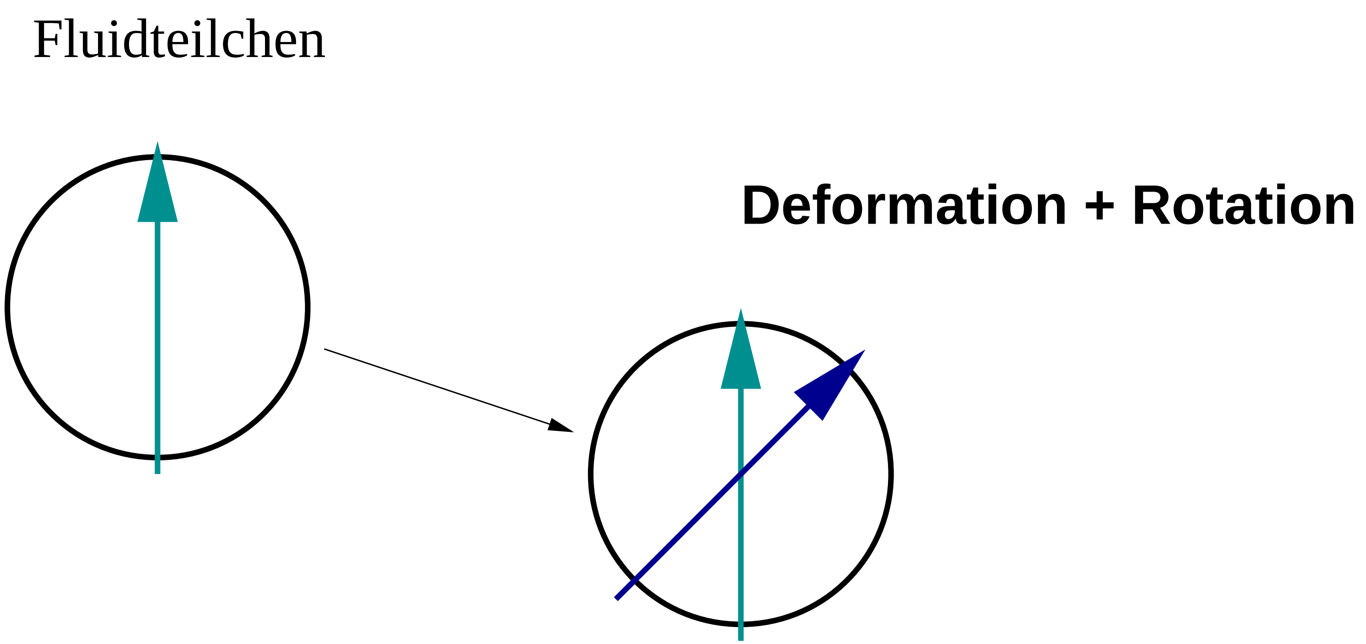
Wirbelströmungen

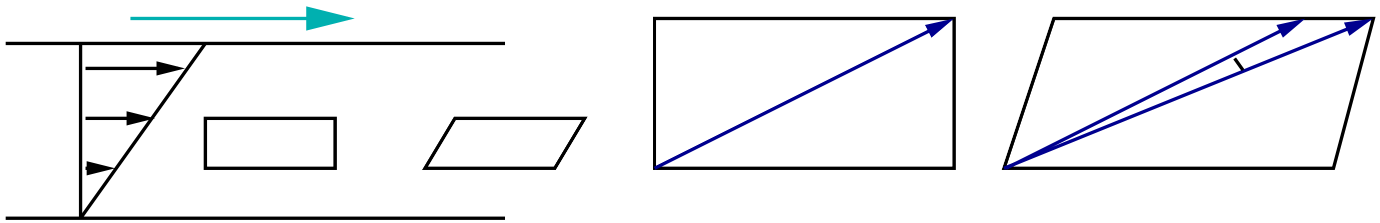
- I. A. sind Strömungen drehungsbehaftet
- Drehungsfreiheit → Vereinfachung der Navier-Stokes Gleichungen → analytische Lösung als Näherung für reale Strömungen



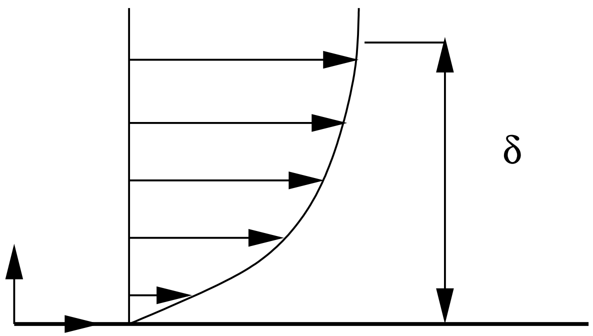
Drehung heißt, daß sich die Teilchen um die <u>eigene</u> Achse drehen

Wirbelströmungen

Beispiel: Couette-Strömung



- Rotation tritt in reibungsbehafteten Strömungen auf
- Schichtenstr., Rohrstr., Grenzschichtstr.



