

AERODYNAMISCHES INSTITUT
der Rheinisch - Westfälischen
Technischen Hochschule Aachen
Univ.-Prof. Dr.-Ing. W. Schröder

Klausur

Aerodynamik I

04. 09. 2020

M U S T E R L Ö S U N G
E I N S I C H T N A H M E

Hinweis:

Achten Sie darauf, ob Sie alle Aufgaben erhalten haben.

Die Lösungen dürfen ausschließlich die gegebenen Größen enthalten.

Klausur Aerodynamik I

Fragenteil, Biot-Savart, Konforme Abbildung

Integrale und Additionstheoreme

Additionstheoreme

- $\sin(x \pm y) = \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \sin(y) \cdot \cos(x)$
- $\cos(x \pm y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(2x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$
- $\sin(x) = 2 \cdot \sin(x/2) \cdot \cos(x/2)$
- $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \sin(x) = 1 - \cos(x)$
- $\sin(x) \cdot \sin(nx) = -\frac{1}{2}(\cos[(n+1)x] - \cos[(n-1)x])$
- $\sin[(n+1)x] - \sin[(n-1)x] = 2 \cdot \cos(nx) \cdot \sin(x)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\varphi_p) \cdot \sin(n\varphi) = \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 - \cos(\varphi_p + \varphi)}{1 - \cos(\varphi_p - \varphi)}\right)$

Integrale

- $\int \frac{1}{ax + b} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x}{ax + b} dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln(ax + b)$
- $\int \frac{x^2}{X} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{1}{2}(X) - 2b(X) + b^2 \ln(X) \right]$
mit $X = ax + b$
- $\int \sin(ax) dx = -\frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos(ax) dx = +\frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \sin^2(ax) dx = \frac{x}{2} - \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \cos^2(ax) dx = \frac{x}{2} + \frac{1}{4a} \sin(2ax)$
- $\int \sin^3(ax) dx = \frac{\cos^3(ax)}{3a} - \frac{\cos(ax)}{a}$
- $\int \cos^3(ax) dx = -\frac{\sin^3(ax)}{3a} + \frac{\sin(ax)}{a}$
- $\int \cos^4(ax) dx = \frac{3}{8}x + \frac{\sin(2ax)}{4a} + \frac{\sin(4ax)}{32a}$
- $\int \sin(ax) \cos(ax) dx = \frac{\sin^2(ax)}{2a}$
- $\int_0^{\pi} \cos(n \cdot \varphi) \cdot \cos(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- $\int_0^{\pi} \sin(n \cdot \varphi) \cdot \sin(p \cdot \varphi) d\varphi = \begin{cases} \pi/2 & n = p \\ 0 & n \neq p \end{cases}$
- Glauert-Integral
 $\int_0^{\pi} \frac{\cos(n \cdot \varphi')}{\cos(\varphi) - \cos(\varphi')} d\varphi' = -\pi \cdot \frac{\sin(n \cdot \varphi)}{\sin(\varphi)}$
- $\int \cos(ax) \cdot \cos(bx) dx = \frac{\sin[(a-b)x]}{2(a-b)} + \frac{\sin[(a+b)x]}{2(a+b)} \quad \forall |a| \neq |b|$

1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

1. Zeichnen Sie das NACA1412 Profil (Profiltröpfen und Skelettlinie getrennt) und geben Sie die Bedeutung der Ziffern im Hinblick auf die Geometrie des Profils an. Zeichnen Sie qualitativ den Verlauf des Auftriebsbeiwertes c_l über den Anstellwinkel α für:
 - (a) das NACA1412 Profil in einer inkompressiblen und reibungsbehafteten Strömung und
 - (b) den Verlauf einer angestellten ebenen Platte im Rahmen der Skelett-Theorie.
2. Panelverfahren:
 - (a) Beschreiben Sie kurz die grundlegende Idee des Panelverfahrens.
 - (b) Erläutern Sie die Vorgehensweise bei dem Quellen-Panelverfahren zur Bestimmung der Druckverteilung.
3. Leiten Sie die Bestimmungsgleichung für die Quellendichte $q(X) = 2U_\infty \frac{dZ}{dX}$ eines Profiltropfens her.
4. Erklären Sie für ein Tragflügelprofil mit scharfer Hinterkante die Entstehung der Zirkulation:
 - (a) für den Anfahrwirbel,
 - (b) für den gebundenen Wirbel,
 - (c) für die freien Wirbel.
5. Crocco'scher Wirbelsatz:

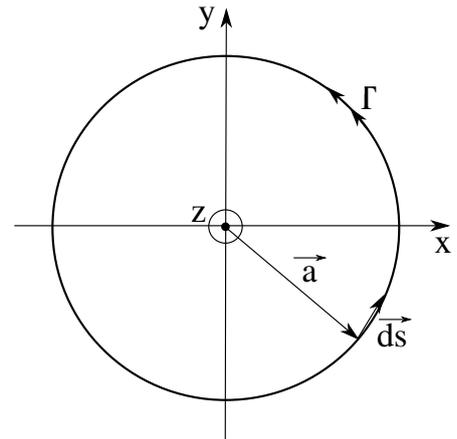
Welcher grundsätzliche Zusammenhang kann mit dem Crocco'schen Wirbelsatz erläutert werden? Nennen Sie den Gültigkeitsbereich dieses Satzes.

