....

(Matr.-Nr, Unterschrift)

Klausur Strömungsmechanik II

14. 08. 2020

1. Aufgabe

a) (1) Massenerhaltung

(2) Impulserhaltung in x-Richtung

Es wird eine 2-dimensionale, inkompressible, stationäre Strömung mit konstanten Stoffwerten (und ohne Gravitationseinfluss) betrachtet.

b) Einführung der Bezugsgrößen:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\Delta p}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_1 \frac{h}{L}}, \quad \bar{y} = \frac{y}{h}$$

Für die Kontinuitätsgleichung ergibt sich:

$$\frac{u_1}{L}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{u_1 h}{Lh}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

und somit

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

$\rightarrow$ keine Kennzahl aus der Kontinuitätsgleichung.

Für die Impulsgleichung in x-Richtung folgt:

$$\frac{\rho u_1^2}{L}\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\rho u_1^2 h}{Lh}\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{\Delta p}{L}\frac{\partial \bar{p}}{d\bar{x}} + \eta\frac{u_1}{h^2}\left(\left(\frac{h}{L}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)$$

$$\frac{\rho u_1 h^2}{L\eta}\left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right) = -\frac{\Delta p h^2}{\eta L u_1}\frac{\partial \bar{p}}{d\bar{x}} + \left(\frac{h}{L}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

Daraus ergeben sich die Kennzahlen:

$$K_1 = \frac{\rho u_1 h^2}{\eta L}$$

$$K_2 = \frac{\Delta p h^2}{\eta L u_1}$$

$$K_3 = \left(\frac{h}{L}\right)^2$$

c) Umformen in Kennzahlen der Strömungsmechanik:

$$K_1 = Re_L\left(\frac{h}{L}\right)^2$$

$$K_2 = EuRe_L\left(\frac{h}{L}\right)^2$$

d) Vereinfachen der Gleichung mit

$$Re_L \left(\frac{h}{L}\right)^2 \ll 1, \quad \left(\frac{h}{L}\right)^2 \ll 1$$

$$\underbrace{Re_L \left(\frac{h}{L}\right)^2 \left(\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}\right)}_{\approx 0} = -EuRe_L(\frac{h}{L})^2\frac{\partial \bar{p}}{d\bar{x}} + \underbrace{\left(\frac{h}{L}\right)^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}}_{\approx 0} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

$$0 = -EuRe_L \left(\frac{h}{L}\right)^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}$$

Es ergeben sich die folgenden dimensionsbehafteten Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

2. Aufgabe

a) $\rho\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}$: lokale Impulsänderung pro Einheitsvolumen

$\rho\left(\vec{v}\cdot\nabla\vec{v}\right)$: konvektive Impulsänderung pro Einheitsvolumen

$-\nabla p$: Druckkräfte pro Einheitsvolumen

$\eta\Delta\vec{v}$: Reibungskräfte pro Einheitsvolumen

$\rho\vec{g}$: Volumenkräfte pro Einheitsvolumen

In schleichenden Strömungen können die konvektiven Impulsänderungen (der konvektive Trägheitsterm) vernachlässigt werden.

b) Komponentenschreibweise der Impulserhaltungsgleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+g_x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\eta}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+g_z$$

stationäre Strömung: $\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}=0$

Volumenkräfte sind zu vernachlässigen: $\vec{g}=0$

Impulsaustausch in z-Richtung vernachlässigbar: $w=0$

Trägheitsterme für schleichende Strömung vernachlässigen:

$u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial u}{\partial y}=u\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

aus dem Hinweis kann man folgende Annahme treffen: $\dfrac{\partial^2\vec{v}}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\vec{v}}{\partial y^2}\ll\dfrac{\partial^2\vec{v}}{\partial z^2}$

Vereinfachte Impulserhaltungsgleichungen für die Hele-Shaw Strömung:

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\eta\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\eta\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=0$$

