....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

06. 08. 2019

1. Aufgabe

a)

$$\begin{aligned} \text{Einflussgrößen } k &: g, u_\infty, \rho, \eta, h, f \\ \text{Dimensionen } r &: m, s, kg \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = 6, r = 3 \Rightarrow k - r = 3 \text{ Kennzahlen}$$

b) Wiederkehrende Variablen: u_∞, ρ, h

$$\Pi_1 = g \cdot u_\infty^{\alpha_1} \cdot h^{\beta_1} \cdot \rho^{\gamma_1}$$

$$\begin{aligned} m &: \ 1 + \alpha_1 + \beta_1 - 3\gamma_1 = 0 \\ kg &: \ 0 + 0 + 0 + \gamma_1 = 0 \Rightarrow \gamma_1 = 0 \\ s &: \ -2 - \alpha_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 1$$

$$\Pi_1 = \frac{gh}{u_\infty^2}$$

$$\Pi_2 = \eta \cdot u_\infty^{\alpha_2} \cdot h^{\beta_2} \cdot \rho^{\gamma_2}$$

$$\begin{aligned} m &: \ -1 + \alpha_2 + \beta_2 - 3\gamma_2 = 0 \\ kg &: \ 1 + 0 + 0 + \gamma_2 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = -1 \\ s &: \ -1 - \alpha_2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta_2 = -1$$

$$\Pi_2 = \frac{\eta}{u_\infty h \rho}$$

$$\Pi_3 = f \cdot u_\infty^{\alpha_3} \cdot h^{\beta_3} \cdot \rho^{\gamma_3}$$

$$\begin{aligned} m &: \ 0 + \alpha_3 + \beta_3 - 3\gamma_3 = 0 \\ kg &: \ 0 + 0 + 0 + \gamma_3 = 0 \Rightarrow \gamma_3 = 0 \\ s &: \ -1 - \alpha_3 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \beta_3 = 1$$

$$\Pi_3 = \frac{fh}{u_\infty}$$

c)

$$\Pi_1 = \frac{gh}{u_\infty^2} = \frac{1}{Fr^2}$$

$$\Pi_2 = \frac{\eta}{u_\infty h \rho} = \frac{1}{Re}$$

$$\Pi_3 = \frac{fh}{u_\infty} = Sr$$

d) Bestimmung der Frequenz f_R mit der Strouhalzahl:

$$\begin{aligned} Sr_M &= Sr_R \\ \frac{f_M h_M}{u_{\infty,M}} &= \frac{f_R h_R}{u_{\infty,R}} \\ f_R &= f_M \frac{u_{\infty,R}}{u_{\infty,M}} \frac{h_M}{h_R} \end{aligned}$$

Bestimmung des Geschwindigkeitsverhältnisses $\frac{u_{\infty,R}}{u_{\infty,M}}$ aus der Froudezahl:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Fr_M^2} &= \frac{1}{Fr_R^2} \\ \frac{\cancel{g_M} h_M}{u_{\infty,M}^2} &= \frac{\cancel{g_R} h_R}{u_{\infty,R}^2} \\ \rightarrow \frac{u_{\infty,R}}{u_{\infty,M}} &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_R = f_M \sqrt{50} \frac{1}{50} = \frac{\sqrt{2}}{10} f_M$$

2. Aufgabe

a) Randbedingungen:

$$y = 0: \quad u = u_\infty$$
$$y = h: \quad u = 0$$

1. Integration:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\,y + C_1$$

2. Integration:

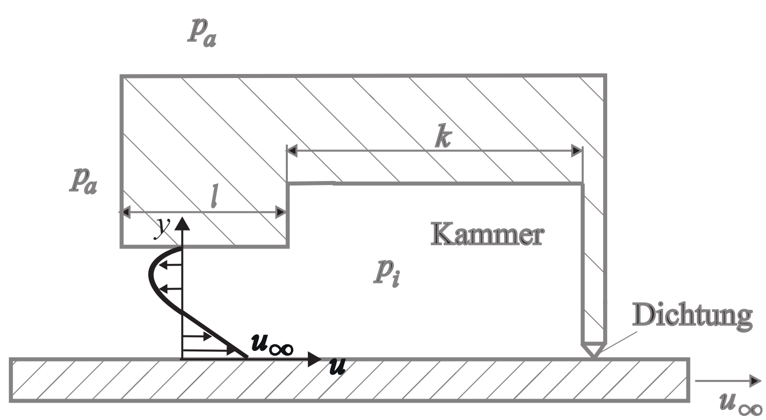
$$u = \frac{1}{\eta}\frac{dp}{dx}\frac{1}{2}\,y^2 + C_1\,y + C_2$$