Anstieg der Geschwindigkeit von

$$u(x, y = 0) = 0$$
$$u(x, y \neq 0) \neq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \neq 0$$

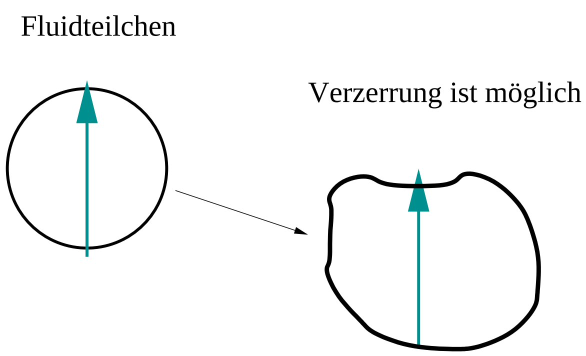
Wirbelströmungen

für kleine Wandabstände ist die Strömung $\approx$ parallel zur Wand $\rightarrow$ $v = 0$

$$\rightarrow \omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \neq 0$$

bei reibungsbehafteten Strömungen ist z. B. in Wandnähe in der Regel $\vec{\omega} \neq 0$

- Drehungsfreie Strömungen (Potentialströmungen)



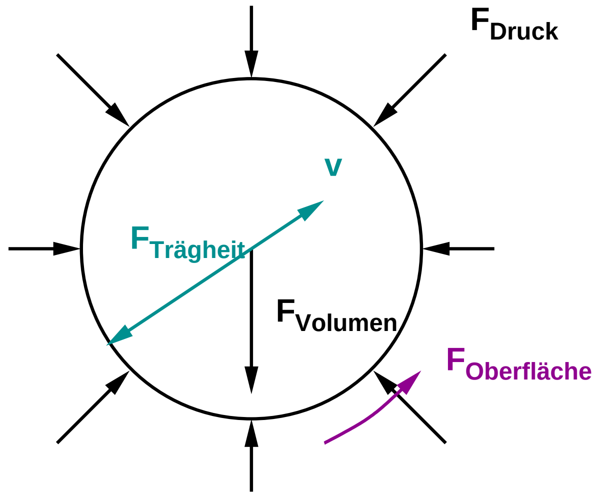
Drehungsfreiheit ist im Allgemeinen nur in reibungsfreien Strömungen möglich.

Wirbelströmungen

Erhaltungsgleichungen für reibungsfreie Strömungen

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \sum \vec{F}_a = \text{Druck- und Volumenkräfte}$$

Fluidelement in Form einer Kugel



- Reibungskräfte führen zur Drehung
- Die Kräfte in einer reibungsfreien Strömung gehen durch den Mittelpunkt

Wirbelströmungen

- in reibungsfreier Strömung (ohne Diskontinuität) kann keine Drehung erzeugt werden
- eine zu einem Zeitpunkt drehungsfreie Strömung bleibt drehungsfrei

Wirbelvektor

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot}\vec{v} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v}) \text{ mit } \vec{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

