laminare Grenzschichten

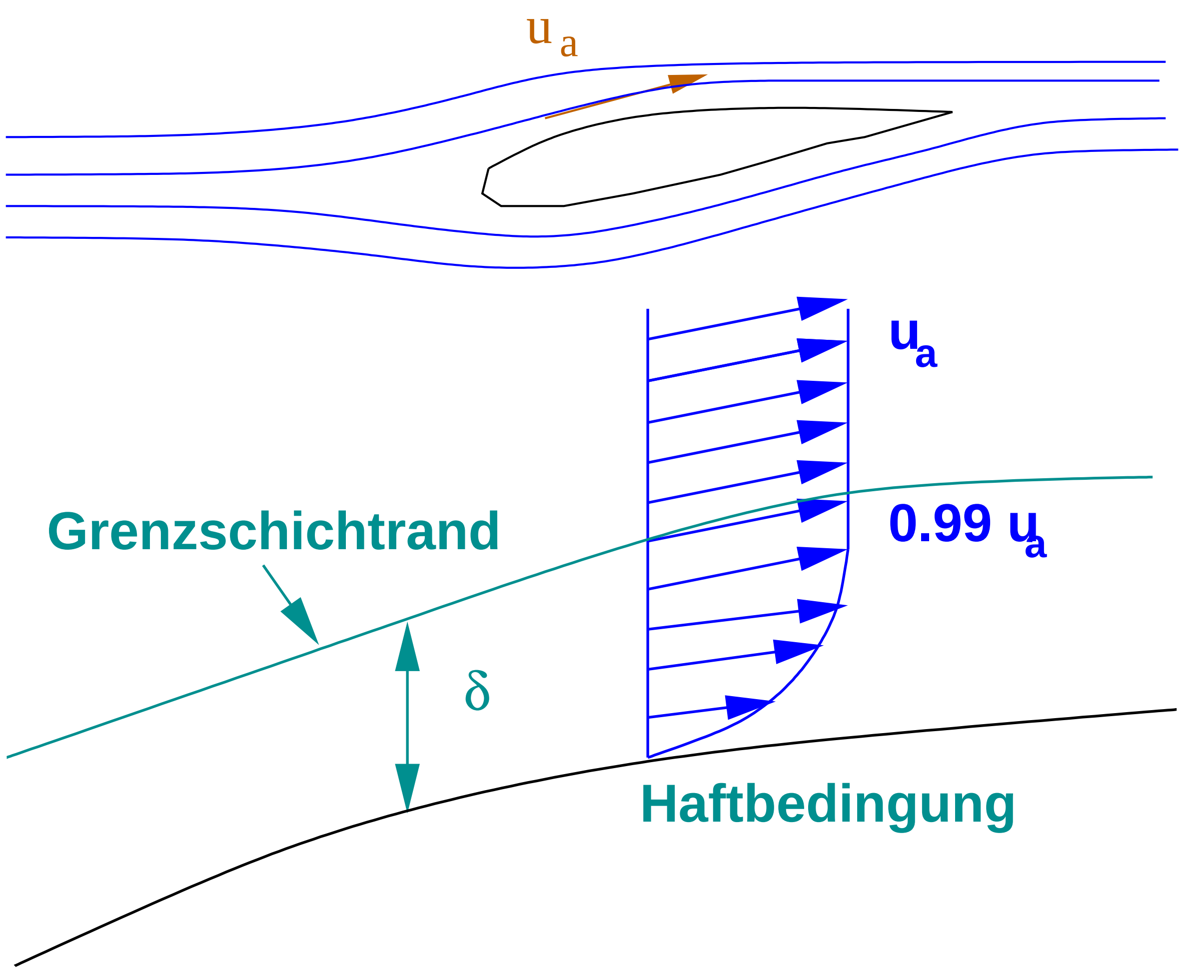
Wofür Grenzschichttheorie?

- mit der Potentialtheorie können nur Druckverteilungen berechnet werden
  $\longrightarrow$ Auftriebskraft
- Die Widerstandskräfte können nicht berechnet werden. Reibungskräfte müssen berücksichtigt werden

Die Druckverteilung an schlanken Körpern stimmt gut mit der theoretischen Verteilung aus der Potentialtheorie überein, wenn Re $\gg$ 1. Der Einfluss der Reibungskräfte ist auf einen sehr dünnen Bereich in der Nähe der Wand beschränkt $\longrightarrow$ Grenzschicht

laminare Grenzschichten

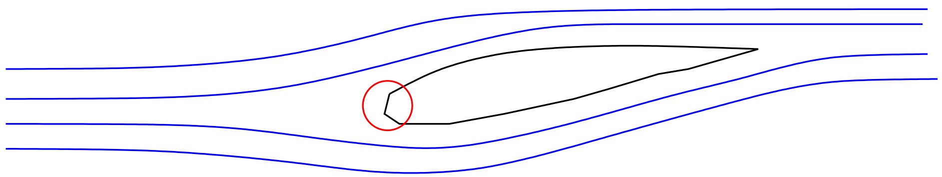
Beispiel

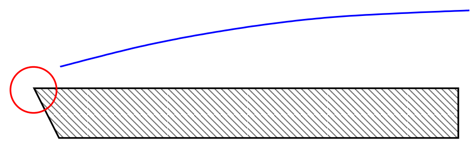


Grenzschichttheorie

- Die Aufteilung der Strömung in 2 Teile (die reibungsfreie Außenströmung und die Grenzschicht) erlaubt eine komplette Beschreibung des Strömungsfeldes.

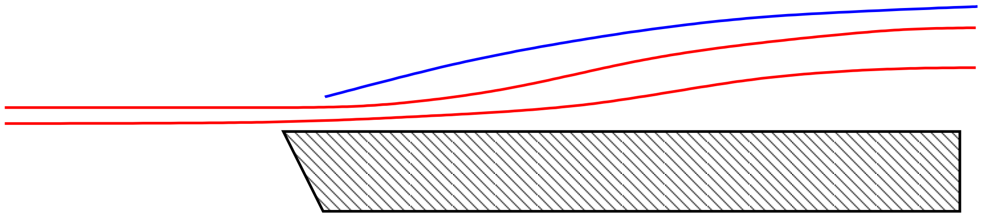
- Die Grenzschichttheorie gilt <u>nicht</u> in der Nasenregion!





Grenzschichttheorie

- Durch die Verzögerung in der Grenzschicht werden die Stromlinien von der Wand abgedrängt. Sie sind nicht mehr parallel zur Wand



- Die Linie $\delta(x)$, die den Rand der Grenzschicht (Grenzschichtdicke) ist keine Stromlinie. Sie kennzeichnet die Linie, bei der die Geschwindigkeit einen bestimmten Anteil der Außengeschwindigkeit erreicht, normalerweise 99 %.

$$\frac{u(y)}{u_a} = 0.99 \qquad \text{willkürlich}$$

Grenzschichtdicke

In der Grenzschicht:

$$\mathcal{O}(\text{Trägheit}) \approx \mathcal{O}(\text{Reibungskräfte})$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} \approx \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

dimensionslose Werte $\longrightarrow \mathcal{O}(1)$

$$\bar{u} = \frac{u}{u_\infty} \qquad \bar{x} = \frac{x}{L} \qquad \bar{y} = \frac{y}{\delta}$$

$$\longrightarrow \rho u_\infty \frac{u_\infty}{L} \approx \eta \frac{u_\infty}{\delta^2}$$

$$\longrightarrow \delta \sim \frac{L}{\sqrt{\frac{u_\infty \rho L}{\eta}}} = \frac{L}{\sqrt{\text{Re}_L}} \qquad \boxed{\delta \sim \sqrt{L}}$$

Grenzschichtdicke

Einführen dimensionsloser Werte in die Navier-Stokes-Gleichungen für 2-d, stationäre, inkompresible Strömungen. Dimensionslose Variablen sind $\mathcal{O}(1)$.

Vernachlässigung aller Terme mit dem Faktor $\frac{1}{\underline{\mathrm{Re}}}$ oder kleiner.

$\rightarrow$ Grenzschichtgleichungen gelten für Re $\gg 1$ ohne starke Krümmung.

Konti: $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

x-Impuls: $$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{= \frac{dp}{dx}} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

y-Impuls: $$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

y-Imp.: Der Druck ist senkrecht zur Hauptströmungsrichtung konstant. Er wird von der reibungsfreien Außenströmung aufgeprägt

Grenzschichtrand für die ebene Platte ($y = \delta$)

$$u = U \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

reibungsfreies äußeres Srömungsfeld

x-Imp:

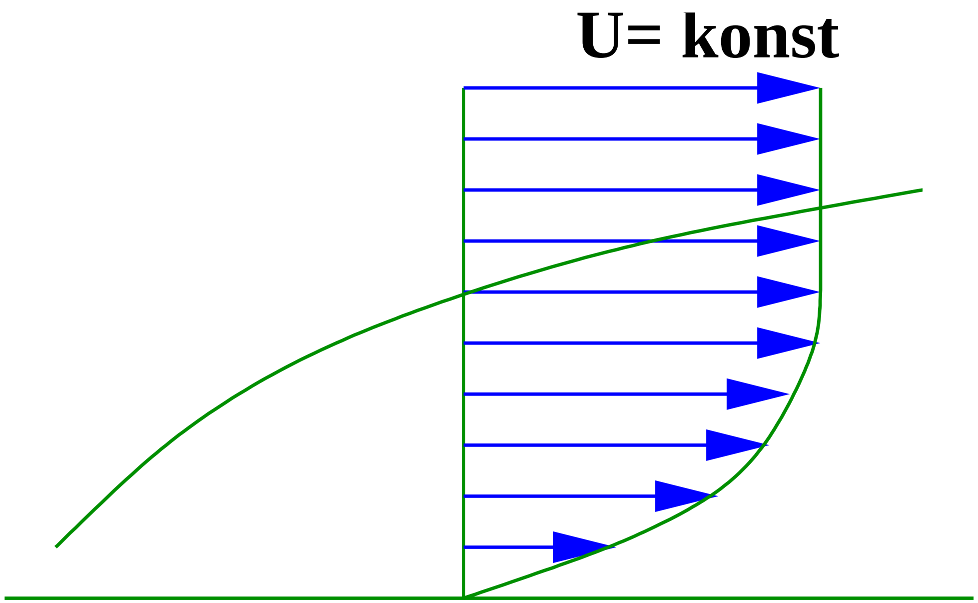
$$\boxed{\rho U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

