

.....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

01. 03. 2019

1. Aufgabe

a) Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$\nabla \underset{\text{Zyl. Koord.}}{=} \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \hat{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \underset{\text{Zyl. Koord.}}{=} v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z \hat{=} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix}$$

Eingesetzt:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z) = 0$$

Wichtig beim Ausmultiplizieren: Skalarprodukt der Einheitsvektoren über Kronecker-Delta

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = j \\ 0 & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

Die einzelnen Komponenten von $\nabla \cdot \vec{v}$ mit Nutzung des Kronecker-Delta:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot (v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z) &= \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_r}_{\delta_{rr}=1} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi}_{\delta_{r\varphi}=0} \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z}_{\delta_{rz}=0} \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z) &\underset{(*)}{=} \frac{1}{r} \left(v_r + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \cdot (v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z) &= \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r}_{\delta_{zr}=0} \frac{\partial v_r}{\partial z} + \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\varphi}_{\delta_{z\varphi}=0} \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \underbrace{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_z}_{\delta_{zz}=1} \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Partielle Ableitungen der Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ nach φ (aus Hinweis):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} &= \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\vec{e}_r \\ \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} &= 0\end{aligned}$$

Bei (*) muss die Produktregel berücksichtigt werden, wenn die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ der Klammer gebildet wird. Die Produktregel ist auch bei den anderen Komponenten des Kontinuitätsgleichung anwendbar, allerdings sind hier die partiellen Ableitungen der Basisvektoren konstant ($\frac{\partial \vec{e}_i}{\partial r} = \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial z} = \vec{0}$):

$$\begin{aligned} (*) &= \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot (v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z) \\ &= \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} (v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z) \\ &= \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \cdot \left(v_r \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} + \vec{e}_r \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_\varphi \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial \vec{e}_z}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \cdot \left(\vec{e}_\varphi v_r + \vec{e}_r \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \vec{e}_r v_\varphi + 0 + \vec{e}_z \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(\delta_{\varphi\varphi} v_r + \delta_{\varphi r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \delta_{\varphi\varphi} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \delta_{\varphi r} v_\varphi + 0 + \delta_{\varphi z} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{1}{r} \left(v_r + 0 + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - 0 + 0 + 0 \right)\end{aligned}$$

Damit kann die Kontinuitätsgleichung in Zylinderkoordinaten geschrieben werden als:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Impulsgleichung:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}$$

Summanden der Impulsgleichung in z-Richtung:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_z}{dt} &= \rho \left[\vec{e}_z \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial (v_z \vec{e}_z)}{\partial \varphi} \right] \\ &= \rho \vec{e}_z \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right] \\ [\rho \vec{g}]_z &= \rho g_z \\ [\nabla p]_z &= \vec{e}_z \frac{\partial p}{\partial z} \\ [\eta \nabla^2 v]_z &= \nabla^2 v_z \vec{e}_z \\ &\stackrel{\text{Hinweis}}{=} \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial (v_z \vec{e}_z)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 (v_z \vec{e}_z)}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 (v_z \vec{e}_z)}{\partial z^2} \right) \\ &\stackrel{\vec{e}_z = \text{const}}{=} \eta \vec{e}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Damit kann die Impulsgleichung in Zylinderkoordinaten geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \rho \vec{e}_z \left[\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right] &= \dots \\ \dots \rho g_z - \vec{e}_z \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \vec{e}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

b) Vereinfachungen:

- stationär: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- ohne Gravitation: $\vec{g} = \begin{pmatrix} g_r \\ g_\varphi \\ g_z \end{pmatrix} = \vec{0}$
- rotationssymmetrisch: $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Impuls:

$$\rho \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right)$$

c) dimensionslose Größen:

$$\bar{v}_r = \frac{v_r}{u_D}, \bar{v}_z = \frac{v_z}{u_D}, \bar{z} = \frac{z}{R}, \bar{r} = \frac{r}{R}, \bar{p} = \frac{p}{\rho u_D^2}, \rho, \eta = \text{konst.}$$

z-Impuls:

$$\begin{aligned} \rho \bar{v}_r u_D \frac{\partial (\bar{v}_z u_D)}{\partial (\bar{r} R)} + \rho \bar{v}_z u_D \frac{\partial (\bar{v}_z u_D)}{\partial (\bar{z} R)} &= -\frac{\partial (\bar{p} \rho u_D^2)}{\partial (\bar{z} R)} + \eta \left(\frac{\partial^2 (\bar{v}_z u_D)}{\partial (\bar{r} R)^2} + \frac{\partial^2 (\bar{v}_z u_D)}{\partial (\bar{z} R)^2} \right) \\ \frac{u_D^2 \rho \bar{v}_r}{R} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}} + \frac{u_D^2 \rho \bar{v}_z}{R} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\rho u_D^2}{R} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \eta \frac{u_D}{R^2} \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{z}^2} \right) \\ \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{z}} &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} + \underbrace{\frac{\eta}{\rho u_D R}}_K \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \bar{r}} \right) + \frac{\partial^2 \bar{v}_z}{\partial \bar{z}^2} \right) \end{aligned}$$

die Strömung wird durch die Reynoldszahl Re beschrieben:

$$K = \frac{\eta}{\rho u_D R} = \frac{1}{Re}$$

2. Aufgabe

a)

$$\frac{d\tau_{\Theta\Phi}}{d\Theta} = \frac{-2\tau_{\Theta\Phi}}{\tan \Theta} \Rightarrow \frac{d\tau_{\Theta\Phi}}{\tau_{\Theta\Phi}} = \frac{-2}{\tan \Theta} d\Theta \Rightarrow \ln \tau_{\Theta\Phi} = -2 \ln(\sin \Theta) + c'_1$$

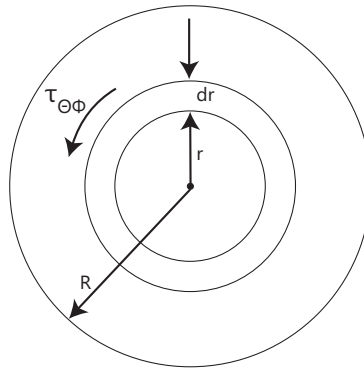
$$\Leftrightarrow \tau_{\Theta\Phi} = e^{\ln(\frac{1}{\sin^2 \Theta}) + c'_1} = \frac{c_1}{\sin^2 \Theta}$$

Moment M wirkt auf die Platte:

$$M = \int_0^R 2\pi r r \tau_{\Theta\Phi} \Big|_{\Theta=\frac{\pi}{2}} dr, \text{ da } c_1|_{\Theta=\frac{\pi}{2}} \neq f(r)$$

$$\Leftrightarrow M = \int_0^R 2\pi r^2 c_1 dr = \frac{2}{3} \pi R^3 c_1 \Rightarrow c_1 = \frac{3M}{2\pi R^3}$$

$$\Rightarrow \tau_{\Theta\Phi} = \frac{3M}{2\pi R^3 \sin^2 \Theta}$$



b)

$$\tau_{\Theta\Phi} = -\eta \left(\sin \Theta \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\frac{v_{\Phi}}{r \sin \Theta} \right) + \frac{1}{\sin \Theta} \frac{\partial v_{\Theta}}{\partial \Phi} \right) = 0, \text{ da } v_{\Theta} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3M}{2\pi R^3 \sin^2 \Theta} = -\eta \sin \Theta \frac{d}{d\Theta} \left(\frac{v_{\Phi}}{r \sin \Theta} \right) \Leftrightarrow \frac{-3M}{2\pi R^3 \eta \sin^3 \Theta} d\Theta = d \left(\frac{v_{\Phi}}{r \sin \Theta} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{3M}{4\pi R^3 \eta} \left(\frac{\cos \Theta}{\sin^2 \Theta} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} \right) \right) = \frac{v_{\Phi}}{r \sin \Theta} + c_2$$

$$\Rightarrow \frac{3M}{4\pi R^3 \eta} \left(\frac{1}{\tan \Theta} + \frac{\sin \Theta}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} \right) \right) + c_2 \sin \Theta = \frac{v_{\Phi}}{r}$$