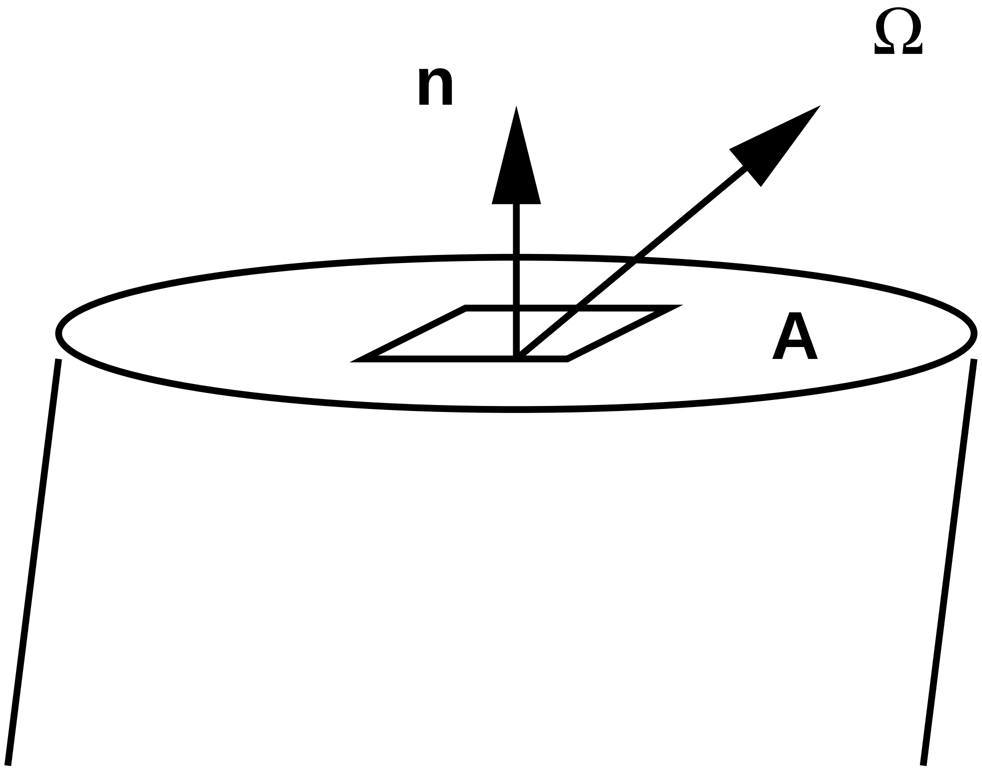
Wirbelströmungen

ebene 2d Strömung ($w = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$)

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Wirbelfluss Ω

Integral über den durch eine Fläche A tretenden Wirbelvektor (in Analogie zu demIntegral über den durch eine Fläche tretenden Geschwindigkeitsvektor = Volumenstrom)

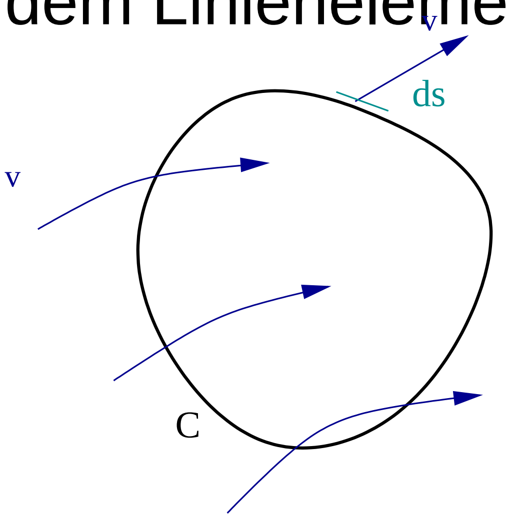


$$\Omega = \int_A \vec{\omega} \cdot \vec{n}\, dA$$

$$\dot{Q} = \int_A \vec{v} \cdot \vec{n}\, dA$$

Zirkulation Γ

Linienintegral über das Skalarprodukt aus Geschwindigkeit $\vec{v}$ und dem Linienelement $\vec{ds}$ längs einer geschlossenen Kurve C.



$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

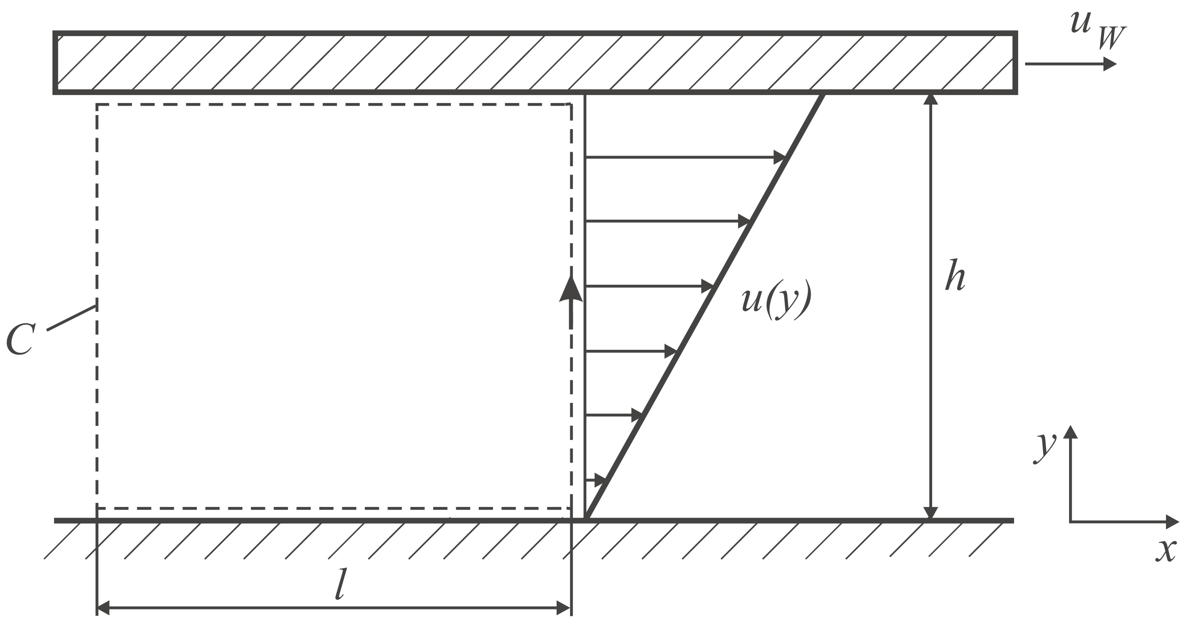
Zusammenhang (Satz von Stokes)