Eulergleichung für $y = \delta$

<u>3 Fälle</u> abhängig vom Druckgradienten

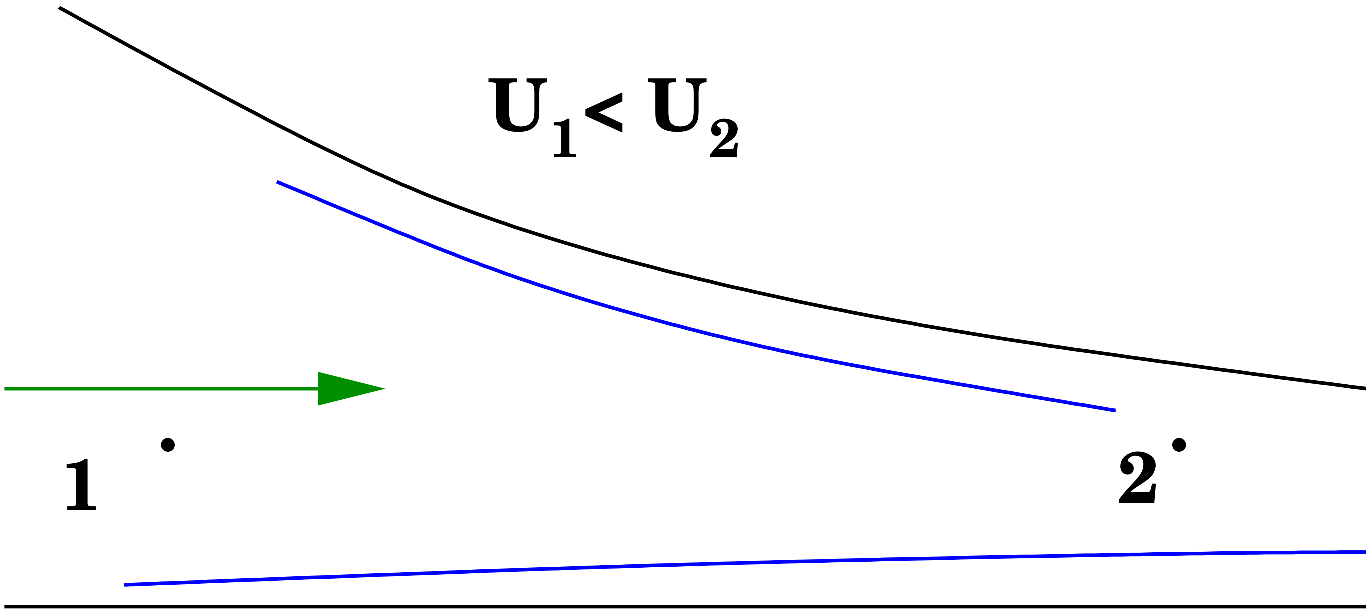
$\boxed{1}$ $\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \rightarrow U = \text{konst}$

ebene Platte, Grenzschicht (Blasius)



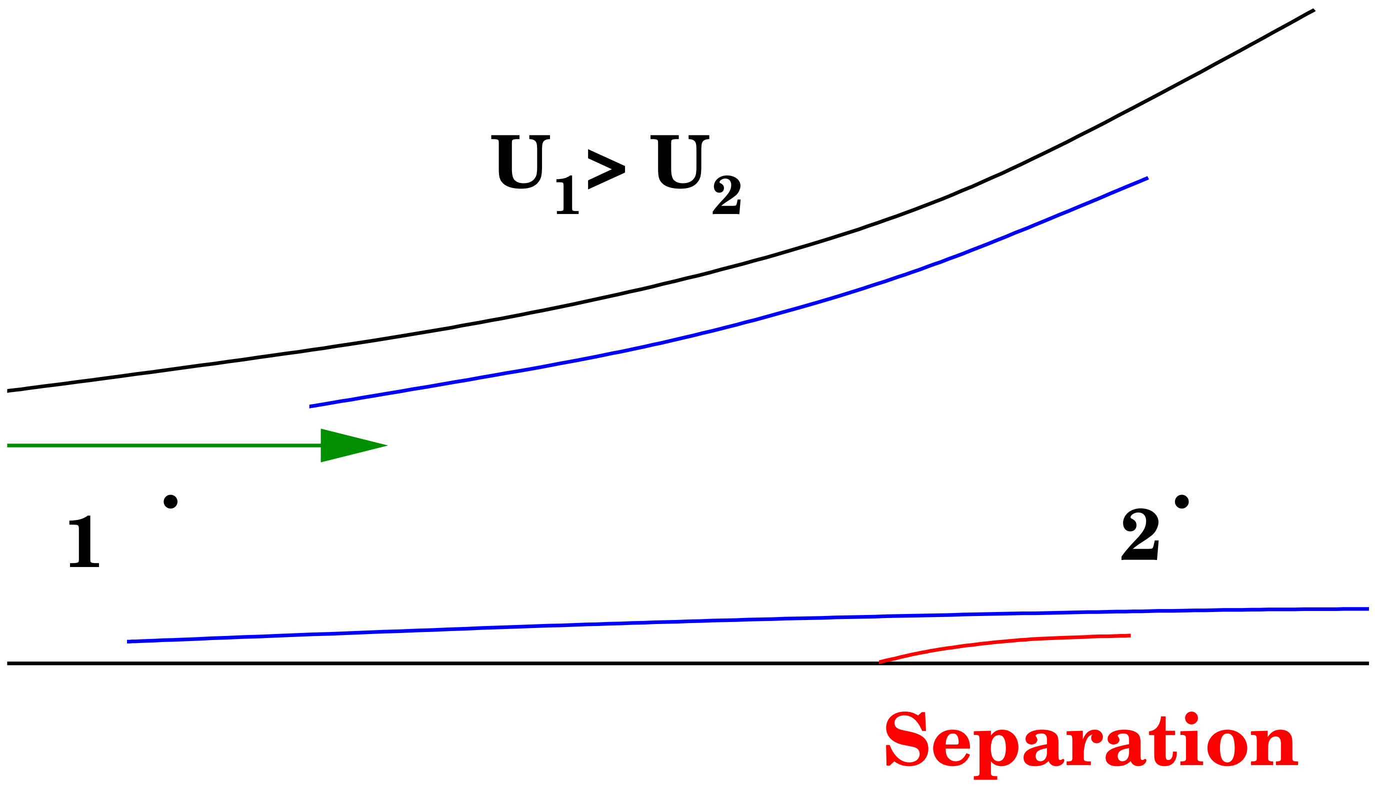
$\boxed{2}$ $\qquad \dfrac{\partial p}{\partial x} < 0 \rightarrow \dfrac{\partial U}{\partial x} > 0 \triangleq$ beschleunigte Strömung

konvergenter Kanal (Düse)



$\boxed{3}$ $\qquad \frac{\partial p}{\partial x} > 0 \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} < 0 \triangleq$ verzögerte Strömung

divergenter Kanal (Diffusor)



An der Wand ($y = 0$)

Haftbedingung: $u = v = 0$

$$\rightarrow \quad \text{x-Imp.:} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0} \qquad \tau_w = \eta \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}\Big|_{y=0} =}$$

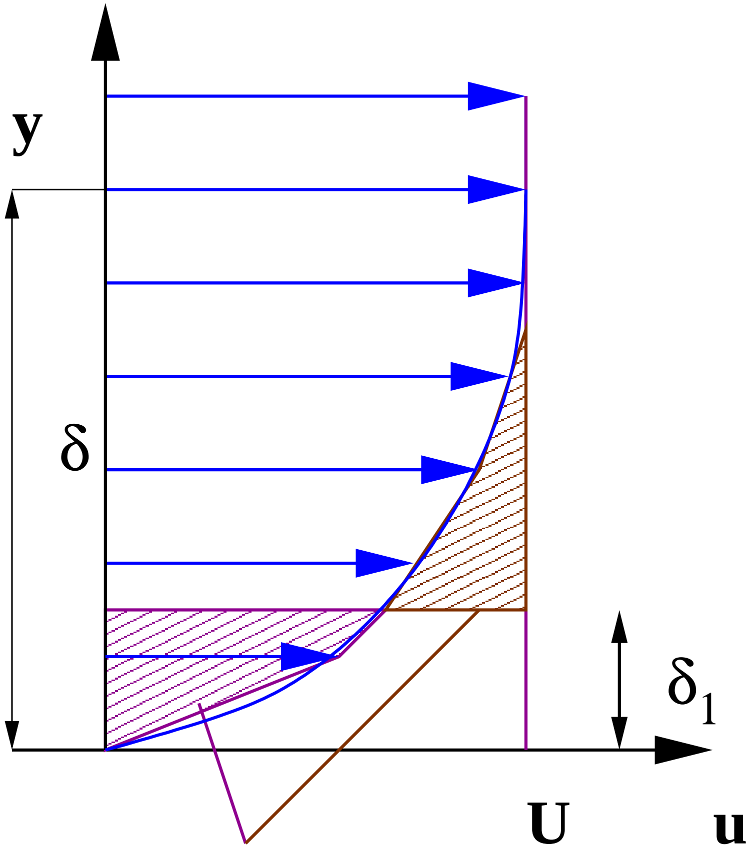
ebene Platte: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ (kein Druckgradient, $U =$ konst.)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = 0 \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = konst\right)$$

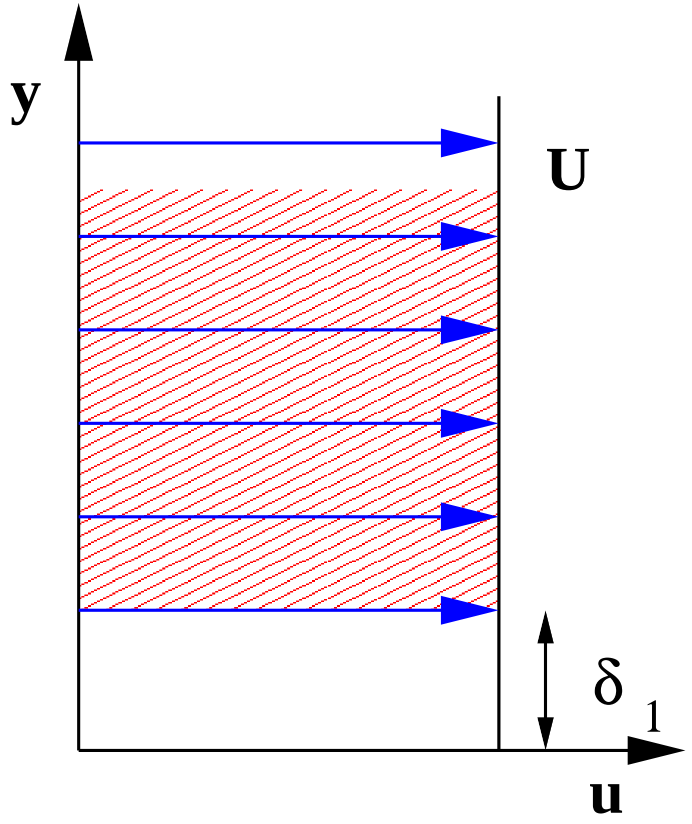
$\rightarrow$ keine Krümmung an der Wand

Verdrängungs-/Impulsverlustdicke

δ_1 (Verdrängungsdicke): charakteristisches Maß für die Auslenkung einer ungestörten Stromlinie

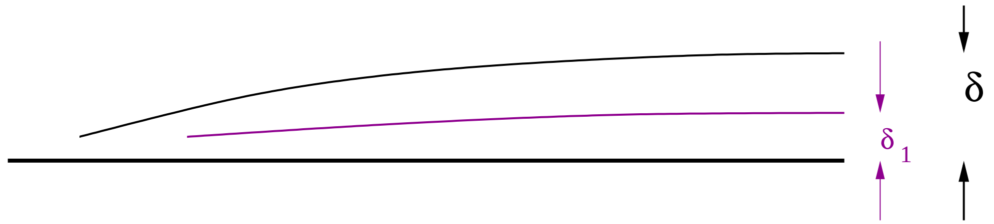


Flaechen sind gleich



$\frac{\text{Massenstrom}}{\text{Breite}} = \text{konst}$

Verdrängungs-/Impulsverlustdicke



δ_1 aus $\dot{m}$ = konst.

$$U(\delta - \delta_1) = \int_0^\delta u \; dy \rightarrow \int_0^\delta U - u \; dy = U\delta_1$$

$$\rightarrow \qquad \boxed{\delta_1 = \int_0^\delta (1 - \frac{u(y)}{U}) \, dy}$$

in dimensionsloser Form $\frac{\delta_1}{\delta} = \int_0^1 (1 - \frac{u(y)}{U}) \, d\frac{y}{\delta} \qquad (\delta, \, \delta_1 \neq f(y))$

Verdrängungs-/Impulsverlustdicke

Durch die Reibung entstehen Verluste gegenüber der ungestörten Strömung

Aus einer Impulsbilanz

$$\boxed{\delta_2 = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)\, dy}$$

$$\boxed{\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right)\, d\frac{y}{\delta}}$$

Um den Widerstand zu berechnen werden diese beiden Maße + die von Kàrmàn-Integral-Beziehung verwendet.

