....
(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

01. 03. 2019

1. Aufgabe (11 Punkte)

Die Kontinuitätsgleichung und die Navier-Stokes-Gleichungen sind in inkompressibler Form gegeben.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \tag{1}$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v} \tag{2}$$

a) Schreiben Sie die gegebenen Gleichungen in Zylinderkoordinaten. Geben Sie bei der Impulsgleichung lediglich die Gleichung in z-Richtung an.

b) Vereinfachen Sie die unter Teil a) erhaltenen Gleichungen für eine stationäre, rotationssymmetrische Rohrströmung ohne Gravitationseinfluss. Wählen Sie die z-Richtung als Hauptströmungsrichtung.

c) Zeigen Sie mithilfe der Methode der Differentialgleichungen, welche für die Strömungsmechanik relevante(n) Kennzahl(en) die in Teil b) definierte Strömung beschreibt/ beschreiben. Nutzen Sie dafür lediglich die Impulsgleichung in Hauptströmungsrichtung.

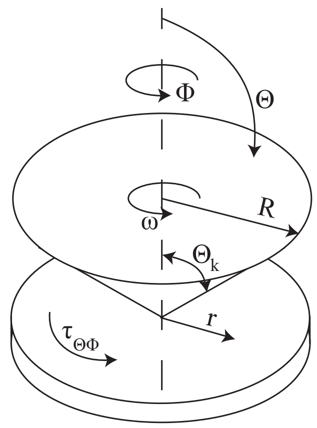
Gegeben: ρ, η, charakteristische Länge R, charakteristische Geschwindigkeit u_D

Hinweise:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Psi}{\partial z}\vec{e}_z \\
\nabla^2 \Psi &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \\
\frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_r\frac{\partial \vec{v}}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial \vec{v}}{\partial \varphi} + v_z\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \\
\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} &= \vec{e}_\varphi \\
\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} &= -\vec{e}_r
\end{aligned}$$

2. Aufgabe (9 Punkte)

Ein Viskosimeter besteht aus einer kreisförmigen Platte und einem darüber angeordneten stumpfen Kegel mit dem Radius R und Öffnungswinkel Θ_k. In dem Spalt zwischen Kegel und Platte befindet sich ein Fluid mit unbekannter Zähigkeit η. Durch die Drehung des Kegels mit der Winkelgeschwindigkeit ω bildet sich in dem Spalt eine schleichende Strömung aus, die ausschließlich in Umfangsrichtung weist. Die Umfangsgeschwindigkeit ändert sich in Umfangsrichtung nicht. An der Platte wird das Moment M gemessen.



Die Impulsgleichungen vereinfachen sich für diese Strömung zu

$$\frac{d\tau_{\Theta,\Phi}}{d\Theta} = \frac{-2\tau_{\Theta,\Phi}}{\tan\Theta}.$$

a) Bestimmen Sie die Schubspannung $\tau_{\Theta,\Phi}$ als Funktion des Winkels Θ.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitskomponente $v_\Phi(r,\Theta)$ und die Zähigkeit η.
Die Schubspannung $\tau_{\Theta,\Phi}$ ist definiert als

$$\tau_{\Theta,\Phi} = -\eta\left(\sin\Theta\frac{\partial\left(\frac{v_\Phi}{r\sin\Theta}\right)}{\partial\Theta} + \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial v_\Theta}{\partial\Phi}\right).$$

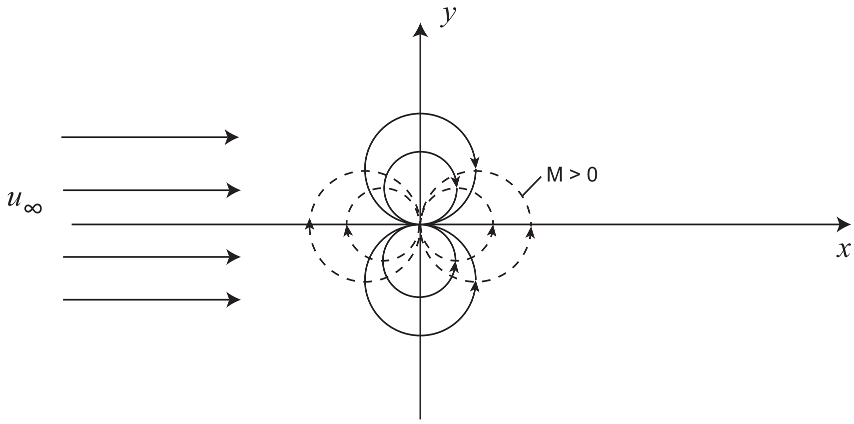
Gegeben: R, M, ω, Θ_k

Hinweise:

- Auf der Platte herrscht eine konstante Schubspannung.
- $\int \frac{1}{\tan x}\mathrm{d}x = \ln(\sin x)$
- $\int \frac{1}{\sin^3 x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)\right)$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben ist die Überlagerung zweier Dipole, deren Dipolachsen parallel bzw. normal zu einer Parallelströmung ausgerichtet sind. Diese Kombination aus Dipolen mit demselben Dipolmoment M wird als Quadrupol bezeichnet. Er ist im Ursprung des Koordinatensystems platziert. Zur besseren Übersicht ist einer der Dipole durch gestrichelte Linien dargestellt.



a) Nennen Sie drei Annahmen, die im Rahmen der potentialtheoretischen Analyse der oben genannten Aufgabenstellung getroffen werden.

b) Geben Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ und das/die Vorzeichen der Konstanten der verwendeten Elementarfunktion(en) an.

c) Stellen Sie die zugehörige Potentialfunktion $\Phi(r, \varphi)$ und die Stromfunktion $\Psi(r, \varphi)$ auf.

d) Leiten Sie aus der Potentialfunktion $\Phi(r, \varphi)$ die Geschwindigkeitskomponenten $v_r(r, \varphi)$ und $v_\varphi(r, \varphi)$ her.

e) Leiten Sie die Koordinaten r_s, φ_s des/der Staupunkte(s) her.

Gegeben: alle notwendigen Konstanten der Elementarfunktionen

Bekannte komplexe Potentialfunktionen:

Potentialwirbel:	$F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$
Quelle/Senke:	$F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$
Dipol:	$F(z) = \frac{M}{2\pi z}$
Staupunktströmung:	$F(z) = \alpha z^2$
Parallelströmung:	$F(z) = (u_\infty - i v_\infty) z$

Hinweise:

- $z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

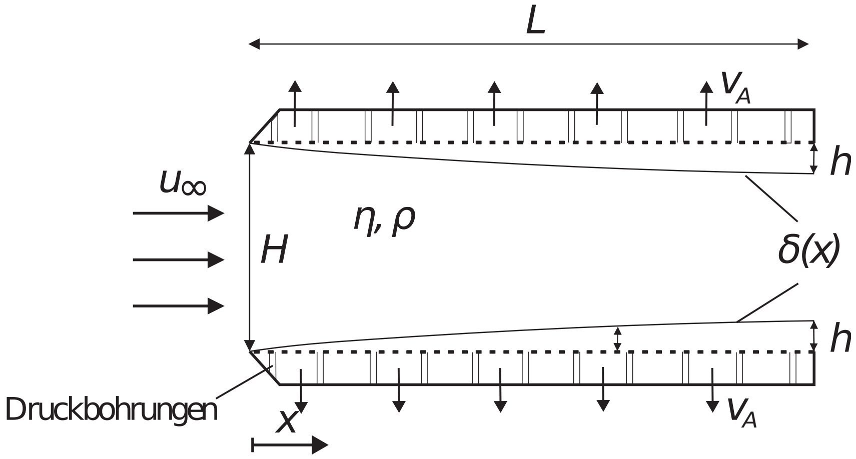
Bitte beachten Sie die weiteren Hinweise auf der nächsten Seite!

- $v_r(r,\varphi) = \dfrac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad v_\varphi(r,\varphi) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}$
- $sin(2\varphi) = 2sin(\varphi)cos(\varphi)$ (je nach Lösungsweg nicht benötigt)
- $cos(2\varphi) = cos^2(\varphi) - sin^2(\varphi)$ (je nach Lösungsweg nicht benötigt)
- Winkeltabelle:

φ	0	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	-1

4. Aufgabe (10 Punkte)

Ein Kanal der Länge L wird von einem inkompressiblen Fluid mit der Zähigkeit η und der Dichte ρ durchströmt. Im Eintrittsquerschnitt beträgt die Geschwindigkeit u_∞. Es bilden sich laminare Grenzschichten der Dicke $\delta(x)$ an den beiden porösen Kanalwänden aus. An jeder Wand wird näherungsweise mit der konstanten Geschwindigkeit v_A abgesaugt. Mit Druckbohrungen wird in der gesamten Grenzschicht der konstante Druck p gemessen.



