

Energiegleichung f. instat. Strömu.

$$V = f(s, t) \quad \Rightarrow$$

$$\rho \int \frac{\partial V}{\partial t} ds + p + \frac{\rho}{2} V^2 + \rho g z = f(t)$$

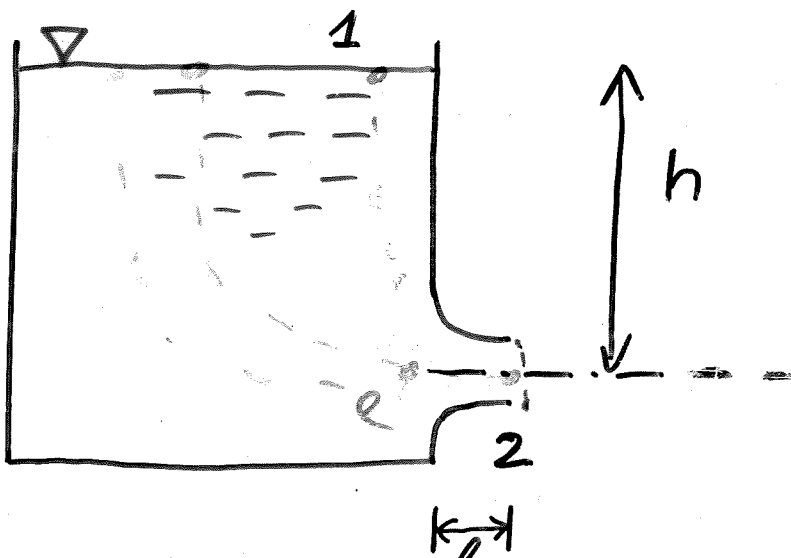
quasistationär:

$$\rho \int \frac{\partial V}{\partial t} ds \ll p + \frac{\rho}{2} V^2 + \rho g z$$

i. a. wird $h(t)$ oder der Abflus-
vorgang $V(t)$ untersucht!

Bsp. 5:

Entleerungsvorgang eines Wasser-
tanks ist zu untersuchen.



$h \gg l$

Lösg. 5:

$$\underline{P_1} + \frac{\rho}{2} v_1^2(t) + \rho g h(t) = \underline{P_2} + \frac{\rho}{2} v_2^2(t) + \rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$\begin{aligned} P_1 &= P_2 \\ &= P_a \end{aligned} \quad 2 \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds + (v_2^2(t) - v_1^2(t)) = 2 g h(t)$$

$$A_1 v_1(t) = A_2 v_2(t) = \dot{Q}(t)$$

$$h(t=0) \gg l : \quad \frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{dv_1}{dt}$$

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds \approx \frac{dv_1}{dt} h$$

$$\text{aus Konti. glg.} \quad \frac{dv_1}{dt} = \frac{A_2}{A_1} \frac{dv_2}{dt}$$

$$\rightarrow 2 h(t) \frac{A_2}{A_1} \frac{dv_2}{dt} + \underline{v_2^2(t) \left(1 - \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 \right)} = 2 g h(t) \quad (*)$$

1 Glg. für 2 Unbek.: $v_2(t)$, $h(t)$

zusätzliche Glg.:

$$v_1 = - \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad h(t) = h(t=0) - \int_0^t v_1(t) dt \quad (\Delta)$$

Gln. $\textcircled{*}$ u. $\textcircled{\Delta}$ sind gleichzeitig zu lösen.

ODER Abschätzung von $2h(t) \frac{A_2}{A_1} \frac{dv_2}{dt}$:
stat. Ausströmen $v_2 = \sqrt{2gh}$

Differentiation $\Rightarrow$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{g}{\sqrt{2gh}} \frac{dh}{dt} = -\frac{g}{\sqrt{2gh}} v_1 = -\frac{g}{\sqrt{2gh}} v_2 \frac{A_2}{A_1}$$

$$\Rightarrow 2h \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{dv_2}{dt} \right) = -2gh \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2 = -v_2^2 \left(\frac{A_2}{A_1} \right)^2$$

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{v_2^2}{2h} \frac{A_2}{A_1} = -g \frac{A_2}{A_1}$$

$A_1 \gg A_2 \Rightarrow \frac{dv_2}{dt}$ ist vernachlässigbar

$\rightarrow$ quasistationäre Ström.

$$\Rightarrow \textcircled{*} \quad v_2(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