Verdrängungs-/Impulsverlustdicke

Integration der x-Impulsgleichung

$$\boxed{\frac{d}{dx}(U^2\delta_2) + \delta_1 U \frac{dU}{dx} = \frac{\tau_w}{\rho}}$$

$$\boxed{\text{oder } \frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{U}\frac{dU}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) = \frac{\tau_w}{\rho U^2}}$$

- Annehmen einer Funktion (Polynom, . . .) für die Geschwindigkeit

- Verwendung der Randbedingungen um die Koeffizienten zu berechnen

- Berechnung von δ_1 und δ_2
- Verwendung der von Kàrmàn-Integral-Gleichung zur Berechnung von $\tau_w(x)$ oder $\delta(x)$.

Ansatz: Polynom für die Geschwindigkeitsprofile

$$\frac{u(x,y)}{U(x)} = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{y}{\delta}\right)^i = f(x, \frac{y}{\delta})$$

selbstähnliches Profil $a_i(x), \delta(x)$

Randbedingung

1. Haftbedingung (Stokes) für $\frac{y}{\delta} = 0 \rightarrow u = v = 0 \qquad (u_B = u_w)$

2. Grenzschichtrand $\frac{y}{\delta} = 1 \rightarrow u = U$

3. aus x-Impuls

$$\eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (= 0 \text{ für die ebene Platte})$$

$\frac{\partial p}{\partial x}$ aus Eulergleichung (Bernoullli)

Nur: Wenn der Grad des Polynoms > 2, werden andere Randbedinungen nötig aus der Stetigkeit am Grenzschichtrand

4. $\dfrac{y}{\delta} > 1 \rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$

   kontinuierlicher Übergang von der Grenzschicht zur äußeren Strömung

5. $\dfrac{y}{\delta} = 1 \rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

   reibungsfreie Strömung

Beispiel

In einer Staupunktströmung einer senkrecht angeströmten ebenen Platte wird die Außenströmung $u_a(x)$ derart beschleunigt, so daß sich auf der ganzen Platte eine Grenzschicht mit konstanter Grenzdichte δ_0 ausbildet. Das Geschwindigkeitsprofil wird in erster Näherung als linear angenommen:

$$U = \frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0 + a_1 \cdot y/\delta_0$$

Bestimmen Sie:

1) die Konstanten a_0, a_1

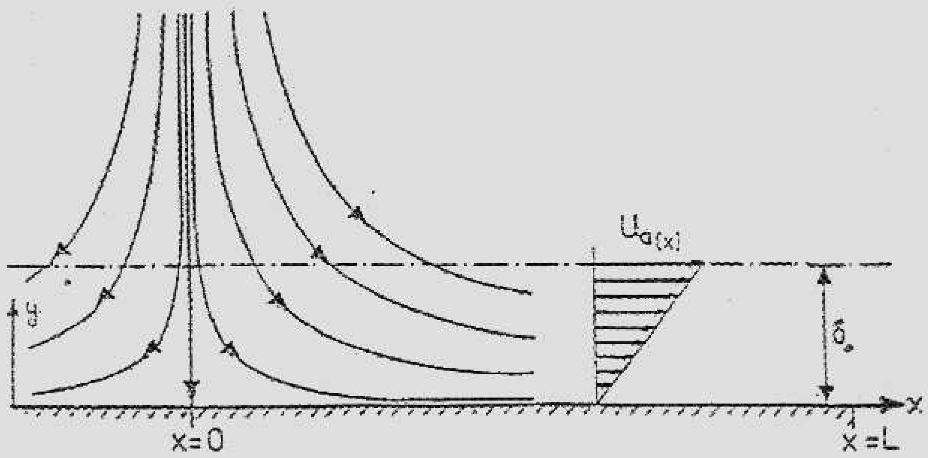
2) den Verlauf der Außengeschwindigkeit $u_a(x)$ mit dem Verfahren von Kármán-Pohlhausen

3) die Tangentialkraft, die zwischen $x=0$ und $x=L$ auf die Platte mit der Breite B ausgeübt wird.

<u>Gegeben</u>: $\delta_0, L, \eta, \rho, B$

Kármán-Pohlhausen:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_a}\frac{du_a}{dx}\left(2\delta_2 + \delta_1\right) = \frac{\tau_w}{\rho u_a^2}$$



Beispiel

Bemerkung: $u_a = U_a = U = u_e = \ldots$ verschiedene Schreibweisen

1) $a_0,\ a_1 = ?$

Haftbedingung $u(y=0) = 0 \rightarrow a_0 = 0$

am Grenzschichtrand: $\frac{u}{U}|_{\frac{y}{\delta_0}=1} = 1 \rightarrow a_1 = 1$

$$\rightarrow \frac{u(x,y)}{U(x)} = \frac{y}{\delta_0}$$

Beispiel

2) Verdrängungsdicke: $$\frac{\delta_1}{\delta_0} = \int\limits_0^1 (1 - \frac{u(y)}{U})\, d\frac{y}{\delta}$$

$$= \left[\frac{y}{\delta_0} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_0}\right)^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \delta_1 = \frac{1}{2}\delta_0$$

Impulsverlustdicke: $$\frac{\delta_2}{\delta_0} = \int\limits_0^1 \frac{u}{U}(1 - \frac{u}{U})\, d\frac{y}{\delta}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta_0}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{\delta_0}\right)^3\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} \rightarrow \delta_2 = \frac{1}{6}\delta_0$$

$$\rightarrow \frac{\partial \delta_2}{\partial \delta_0} = \frac{1}{6} = \text{konst} \rightarrow \frac{\partial \delta_2}{\partial x} = 0$$

Beispiel

Wandschubspannung: $\tau_w = \eta \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{y/\delta=0}$

$$\rightarrow \tau_w = \eta \frac{U}{\delta_0} \frac{\partial(\frac{u}{U})}{\partial(\frac{y}{\delta_0})} = \eta \frac{U}{\delta_0}$$

Beispiel

von Kàrmàn-Integral-Beziehung

$$\frac{dU}{dx} = U\,\frac{1}{\rho U^2}\,\eta\,\frac{U}{\delta_0^2}\left(\frac{1}{2\frac{1}{6}+\frac{1}{2}}\right) = \frac{\eta}{\rho\delta_0^2}\frac{6}{5}$$

$$U(x) = \frac{\eta}{\rho\delta_0^2}\frac{6}{5}x \qquad \text{(üblich } \delta = \delta(x)\text{)}$$

3) $F = \int\limits_0^L \tau(x)\,B\,dx = \frac{6}{5}\frac{\eta}{\rho\delta_0^2}\frac{\eta}{\delta_0}B\int\limits_0^L x\,dx$

$$\boxed{F = \frac{3}{5}\,\frac{\eta^2}{\rho}\,\frac{BL^2}{\delta_0^3}}$$

15.3

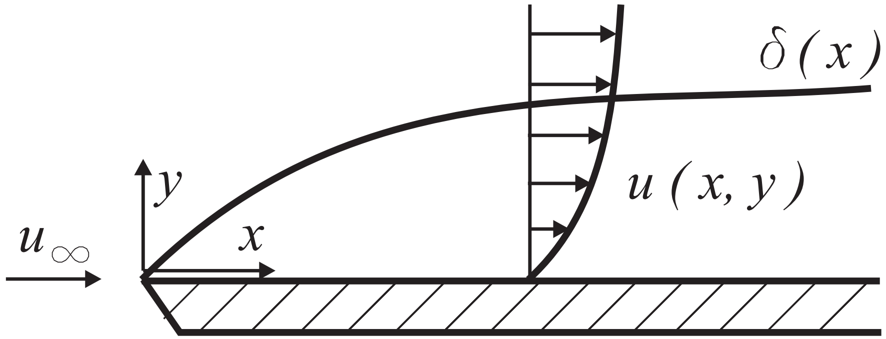
Nach Aufgabe 15.2 läßt sich der Widerstand einer einseitig benetzten Platte der Länge x und der Breite B durch:

$$W = \int_0^x \tau_w(x) B dx = \rho \int_0^{\delta(x)} u(u_\infty - u) B dy$$

bestimmen. Mit Hilfe dieser Gleichung und der Näherung für das Geschwindigkeitsprofil

$$\frac{u(x,y)}{u_\infty} = a_0 + a_1 \frac{y}{\delta} + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2$$

soll die Grenzschichtdicke $\delta(x)$ bestimmt und mit der Blasius Lösung $\delta(x) = 5.2\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$ verglichen werden.



Gegeben: $\nu,\ u_\infty$

Bestimmung der Koeffizienten $a_0,\ a_1,\ a_2$ durch einsetzen von Randbedingungen:

R.B.1: Haftbedingung $u(x, y = 0) = 0$

R.B.2: Grenzschichtrand $u(x, y = \delta) = u_\infty$

R.B 3: Wandbindungsgleichung (aus x-Impuls)

$$\eta \frac{\partial^2 u(x, y = 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

Falls weitere Randbedingungen notwendig sind, dann kann man annehmen, daß am Grenzschichtrand $\frac{y}{\delta} = 1$ ein glatter Übergang zur Außenströmung vorhanden ist, d.h.

$$\left.\frac{\partial^n u}{\partial y^n}\right|_{y=\delta} = 0 \text{ mit } n \geq 1$$

$\Longrightarrow$ aus R.B.1 folgt $a_0 = 0$

aus R.B.2 folgt $a_1 + a_2 = 1$

aus R.B.3 folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_\infty \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2 (u/u_\infty)}{\partial (y/\delta)^2} = 2u_\infty \frac{1}{\delta^2} a_2 = 0$$

$$\Longrightarrow a_2 = 0, \quad a_1 = 1$$

$$\Longrightarrow \frac{u(x,y)}{u_\infty} = \frac{y}{\delta}$$ linearer Verlauf.

Hätte man die Reihenfolge der Randbedingungen vertauscht, z. B.

R.B.1 $u(x, y = 0) = 0$

R.B.2 $u(x, y = \delta) = u_\infty$

R.B.3 $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=\delta} = 0$

$\Longrightarrow a_0 = 0; \quad a_1 = 2; \quad a_2 = -1$ parabolischer Verlauf

Da die angegebene Näherung des Geschwindigkeitsprofils keine exakte Lösung der Grenzschichtgleichungen darstellt, sind die Randbedingungen nicht für alle Näherungen erfüllbar. Deshalb ist darauf zu achten, die Reihenfolge der R.B. so zu wählen, dass die physikalischen Randbedingungen zuerst erfüllt werden.