2. Aufgabe: Biot-Savart (17 Punkte)

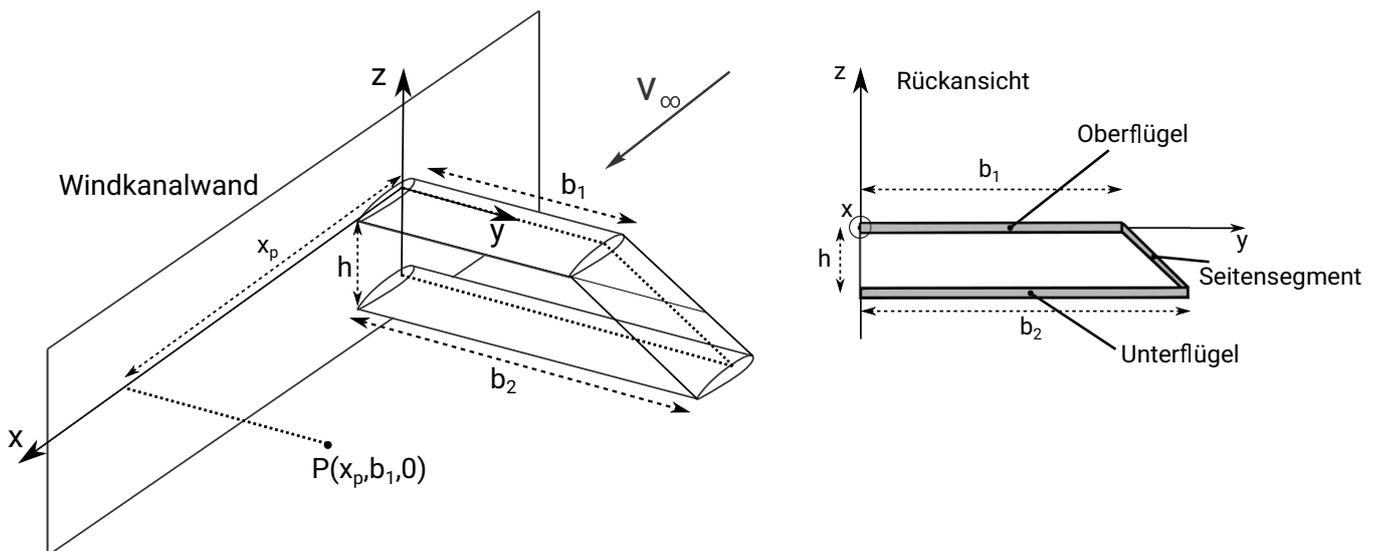
1. Leiten Sie aus der allgemeinen Form des Biot-Savart Gesetzes:

$$d\vec{u}_i = -\frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\vec{a} \times d\vec{s}}{|\vec{a}|^3},$$

den induzierten Geschwindigkeitsbetrag im Mittelpunkt eines Kreiswirbels (siehe Abbildung rechts) in Abhängigkeit des Radius R und der Zirkulation Γ her.



Zur experimentellen Untersuchung der Flügelaerodynamik wird eine Box Wing Konfiguration einseitig, bei $y = 0$, an der Windkanalwand eingespannt (siehe Abbildungen unten). Der Box Wing ist zusammengesetzt aus einem Oberflügel, einem Unterflügel und einem schrägen Seitenelement. Der Oberflügel besitzt die Zirkulation Γ und der Unterflügel die Zirkulation $\frac{\Gamma}{2}$. Das Seitensegment ist aerodynamisch so verwunden, dass es betragsmäßig die gleiche Zirkulation erzielt wie der Oberflügel. Zur Auslegung des Experimentes wird der Aufbau im Nachfolgenden inkompressibel und reibungsfrei betrachtet. Alle Segmente sind auftriebserzeugend.



2. Skizzieren Sie das vollständige Wirbelsystem des abgebildeten Box Wing. Geben Sie dabei den Wert und die Drehrichtung der Zirkulation jedes Wirbels explizit an.
3. Bestimmen Sie die induzierte Geschwindigkeit in z -Richtung u_z der gebundenen Wirbel des Box Wings für den Punkt $P(x_p, b_1, 0)$ in dem gegebenen Koordinatensystem.

Gegeben: $\Gamma, b_1, b_2, h, x_p, V_\infty$.