Das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht sei angenähert durch

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0 + a_1 \frac{y}{\delta(x)} + a_2 \left(\frac{y}{\delta(x)}\right)^2 .$$

a) Bestimmen Sie den Verlauf der Außengeschwindigkeit $u_a(x)$ im Kanal mit der Euler-Gleichung in Hauptströmungsrichtung, d.h. der Impulsgleichung unter Vernachlässigung der Reibungskräfte.

b) Bestimmen Sie das Geschwindigkeitsprofil in der Grenzschicht $u(x,y)$ als Funktion von der Grenzschichtdicke $\delta(x)$.

c) Bestimmen Sie die Wandschubspannung $\tau_w(x)$ als Funktion von der Grenzschichtdicke $\delta(x)$.

d) Nennen Sie den Grund, warum eine Grenzschichtabsaugung verwendet wird.

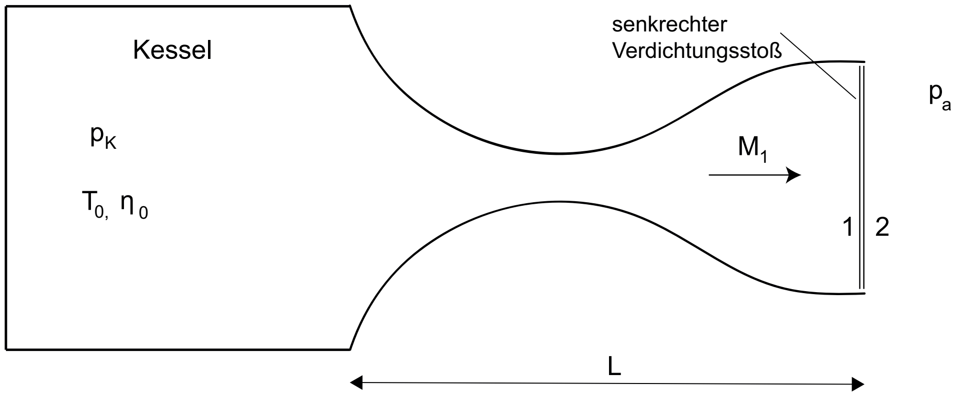
Gegeben: $\eta, \rho, u_\infty, v_A$

Hinweis:

Grenzschichtgleichung (x-Impulsgleichung): $u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

5. Aufgabe (12 Punkte)

Aus einem Kessel mit dem Kesseldruck p_K strömt Luft isentrop durch eine Lavaldüse mit der Länge L in die Umgebung. Im Austrittsquerschnitt entsteht ein senkrechter Verdichtungsstoß.



Bestimmen Sie

a) den Kesseldruck p_K als Funktion der Machzahl vor dem Stoß M_1,

b) die Geschwindigkeit hinter dem Stoß u_2 als Funktion der Machzahl vor dem Stoß M_1,

c) die Reynoldszahl vor dem Stoß Re_1 als Funktion der Machzahl vor dem Stoß M_1. Das Ergebnis aus Teil a) muss nicht in die entgültige Lösung eingesetzt werden.

Gegeben: $\gamma, R, T_0, \eta_0, p_a, L$

Hinweise:

- $c_p = \dfrac{\gamma R}{\gamma - 1}$
- Für isentrope Strömungen gilt $\dfrac{T}{T_0} = \left(\dfrac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma-1} = \left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\dfrac{\eta}{\eta_0}\right)^{\frac{4}{3}}$.
- Das Druckverhältnis über den senkrechten Verdichtungsstoß lässt sich ausdrücken mit $\dfrac{p_2}{p_1} = 1 + \dfrac{2\gamma}{\gamma+1}\left(M_1^2 - 1\right)$.

6. Aufgabe (8 Punkte)

a) Ein Flugzeug soll mit der Geschwindigkeit v unter atmosphärischen Bedingungen (p_a, T_a) fliegen. Das Flugverhalten soll anhand eines Modells im Maßstab 1:140 bei gleicher Temperatur in einer kompressiblen Windkanalströmung untersucht werden. Bestimmen Sie die Modellfluggeschwindigkeit v'.

   Gegeben: v, T_a, R_L, γ

b) Zeigen Sie am Beispiel der längs angeströmten ebenen Platte, dass eine Strömung, die die Haftbedingung erfüllt, keine Potentialströmung ist.

c) Für Schwerewellen existiert folgender Zusammenhang zwischen der Phasengeschwindigkeit c und der Wellenlänge λ

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} tanh \frac{2\pi H}{\lambda}},$$

   wobei H die mittlere Wassertiefe beschreibt. Vereinfachen Sie diese Gleichung für flaches Wasser unter der Annahme, dass die Kleinwinkelnäherung auch für den Tangens Hyperbolicus $tanh$ gilt.

d) Warum werden Stromlinien beim Durchgang durch einen schrägen Verdichtungsstoß zum Stoß hin umgelenkt?