Bestimmung der Grenzschichtdicke $\delta(x)$:

$$\tau_w = \eta \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = \eta \frac{u_\infty}{\delta} \left.\frac{\partial u / u_\infty}{\partial y / \delta}\right|_{y=0} = \eta \frac{u_\infty}{\delta}$$

$$u(u_\infty - u) = u_\infty \frac{y}{\delta}\left(u_\infty - u_\infty \frac{y}{\delta}\right) = u_\infty^2 \left(\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right)$$

mit der Gleichung

$$B \int_0^x \tau_w(x) dx = B\rho \int_0^{\delta(x)} u(u_\infty - u) dy$$

$$\Longrightarrow \int_0^x \eta \frac{u_\infty}{\delta(x)} dx = \rho u_\infty^2 \int_0^1 \delta \left(\frac{y}{\delta} - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 \right) d\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

$$\eta u_\infty \int_0^x \frac{dx}{\delta(x)} = \rho u_\infty^2 \delta(x) \left(\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \right)\Bigg|_0^1$$

$$= \rho u_\infty^2 \delta(x) \frac{1}{6}$$

Durch differenzieren erhält man

$$\frac{1}{\delta(x)} = \frac{1}{6}\frac{\rho}{\eta}u_\infty \frac{d\delta(x)}{dx}$$

$$\Longrightarrow dx = \frac{1}{6}\frac{\rho}{\eta}u_\infty \delta(x) d\delta(x)$$

Integration:

$$x = \frac{1}{12}\frac{\rho}{\eta}u_\infty \delta^2(x)$$

$$\Longrightarrow \delta(x) = \sqrt{\frac{12\nu x}{u_\infty}}$$

$$\Longrightarrow \delta(x) = \sqrt{12}\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}} \approx 3,5\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$$

Vgl. Blasius Lösung: $\delta(x) = 5.2\sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$

15.5

In einer Plattengrenzschicht werden Geschwindigkeitsprofile und Druckverlauf vermessen. Der auf der Platte gemessene Druckverlauf wird durch die Beziehung

$\frac{p(x)}{p_0} = 1 - k\left(\frac{x}{l}\right)^2$, mit $k = konst < 1$

und die Geschwindigkeitsprofile werden durch

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = \left(\frac{y}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{2}}$$

wiedergegeben, wobei die Grenzschichtdicke δ_0 konstant ist.

15.5

Bestimmen Sie die Wandschubspannung τ_w mit Hilfe der $von\ K\acute{a}rm\acute{a}nschen$ Integralbeziehung

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_a}\frac{du_a}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) + \frac{\tau(y=0)}{\rho u_a^2} = 0$$

Gegeben: $p_0,\ k,\ \delta_0,\ l$

Grenzschichtgleichung (x-Impuls):

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\eta}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

a)

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_a}\frac{du_a}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) + \frac{\tau(y=0)}{\rho u_a^2} = 0$$

- $\frac{\delta_1}{\delta_0} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_0^1 \left(1 - \left(\frac{y}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{2}}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \left(\frac{y}{\delta} - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{3}{2}}\right)_0^1$

$$\Longrightarrow \delta_1 = \frac{1}{3}\,\delta_0$$

- $\frac{\delta_2}{\delta_0} = \int_0^1 \frac{u}{u_a}\left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \int_0^1 \left(\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/2} - \left(\frac{y}{\delta}\right)\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \left(\frac{2}{3}\left(\frac{y}{\delta}\right)^{3/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right)$

$$\Longrightarrow \delta_2 = \frac{1}{6}\,\delta_0$$

- $\frac{d\delta_2}{dx} = 0$, da $\delta_0 = konst.$

oben angesetzt: $\rho \; u_a \dfrac{du_a}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) = \tau_w$

aus der x-Impulsgleichung für $y = \delta_0$:

$$\rho u_a \frac{du_a}{dx} = -\frac{dp}{dx}$$

$$\Longrightarrow \tau_w = -\frac{dp}{dx}(2\delta_2 + \delta_1)$$

mit $$\frac{dp}{dx} = p_0 \frac{d}{dx}\left(1 - k\left(\frac{x}{l}\right)^2\right) = -p_0 \; k \; \frac{2x}{l^2}$$

$$\Longrightarrow \tau_w = p_0 k \frac{2x}{l^2}\frac{2}{3}\delta_0 = \frac{4}{3} p_0 k \frac{\delta_0 x}{l^2}$$

15.7

Das Geschwindigkeitsprofil in der laminaren Grenzschicht einer längs angeströmten ebenen Platte (Länge L) läßt sich durch ein Polynom vierten Grades

$$\frac{u}{u_a} = a_0 + a_1 \left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2 \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3 \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + a_4 \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

annähern.

15.7

a) Bestimmen Sie die Koeffizienten des Polynoms!

b) Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Beziehungen:

$$\frac{\delta_1}{\delta} = 3/10$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = 37/315$$

$$\frac{\delta}{x} = 5.84/\sqrt{Re_x}$$

$$c_w = 1.371/\sqrt{Re_L}$$

a) Randbedingungen:

$$\frac{y}{\delta} = 0 : \qquad \frac{u}{u_a} = 0, \qquad \frac{v}{u_a} = 0$$

$$\frac{y}{\delta} = 1 : \qquad \frac{u}{u_a} = 1$$

aus Grenzschichtgleichung

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} :$$

$$\frac{y}{\delta} = 0 : \qquad u = v = 0 : \qquad \frac{\partial^2 (u/u_a)}{\partial (y/\delta)^2} = 0$$

$$\frac{y}{\delta} = 1 : \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 : \qquad \frac{\partial^2 (u/u_a)}{\partial (y/\delta)^2} = 0$$

15.7

reibungsfreie Außenströmung:

$$\frac{y}{\delta} = 1: \qquad \tau \sim \frac{\partial(u/u_a)}{\partial(y/\delta)} = 0$$

$$\frac{u}{u_a} = 2\left(\frac{y}{\delta}\right) - 2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 + \left(\frac{y}{\delta}\right)^4$$

b)

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{3}{10}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{u_a}\left(1 - \frac{u}{u_a}\right) d\left(\frac{y}{\delta}\right) = \frac{37}{315}$$

15.7

$von\ K\acute{a}rm\acute{a}nsche$ Integralbeziehung:

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{\tau(y=0)}{\rho u_a^2} = 0$$

$$\tau(y=0) = -\frac{\eta u_a}{\delta} \left.\frac{d(u/u_a)}{d(y/\delta)}\right|_{y/\delta = 0} = -2\frac{\eta u_a}{\delta}$$

Integration: $\dfrac{\delta}{x} = \dfrac{5.84}{\sqrt{Re_x}}$

$$c_w = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{\tau_w}{\rho u_a^2} dx = -\frac{2}{L}\int_0^L \frac{\tau(y=0)}{\rho u_a^2} dx = \frac{1.371}{\sqrt{Re_L}}$$

15.4

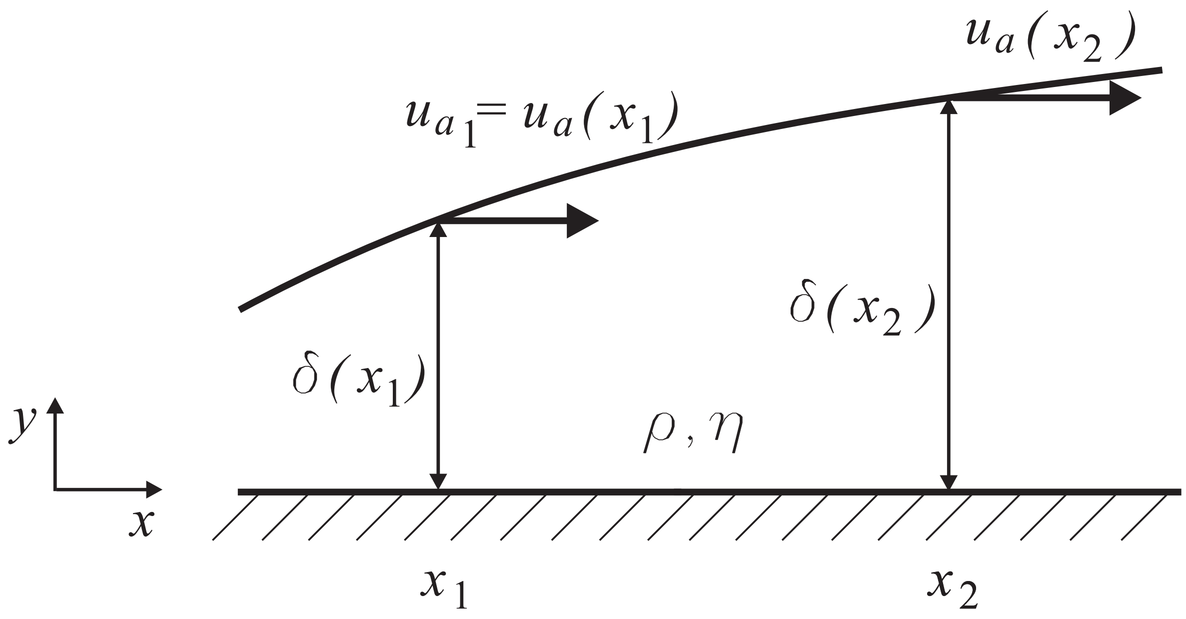
Das Geschwindigkeitsprofil einer laminaren, inkompressiblen Grenzschichtströmung mit konstanter Zähigkeit η kann durch ein Polynom beschrieben werden:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = a_0 + a_1(x)\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3(x)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

Die Außengeschwindigkeit $u_a(x)$ ist durch den Ansatz gegeben:

$$u_a(x) = u_{a1} - C \cdot (x - x_1)^2$$

wobei u_{a1} die Außengeschwindigkeit an der Stelle x_1 ist und C eine positive Konstante. Die Grenzschichtdicke an der Stelle x_2 sei $\delta(x_2)$.



Gegeben : $\rho,\ \eta,\ x_1,\ u_{a1},\ \delta(x_2),\ C$, mit: $C > 0$

Bestimmen Sie:

a) den Verlauf des Druckgradienten $\partial p/\partial x$ in der Strömung als Funktion von x.

b) den Koeffizienten a_0 und die Koeffizienten $a_1(x),\ a_2(x),\ a_3(x)$.