Zweifache Integration zur Bestimmung der Geschwindigkeiten:

$$u=\int\int\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}dzdz=\int\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}z+c_1\right)dz=\frac{1}{2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}z^2+c_1z+c_2$$

Randbedingungen (Haftbedingung): $z = 0, h \to u = 0 \Rightarrow c_2 = 0, c_1 = -\frac{1}{2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}h$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}\left(z^2 - hz\right)$$

analog:

$$\Rightarrow v = \frac{1}{2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial y}\left(z^2 - hz\right)$$

c) Die Kontinuitätsgleichung muss auch erfüllt werden (inkompressible, ebene Strömung):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

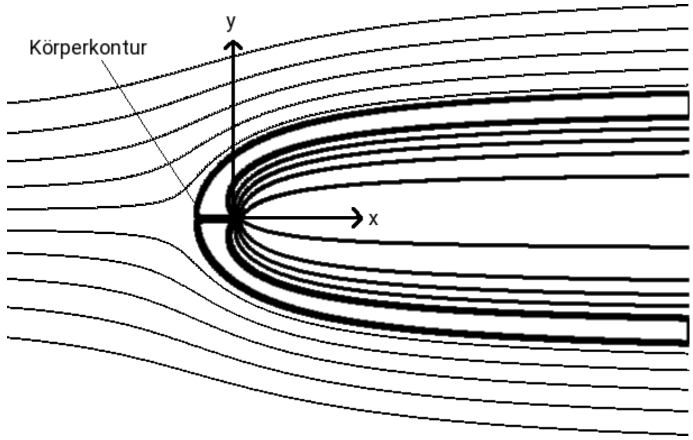
$$\to \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial x}(z^2 - hz)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\eta}\frac{\partial p}{\partial y}(z^2 - hz)\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \nabla^2 p = 0$$

3. Aufgabe

a)

$$F(z) = u_0 z + \frac{E}{2\pi} ln(z)$$



b)

$$F(z) = u_0(x + iy) + \frac{E}{2\pi} ln(re^{i\varphi})$$

Die Potentialfunktion lautet:

$$\Phi = u_0 x + \frac{E}{2\pi} ln(\sqrt{x^2 + y^2})$$

Damit lassen sich die Geschwindigkeiten berechnen.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_0 + \frac{E}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{E}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Im Staupunkt sind beide Geschwindigkeitskomponenten 0. Damit liegt der Staupunkt bei $x_S = -\frac{E}{2\pi u_0}$ und $y_S = 0$.

Überführen in Polarkoordinaten:

$$r_S = \sqrt{x_S^2 + y_S^2} = \frac{E}{2\pi u_0}$$

$$\varphi_S = atan\left(\frac{y_S}{x_S}\right) = \pi$$

c) Für die Stromfunktion ergibt sich:

$$\Psi = u_0 y + \frac{E}{2\pi}\varphi = u_0 r \sin\varphi + \frac{E}{2\pi}\varphi$$

Aus $x \to \infty$ und $y = y_{max}$ folgt $\varphi \to 0$. Der Wert der Stromfunktion beträgt somit:

$$\Psi_\infty = u_0 y_{max}$$

Der Wert der Stromfunktion entlang der Kontur des Halbkörpers ist konstant. Daher wird die Stromfunktion desweiteren am Staupunkt ausgewertet und mit Ψ_∞ gleichgesetzt.

$$\Psi_S = \Psi(r = \frac{E}{2\pi u_0}, \varphi = \pi) = u_0 \frac{E}{2\pi u_0} sin(\pi) + \frac{E}{2\pi}\pi$$

$$\Psi_s = \frac{E}{2}$$

$$\Psi_\infty = \Psi_s \to u_0 y_{max} = \frac{E}{2}$$

$$y_{max} = \frac{E}{2u_0}$$

d) Strömung mit zwei Quellen.