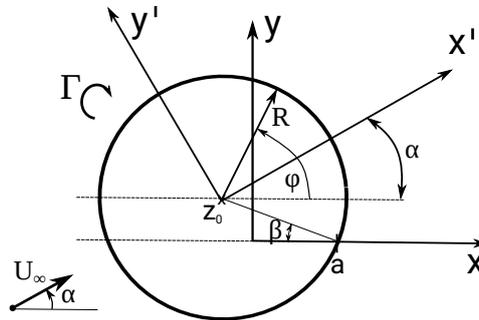
Hinweise:

Induzierte Geschwindigkeitsbetrag einer geraden endlichen Wirbellinie:

$$|\vec{u}_i| = \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos(\varphi_1) - \cos(\varphi_2)).$$

3. Aufgabe: Konforme Abbildung (19 Punkte)

Gegeben ist ein Kreis mit dem Radius R und dem Mittelpunkt z_0 , welcher sich in einer Parallelströmung mit der Zirkulation Γ befindet. Dabei bildet die Anströmgeschwindigkeit U_∞ den Winkel α mit der x -Achse.



Für den Radius dieses Bildkreises gilt $z - z_0 = R \cdot e^{i\varphi}$ und für die Hinterkante ($z = a$) gilt $a - z_0 = R \cdot e^{-i\beta}$. Die Abbildungsfunktion $\zeta(z)$ mit der der Kreis in die ζ -Ebene übertragen werden kann ist durch die folgende Laurent'sche Reihe gegeben:

$$\zeta = f(z) = z + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \dots$$

1. Stellen Sie die komplexe Potentialfunktion $F(z)$ für den gegebenen Fall in Abhängigkeit von Γ auf.
2. Berechnen Sie die komplex konjugierte Geschwindigkeitsverteilung $\bar{w}_\zeta(z)$ in Abhängigkeit von Γ , bestimmen Sie dafür zuerst $\bar{w}_z(z, \Gamma)$.
3. Wie lautet die Kutta'sche Abflussbedingung in der ζ -Ebene und in der z -Ebene? Bestimmen Sie anschließend die Zirkulation Γ als Funktion der gegebenen Größen, sodass die Kutta'sche Bedingung erfüllt wird.
4. Bestimmen Sie die komplexe Kraft F_ζ auf das Profil in der ζ -Ebene mithilfe der 1. Blasius'schen Formel:

$$F_\zeta = F_\xi - iF_\eta = \frac{i\rho_\infty}{2} \oint \bar{w}_z(z)^2 \frac{dz}{d\zeta} dz$$

Hinweis: Verwenden Sie nur die für das Residuentheorem bzw. die Kraftberechnung notwendigen Terme und folgende Vereinfachungen:

$$\frac{1}{1-c} \approx 1+c, \quad \frac{1}{z-z_0} \approx \frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2}, \quad \frac{1}{(z-z_0)^2} \approx \frac{1}{z^2} + \frac{2z_0}{z^3}$$

5. Bestimmen Sie die Komponenten der resultierenden Kraft und deren Vorzeichen in der ζ -Ebene. Erläutern Sie in welche Richtung die Auftriebskraft auf das Profil wirkt und berechnen Sie die Größe der Auftriebskraft.

Gegeben: $R, U_\infty, \rho_\infty, \alpha$ mit $\alpha > 0$ und klein, β mit $\beta > 0$ und klein, z_0 mit $\text{Re}(z_0) < 0$ und $\text{Im}(z_0) > 0$, a_1, a_2, a_3, \dots und Γ in Aufgabe 1 und 2.

Hinweise:

Potentialströmungen:

Translationsströmung: $F(z') = U_\infty z'$

Dipol: $F(z') = \frac{M}{2\pi z'}$ mit $M = 2\pi U_\infty R^2$

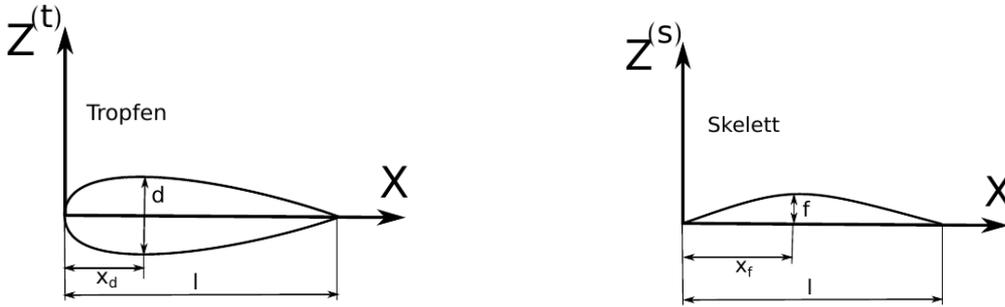
Potentialwirbel: $F(z') = \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$

Residuentheorem:

$$\oint f(z) dz = i2\pi B_1 \quad \text{für} \quad f(z) = B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \dots + \frac{B_n}{z^n} + C_1 z + C_2 z^2 + \dots + C_n z^n$$