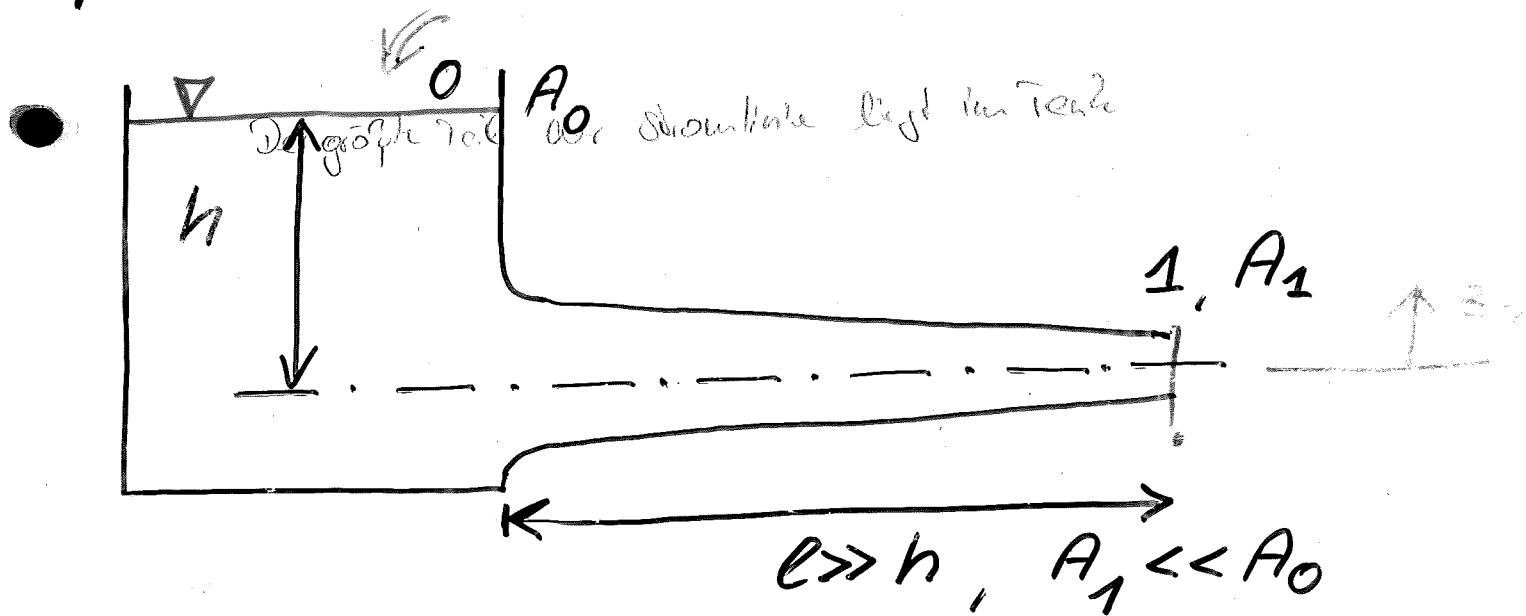
$$\frac{dh}{dt} = -v_1 = -\sqrt{2gh(t)} \frac{A_2}{A_1}$$

=====

$$T = - \frac{A_1}{A_2} \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_h^0 \frac{dh'}{\sqrt{h'}}$$

$$\underline{\underline{T = \frac{A_1}{A_2} \sqrt{\frac{2h'}{g}}}}$$

Bsp. 6 :



Gegeben: $h = \text{konst}$ (durch gereg. Zufluß),
Ausströmverfahren wird z. H. pkt. $t=0$
in Gang gesetzt.

Gesucht: $v_1(t)$

Lösung. 6:

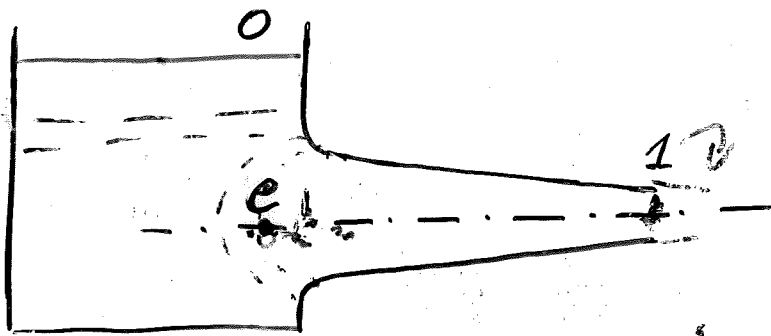
$$P_0 + \frac{\rho}{2} v_0^2 + \rho g h = P_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$P_1 = P_0 = P_a$$

$$v_0 = v_1 \frac{A_1}{A_0}, \quad A_0 \gg A_1, \quad v_0 \ll v_1$$

$$\frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho \int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \rho g h$$