Randbedingung:

$$\Theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow v_{\Phi} = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$\Theta = \Theta_k \Rightarrow v_{\Phi} = \omega r$$

$$\Rightarrow v_{\Phi} = \frac{3M}{4\pi R^3 \eta} \left[\frac{1}{\tan \Theta} + \frac{\sin \Theta}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos \Theta}{1 - \cos \Theta} \right) \right] r$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{3M}{4\pi R^3 \omega} \left[\frac{1}{\tan \Theta_k} + \frac{\sin \Theta_k}{2} \ln \left(\frac{1 + \cos \Theta_k}{1 - \cos \Theta_k} \right) \right]$$

3. Aufgabe

- a) • inkompressibel
- stationär
- zwei-dimensional
- reibungsfrei, drehungsfrei

b)

$$F(z) = u_{\infty}z + \frac{M}{2\pi z} + i\frac{M}{2\pi z} \text{ mit } u_{\infty}, M > 0$$

c)

$$\begin{aligned} F(z) &= u_{\infty}r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) + \frac{M}{2\pi r e^{i\varphi}} + i\frac{M}{2\pi r e^{i\varphi}} \\ F(z) &= u_{\infty}r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) + \frac{M}{2\pi r}(\cos(\varphi) - i\sin(\varphi))(1 + i) \\ F(z) &= \underbrace{u_{\infty}r\cos(\varphi) + \frac{M}{2\pi r}(\cos(\varphi) + \sin(\varphi))}_{Re} + i \underbrace{\left(u_{\infty}r\sin(\varphi) + \frac{M}{2\pi r}(\cos(\varphi) - \sin(\varphi))\right)}_{Im} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(r, \varphi) &= u_{\infty}r\cos(\varphi) + \frac{M}{2\pi r}(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \\ \Psi(r, \varphi) &= u_{\infty}r\sin(\varphi) + \frac{M}{2\pi r}(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} v_r &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} = u_{\infty}\cos(\varphi) - \frac{M}{2\pi r^2}(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \\ v_{\varphi} &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -u_{\infty}\sin(\varphi) + \frac{M}{2\pi r^2}(\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) \end{aligned}$$

e) Staupunkt: $v_r = v_{\varphi} = 0$

$$\begin{aligned} v_r = 0 : u_{\infty}\cos(\varphi) &= \frac{M}{2\pi r^2}(\cos(\varphi) + \sin(\varphi)) \\ r^2 &= \frac{M}{2\pi u_{\infty}}(1 + \tan(\varphi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_\varphi = 0 : u_\infty \sin(\varphi) &= \frac{M}{2\pi r^2} (\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) \\
r^2 \text{ einsetzen: } u_\infty \sin(\varphi) &= \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi u_\infty}{M} \frac{\cos(\varphi) - \sin(\varphi)}{1 + \tan(\varphi)} \\
1 + \tan(\varphi) &= \frac{1}{\tan(\varphi)} - 1 \\
\tan^2(\varphi) + 2\tan(\varphi) - 1 &= 0 \\
\tan(\varphi) &= -1 \pm \sqrt{2} \\
\varphi &= \tan^{-1}(-1 \pm \sqrt{2}) \\
\rightarrow r &= \sqrt{\frac{\pm \sqrt{2} M}{2\pi u_\infty}}
\end{aligned}$$

somit ergeben sich folgende Koordinaten des Staupunktes:

$$\varphi_{s1} = \tan^{-1}(-1 + \sqrt{2}) = \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{8}\right), r_{s1} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} M}{2\pi u_\infty}}$$