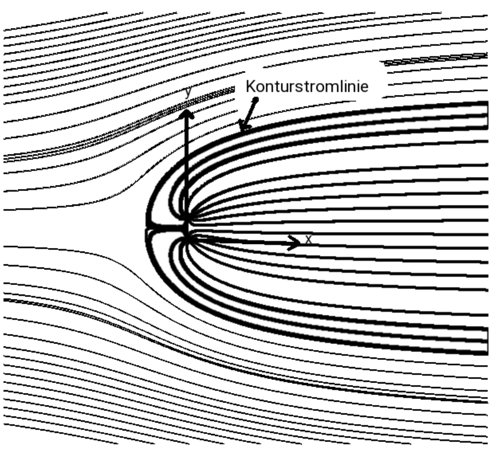


Abbildung 1: $a = \frac{y_{max}}{2}$

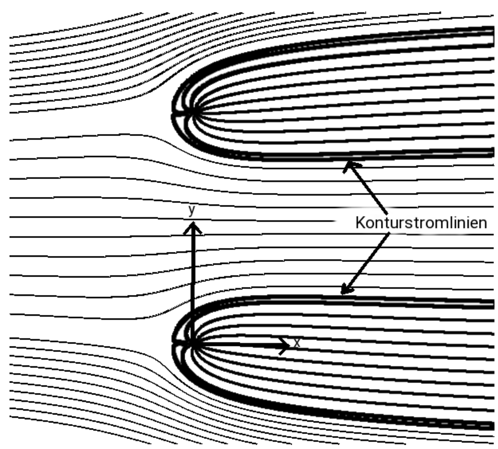


Abbildung 2: $a = 4y_{max}$

e) Die Geschwindigkeit in der Mitte zwischen den Quellen in y-Richtung ist 0.

4. Aufgabe

a) Bestimmung der Koeffizienten a_0, a_1, a_2, a_3

(I) Haftbedingung: $u(y=0)=0 \rightarrow a_0 = 0$

(II) Übergang am Grenzschichtrand: $u(y=\delta) = u_a \rightarrow 1 = a_1 + a_2 + a_3$

(III) x-Impulsgleichung an der Wand: $v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

$$-\frac{\dot{V}}{BL}a_1 = \frac{\eta}{\rho}\frac{2a_2}{\delta}$$
$$a_1 = \frac{-2BL\eta}{\rho\delta\dot{V}}a_2$$

(IV) Glatter Übergang am Grenzschichtrand: $\frac{\partial u}{\partial y}_{y=\delta} = 0 \rightarrow a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0$

Aus (II) und (IV) a_3 eliminieren:

$$3 = 2a_1 + a_2$$

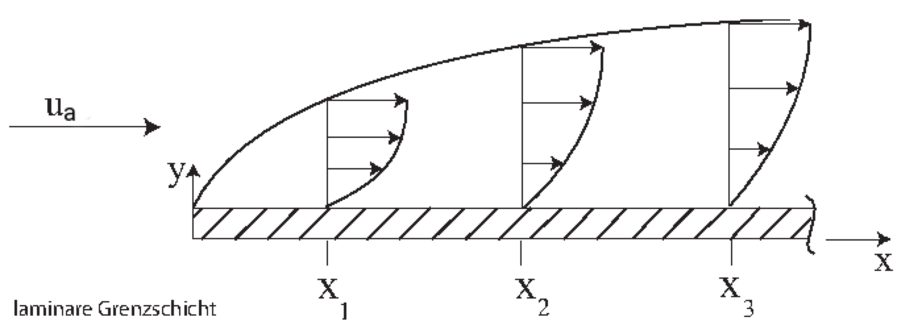
(III) einsetzen und umformen:

$$a_2 = \frac{3\rho\delta\dot{V}}{\rho\delta\dot{V} - 4BL\eta}$$

Für die fehlenden Koeffizienten ergibt sich:

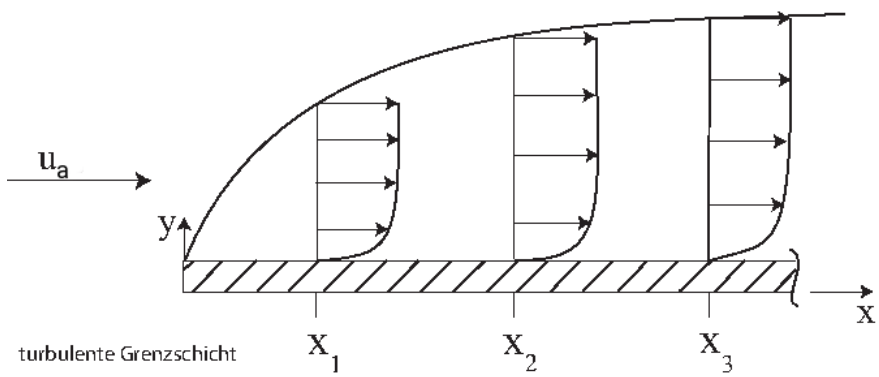
$$a_1 = \frac{-6BL\eta}{\rho\delta\dot{V} - 4BL\eta}$$
$$a_3 = \frac{2BL\eta - 2\rho\delta\dot{V}}{\rho\delta\dot{V} - 4BL\eta}$$

b) Skizze der laminaren Grenzschichtdicke und der Verlauf der Geschwindigkeit $u(y)$



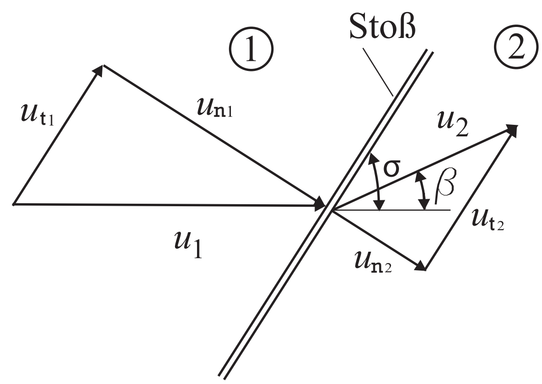
c) Die kritische Reynoldszahl liegt für die ebene Platte bei $\mathcal{O}(5)$

d)
- Das Geschwindigkeitsprofil der turbulenten Grenzschicht ist fülliger,
- Die turbulente Grenzschicht ist aufgedickt,
- Größere Reibung in der turbulenten Grenzschicht,
- In der laminaren Grenzschicht verlaufen die Stromlinien beinahe parallel (Strömung in Schichten)
- ...



5. Aufgabe

a) Die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß werden in einen Normal- und Tangentialteil aufgeteilt.



Bei der Kontinuitätsgleichung werden die ein- und austretenden Massenströme normal zur Kontrollfläche betrachtet. Für die Beziehung über den Stoß ergibt sich daher:

$$\rho_1 u_{n,1} A_S = \rho_2 u_{n,2} A_S$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_{n,1}}{u_{n,2}}$$

Einsetzen der Prandtl-Beziehung $u_{n,1} u_{n,2} = c^{*2}$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_{n,1} u_{n,1}}{c^{*2}} = M_{n,1}^{*2}$$

Mit der gegebenen Definition von $M_{n,1}^{*2}$ und $M_{n,1} = M_1 \sin\sigma$ ergibt sich für das Dichteverhältnis

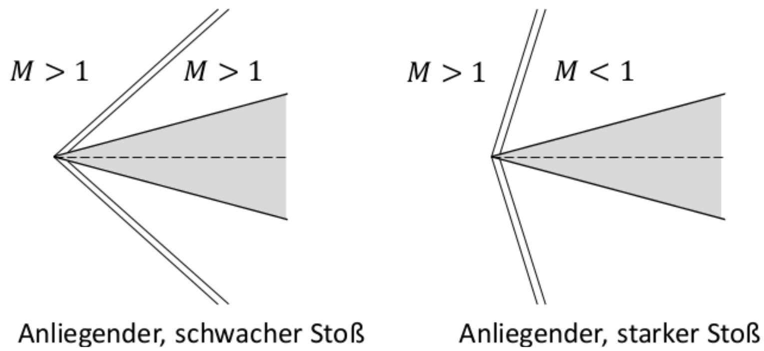
$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + \frac{2}{(M_1 \sin\sigma)^2}}$$

b) Für eine Anströmung mit Machzahl $M_1 = 2$ ergibt sich aus dem Diagramm ein maximaler Umlenkwinkel β_{max} von 23°.