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds : ?$$



$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \int_0^e \frac{\partial v}{\partial t} ds + \int_e^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$\downarrow$ $\rightarrow 0$ $\downarrow$

$$v(s, t) A(s) = v_1(t) A_1$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv_1}{dt} \frac{A_1}{A(s)}$$

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \int_e^1 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{dv_1}{dt} \int_e^1 \frac{A_1}{A(s)} ds = \frac{dv_1}{dt} \bar{l}$$

$$\Rightarrow \frac{dV_1}{dt} \bar{e} + \frac{V_1^2}{2} = gh \quad ; \quad \bar{e} \neq e$$

stationäre Ausströmung:

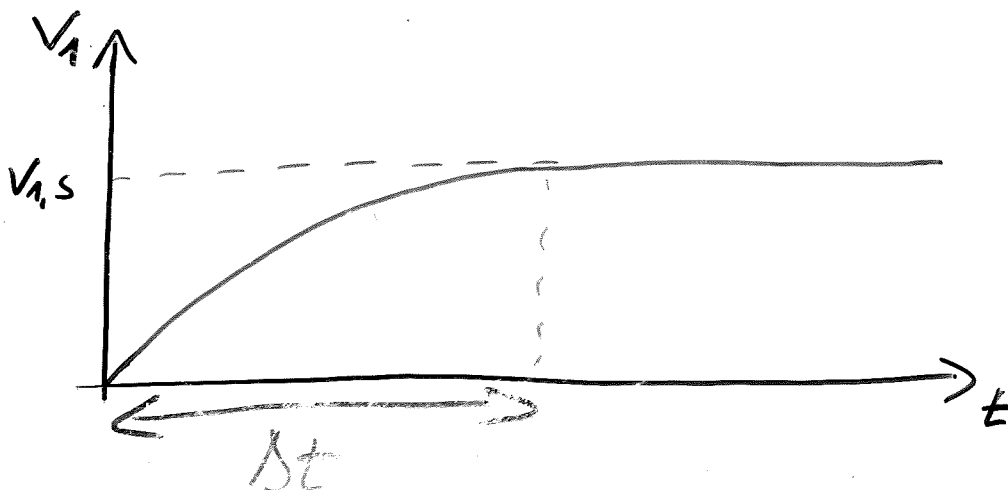
$$V_{1,s} = \sqrt{2gh}$$

$$2\bar{e} \frac{dV_1}{dt} = V_{1,s}^2 - V_1^2$$

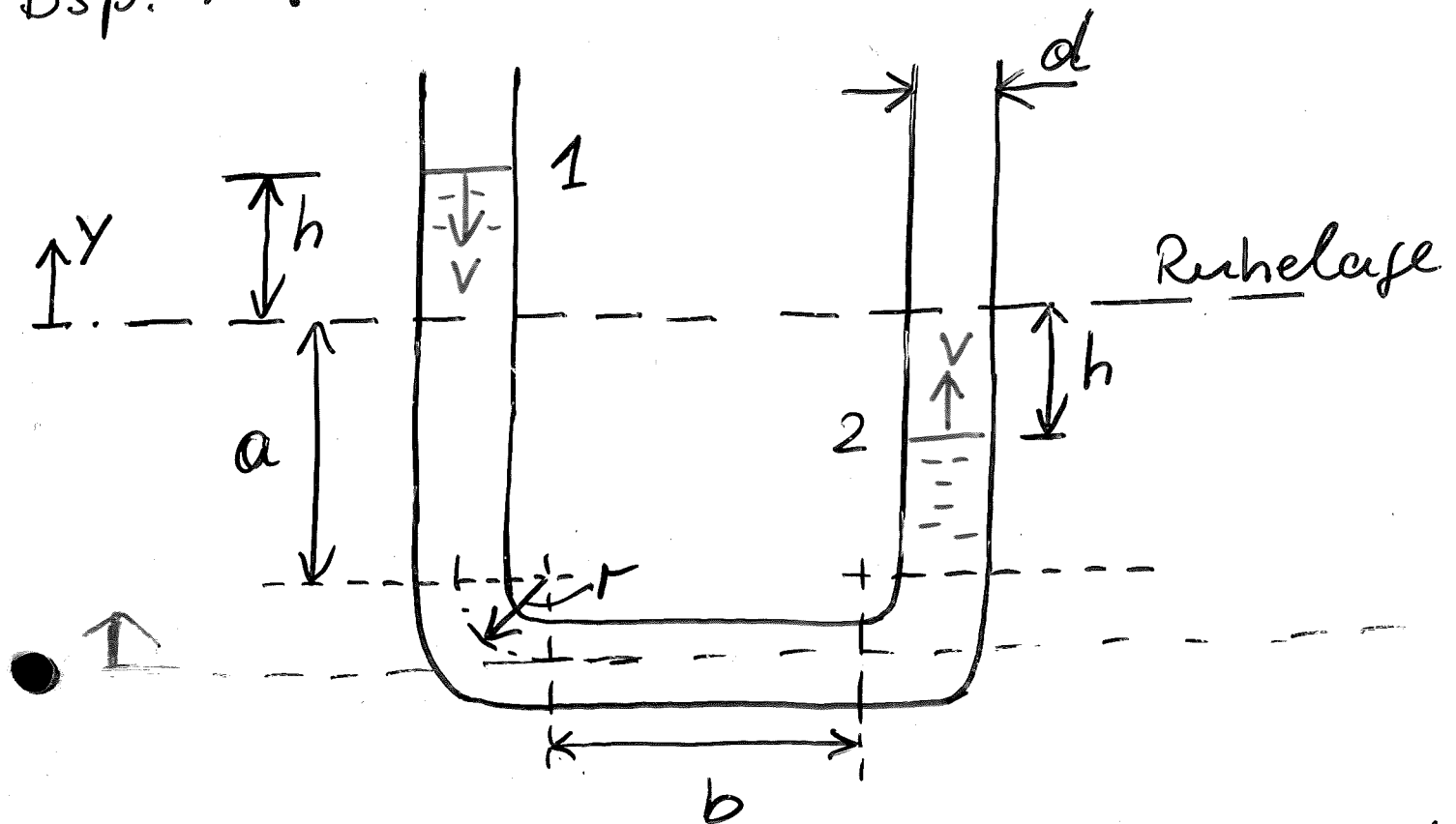
$$\frac{dV_1}{V_{1,s}^2 - V_1^2} = \frac{1}{2\bar{e}} dt$$

$$\frac{1}{2V_{1,s}} \ln \frac{V_{1,s} + V_1}{V_{1,s} - V_1} = \boxed{\frac{1}{V_{1,s}} \tanh^{-1} \left(\frac{V_1}{V_{1,s}} \right) = \frac{t}{2\bar{e}}}$$

$$\underline{\underline{V_1(t) = V_{1,s} \tanh \left(\frac{V_{1,s} t}{2\bar{e}} \right)}}$$



Bsp. 7 :



Wasser in einem U-Rohr wird durch eine Störung aus der Ruhelage gelenkt. Gegeben sind d. Größen a, b, r, h, d ; gesucht wird d. Schwingungsverlauf.

Lösg. 7:

$$P_1 + \frac{\rho}{2} V_1^2 + \rho g Y_1 = P_2 + \frac{\rho}{2} V_2^2 + \rho g Y_2 + \rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$P_1 = P_2$$

$$V_1 = V_2$$

$$Y_1 = a + r + y$$

$$Y_2 = a + r - y$$

$$\int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = 2g\gamma = \frac{dv}{dt} \ell$$

mit $\ell = 2a + b + \pi r$

$$V = - \frac{dy}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2g}{\ell} y = \frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

Schwingungsglg. d. harmon. Bewegg.

allg. Lsg: $y = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$

bzw. $y = d \cos(\omega t - \theta)$

mit $d = (A^2 + B^2)^{1/2}$, $\tan \theta = \frac{B}{A}$

Auf- u. Randbedgn.:

$t = 0$: $y = h$ und $v = v_0$

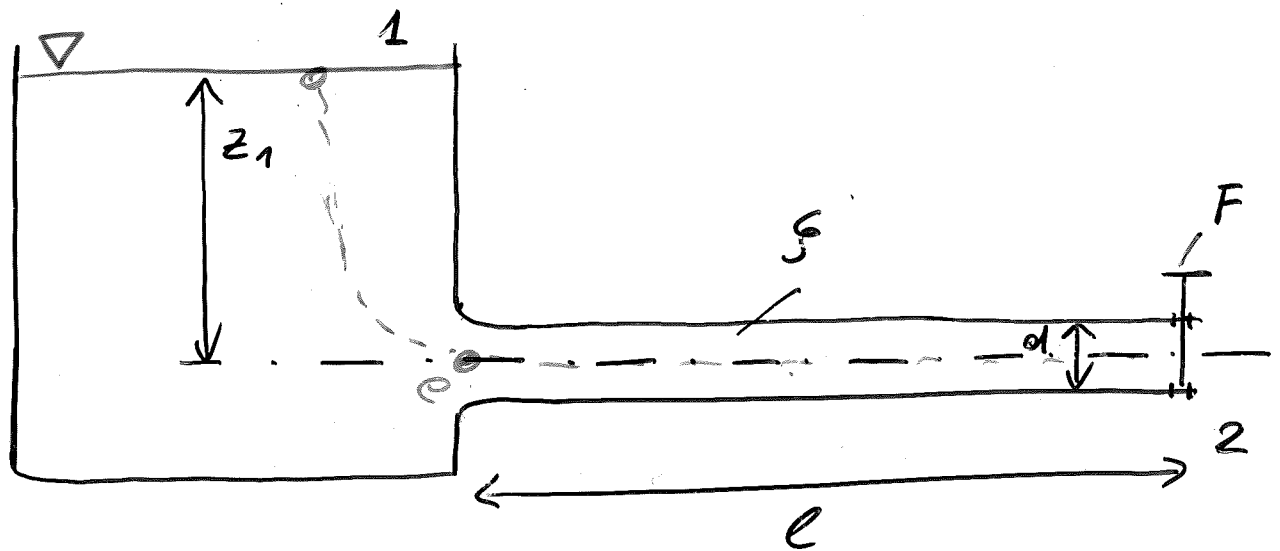
$y = h \cos(\omega t) - \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$

bzw.

$y = \sqrt{h^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega t - \theta)$

$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{-v_0}{\omega h} \right)$

Bsp. 8:



Gegeben: $z_1 = 4.3 \text{ m}$, $l = 85 \text{ m}$, $f = 8.1$,
 $d = 80 \text{ mm}$

Gesucht: Schiebt F wird plötzlich ge-
 öffnet; $v_2(t)$ bis zum station.
 Zustand?

Lösung 8:

$$P_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 + \rho g z_1 = P_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2 + \rho g z_2 + \Delta P_V + \rho \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds$$

$$P_1 = P_2, \quad v_1 \approx 0, \quad z_2 = 0$$

$$l \gg z_1: \quad \int_1^2 \frac{\partial v}{\partial t} ds = \frac{dv_2}{dt} l$$

$$\Delta P_V = f \frac{\rho}{2} v_2^2$$

$$l \frac{dv_2}{dt} + \frac{v_2^2}{2} (1+f) = g z_1$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{l} \left[g z_1 - \frac{v_2^2}{2} (1+f) \right] = \frac{1+f}{2l} \left[\frac{2 g z_1}{1+f} - v_2^2 \right]$$

$$v_{\text{max}} = a_1$$

$$\int_0^{V_2} \frac{dV}{\frac{2gz_1}{1+f} - V^2} = \frac{1+f}{2\ell} \int_0^t dt$$

$$a_1^2 = \frac{2gz_1}{1+f}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2a_1} \ln \left(\frac{a_1 + V_2}{a_1 - V_2} \right) = \frac{1+f}{2\ell} t$$

$$\text{mit } a_2 = \frac{a_1(1+f)}{\ell} \Rightarrow t = \frac{1}{a_2} \ln \left(\frac{a_1 + V_2}{a_1 - V_2} \right)$$

$$\text{bzw. } V_2 = a_1 \frac{1 - e^{-a_2 t}}{1 + e^{-a_2 t}}$$

$$t \rightarrow \infty : e^{-\infty} \rightarrow 0 \quad V_{2,\infty} = a_1 = \sqrt{\frac{2gz_1}{1+f}} = 3.045 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_2 = V_{2,\infty} \frac{1 - e^{-a_2 t}}{1 + e^{-a_2 t}}$$