Alternativer Lösungsweg:

$$\begin{aligned}
v_\varphi = 0 : u_\infty \sin(\varphi) &= \frac{M}{2\pi r^2} (\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) \\
r^2 \text{ einsetzen: } u_\infty \sin(\varphi) &= \frac{M}{2\pi} \frac{2\pi u_\infty}{M} \frac{\cos(\varphi) - \sin(\varphi)}{1 + \tan(\varphi)} \\
\sin(\varphi) &= \frac{1}{1 + \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}} (\cos(\varphi) - \sin(\varphi)) \\
0 &= \sin(\varphi)\cos(\varphi) + \sin^2(\varphi) - \cos^2(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\varphi) \\
\sin(2\varphi) &= \cos(2\varphi) \\
\rightarrow \varphi &= \frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8} \rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0, \tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) < -1
\end{aligned}$$

somit ergeben sich dieselben Koordinaten des Staupunktes:

$$\varphi_{s1} = \tan^{-1}\left(\frac{\pi}{8}\right), r_{s1} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} M}{2\pi u_\infty}}$$

4. Aufgabe

a) Aus der Eulergleichung

$$u_a(x) \frac{du_a(x)}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx}$$

folgt mit $p = \text{konst.}$, dass $u_a(x) = u_\infty = \text{konst.}$

b) 1. Randbedingung: Haftbedingung: $\frac{y}{\delta} = 0 \rightarrow u = 0$

2. Randbedingung: Grenzschichttrand: $\frac{y}{\delta} = 1 \rightarrow u = u_\infty$

3. Randbedingung: x-Impulsgleichung an der Wand, kein Druckgradient:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial u}{\partial x} - v_A \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \\ -v_A \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \end{aligned}$$

aus 1. folgt $a_0 = 0$

aus 2. folgt $1 = a_1 + a_2$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= u_a \left(\frac{a_1}{\delta} + \frac{2a_2 y}{\delta^2} \right) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{u_a a_1}{\delta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= u_a \frac{2a_2}{\delta^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Big|_{y=0} \end{aligned}$$

aus 3. folgt

$$-v_A \frac{u_a a_1}{\delta} = \nu \frac{u_a 2a_2}{\delta^2} \rightarrow a_1 = -\frac{\nu 2a_2}{\delta v_A}$$

in 2. einsetzen liefert

$$\begin{aligned} 1 &= -\frac{\nu 2a_2}{\delta v_A} + a_2 \rightarrow a_2 = \frac{1}{1 - \frac{2\nu}{\delta v_A}} \\ \rightarrow a_1 &= 1 - a_2 = \frac{-\frac{2\nu}{\delta v_A}}{1 - \frac{2\nu}{\delta v_A}} = -\frac{1}{\frac{\delta v_A}{2\nu} - 1} \end{aligned}$$

mit $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ ergibt sich für das Geschwindigkeitsprofil

$$\frac{u(x, y)}{u_\infty} = -\frac{1}{\frac{\delta(x)v_A\rho}{2\eta} - 1} \frac{y}{\delta(x)} + \frac{1}{1 - \frac{2\eta}{\delta(x)v_A\rho}} \left(\frac{y}{\delta(x)} \right)^2.$$

c)

$$\begin{aligned}\tau_w &= \eta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \\ \text{mit } \frac{\partial u}{\partial y} &= u_\infty \left(-\frac{1}{\frac{\delta^2(x)v_{A\rho}}{2\eta} - \delta(x)} + \frac{2}{\delta(x) - \frac{2\eta}{v_{A\rho}}} \frac{y}{\delta(x)} \right) \\ \rightarrow \tau_w &= -\frac{u_\infty \eta}{\frac{\delta^2(x)v_{A\rho}}{2\eta} - \delta(x)}\end{aligned}$$

d) Mithilfe einer Grenzschichtabsaugung kann eine Grenzschichtablösung, die in den meisten Anwendungsfällen vermieden werden soll, verzögert oder sogar verhindert werden.