   1) Keil 1: $\beta = 15° < \beta_{max} \rightarrow$ Es entsteht ein anliegender Stoß. Abhängig von dem Stoßwinkel σ entsteht ein schwacher oder starker Stoß. Wenn $\sigma < \sigma_{gr} \approx 65°$ entsteht ein schwacher Stoß und die Strömung stromab vom Stoß ist i. a. supersonisch. Ein schwacher Stoß tritt auf, wenn der Druck hinter dem Stoß sich frei einstellen kann. Bei starker Lösung, d.h. wenn $\sigma > \sigma_{gr} \approx 65°$, ist die Strömung hinter dem Stoß subsonisch.

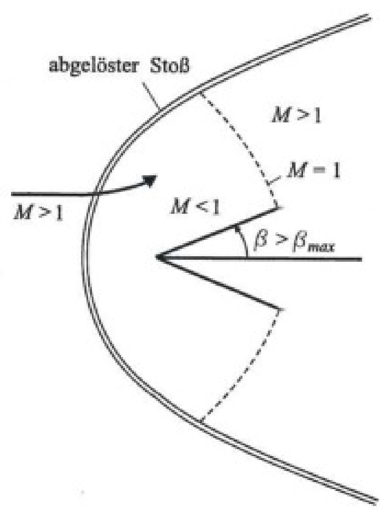
      Keil 2: $\beta = 40° > \beta_{max} \rightarrow$ Die Umlenkung β überschreitet den Grenzwert β_{max} und es entsteht ein abgelöster Stoß. Vor dem Keil bildet sich ein gekrümmter Verdichtungsstoß.

2) Skizze für den schwachen und starken Stoß an Keil 1



Anmerkung: Hinter dem starken Stoß ist die Strömung immer subsonisch. Beim schwachen Stoß bleibt die Strömung im Allgemeinen supersonisch, kann jedoch auch subsonisch werden.

Skizze für den abgelösten Stoß an Keil 2



6. Aufgabe

a) Bei instationären Strömungen ist die Strouhalzahl $Sr = \frac{l}{\tau u_\infty}$ relevant. Sie ist das Verhältnis der Zeit $\frac{l}{u_\infty}$, die ein Fluidteilchen der Geschwindigkeit u_∞ benötigt, um die Strecke l zurückzulegen, und einer für einen instationären Vorgang charakteristischen Zeit τ.

b) Die Verdrängungsdicke entspricht dem Abstand um den ein Körper in einer hypothetischen reibungsfreien Strömung aufgedickt werden muss, so dass der gleiche Massenstrom wie in der tatsächlichen Strömung auftritt.

$$\delta_1 = \int_0^\infty (1 - \tfrac{u}{u_a})dy$$

c) Für das $\frac{1}{7}$ Geschwindigkeitsprofil ergibt sich aus dem Potenzgesetz die Geschwindigkeitsverteilung in der turbulenten Grenzschicht zu:

$$\frac{\bar{u}}{u_a} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Mit der Definition der Impulsverlustdicke

$$\delta_2 = \delta \int_0^1 \frac{\bar{u}}{u_a}\left(1 - \frac{\bar{u}}{u_a}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

ergibt sich das Verhältnis von Impulsverlustdicke zu Grenzschichtdicke zu:

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \left(\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{2}{7}}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{7}{8}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{8}{7}} - \frac{7}{9}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{9}{7}}\Bigg|_0^1 = \frac{7}{8} - \frac{7}{9}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{7}{72}$$

d) Verlauf der statischen Temperatur und der Ruhetemperatur über den Stoß.