Lösung 1. Aufgabe: Fragenteil (14 Punkte)

1. (a) Profiltropfen und Skelettlinie:



(b) NACA 1412:

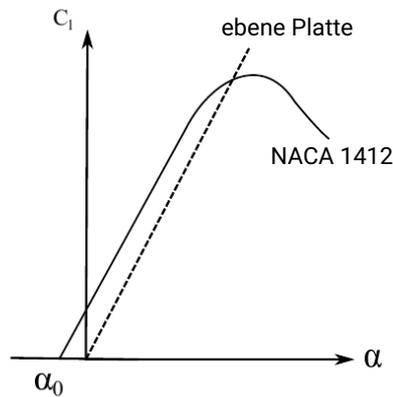
1% maximale Wölbung (f) in Prozent der Profiltiefe

40% Wölbungsrücklage (x_f) in Prozent der Profiltiefe

12% maximale Dicke (d) in Prozent der Profiltiefe

Die Dickenrücklage (x_d) für alle Profile der 4-er Reihe liegt bei 30% der Profiltiefe.

(c) Auftriebsbeiwert:



2. Panelverfahren

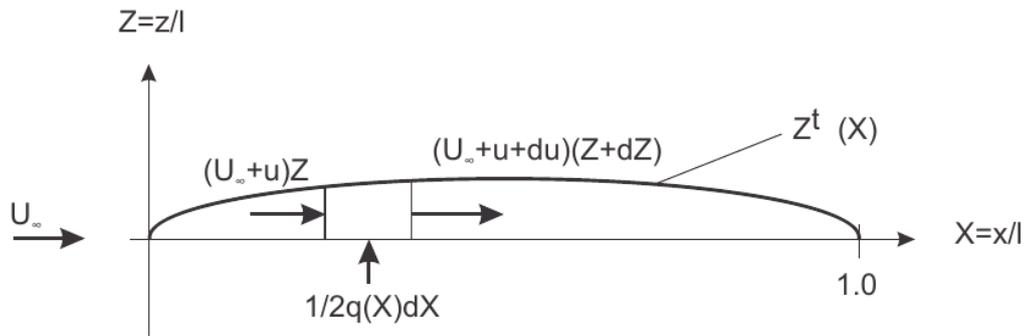
(a) Die Oberfläche des Körpers wird in Panel unterteilt und ist eine Quellen- bzw. Wirbelfläche. Die Bestimmung der Quellen- bzw. Wirbelstärke erfolgt so, dass die Kontur eine Stromfläche wird.

- (b)
- i. Annäherung der Geometrie durch Panels
 - ii. Verteilung der Quell-Senken-Verteilung auf den einzelnen Panels
 - iii. Formulierung der kinematischen Strömungsbedingung an jedem Kontrollpunkt.
 - iv. Lösen des linearen Gleichungssystems
 - v. Bestimmung der Tangentialgeschwindigkeit
 - vi. Bestimmung von c_p aus der Bernoulli-Gleichung

3. Herleitung $q(X) = 2U_\infty \frac{dZ}{dX}$:

(a) Mithilfe der Kontinuitätsgleichung:

$$(U_\infty + u)Z + \frac{1}{2}q(X)dX = (U_\infty + u + du)(Z + dZ)$$



$$U_\infty Z + uZ + \frac{1}{2}q(X)dX = U_\infty Z + uZ + duZ + U_\infty dZ + udZ + dudZ$$

Nach der Linearisierung (Vernachlässigung Terme 2. Ordnung) ergibt sich:

$$\frac{1}{2}q(X) = Z \frac{du}{dX} + U_\infty \frac{dZ}{dX} + u \frac{dZ}{dX} = \frac{d(U_\infty + u)}{dX} Z + (U_\infty + u) \frac{dZ}{dX}$$

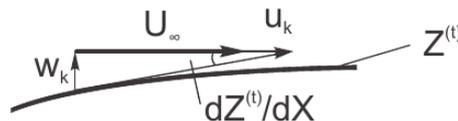
aus der Produktregel folgt:

$$\frac{1}{2}q(X) = \frac{d}{dX}((U_\infty + u)Z)$$

und mit $U_\infty \gg u$ (nicht gültig im Staupunkt) folgt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}q(X) &= \frac{d(U_\infty Z)}{dX} = U_\infty \frac{dZ}{dX} \\ q(X) &= 2U_\infty \frac{dZ}{dX} \end{aligned}$$

(b) Alternativ mithilfe der kinematischen Randbedingung:



$$\frac{dZ}{dX} = \frac{w_k}{U_\infty + u_k}$$

Für dünne Profile und außerhalb des Staupunktes gilt $u_k \ll U_\infty$, außerdem gilt $w_k \approx \frac{q(X)}{2}$. Somit ergibt sich für die Quellendichte $q(X)$:

$$q(x) = 2U_\infty \frac{dZ}{dX}$$

4. Entstehung der Zirkulation

(a) Anfahrwirbel:

Bei der Bewegung des Tragflügels aus der Ruhe kann unmittelbar nach der Anfahrt die Strömung als reibungslos ohne Zirkulation betrachtet werden, bei der ein Umströmen der Hinterkante vorliegt. Nach der Kutta'schen Abflussbedingung kommt es zu einer Verlagerung des Staupunktes von der Oberseite an die Hinterkante. Dies führt infolge der Reibung zu einer abschwimmenden Scherschicht, die den Anfahrwirbel mit der Zirkulation Γ bildet.