15.4

a) $\dfrac{\partial p}{\partial x}$ =?

reibungsfreie äußere Strömung

x-Imp: $$\rho(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

am Grenzschichtrand: $$\frac{\partial u}{\partial y} = 0\ ; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$\rightarrow \rho U\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad U = U_1 - C(x-x_1)^2$$

$$\rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = -2C(x-x_1)$$

$$\boxed{\rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = 2C\rho\left[U_1(x-x_1) - C(x-x_1)^3\right]} \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x}|_{x=x_1} = 0$$

b) 4 Koeffizienten $\longrightarrow$ 4 Randbedingungen

1. Haftbedingung: $\frac{y}{\delta} = 0 :\longrightarrow u = 0 \longrightarrow a_0 = 0$

2. Grenzschichtrand: $\frac{y}{\delta} = 1 : \quad u = U$

$$\underbrace{a_0}_{=0} + a_1 + a_2 + a_3 = 1$$

3. an der Wand: $\frac{y}{\delta} = 0 \longrightarrow \eta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}|_{y=0} = \frac{\partial p}{\partial x}$ (Wandbindung)

$$u = \left[a_1\left(\frac{y}{\delta}\right) + a_2\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + a_3\left(\frac{y}{\delta}\right)^3\right]U$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{a_1}{\delta} + 2\frac{a_2}{\delta^2}y + 3\frac{a_3}{\delta^3}y^2\right)U$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(0 + 2\frac{a_2}{\delta^2} + 6a_3\frac{y}{\delta^3}\right)U$$

$$\frac{y}{\delta} = 0 \longrightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \eta 2\frac{a_2}{\delta^2}U \longrightarrow a_2(x) = \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{\eta U}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$a_2(x) = \frac{\delta^2}{2\eta}\frac{2\rho C(x-x_1)(U - C((x-x_1)^2))}{U - C(x-x_1)^2}$$

$$\longrightarrow a_2(x) = \frac{\delta^2 \rho C}{\eta}(x - x_1)$$

4. kontinuierliche Verteilung am Grenzschichtrand

$$\frac{y}{\delta} = 1 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \rightarrow \frac{a_1}{\delta} + 2\frac{a_2}{\delta} + 3\frac{a_3}{\delta} = 0$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} a_1 + a_2 + a_3 = 1 \\ \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} a_3 = -\frac{1}{2}(1 + a_2) \\ \\ a_1 = \frac{1}{2}(3 - a_2) \end{array}$$

$$a_1(x) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2 \rho C}{\eta}(x - x_1)$$

$$a_3(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2 \rho C}{\eta}(x - x_1)$$

Also:

$$\frac{u(x,y)}{u_a(x)} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2 \rho C}{\eta}(x - x_1)\right)\left(\frac{y}{\delta}\right) + \left(\frac{\delta^2 \rho C}{\eta}(x - x_1)\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)^2 -$$

$$-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2 \rho C}{\eta}(x - x_1)\right)\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

$$\frac{u(x,y)}{U(x)} = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\frac{y}{\delta}\right)^i = f(x, \frac{y}{\delta})$$

selbstähnliches Profil $a_i(x), \delta(x)$

turbulente Grenzschichten

gute Übereinstimmung zwischen der Theorie für laminare Grenzschichten und Experimenten bis $x < x_{krit}$

$x < x_{krit}$: Grenzschicht wird instabil und turbulent

- größerer Impulsaustausch

  $\longrightarrow$ größere Schubspannungen

  $\longrightarrow$ größere Reibungskräfte $\longrightarrow$ Widerstand

- größere Energie (Mischung)

Reynolds'sche Mittelung $\rightarrow$ Navier-Stokes Gleichungen
$Re \gg 1 \longrightarrow$ turbulente Grenzschichtgleichungen

turbulente Grenzschichten

Konti: $$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0$$

x-Impuls: $$\rho \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \rho \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\underbrace{\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}}_{= \frac{d\bar{p}}{dx}} + \eta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \qquad \underbrace{- \rho \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}}_{\text{scheinbare turbulente Schubspannung}}$$

y-Impuls: $$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = 0$$

- sind unbekannt

$\longrightarrow$ Schließungsproblem

$\longrightarrow$ Turbulenzmodellierung (Mischungsweg)

turbulente Plattengrenzschicht

Näherung für die Geschwindigkeitsprofile

$$\frac{\bar{u}}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}}$$

$\longrightarrow$ Berechnung von Verdrängungsdicke δ_1
Impulsverlustdicke δ_2

Aber: $\tau|_{\text{Wand}} \neq \eta \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = \infty$

Annahme: die Strömung über eine ebene Platte ist ähnlich wie eine turbulente Strömung durch ein Rohr

$$\longrightarrow \lambda = \frac{0.316}{\sqrt[4]{Re}} \longrightarrow \lambda = \frac{8\tau_w}{\rho \bar{u}_m^2} \longrightarrow \tau_w$$

turbulente Plattengrenzschicht

$$\rightarrow \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{d\delta_2}{dx} \rightarrow \frac{\delta(x)}{x} = \frac{0.37}{\left(\frac{Ux}{\nu}\right)^{\frac{1}{5}}} = \frac{0.37}{\sqrt[5]{Re_x}}$$

$$\rightarrow \delta_{\text{turb}} \sim x^{4/5}$$

$$\rightarrow \delta_{\text{lam}} \sim x^{1/2}$$

16.1

Eine ebene Platte wird parallel zur Oberfläche mit Luft angeströmt.

$u_\infty = 45\ m/s \qquad \nu = 1,5 \cdot 10^{-5}\ m^2/s$

Bestimmen Sie

a) den Umschlagpunkt für $Re_{krit} = 5 \cdot 10^5$,

b) die Geschwindigkeit im Punkt $x = 0,1\ m,\ y = 2 \cdot 10^{-4}\ m$ mit Hilfe der Blasius-Lösung.
Bei welcher Koordinate y wird für $x = 0,15\ m$ die gleiche Geschwindigkeit erreicht?

Skizzieren Sie

c) den Verlauf der Grenzschichtdicke $\delta(x)$ und je ein Geschwindigkeitsprofil für $x < x_{krit}$ und $x > x_{krit}$.

d) die Wandschubspannung als Funktion von x für $dp/dx < 0$, $dp/dx = 0$ und $dp/dx > 0$.

16.1

ebene Platte $\Longrightarrow$ Blasius gilt bis Re_{krit}

$$u_\infty = 45\ m/s \qquad \nu = 1,5 \cdot 10^{-5}\ m^2/s$$

a)

$$\text{Re}_{krit} = 5 \cdot 10^5 = \frac{\rho u_\infty x_{krit}}{\eta} = \frac{u_\infty x_{krit}}{\nu}$$

$$x_{krit} = \text{Re}_{krit} \frac{\nu}{u_\infty} = 0.167m$$

b)

$$u\left(x = 0.1m\,; y = 2 \cdot 10^{-4} m\right) = ?$$

$x = 0.1m < x_{krit} \rightarrow$ laminare Grenzschicht

$$\Longrightarrow \text{Blasius} \qquad \frac{u}{u_\infty} = g(\xi)$$

$$\xi = \frac{y}{\delta(x)} \qquad \text{mit} \quad \delta(x) = \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{u_\infty} = f\left(y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}}\right) \rightarrow \quad \text{ähnliche Profile}$$

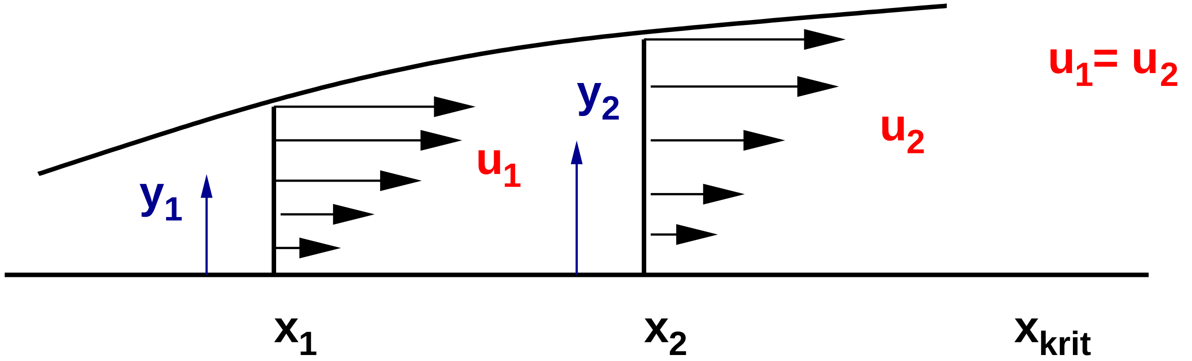
$$\xi = y\sqrt{\frac{u_\infty}{\nu x}} = \frac{y}{x}\sqrt{\frac{u_\infty x}{\nu}} = \frac{y}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$$

$$x = 0.1m \rightarrow \mathrm{Re}_x = 0.3 \cdot 10^6 \; ; \; y = 2 \cdot 10^{-4}m \rightarrow \xi = 1.095$$

$$\Rightarrow \text{Diagramm} \quad \frac{u}{u_\infty} = 0.36 \Rightarrow u(x,y) = 16.2\frac{m}{s}$$

$$u\left(x=0.15m\,;\;y=?\right)=u\left(x=0.1m\,;y=2\cdot 10^{-4}m\right)$$

$x=0.15$: die Strömung ist immer noch laminar



$$\mathrm{Re}_2=\frac{u_\infty x_2}{\nu}=4.5\cdot 10^5$$

$$\frac{u_1}{u_\infty}=\frac{u_2}{u_\infty}\Rightarrow \xi_1=\xi_2=1.095 \quad \text{selbstähnliche Lösung}$$

$$\xi=\frac{y}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}\rightarrow \boxed{y=\frac{\xi x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}=2.45\cdot 10^{-4}m>y_1}$$

c) Skizze von $\delta(x)$

laminar: $\mathcal{O}$ (Trägheit) = $\mathcal{O}$ (Reibung)

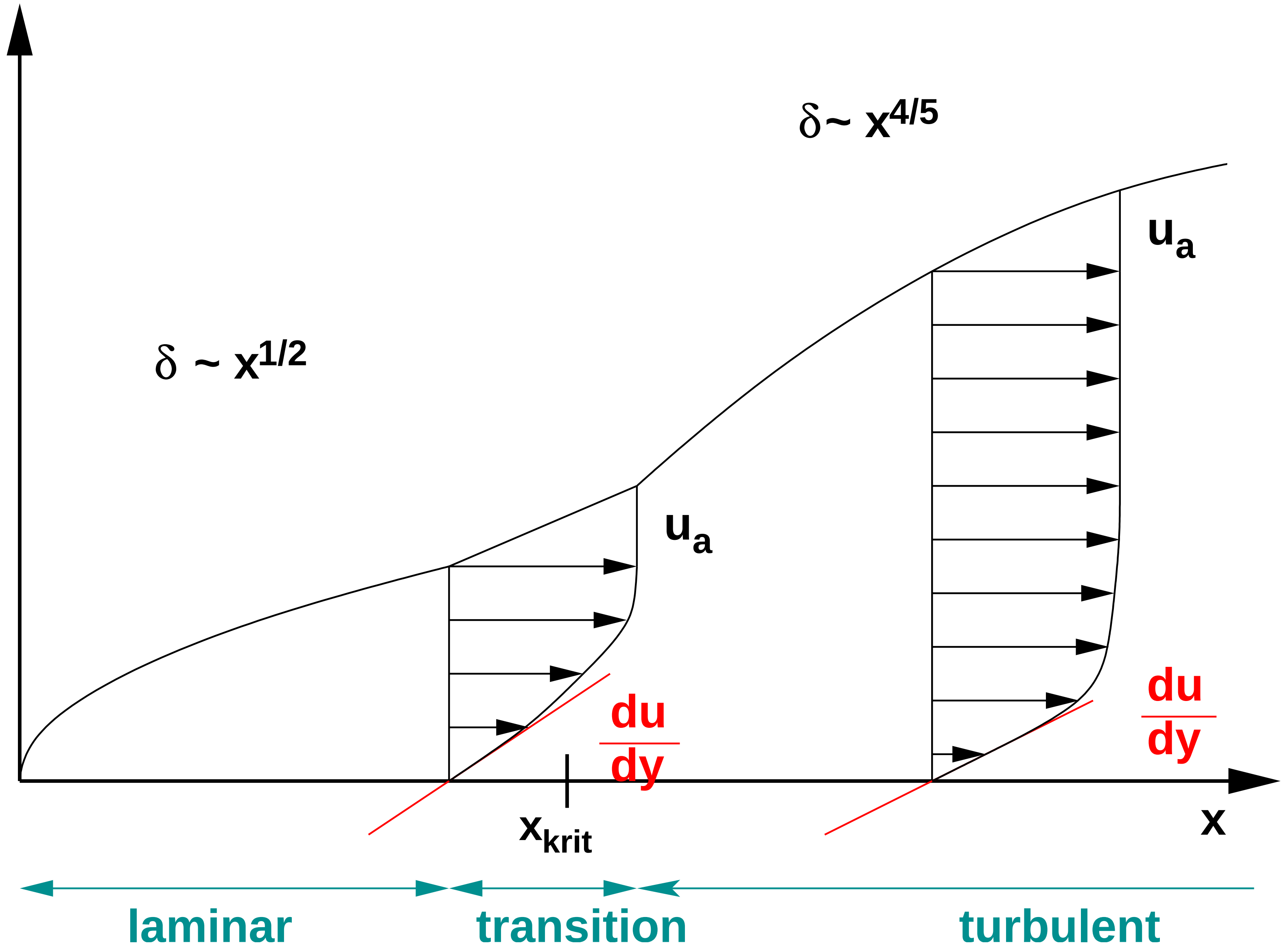
$$\rightarrow \frac{\delta}{x} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\text{Re}_x}}\right) \Longrightarrow \delta(x) \sim \sqrt{x}$$

turbulent: hochfrequente Oszillationen

$$\mathcal{O}(\text{Trägheit}) \neq \mathcal{O}(\text{Reibung})$$

aus Experimenten kommt als gute Approximation

$$\left(\frac{u}{u_\infty}\right) = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7} \Longrightarrow \frac{\delta}{x} = \frac{0.37}{\sqrt[5]{\text{Re}_x}} \Longrightarrow \delta(x) \sim x^{4/5}$$



