

Klausur Strömungsmechanik II

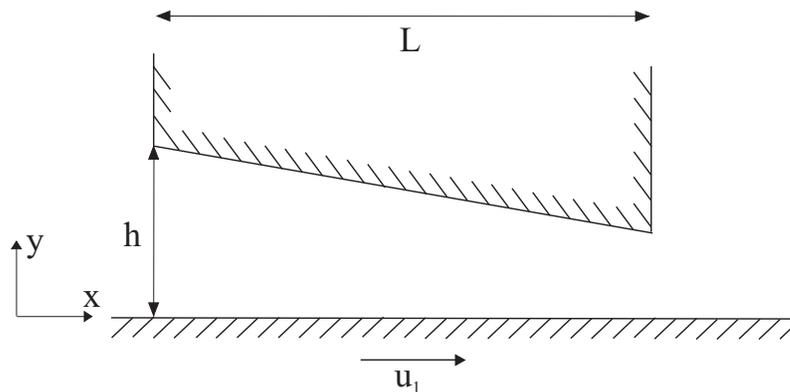
14. 08. 2020

1. Aufgabe (11 Punkte)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \tag{2}$$

- a) Für welche Größen stellen diese Gleichungen die Erhaltungsgleichungen dar? Welche Eigenschaften weist die beschriebene Strömung auf?
- b) Bestimmen Sie mit der Methode der Differentialgleichungen die relevanten Kennzahlen, die sich aus diesen Gleichungen ergeben. Wählen Sie Ihre Referenzgrößen mit Bezug zu einer Keilspaltströmung mit bewegter unterer Wand (siehe Skizze), wenn die maximale Druckänderung innerhalb des Spaltes Δp beträgt. Für die Spalthöhe gilt: $h \ll L$.

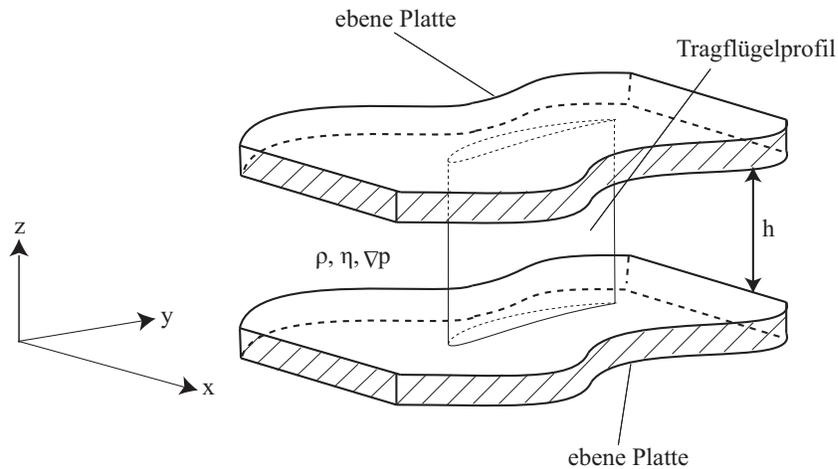


- c) Wenn möglich, drücken Sie die erhaltenen Kennzahlen durch eine oder mehrere häufig in der Strömungsmechanik verwendete Kennzahlen aus.
- d) Vereinfachen Sie die dimensionslosen Gleichungen für eine schleichende Strömung. Geben Sie die vereinfachten Differentialgleichungen in dimensionsbehafteter Schreibweise an.

Gegeben: $u_1, h, L, \Delta p, \rho, \eta, \frac{h}{L} \ll 1$

2. Aufgabe (10 Punkte)

Die schleichende Strömung zwischen zwei ebenen Platten wird zur Untersuchung der Umströmung eines Körpers genutzt. Bei dieser sogenannten Hele-Shaw Strömung strömt ein Fluid mit konstanter Dichte ρ und konstanter dynamischer Zähigkeit η stationär zwischen zwei parallelen, unendlich ausgedehnten, ebenen Platten im Abstand von h , zwischen denen beliebige Umströmungskörper eingesetzt werden können. Im Fall der schleichenden Strömung ist der Impulsaustausch in z -Richtung vernachlässigbar. Das Druckfeld ist durch $\nabla p(x, y, z)$ gegeben.