(b) gebundener Wirbel:

Die Drehrichtung des Anfahrwirbels sei entgegen des Uhrzeigersinns. Nach dem Satz von Thomson gilt: $\frac{d\Gamma}{dt} = 0$, sodass bei einer reibungsfreien, inkompressiblen Strömung keine Zirkulation erzeugt werden kann. Folglich muss eine Zirkulation im Uhrzeigersinn um das Profil existieren und den Anfahrwirbel ausgleichen.

(c) freien Wirbel:

Beim Tragflügel endlicher Spannweite gleichen sich die Druckunterschiede zwischen Ober- und Unterseite des Flügels an dessen Enden aus. Es entsteht eine Umströmung der Flügelenden, die sich hinter dem Tragflügel zu Wirbeln aufrollt.

5. Crocco'scher Wirbelsatz:

Der Crocco'sche Wirbelsatz beschreibt den Zusammenhang zwischen der Drehung und der Entropie einer Strömung und stellt somit die Verbindung zwischen der Kinematik und der Thermodynamik dar. Der Crocco'sche Wirbelsatz leitet sich aus den Impulsgleichungen eines reibungsfreien Fluids und dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik ohne weitere Vereinfachung her und ist somit für reibungsfreie Strömungen gültig.

Lösung 2. Aufgabe: Biot-Savart (17 Punkte) (LÖSUNG)

1. Herleitung:

mit $|\vec{a}| = \text{konst.} = R$ folgt:

$$d\vec{u}_i = -\frac{\Gamma}{4\pi R^3} \cdot \vec{a} \times d\vec{s}.$$

Für den Betrag kann das Kreuzprodukt umgeschrieben werden mit $|\vec{a} \times d\vec{s}| = R \cdot ||d\vec{s}|| \cdot \sin(\alpha)$ wobei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist. Somit ergibt sich durch die Intergration entlang des Kreises

$$|\vec{u}_i| = \left| \frac{\Gamma}{4\pi R^2} \oint ||d\vec{s}|| \right|.$$

Mit der Transformation nach φ durch $||d\vec{s}|| = d\varphi R$ ergibt sich

$$|\vec{u}_i| = \left| \frac{\Gamma}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\varphi \right|.$$

Das Integral löst sich mit Einsetzen der Grenzen zu

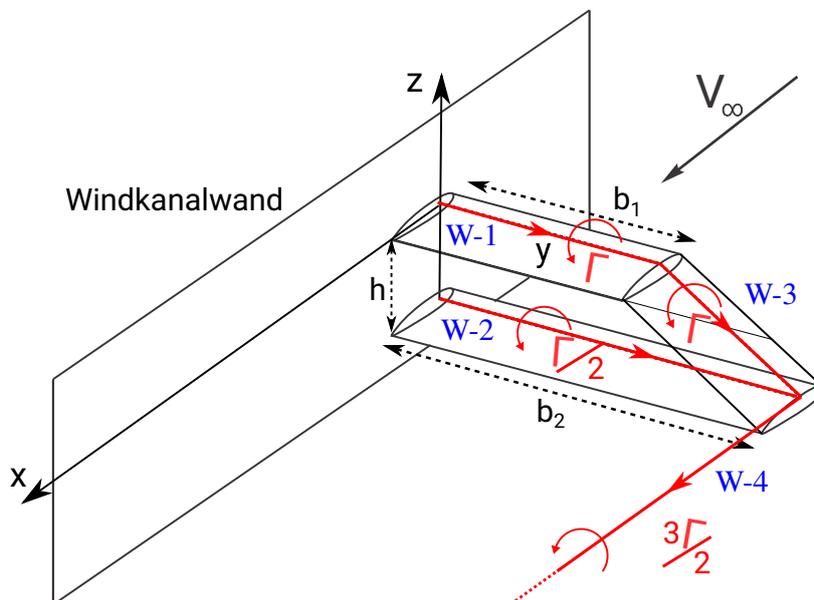
$$|\vec{u}_i| = \left| \frac{\Gamma}{2R} \right|.$$

Alternativ kann das Linienintegral über den Kreis verwendet werden, aus dem sich direkt der Kreisumfang

$$\oint ||d\vec{s}|| = 2\pi R$$

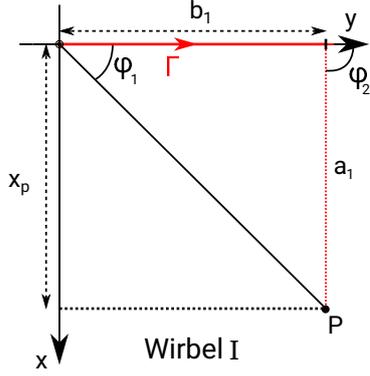
ergibt.