Durch Einsetzen der Randbedingungen ergibt sich

$$C_2 = u_\infty \qquad\qquad C_1 = -\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\,h^2 + u_\infty\right)$$

$$\Longrightarrow u(y) = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\,y(y - h) + u_\infty\left(1 - \frac{y}{h}\right)$$

b) Geschwindigkeitsverlauf $u(y)$:



c) Der Volumenstrom durch den Spalt ist Null, da die Dichtung das Wegfließen der Flüssigkeit verhindert.

$$\dot V = b\int_0^h u(y)\,dy \equiv 0$$

$$\dot V = b\int_0^h \left(\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}\,y(y - h) + u_\infty\left(1 - \frac{y}{h}\right)\right)dy = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{b}{2} \cdot h \left(u_\infty - \frac{h^2}{6\eta} \frac{dp}{dx} \right) = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{6\eta u_\infty}{h^2}$$

Randbedingung: $x = 0: \quad p = p_a$

Integration:

$$p(x) = \frac{6\eta u_\infty}{h^2} x + C_3$$

$$\Longrightarrow C_3 = p_a$$

$$\Longrightarrow p(x) = \frac{6\eta u_\infty}{h^2} x + p_a$$

d) aus Teil b):

$$\dot{V} = b \int_0^h u(y)\, dy = \frac{b}{2} \cdot h \left(u_\infty - \frac{h^2}{6\eta} \frac{dp}{dx} \right)$$

nach $\frac{dp}{dx}$ umstellen:

$$\frac{dp}{dx} = \frac{6u_\infty \eta}{h^2} - \frac{12\eta \dot{V}}{bh^3}$$

integrieren von 0 bis l:

$$\int_{p(x=0)}^{p(x=l)} dp = \int_0^l \left(\frac{6u_\infty \eta}{h^2} - \frac{12\eta \dot{V}}{bh^3} \right) dx$$

$$p(x=l) - p(x=0) = \frac{6u_\infty \eta l}{h^2} - \frac{12\eta \dot{V} l}{bh^3}$$

mit $p(x=l) = \frac{9}{10} p_{i,b)} = \frac{9}{10} \left(\frac{6\eta u_\infty l}{h^2} + p_a \right) = \frac{27}{5} \frac{\eta u_\infty l}{h^2} + \frac{9}{10} p_a$ und $p(x=0) = p_a$

$$\frac{27}{5} \frac{\eta u_\infty l}{h^2} - \frac{1}{10} p_a = \frac{6u_\infty \eta l}{h^2} - \frac{12\eta \dot{V} l}{bh^3}$$

nach $\dot{V}$ umstellen:

$$\begin{aligned}\frac{12\eta l}{bh^3}\dot{V} &= \frac{3}{5}\frac{u_\infty l\eta}{h^2} + \frac{1}{10}p_a \\ \rightarrow \dot{V} &= \frac{1}{20}u_\infty hb + \frac{p_a h^3 b}{120\eta l}\end{aligned}$$

3. Aufgabe

a) 2 Halbkörper: 2 Quellen im Abstand b + Parallelströmung
Symmetrisches Strömungsfeld: Quellen gleicher Stärke

$$
\begin{aligned}
F(z) &= F_{Parallel} + F_{Quelle_1} + F_{Quelle_2} \\
\Rightarrow F(z) &= u_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln z + \frac{E}{2\pi}\ln(z - ib) \text{ mit } u_\infty, E, b > 0 \\
\text{alternativ} \quad F(z) &= u_\infty z + \frac{E}{2\pi}\ln(z + i\frac{b}{2}) + \frac{E}{2\pi}\ln(z - i\frac{b}{2}) \text{ mit } u_\infty, E, b > 0
\end{aligned}
$$

