_a, θ_a) für $\omega = 0$ in Abhängigkeit der Reynoldszahl Re und c_2 . Nehmen Sie an, dass die Grenzschichtdicke $\delta(\theta)$ über nachstehende Gleichung abgebildet werden kann:

$$\delta(\theta) = c_2 \cdot R \sqrt{\sin \theta}, \quad \text{mit } c_2 = \text{konst.} \ll 1, \quad \text{und } 0 < \theta < \pi$$

Gegeben für b): $Re = \frac{\rho u_\infty R}{\eta}$, $v_\theta(R + \delta, \theta) = -2u_\infty \cdot \sin \theta$, $c_2 = \text{konst.}$

Hinweise für b):

- $2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$
 - Hinweis: Vereinfachen Sie die Gleichung für $\frac{\delta(\theta)}{R} \ll 1$ bevor Sie die Definition von $v_\theta(R + \delta, \theta)$ und $\delta(\theta)$ einsetzen.
- c) Skizzieren Sie die Strömung um den nicht rotierenden Kreiszyylinder für die Reynoldszahlen $Re_1 = \mathcal{O}(10^4)$ und $Re_2 = \mathcal{O}(10^6)$. Begründen Sie physikalisch den Unterschied zwischen den Strömungsverläufen.

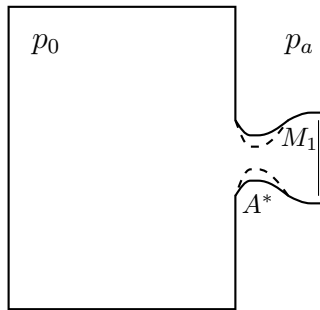
5. Aufgabe (13 Punkte)

- a) Gegeben sind die Massen- und Energieerhaltungsgleichung für stationäre, reibungsfreie Strömungen in integraler Form.

$$\int_{KF} \rho \vec{v} d\vec{A} = 0$$

$$- \int_{KF} p \vec{v} d\vec{A} = \int_{KF} \left(e + \frac{v^2}{2} \right) \rho \vec{v} d\vec{A}$$

mit $e = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p}{\rho}$, KF : Kontrollfläche
 Beweisen Sie die Redundanz der Energiegleichung für eine adiabate und reibungsfreie Strömung.



- b) Aus einem großen Kessel mit veränderlichem minimalen Querschnitt A^* strömt Luft durch eine konvergent-divergente Düse ins Freie. Am Düsenauslass stellt sich zunächst die Machzahl $M_{1,I}$ unmittelbar vor dem senkrechten Verdichtungsstoß ein. Nach einer gewissen Zeit sinkt der Innendruck im Kessel und der minimale Düsenquerschnitt A_{II}^* wird derart verkleinert, dass im engsten Querschnitt der kritische Druck erreicht wird und sich am Düsenauslass die Machzahl $M_{1,II}$ unmittelbar vor dem senkrechten Verdichtungsstoß einstellt.

Bestimmen Sie das Verhältnis der Ruhedrucke im Kesselinneren $\frac{p_{0,II}}{p_{0,I}} = f(M_{1,I}, M_{1,II})$.

- c) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $u_{2,II}$ hinter dem Stoß in Abhängigkeit von Druck $p_{0,II}$ und Dichte der Luft im Kesselinneren $\rho_{0,II}$ sowie der Machzahl vor dem Stoß $M_{1,II}$.
- d) Im Folgenden wird der Querschnitt A_{II}^* konstant gehalten.

Skizzieren Sie die Verläufe des statischen Drucks vom Kesselinneren bis kurz hinter den Düsenauslass zu drei verschiedenen Zeitpunkten.

$$p_{0,II}(t = 0), \quad \frac{p^*(t>0)}{p_{0,II}(t>0)} > 0,528, \quad p_{0,II}(t \rightarrow \infty)$$

Gegeben: $p_a, p_{0,II} < p_{0,I}, M_{1,I}, M_{1,II}, \gamma, R$

Hinweise:

- $c_p = \frac{\gamma R}{\gamma-1}$

- Isentropenbeziehung: $\frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\gamma-1}$

- Über den senkrechten Verdichtungsstoß gilt: $\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} (M_1^2 - 1)$