2. Wirbelsystem:



3. Induzierte Geschwindigkeit u_z im Punkt $P(x_p, b_1, 0)$:

gebundener Wirbel im Oberflügel (W-1):



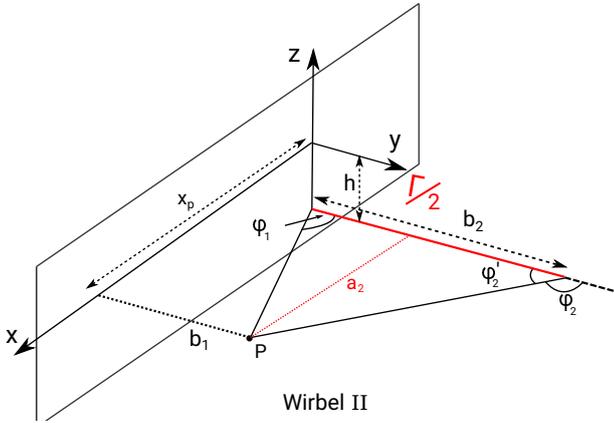
$$|u_1| = \left| \frac{\Gamma}{4\pi a_1} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \right|, \quad a_1 = x_p$$

$$\cos(\varphi_1) = \frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + x_p^2}}$$

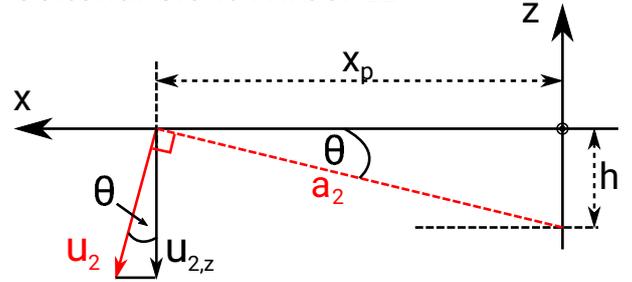
$$\cos(\varphi_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$u_{1,z}(x_p, b_1, 0) = -|u_1| = \frac{-\Gamma}{4\pi x_p} \left(\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + x_p^2}} \right)$$

gebundener Wirbel im Unterflügel (W-2):



Seitenansicht Wirbel II



$$|u_2| = \left| \frac{\Gamma}{8\pi a_2} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \right|, \quad a_2 = \sqrt{h^2 + x_p^2}$$

$$\cos(\varphi_1) = \frac{b_1}{\sqrt{a_2^2 + b_1^2}} = \frac{b_1}{\sqrt{h^2 + x_p^2 + b_1^2}}$$

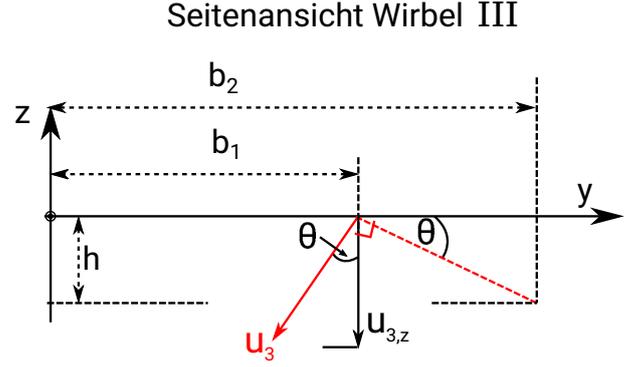
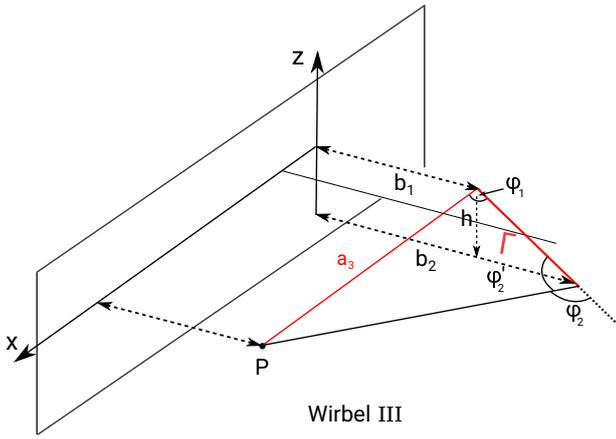
$$\cos(\varphi_2) = \cos(\pi - \varphi'_2) = -\cos(\varphi'_2) = \frac{-(b_2 - b_1)}{\sqrt{a_2^2 + (b_2 - b_1)^2}} = \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{h^2 + x_p^2 + (b_2 - b_1)^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{x_p}{a_2} = \frac{x_p}{\sqrt{h^2 + x_p^2}}$$