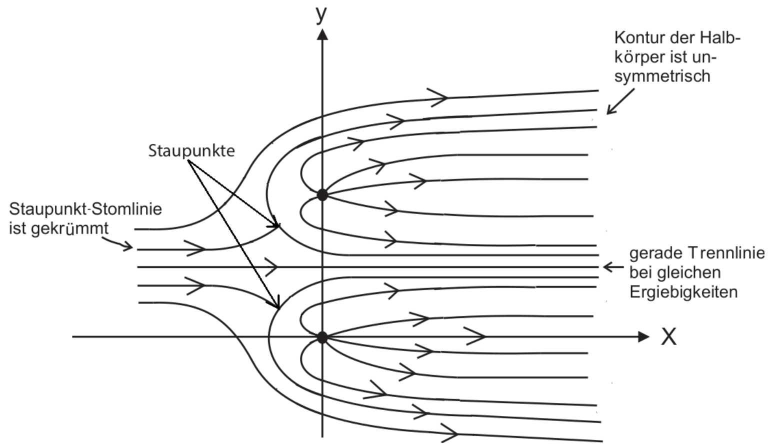
Hinweis: Quellterme und Rechenoperation bei $\ln(z \pm ib)$ abhängig vom Koordinatensystem aus der Skizze in Teil c)

b) komplex konjugierte Geschwindigkeit $\bar{w} = \frac{dF}{dz} = u - iv$

$$
\begin{aligned}
\bar{w} = \frac{dF}{dz} &= u_\infty + \frac{E}{2\pi z} + \frac{E}{2\pi(z - ib)} \\
\text{mit } \frac{1}{z} &= \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\
\text{und } \frac{1}{(z - ib)} &= \frac{1}{x + i(y - b)} \frac{(x - i(y - b))}{(x - i(y - b))} = \frac{(x - i(y - b))}{x^2 + (y - b)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow \bar{w} &= u_\infty + \frac{E}{2\pi}\left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2} + \frac{(x - i(y - b))}{x^2 + (y - b)^2}\right) \\
u(x, y) &= u_\infty + \frac{E}{2\pi}\left(\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + (y - b)^2}\right) \\
v(x, y) &= \frac{E}{2\pi}\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y - b}{x^2 + (y - b)^2}\right)
\end{aligned}
$$

c) Skizze:


y
Kontur der Halb-
körper ist un-
symmetrisch
Staupunkte
Staupunkt-Stomlinie
ist gekrümmt
gerade Trennlinie
bei gleichen
Ergiebigkeiten
X

4. Aufgabe

a)

$$\frac{u}{U_a} = a_0 + a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + a_4\left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

$$\frac{\partial\left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)} = a_1 + 2a_2\left(\frac{y}{\delta}\right) + 3a_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + 4a_4\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

$$\frac{\partial^2\left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 2a_2 + 6a_3\left(\frac{y}{\delta}\right) + 12a_4\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

Randbedingungen:

$$1.RB \quad \frac{y}{\delta} = 0 \;:\; \frac{u}{U_a} = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

$$2.RB \quad \frac{y}{\delta} = 1 \;:\; \frac{u}{U_a} = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$$

$$3.RB \quad \frac{y}{\delta} = 0 \;:\; \frac{\partial^2\left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 0 \Rightarrow a_2 = 0$$

$$4.RB \quad \frac{y}{\delta} = 1 \;:\; \frac{\partial\left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)} = 0 \Rightarrow a_1 + 3a_3 + 4a_4 = 0$$

$$5.RB \quad \frac{y}{\delta} = 1 \;:\; \frac{\partial^2\left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)^2} = 0 \Rightarrow 6a_3 + 12a_4 = 0$$