Die Impulserhaltungsgleichung für eine instationäre, inkompressible Strömung lautet

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v} + \rho \vec{g}$$

- Geben Sie die physikalische Bedeutung der einzelnen Terme der Impulserhaltungsgleichung an. Welcher Term kann in einer schleichenden Strömung vernachlässigt werden?
- Vereinfachen Sie die Impulserhaltungsgleichung für die oben beschriebene Hele-Shaw Strömung und leiten Sie daraus jeweils einen Ausdruck für die Geschwindigkeitskomponenten $u(x, y, z)$ und $v(x, y, z)$ in Abhängigkeit der gegebenen Größen her.
- Welche Gleichung muss neben der oben gegebenen Gleichung noch erfüllt werden? Zeigen Sie rechnerisch, welche Bedingung sich daraus für das Druckfeld ergibt.

Gegeben: $\eta, \nabla p, h$

Hinweise:

- Volumenkräfte sind zu vernachlässigen.

- $\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial y^2} \ll \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial z^2}$

3. Aufgabe (11 Punkte)

In einer Parallelströmung in Richtung der x-Achse mit der Geschwindigkeit u_0 befindet sich an der Position $(x, y) = (0, 0)$ eine Quelle der Ergiebigkeit E .

- Geben Sie die resultierende Potentialfunktion $F(z)$ an. Skizzieren Sie das Strömungsfeld und kennzeichnen Sie deutlich sichtbar die Konturstromlinie.
- Berechnen Sie die Koordinaten des Staupunktes in Polarkoordinaten.
- Bestimmen Sie y_{max} der Konturstromlinie.
- Dem Strömungsfeld wird eine weitere Quelle der Ergiebigkeit E hinzugefügt. Sie liegt senkrecht zur Parallelströmung im Abstand a oberhalb der ersten Quelle. Skizzieren Sie die Konturstromlinie(n) für $a = \frac{y_{max}}{2}$ und $a = 4y_{max}$.
- Wie groß ist die Geschwindigkeit in Richtung der y-Achse in der Mitte zwischen den beiden Quellen?

Gegeben: $u_0, E > 0, a$

Hinweise:

- $z = x + iy = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
- $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, v = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$
- Winkeltabelle:

φ	0	$\frac{1}{8}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{3}{8}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{5}{8}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{7}{8}\pi$	π
$\sin(\varphi)$	0	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	0
$\cos(\varphi)$	1	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	-1
$\tan(\varphi)$	0	$\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$	1	$\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$	∞	$-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$	-1	$-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$	0

Bekannte komplexe Potentialfunktionen:

Potentialwirbel: $F(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$

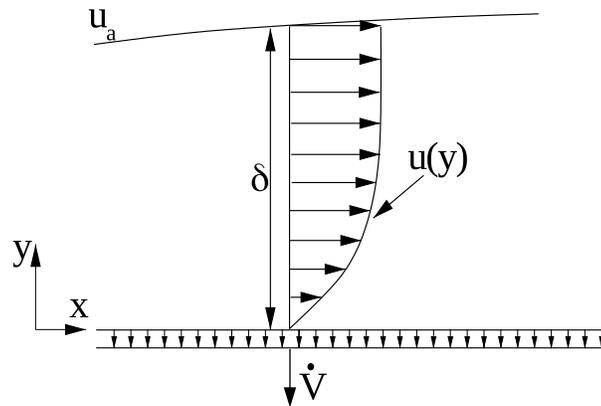
Quelle/Senke: $F(z) = \frac{E}{2\pi} \ln z$

Dipol: $F(z) = \frac{M}{2\pi z}$

Staupunktströmung: $F(z) = \alpha z^2$

Parallelströmung: $F(z) = (u_0 - iv_0)z$

4. Aufgabe (11 Punkte)



Entlang einer längsangeströmten Platte der Breite B bildet sich eine laminare, inkompressible Grenzschicht. Durch äquidistante Druckbohrungen in der Platte wird entlang der Länge L ein konstanter Volumenstrom \dot{V} abgesaugt. Für das tangential Geschwindigkeitsprofil gilt der Polynomansatz:

$$\frac{u(y)}{u_a} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

- Bestimmen Sie für diese Grenzschichtgleichung die Koeffizienten des Geschwindigkeitsprofils.
- Skizzieren Sie den Verlauf der laminaren Grenzschicht entlang der Koordinate x beginnend am Anfang der Platte. Zeichnen Sie an drei Stellen innerhalb der sich aufbauenden Grenzschicht die Geschwindigkeitsverteilung $u(0 \leq y \leq \delta)$ ein.