$$u_{2,z}(x_p, b_1, 0) = -\cos(\theta) |u_2| = \frac{-\Gamma x_p}{8\pi(h^2 + x_p^2)} \left(\frac{b_1}{\sqrt{h^2 + x_p^2 + b_1^2}} - \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{h^2 + x_p^2 + (b_2 - b_1)^2}} \right)$$

gebundener Wirbel im Verbindungssegment (W-3):

$$|u_3| = \left| \frac{\Gamma}{4\pi a_3} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \right|, \quad a_3 = x_p$$



$$\cos(\varphi_1) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\cos(\varphi_2) = \cos(\pi - \varphi_{2'}) = -\cos(\varphi_{2'}) = -\frac{\sqrt{(b_2 - b_1)^2 + h^2}}{\sqrt{a_3^2 + (b_2 - b_1)^2 + h^2}} = -\frac{\sqrt{(b_2 - b_1)^2 + h^2}}{\sqrt{x_p^2 + (b_2 - b_1)^2 + h^2}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{b_2 - b_1}{\sqrt{(b_2 - b_1)^2 + h^2}}$$

$$u_{3,z}(x_p, b_1, 0) = -\cos(\theta) |u_3| = -\frac{\Gamma(b_2 - b_1)}{4\pi x_p} \left(\frac{1}{\sqrt{x_p^2 + (b_2 - b_1)^2 + h^2}} \right)$$

Insgesamt ergibt sich die induzierte Geschwindigkeit u_z im Punkt $P(x_p, b_1, 0)$ zu:

$$\begin{aligned} u_z(x_p, b_1, 0) &= \frac{-\Gamma}{4\pi x_p} \left(\frac{b_1}{\sqrt{b_1^2 + x_p^2}} \right) \\ &\quad - \frac{\Gamma x_p}{8\pi(h^2 + x_p^2)} \left(\frac{b_1}{\sqrt{h^2 + x_p^2 + b_1^2}} - \frac{b_1 - b_2}{\sqrt{h^2 + x_p^2 + (b_2 - b_1)^2}} \right) \\ &\quad - \frac{\Gamma(b_2 - b_1)}{4\pi x_p} \left(\frac{1}{\sqrt{x_p^2 + (b_2 - b_1)^2 + h^2}} \right) \end{aligned}$$

Lösung 3. Aufgabe: Konforme Abbildung (19 Punkte) (LÖSUNG)

1. komplexe Potentialfunktion $F(z')$:

Kombination von Anströmung, Dipol und Wirbel

$$F(z') = U_\infty z' + \frac{U_\infty R^2}{z'} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z')$$

Transformation in z :

um z_0 verschoben und um α gedreht da der Dipol senkrecht zur Anströmung steht.

$$z = R e^{i\varphi} + z_0 = R e^{i(\varphi'+\alpha)} + z_0 = R e^{i\varphi'} e^{i\alpha} + z_0 = z' e^{i\alpha} + z_0$$

$$z' = (z - z_0) e^{-i\alpha}$$

Potentialfunktion $F(z)$:

$$F(z) = U_\infty e^{-i\alpha} (z - z_0) + \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{z - z_0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_0) + \left(\frac{\Gamma\alpha}{2\pi} \right)$$

2. komplex konjugierte Geschwindigkeitsfunktion $\bar{w}_z(z)$:

$$\bar{w}_z(z) = \frac{dF(z)}{dz} = U_\infty e^{-i\alpha} - \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{(z - z_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z - z_0)}$$

komplex konjugierte Geschwindigkeitsfunktion $\bar{w}_\zeta(z)$:

$$\bar{w}_\zeta(z) = \frac{dF(z)}{d\zeta} = \frac{dF(z)}{dz} \frac{dz}{d\zeta} = \bar{w}_z(z) \frac{dz}{d\zeta}$$

$$\frac{d\zeta}{dz} = 1 - \frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \frac{3a_3}{z^4} - \dots$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{1 - \left(\frac{a_1}{z^2} + \frac{2a_2}{z^3} + \frac{3a_3}{z^4} + \dots \right)}$$

$$\bar{w}_\zeta(z) = \left(U_\infty e^{-i\alpha} - \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{(z - z_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z - z_0)} \right) \frac{1}{1 - \left(\frac{a_1}{z^2} + \frac{2a_2}{z^3} + \frac{3a_3}{z^4} + \dots \right)}$$

3. Die Kutta'sche Abflussbedingung besagt, dass es an einer unendlich dünnen Hinterkante nicht zur Umströmung kommt und das Fluid glatt abfließt. In der ζ -Ebene muss somit die Geschwindigkeit an der Hinterkante $\bar{w}_\zeta(z = a)$ endlich sein. Betrachtet man jedoch den Kreiszyylinder in der z -Ebene, so befindet sich an der Stelle $z = a$ ein Staupunkt, womit die Bedingung $\bar{w}_z(z = a) = 0$ erfüllt sein muss.