δ ~ x^1/2
δ~ x^4/5
u_a
u_a
du/dy
du/dy
x_krit
x
laminar
transition
turbulent

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}^{\text{laminar}} < \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0}^{\text{turbulent}}$$

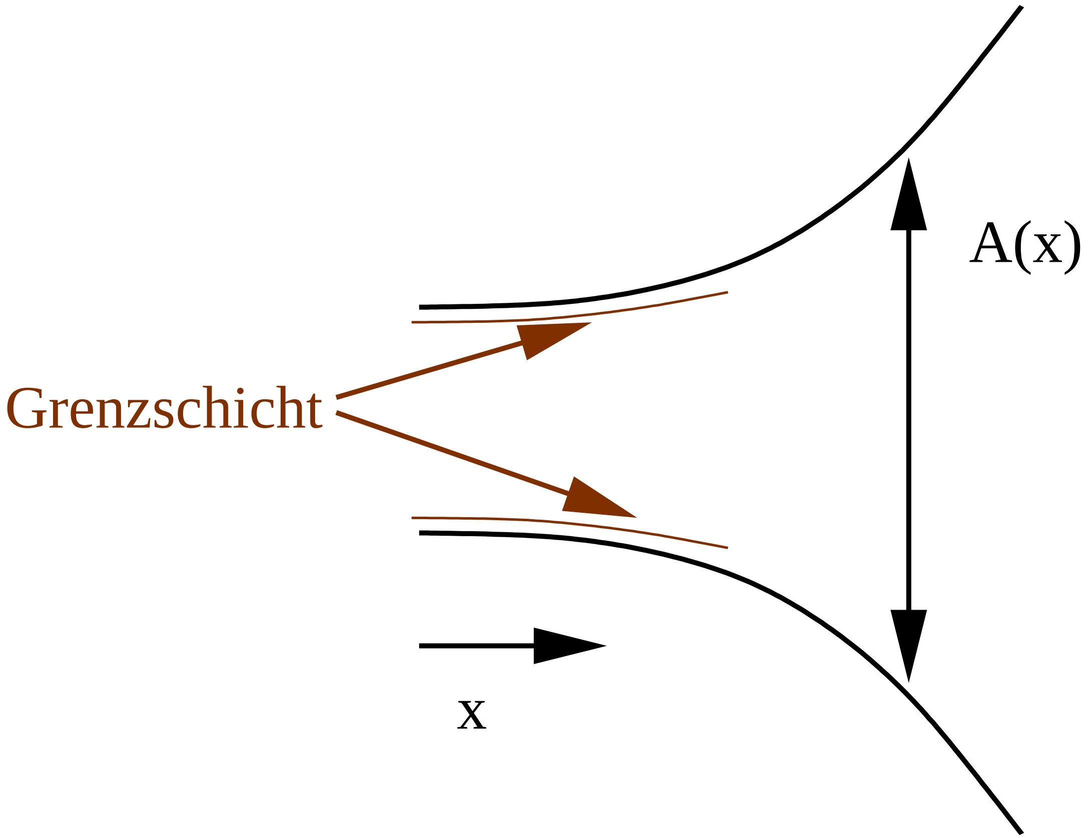
$$|\tau_w|_{\text{laminar}} < |\tau_w|_{\text{turbulent}}$$

wegen der Energiezufuhr zur wandnahen Schicht durch Turbulenz

Strömung mit Ablösung

Eine Grenzschicht, der ein positiver Druckgradient aufgeprägt ist, kann ablösen:

z.B.: Strömung in einem Diffusor



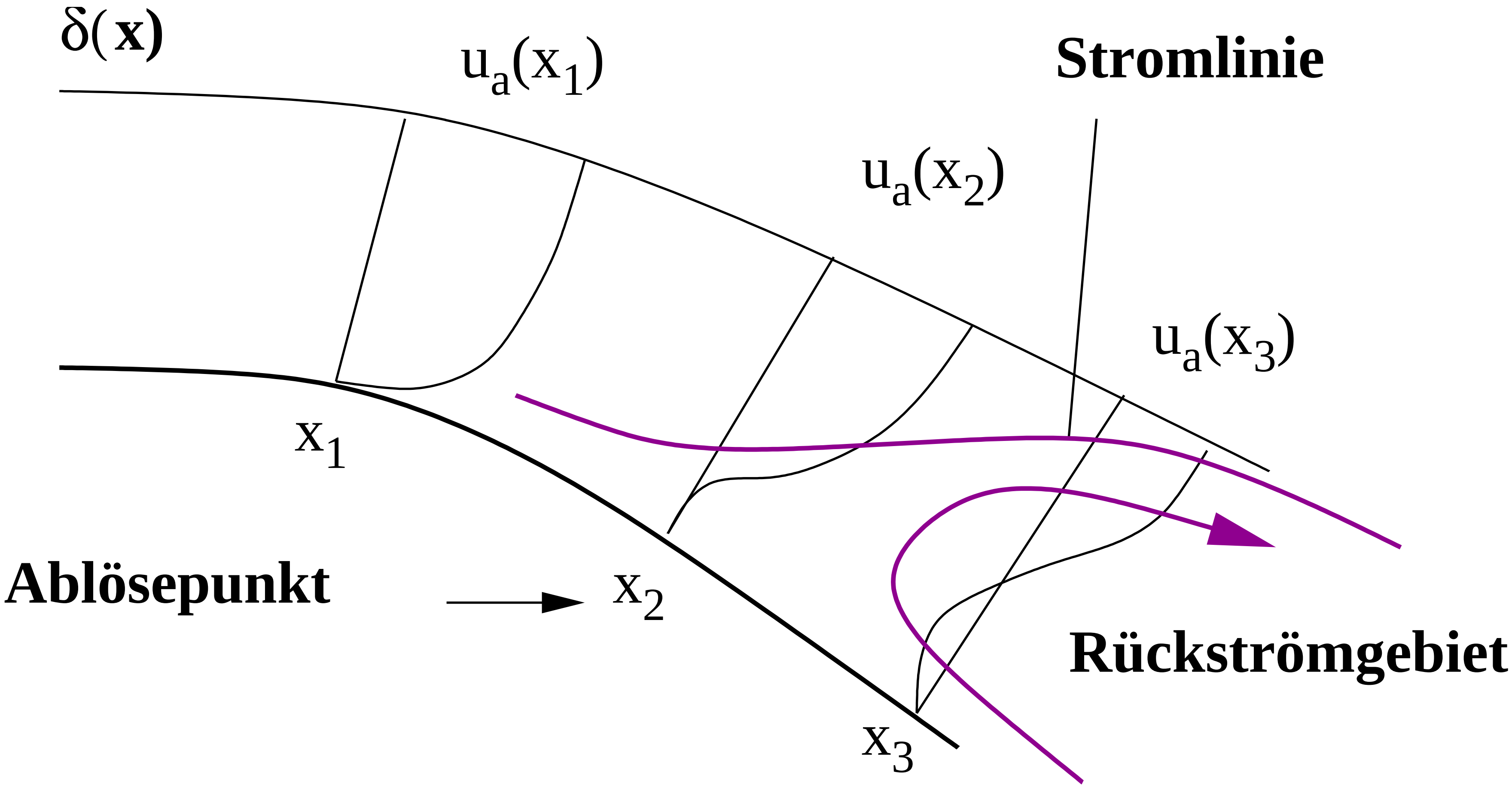
reibungsfreie Strömung:

$$\rho u_a \frac{\partial u_a}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial A(x)}{\partial x} > 0; \qquad \frac{\partial u_a}{\partial x} < 0 \text{ Konti}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} > 0$$

Strömung mit Ablösung



Strömung mit Ablösung

In der Regel: Rezirkulationsgebiet ist wesentlich dicker als die Grenzschicht
$\longrightarrow$ Reibungskräfte sind nicht mehr auf einen dünnen Bereich beschränkt

$\longrightarrow$ Grenzschichtapproximation ist nicht mehr gültig

Der Ablösepunkt kann dennoch mit der Kàrmàn-Pohlhausen-Methode bestimmt werden.

Randbedingungen für den Ablösepunkt

1. Haftbedingung (Stokes) für $\frac{y}{\delta} = 0 \longrightarrow u = v = 0 \qquad (u_B = u_w)$

2. Grenzschichtrand $\frac{y}{\delta} = 1 \longrightarrow u = U$

Strömung mit Ablösung

3. Druckverteilung unbekannt $\rightarrow$ Wandbindung nicht möglich
   aber die Ablösebedingung gilt $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$

4. $\frac{y}{\delta} > 1 \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial y} = 0$
   kontinuierlicher Übergang von der Grenzschicht zur äußeren Strömung

5. $\frac{y}{\delta} = 1 \rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$
   reibungsfreie Strömung

Folge der Ablösung

Der Druck im Ablösegebiet erreicht nicht den Druck der reibungsfreien Strömung (siehe Kreiszylinder)

$\Rightarrow$ Widerstandserhöhung (Druckwiderstand)

Bei Tragflügelprofilen kann sich zusätzlich der Auftrieb stark verringern (Stall)