Aufgrund eines technischen Defekts fällt die Absauganlage aus und die Grenzschicht kann nicht länger laminar gehalten werden.

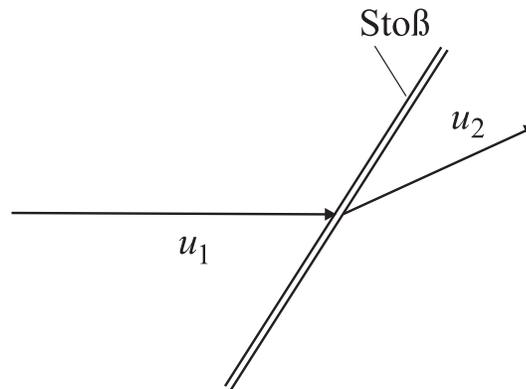
- Wie groß ist die kritische Reynoldszahl für die inkompressible Strömung entlang einer längsangeströmten ebenen Platte?
- Nehmen Sie an, dass die Grenzschichtströmung direkt am Anfang der Platte turbulent ist. Skizzieren Sie erneut den Verlauf der Grenzschichtdicke und den Geschwindigkeitsverlauf an drei Positionen innerhalb der Grenzschicht. Nennen Sie stichwortartig zwei Unterschiede zwischen der laminaren und der turbulenten Grenzschicht.

Gegeben: $\eta, \rho, \delta, u_a = \text{konst.}, \dot{V}, B, L$

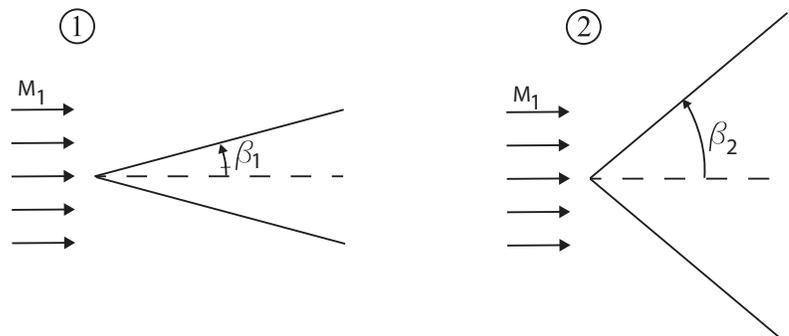
Hinweis:

Grenzschichtgleichung (x-Impulsgleichung): $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

5. Aufgabe (9 Punkte)



- a) An der Vorderkante eines Tragflügels bildet sich bei einer Überschallströmung ein schräger Verdichtungsstoß. Bestimmen Sie das Dichteverhältnis ρ_2/ρ_1 über den Stoß in Abhängigkeit der Anströmmachzahl M_1 und dem Stoßwinkel σ .
- b) Eine reibungsfreie Strömung trifft mit einer Machzahl $M_1 = 2$ auf einen Keil und es entsteht ein schräger Verdichtungsstoß. Untersuchen Sie die Strömungsvorgänge für zwei Keilgeometrien unterschiedlichen Umlenk winkels β .



- Bestimmen Sie, welche Art Verdichtungsstoß bei Keil 1 und Keil 2 auftreten kann. Diskutieren Sie außerdem den Strömungszustand stromab des Verdichtungsstoßes in Abhängigkeit vom Stoßwinkel.
- Skizzieren Sie **auf Ihrem Lösungsbogen** Position und Verlauf der Stöße und kennzeichnen Sie die Zonen super- und subsonischer Strömung.