Mit $a - z_0 = R \cdot e^{-i\beta}$ an der Hinterkante folgt:

$$\bar{w}_z(z = a) = \left(U_\infty e^{-i\alpha} - U_\infty e^{i\alpha} e^{i2\beta} + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{i\beta} \right) = 0$$

$$\Rightarrow i\Gamma = -2\pi R U_\infty e^{-i\alpha} e^{-i\beta} + 2\pi R U_\infty e^{i\alpha} e^{i\beta}$$

$$i\Gamma = 2\pi R U_\infty \left(-e^{-i(\alpha+\beta)} + e^{i(\alpha+\beta)} \right)$$

$$i\Gamma = 2\pi R U_\infty (-\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta))$$

$$\Gamma = 4\pi R U_\infty \sin(\alpha + \beta)$$

4. Bestimmung der komplexen Kraft:

$$F_\zeta = F_\xi - iF_\eta = \frac{i\rho_\infty}{2} \oint \bar{w}_z(z)^2 \frac{dz}{d\zeta}$$

Dabei gilt:

$$\bar{w}_z^2(z) = \left(U_\infty e^{-i\alpha} - \frac{U_\infty e^{i\alpha} R^2}{(z - z_0)^2} + \frac{i\Gamma}{2\pi(z - z_0)} \right)^2$$

Mit den Hinweisen aus der Aufgabenstellung und den Abkürzungen

$$A_0 = U_\infty e^{-i\alpha} \quad A_1 = \frac{i\Gamma}{2\pi} \quad A_2 = -U_\infty e^{i\alpha} R^2$$

folgt:

$$\begin{aligned} \bar{w}_z^2(z) &= \left(A_0 + A_1 \left(\frac{1}{z} + \frac{z_0}{z^2} \right) + A_2 \frac{1}{z^2} \left(1 + \frac{2z_0}{z} \right) \right)^2 \\ &= \left(A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_1 z_0}{z^2} + \frac{A_2}{z^2} + \frac{2A_2 z_0}{z^3} \right)^2 \\ &= A_0^2 + \frac{2A_0 A_1}{z} + \frac{2(A_0 A_1 z_0 + A_0 A_2) + A_1^2}{z^2} + \mathcal{O}(z^{-3}) \end{aligned}$$

Mit $\frac{dz}{d\zeta}$ aus Aufgabenteil 2:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{1 - \left(\frac{a_1}{z^2} + \frac{2a_2}{z^3} + \frac{3a_3}{z^4} + \dots \right)} \approx 1 + \frac{a_1}{z^2} + \mathcal{O}(z^{-3})$$

Damit folgt für die komplexe Kraft:

$$F_\zeta = i \frac{\rho_\infty}{2} \oint \left(A_0^2 + \frac{2A_0 A_1}{z} + \frac{2(A_0 A_1 z_0 + A_0 A_2) + A_1^2}{z^2} + \mathcal{O}(z^{-3}) \right) \cdot \left(1 + \frac{a_1}{z^2} + \mathcal{O}(z^{-3}) \right) dz$$

Integration unter Beachtung des Residuenteorems liefert dann:

$$\begin{aligned} F_\zeta &= i \frac{\rho_\infty}{2} (2\pi i) (2A_0 A_1) = -\rho_\infty \pi (2A_0 A_1) \\ &= -2\rho_\infty \pi U_\infty e^{-i\alpha} \frac{i\Gamma}{2\pi} = -i\rho_\infty U_\infty \Gamma e^{-i\alpha} \\ &= -i4\pi R\rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) e^{-i\alpha} \\ &= 4\pi R\rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$

5. Bestimmung der Komponenten des Auftriebs:

$$\begin{aligned} F_\zeta &= F_\xi - iF_\eta = 4\pi R\rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})} \\ &= C e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})} = C \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \right) \\ &= C \left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right) \end{aligned}$$

Mit $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$ und $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0$ für kleine Anstellwinkel $\alpha > 0$ folgt:

$$\begin{aligned} F_\xi &= -4\pi R\rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) < 0 \\ F_\eta &= 4\pi R\rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \end{aligned}$$

Die Auftriebskraft wirkt senkrecht zur Anströmrichtung auf das Profil (Drehung der komplex konjugierten Kraft, die für $\alpha = 0$ in $-y$ -Richtung zeigt, um den Winkel $-\alpha$; alternativ per Skizze).

Bestimmung des Auftriebs:

$$L = |F_\zeta| = |4\pi R \rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta) e^{-i(\alpha + \frac{\pi}{2})}| = 4\pi R \rho_\infty U_\infty^2 \sin(\alpha + \beta)$$