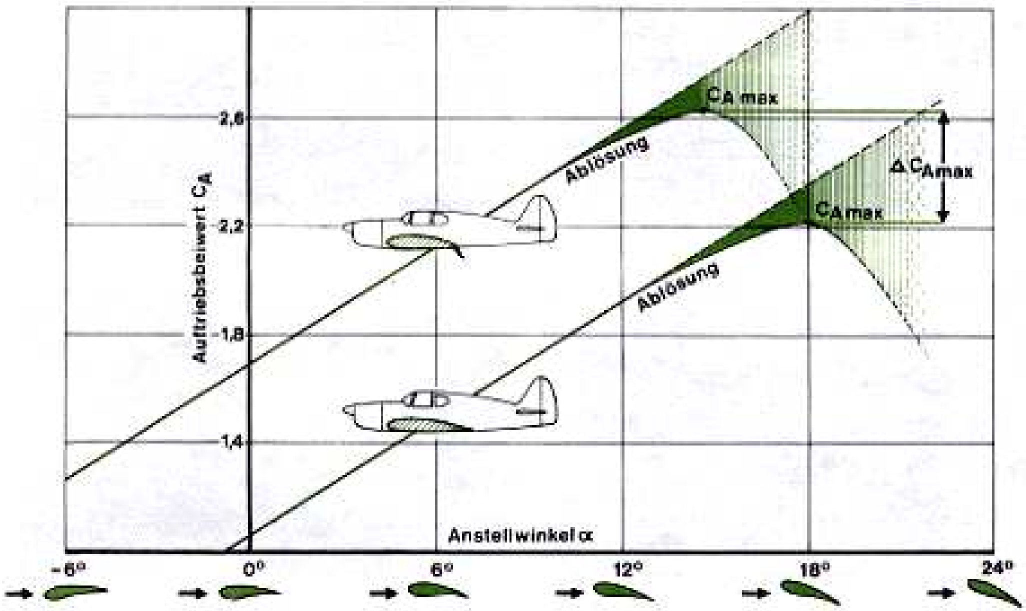


Bild 3: Bei Änderung des Anstellwinkels α verändert sich auch der Auftriebsbeiwert c_A

http://www.ultraleichtflugschule.de/auftrieb.html

Vermeidung oder Verschiebung der Ablösung

1. Erzwingen des laminar-turbulenten Umschlags

   - Stolperdraht
   - Rauigkeitsveränderung der Oberfläche
   - bei Flügeln: “Vortex Generator”

   turbulente Strömung:
   Durch Mischbewegung ist mehr Energie in Wandnähe
   $\Rightarrow$ turbulente Grenzschicht kann mehr Druckanstieg überwinden
   als die laminare Grenzschicht

Vermeidung oder Verschiebung der Ablösung

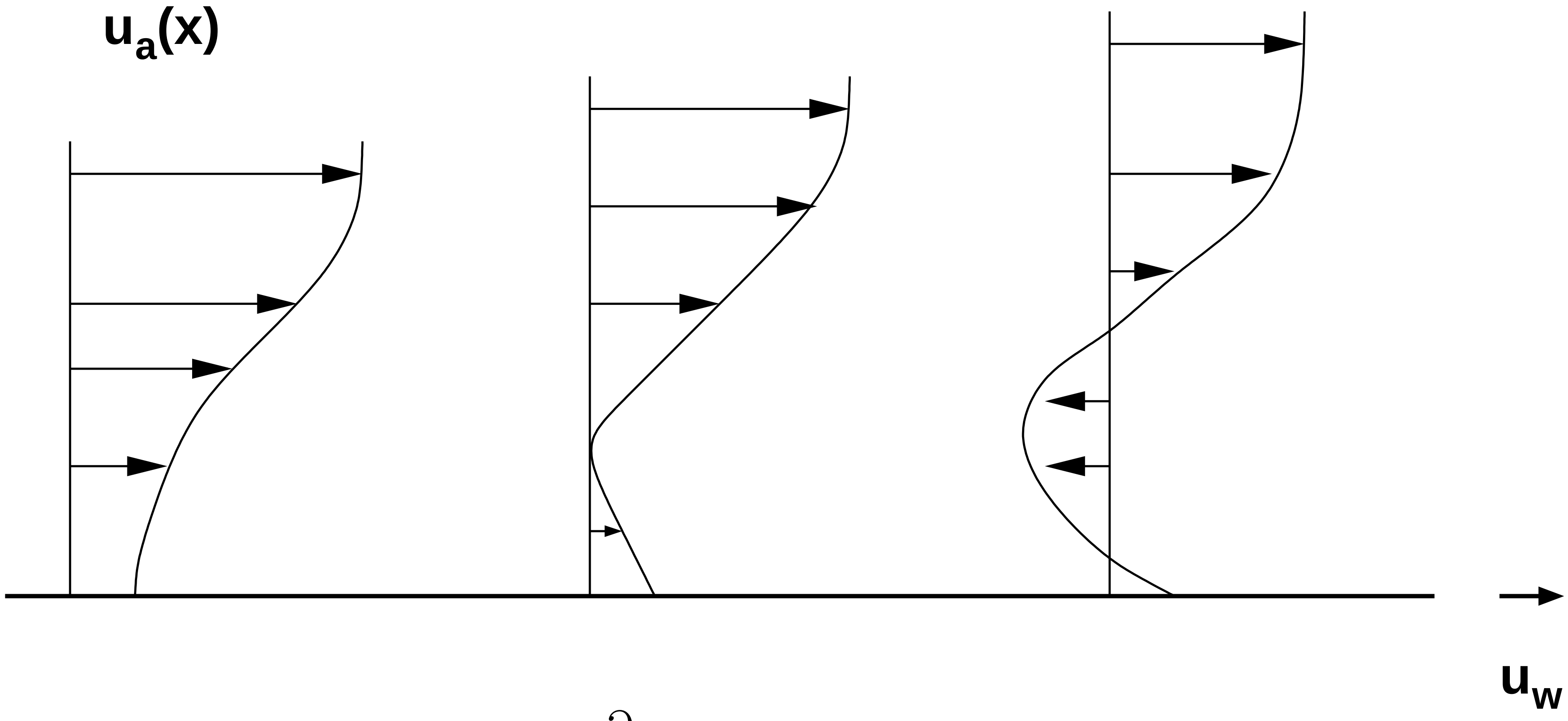
2. Mitbewegen der Wand

- Ausbildung der Grenzschicht wird vermieden
- keine Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Wand (Haftbedingung) und Außenströmung
- für gekrümmte Körperformen schwer technisch zu verwirklichen
- Untersuchung an einem Tragflügel mit Endlosband auf der Profiloberseite:
  Anstellwinkel bis ca. $\alpha = 55°$
  maximaler Auftriebsbeiwert: $c_a \approx 3.5$

Vermeidung oder Verschiebung der Ablösung

2. Mitbewegen der Wand

- Ablöseformen für $u_w \neq u_a;\ \dfrac{\partial p}{\partial x} > 0$



Ablösekriterium $u = 0;\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ nicht an der Wand

Grenzschichtabsaugung

Eine Gitter von ebenen Platten wird längs mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt. Ein Teil der Grenzschicht wird an der Platte abgesaugt. Die Absauggeschwindigkeit v_A wird so gewählt, dass die Außengeschwindigkeit am Grenzschichtrand gleich der Anströmgeschwindigkeit ist. Die Strömung ist laminar.

Bestimmen Sie

a) den Zusammenhang zwischen v_A und δ_1

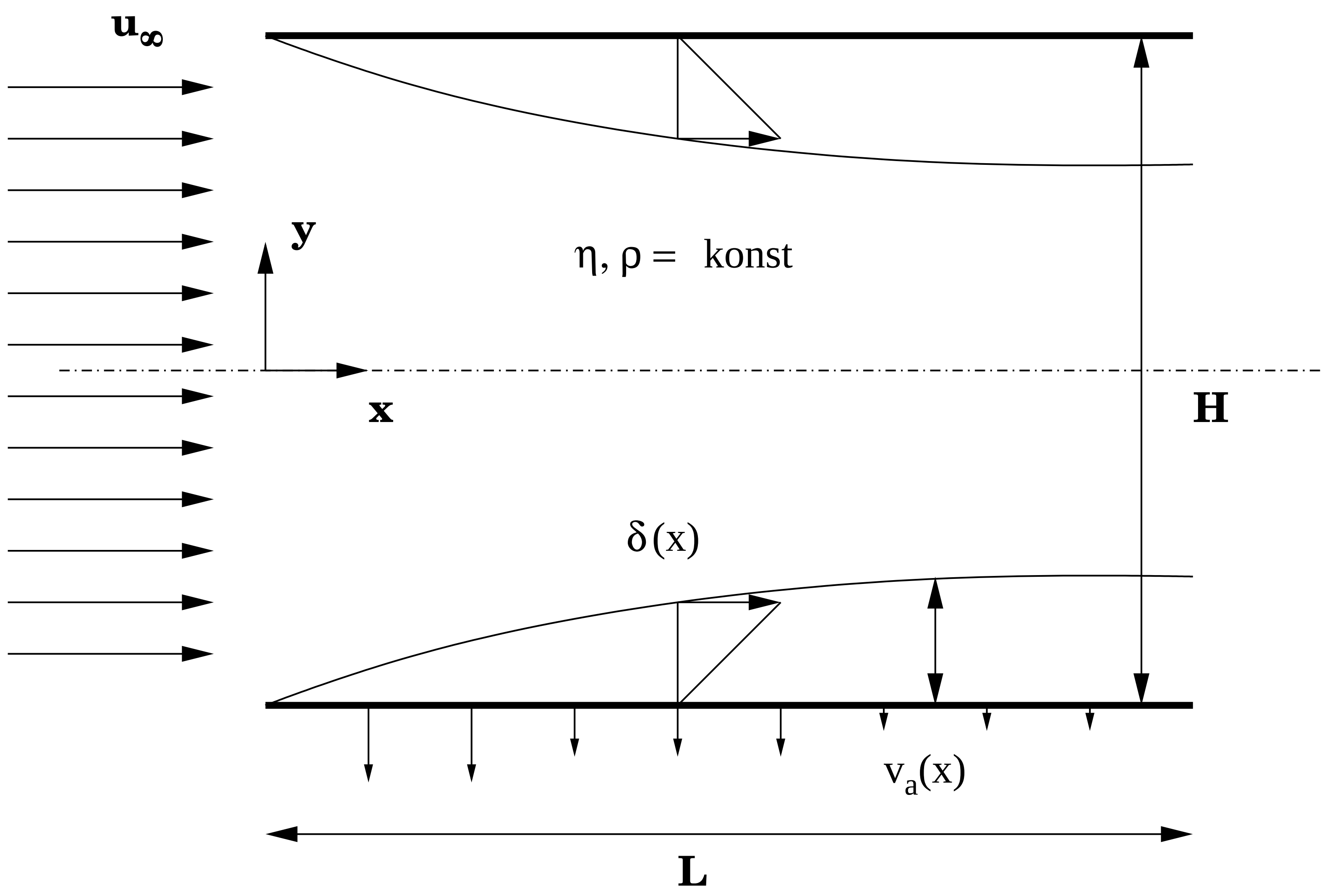
b) den Verlauf der Grenzschichtdicke $\delta(x)$