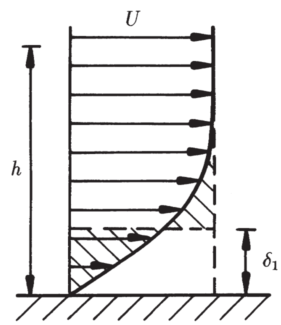
Damit folgt aus der $5.RB$ $\quad a_3 = -2a_4,$

eingesetzt in die $4.RB$ $\quad a_1 = 2a_4,$

eingesetzt in die $2.RB$ $\quad a_4 = 1 \rightarrow a_3 = -2 \rightarrow a_1 = 2$

$$\frac{u}{U_a} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

b) 1.) Verdrängungsdicke: Abstand, um den der Körper in einer theoretisch reibungsfreien Strömung aufgedickt werden muss, sodass sich der gleiche Massenstrom wie in der tatsächlichen, reibungsbehafteten Strömung einstellt.



Die beiden schraffierten Flächen sind gleich groß.

c) Die von Kármánsche Integralbeziehung ergibt für das ebene Problem: $\dfrac{d\delta_2}{dx} = \dfrac{\tau_w}{\rho U_a^2}$

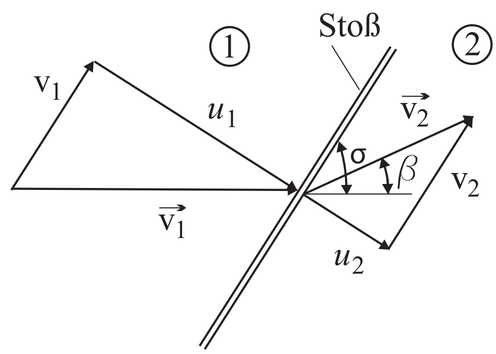
$$
\begin{aligned}
\text{mit} \quad \frac{d\delta_2}{dx} &= \frac{37}{315}\frac{d\delta}{dx} \\
\text{und} \quad \tau_w &= \eta \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \frac{\eta U_a}{\delta} \left.\frac{\partial\left(\frac{u}{U_a}\right)}{\partial\left(\frac{y}{\delta}\right)}\right|_{\frac{y}{\delta}=0} = \frac{2\eta U_a}{\delta} \\
\rightarrow \frac{37}{315}\frac{d\delta}{dx} &= \frac{2\eta}{\rho U_a \delta} \\
\delta d\delta &= \frac{630}{37}\frac{\eta}{\rho U_a}dx \\
\frac{\delta^2}{2} &= \frac{630}{37}\frac{\eta x}{\rho U_a} \\
\frac{\delta}{x} &= \sqrt{\frac{1260}{37}}\frac{1}{\sqrt{Re_x}} = \frac{5.84}{\sqrt{Re_x}} \quad q.e.d.
\end{aligned}
$$

d)

$$h_E = \delta(L) = \frac{5,84}{\sqrt{\frac{\rho U_a}{\eta L}}}$$

5. Aufgabe

a) Die Normalkomponente der Geschwindigkeit stromab des Stoßes u_2 ist kleiner als die Normalkomponente der Geschwindigkeit stromauf u_1. Da sich die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten stromauf v_1 und stromab v_2 des Stoßes nicht unterscheiden, werden die Stromlinien zum Stoß hin umgelenkt.



b)

$$
\begin{aligned}
M_{n,1} &= \frac{u_1}{c_1} = M_1 sin(\sigma) \\
\rightarrow \sigma &= sin^{-1}\left(\frac{u_1}{M_1\sqrt{\gamma R T_1}}\right)
\end{aligned}
$$

c) $tan(\sigma - \beta) = \dfrac{u_2}{v_2} = \dfrac{u_2}{v_1} = \dfrac{u_2}{v}$

u_2 aus Prandtl-Beziehung mit $c^{*2} = \gamma R T^*$: $u_2 = \left(\gamma R T^* - \dfrac{\gamma-1}{\gamma+1} v_1^2\right) \dfrac{1}{u_1}$