Gegeben: M_1, γ, σ

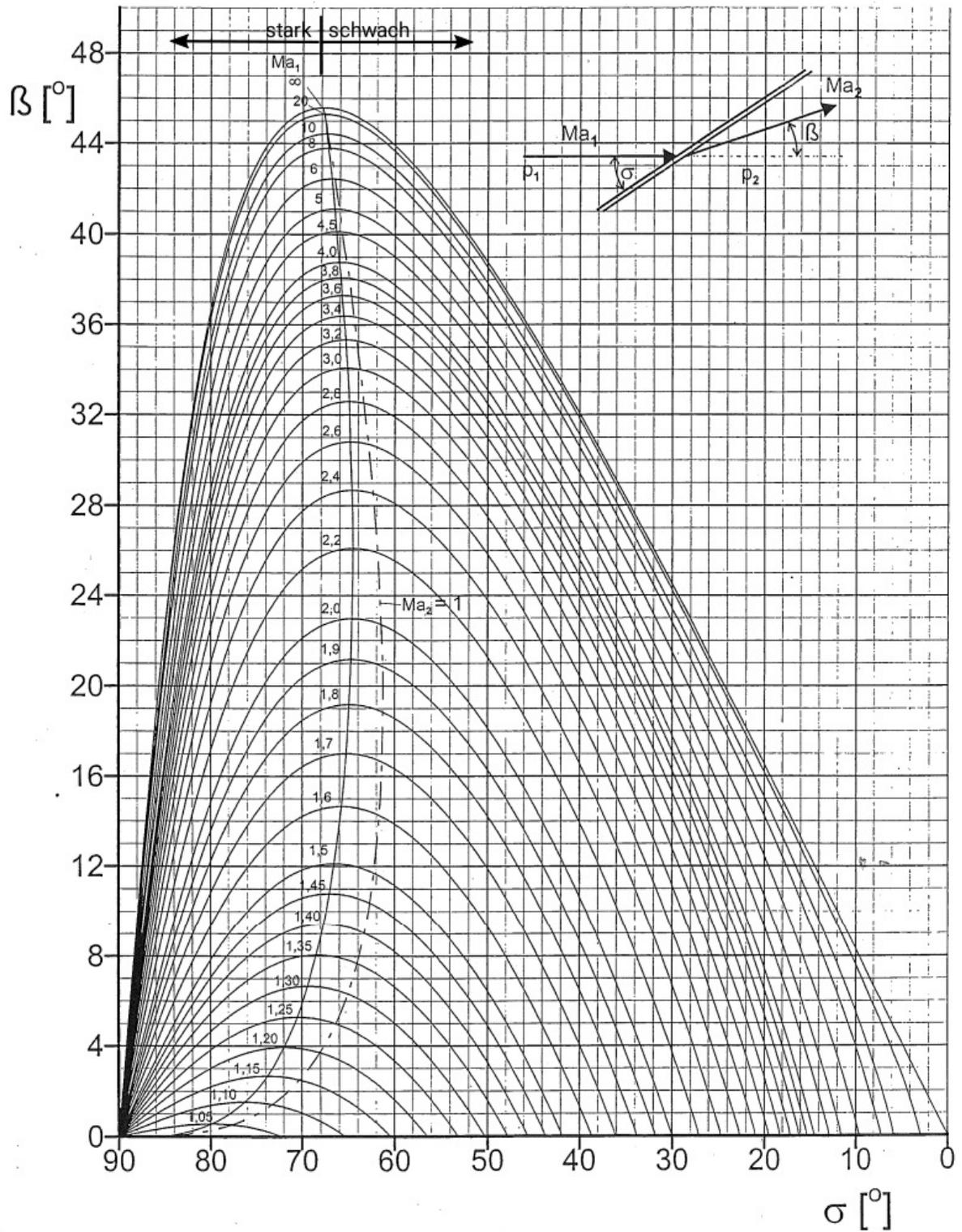
Für Aufgabenteil b) gilt: $M_1 = 2, \beta_1 = 15^\circ, \beta_2 = 40^\circ$

Hinweise:

- $M_{n,1}^{*2} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1 + \frac{2}{M_{n,1}^2}}$ ($M_n^* \hat{=}$ kritische Machzahl normal zum Stoß)

- Nutzen Sie zur Lösung von Aufgabenteil b) das Diagramm der Winkelbeziehung für den schiefen Stoß auf der nächsten Seite.

Winkelbeziehung für den schiefen Stoß



6. Aufgabe (8 Punkte)

- a) Anhand welcher Kennzahl können Strömungsfelder in stationäre und instationäre Strömungen eingeteilt werden und wie ist diese definiert?
- b) Definieren Sie die Verdrängungsdicke δ_1 . Geben Sie zusätzlich die Bestimmungsgleichung für $\delta_1 = f\left(\frac{u(y)}{u_a}\right)$ an.
- c) Bestimmen Sie das Verhältnis der Impulsverlustdicke zur Grenzschichtdicke in einer turbulenten Grenzschicht unter Berücksichtigung des $\frac{1}{7}$ Geschwindigkeitsprofils.
- d) Skizzieren Sie den Verlauf von statischer Temperatur und Ruhetemperatur über einen senkrechten und schrägen Verdichtungsstoß. Kennzeichnen Sie in Ihrem Koordinatensystem eindeutig die Position des Verdichtungsstoßes.