c) die Absauggeschwindigkeit $v_A(x)$

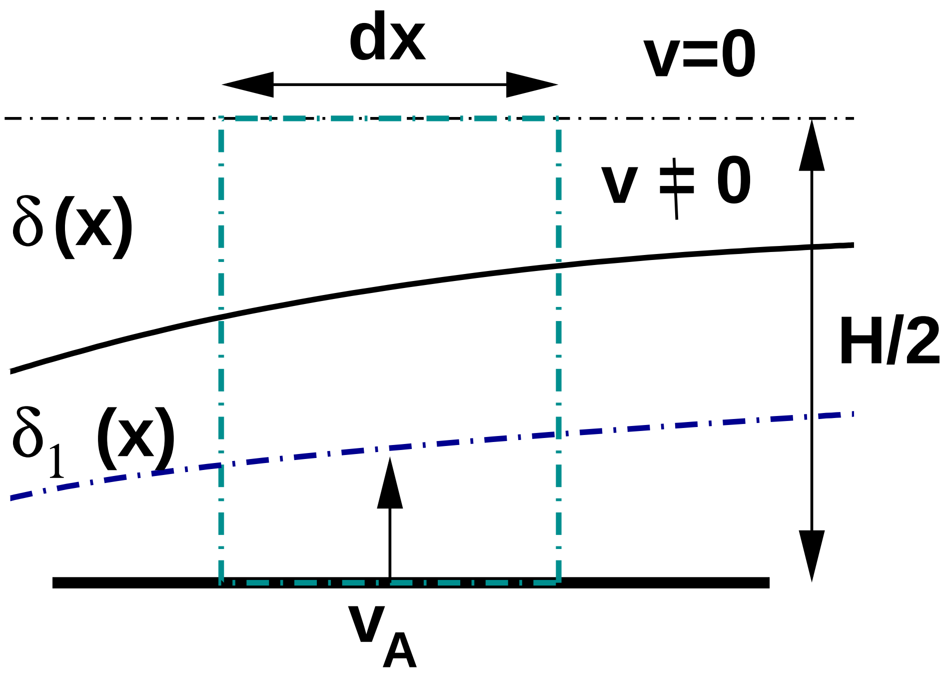
d) den Widerstandsbeiwert einer Platte

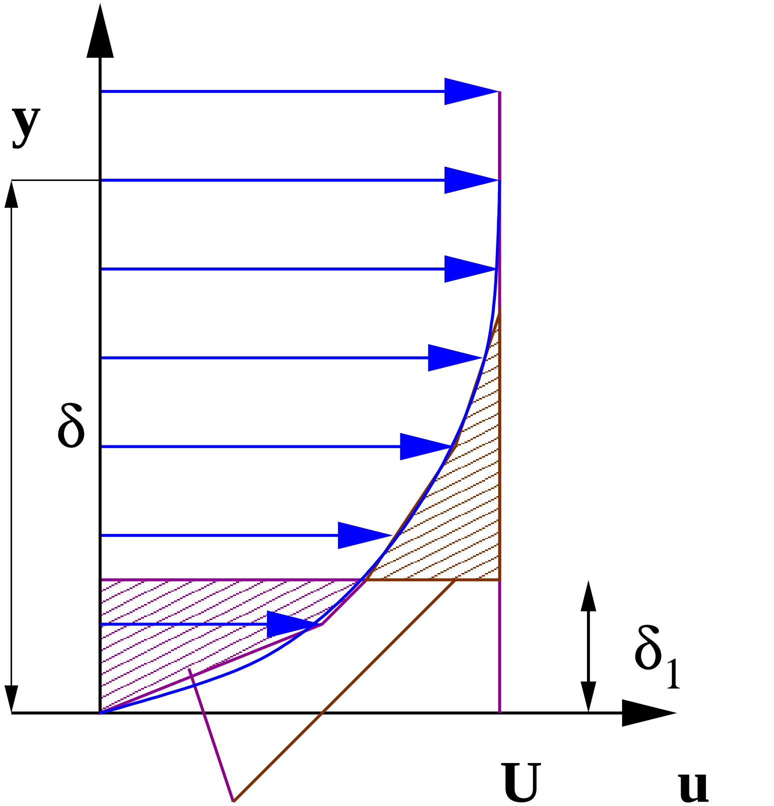
geg.: $\dfrac{u}{u_\infty} = \dfrac{y}{\delta};\ u_\infty;\ L;\ H;\ \eta;\ \rho$

Grenzschichtabsaugung



a) Bilanz am differentiellen Element





Flaechen sind gleich

Definition von δ_1

Grenzschichtabsaugung

$$\dot{Q} = \int\limits_{0}^{H/2} u\,dy = u_\infty \int\limits_{0}^{H/2} \frac{u}{u_\infty}\,dy =$$

$$u_\infty \left[\frac{H}{2} - \left(\frac{H}{2} - \int\limits_{0}^{H/2} \frac{u}{u_\infty}\,dy\right)\right] =$$

$$= u_\infty \left(\frac{H}{2} - \int\limits_{0}^{H/2} 1 - \frac{u}{u_\infty} dy\right) =$$

$$= u_\infty \left(\frac{H}{2} - \delta_1\right)$$

Grenzschichtabsaugung

Volumenbilanz für das Element

$$u_\infty\left(\frac{H}{2}-\delta_1(x)\right)+v_A(x+\frac{dx}{2})=u_\infty\left(\frac{H}{2}-\delta_1(x+dx)\right)$$

Bemerkung: wegen $v(x,H/2)=0$: kein Volumenstrom über die Symmetrieebene $y=H/2$

$v_A(x),\delta_1(x)$ mit Talorreihe entwickeln:

$$v_A(x+\tfrac{dx}{2})=\ v_A(x)+\frac{dv_A}{dx}\frac{dx}{2}+\cdots$$

$$\delta_1(x+dx)=\ \delta_1(x)+\frac{d\delta_1}{dx}dx+\cdots$$

Grenzschichtabsaugung

$\Longrightarrow$ einsetzen in Volumenbilanz

$$-\cancel{u_\infty \delta_1} + v_A\,dx + \underbrace{\cancel{\frac{dv_A}{dx}\frac{dx}{2}}\,dx}_{\mathcal{O}(dx^2)} = -\cancel{u_\infty \delta_1} - u_\infty \frac{d\delta_1}{dx}\,dx$$

$$\Longrightarrow \qquad v_A = -u_\infty \frac{d\,\delta_1}{d\,x}$$

b) Verlauf der Grenzschichtdicke $\delta(x)$
von Kàrmàn-Pohlhausen für Grenzschicht mit Absaugen
Integration von $v\frac{\partial u}{\partial y}$ von $y = 0$ bis $y = \delta$

$$\frac{d\delta_2}{dx} + \frac{1}{u_\infty}\frac{du_\infty}{dx}(2\delta_2 + \delta_1) = -\frac{\tau(y=0)}{\rho u_\infty^2} + \frac{v_A(x)}{u_\infty}$$

$$\Rightarrow \frac{d\delta_2}{dx} - \frac{v_A}{u_\infty} = -\frac{\tau(y=0)}{\rho u_\infty^2} \Longrightarrow \frac{d\delta_2}{dx} + \frac{d\delta_1}{dx} = -\frac{\tau(y=0)}{\rho u_\infty^2}$$

Grenzschichtabsaugung

Bestimmung von $\delta_2(\delta)$ und $\delta_1(\delta)$

$$\delta_2 = \int\limits_0^\delta \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) dy$$

Linearer Ansatz für das Geschwindigkeitsprofile $\dfrac{u}{u_\infty} = \dfrac{y}{\delta}$

Transformation der unabhängigen Variable

$$\eta^\star = \frac{y}{\delta} \Rightarrow \frac{dy}{d\eta^\star} = \delta \Rightarrow dy \;=\; \delta \, d\eta^\star$$

$$\delta_2 = \int\limits_0^1 \frac{u}{u_\infty} \left(1 - \frac{u}{u_\infty}\right) \delta d\eta^\star$$

Grenzschichtabsaugung

$$\Longrightarrow \frac{\delta_2}{\delta} = \int\limits_0^1 \eta^\star - {\eta^\star}^2 \, d\eta^\star \; = \; \frac{1}{2}{\eta^\star}^2 \; - \; \frac{1}{3}{\eta^\star}^3 \Big|_0^1 = \; \frac{1}{6}$$

ebenso für δ_1

$$\delta_1 = \int\limits_0^1 1 - \frac{u}{u_\infty} \, dy$$

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \int\limits_0^1 1 \; - \; \eta^\star \, d\eta^\star = \eta^\star \; - \; \frac{1}{2}{\eta^\star}^2 \Big|_0^1 = \; \frac{1}{2}$$

Grenzschichtabsaugung

Berechnung von $\tau(y=0)$:

allgemein
$$\frac{\tau(y=0)}{\rho u_\infty^2} = -\eta \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{\rho u_\infty^2} = -\frac{\eta}{\rho u_\infty^2} \frac{\partial (u/u_\infty)}{\partial (y/\delta)} \frac{u_\infty}{\delta}$$

aus Ansatz für Profil
$$\frac{\partial (u/u_\infty)}{\partial (y/\delta)} = 1 \Longrightarrow \frac{\tau(y=0)}{\rho u_\infty^2} = -\frac{\eta}{\rho u_\infty \delta}$$

Einsetzen in Kàrmàn-Pohlhausen
$$\frac{d\delta_2}{dx} = \frac{d\delta_2}{d\delta}\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{6}\frac{d\delta}{dx}$$

$$\frac{d\delta_1}{dx} = \frac{d\delta_1}{d\delta}\frac{d\delta}{dx} = \frac{1}{2}\frac{d\delta}{dx}$$

Grenzschichtabsaugung

$$\Longrightarrow \frac{1}{6}\frac{d\delta}{dx} + \frac{1}{2}\frac{d\delta}{dx} = \frac{\eta}{\rho\, u_\infty\, \delta}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\delta\, d\delta = \frac{\eta}{\rho\, u_\infty}\, dx \Longrightarrow \frac{1}{3}\delta^2 = \frac{\eta}{\rho\, u_\infty}\, x + C$$

Anfangsbedingung für δ

$$x = 0 \Rightarrow \delta(x) = 0 \Longrightarrow C = 0$$

$$\Longrightarrow \delta(x) = \sqrt{3}\sqrt{\frac{\eta x}{\rho u_\infty}} \Longrightarrow \frac{\delta}{x} = \sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

Grenzschichtabsaugung

c) Absauggeschwindigkeit v_A

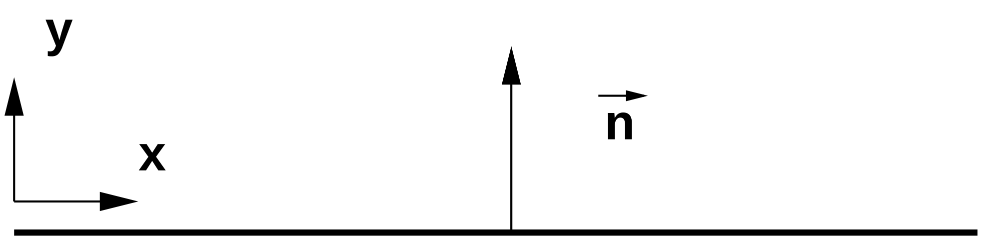
$$\text{aus b)} \quad \frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \text{aus a)} \; v_A(x) \;=\; -u_\infty \frac{d\delta_1}{dx} \;=\; -u_\infty \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\sqrt{3} \, \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \right)$$

$$= \; -u_\infty \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\eta}{\rho u_\infty}} \, \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad = \quad -\frac{\sqrt{3}}{4} \, u_\infty \, \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}$$

d) Definition von c_w

$$c_w = \frac{F_w}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \, L \, B}$$



$$F_p = \int -p\vec{n} \, dA \text{ und } \vec{n}_x = 0 \Longrightarrow F_{w_p} \;=\; 0$$

Druckkräfte haben keinen Anteil am Widerstand.
Widerstandskraft resultiert aus Reibungskräften auf der Plattenoberfläche.

Grenzschichtabsaugung

$$F_w = \int_0^L \left(\tau_{w_o} + \tau_{w_u}\right) \; B \; dx$$ B: Breite der Platte

Die Strömung ist symmetrisch zur Platte $\Rightarrow \; \tau_{w_o} \; = \; \tau_{w_u} \; = \; \tau_w$

$$\Rightarrow \; c_w \; = \; \frac{4}{L} \int_0^L \frac{\tau_w}{\rho u_\infty^2} \, dx \; = \; \frac{4}{L} \int_0^L \frac{\eta}{\rho u_\infty \delta} \, dx$$

δ aus b) $\; \rightarrow \; \frac{4}{L}\sqrt{\frac{\eta}{\rho u_\infty 3}} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \; = \; \frac{4}{L}\sqrt{\frac{\eta}{3\rho u_\infty}} \, 2\sqrt{x}\Big|_0^L = \frac{8}{\sqrt{3}} \, \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}$