$$
\begin{aligned}
\rightarrow tan(\sigma - \beta) &= \frac{\gamma R T^* - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_1^2}{u_1 v_1} \\
\beta &= \sigma - tan^{-1}\left(\frac{\gamma R T^* - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_1^2}{u_1 v_1}\right) \\
\beta &= sin^{-1}\left(\frac{u_1}{M_1\sqrt{\gamma R T_1}}\right) - tan^{-1}\left(\frac{\gamma R T^* - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_1^2}{u_1 v_1}\right)
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\text{Energiegleichung: } c_p T_0 &= c_p T + \frac{u^2}{2} = konst. \quad T_0 \text{ ist über den Stoß konstant} \\
\text{Weg 1: mit } T_0 &= \frac{\gamma+1}{2} T^* \quad \text{folgt } c_p \frac{\gamma+1}{2} T^* = c_p T_2 + \frac{u_2^2 + v_2^2}{2} \\
\text{Weg 2:} \quad c_p T^* + \frac{c^{*2}}{2} &= c_p T_2 + \frac{u_2^2 + v_2^2}{2} \\
\frac{\gamma R T^*}{\gamma - 1} + \frac{\gamma R T^*}{2} &= \frac{\gamma R T_2}{\gamma - 1} + \frac{\frac{\left(\gamma R T^* - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_1^2\right)^2}{u_1^2} + v_1^2}{2} \\
\rightarrow T_2 &= \frac{\gamma+1}{2} T^* - \frac{\frac{\left(\gamma R T^* - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} v_1^2\right)^2}{u_1^2} + v_1^2}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma R}
\end{aligned}
$$

6. Aufgabe

a) aus $\vec{\omega} = \left(\vec{\nabla} \times \vec{v}\right)$ folgt für eine ebene Strömung mit $w = 0, \dfrac{\partial}{\partial z} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\left(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = \left(\vec{\omega}^T \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = \begin{pmatrix} \cancel{\omega_x} \frac{\partial u}{\partial x} + \cancel{\omega_y} \frac{\partial u}{\partial y} + \omega_z \frac{\cancel{\partial u}}{\cancel{\partial z}} \\ \cancel{\omega_x} \frac{\partial v}{\partial x} + \cancel{\omega_y} \frac{\partial v}{\partial y} + \omega_z \frac{\cancel{\partial v}}{\cancel{\partial z}} \\ \cancel{\omega_x} \frac{\partial w}{\partial x} + \cancel{\omega_y} \frac{\partial w}{\partial y} + \omega_z \frac{\cancel{\partial w}}{\cancel{\partial z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

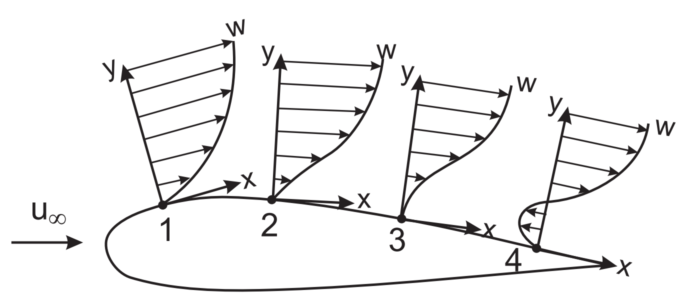
im Folgenden gilt $\omega = \omega_z$

$$\frac{d\omega}{dt} = \overbrace{\frac{\cancel{\partial \omega}}{\cancel{\partial t}}}^{\text{stationär}} + u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\cancel{\partial^2 \omega}}{\cancel{\partial z^2}} \right)$$

$$u\frac{\partial \omega}{\partial x} + v\frac{\partial \omega}{\partial y} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right)$$

b) Der Körper erfÃd'hrt keinen Strömungswiderstand. Die inkompressible Strömung ist in der Potentialtheorie drehungsfrei und reibungsfrei und die Kontur entspricht einer Stromlinie, weshalb keine Widerstandskraft auftreten kann.

c) Skizze:



d) Bei inkompressiblen Strömungen sind Dichteänderungen gegenüber den Geschwindigkeitsänderungen zu vernachlässigen.
Als Kriterium wird die Machzahl herangezogen; i.a. wird $M < 0,3$ für die inkompressible Strömung angenommen.