5. Aufgabe

a) der Kesseldruck p_K entspricht dem Ruhedruck p_0

Verhältnis von $\frac{p}{p_0} = \frac{p}{p_K}$ mit der Energiegleichung, angewendet auf den Ruhezustand:

$$h_0 = h + \frac{u^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } h = c_p T &\Rightarrow c_p T_0 = c_p T + \frac{u^2}{2} \\ \text{mit } c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} &\Rightarrow \frac{\gamma R T_0}{\gamma - 1} = \frac{\gamma R T}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} \\ &\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma R T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \\ \text{mit } \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \\ \text{folgt } \frac{p}{p_K} &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{\frac{-\gamma}{\gamma - 1}} \end{aligned}$$

Kesseldruck p_K bestimmen:

$$\begin{aligned} p_K &= \frac{p_K}{p_1} \cdot \frac{p_1}{p_2} \cdot p_2 \quad \text{mit } p_2 = p_a \\ p_K &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \cdot \left(1 + \frac{2\gamma}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right)^{-1} \cdot p_a \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} M_1^* \cdot M_2^* &= 1 \Leftrightarrow \frac{u_1}{c_1^*} \cdot \frac{u_2}{c_2^*} = 1 \quad \text{mit } c_1^* = c_2^* = c^* \\ \rightarrow u_1 u_2 &= c^{*2} \quad \text{mit } c^{*2} = \gamma R T^* \\ \rightarrow u_2 &= \frac{\gamma R T^*}{M_1 \sqrt{\gamma R T_1}} = \frac{\sqrt{\gamma R T_0}}{M_1} \cdot \frac{T^*}{T_0} \cdot \sqrt{\frac{T_0}{T_1}} \\ \text{mit } \frac{T_0}{T_1} &= 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 \text{ aus a) und } \frac{T^*}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^{*2} \right)^{-1} = \frac{2}{\gamma + 1} \text{ folgt} \end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{\gamma R T_0}}{M_1} \cdot \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \sqrt{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}$$

c) Reynoldszahl $Re = \frac{u\rho L}{\eta}$ mit $u = M\sqrt{\gamma RT}$
 erweitern mit $\rho_0 = \frac{p_K}{RT_0}$ und η_0

$$Re = \frac{M\sqrt{\gamma RT} \cdot \rho_0 \frac{\rho}{\rho_0} \cdot L}{\eta_0 \frac{\eta}{\eta_0}}$$

$$Re = \frac{M\sqrt{\gamma RT} \cdot \frac{p_K}{RT_0} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot L}{\eta_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{4}}}$$

erweitern mit $\sqrt{T_0}$

$$Re = \frac{M\sqrt{\gamma RT_0} \cdot \sqrt{\frac{T}{T_0}} \cdot \frac{p_K}{RT_0} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot L}{\eta_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{4}}}$$

$$\rightarrow Re_1 = \frac{M_1 p_K \sqrt{\gamma} \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \cdot L}{\eta_0 \sqrt{RT_0} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{-\frac{3}{4}}}$$

$$Re_1 = \frac{M_1 p_K \sqrt{\gamma} L}{\eta_0 \sqrt{RT_0}} \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right)^{\frac{1}{4} - \frac{1}{\gamma-1}}$$

6. Aufgabe

a)

$$Ma = Ma' \Rightarrow \frac{v}{\sqrt{\gamma R_L T}} = \frac{v'}{\sqrt{\gamma R_L T'}} \Rightarrow v = v'$$

b) An der Platte ($y = 0$) ist:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{Widerspruch zur drehungsfreien Strömung: } \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

c) Flaches Wasser: $H/\lambda \ll 1$ und mit $\tanh x \approx x$ sofern $x \rightarrow 0$ folgt

$$c = \sqrt{gH}$$

d) Die Normalkomponente der Geschwindigkeit stromab des Stoßes ist kleiner als die Normalkomponente der Geschwindigkeit stromauf. Da sich die tangentialen Geschwindigkeitskomponenten stromauf und stromab des Stoßes nicht unterscheiden, werden die Stromlinien zum Stoß hin umgelenkt.