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_A (\nabla \times \vec{v})\vec{n}\, dA = \int_A 2(\vec{\omega} \cdot \vec{n})\, dA = 2\Omega$$

13.3

Es wird die zweidimensionale Couette-Strömung ohne Druckgradient untersucht. Bestimmen Sie $\vec{\omega},\ \Gamma_C,\ \Omega$.

Gegeben: $u_W,\ h,\ l$



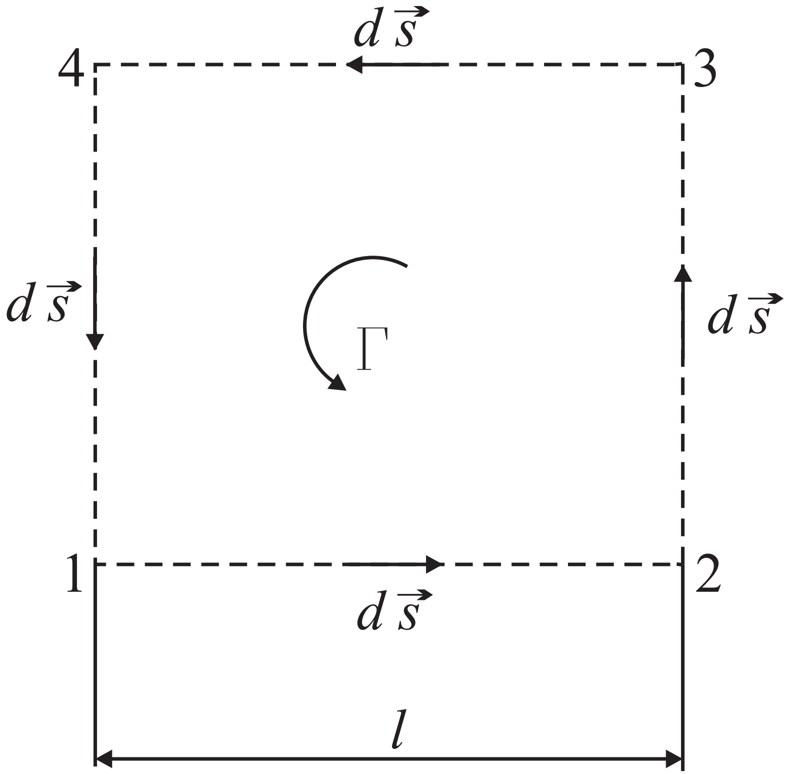
Couette Strömung $\Longrightarrow$ ohne Druckgradient

$$\Longrightarrow u(y) = u_W \frac{y}{h}$$

ebene Strömung

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\frac{u_W}{h}$$

$$\Longrightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{-u_W}{2h} \end{pmatrix}$$



$$\Gamma_C = \oint\limits_C \vec{v}\, d\vec{s} = \int\limits_1^2 \vec{v}\, d\vec{s} + \int\limits_2^3 \vec{v}\, d\vec{s} + \int\limits_3^4 \vec{v}\, d\vec{s} + \int\limits_4^1 \vec{v}\, d\vec{s}$$

$$\int_1^2 \vec{v}\, d\vec{s} = 0, \qquad \text{da } u = v = 0$$

$$\int_2^3 \vec{v}\, d\vec{s} = 0, \qquad \text{da } \vec{v} \perp d\vec{s}$$

$$\int_3^4 \vec{v}\, d\vec{s} = \int_3^4 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -dx \\ dy \end{pmatrix} = \int_3^4 -u_W dx = -u_W l$$

$$\int_4^1 \vec{v}\, d\vec{s} = 0, \qquad \text{da } \vec{v} \perp d\vec{s}$$

$$\Longrightarrow \Gamma = -u_W \cdot l$$

$$\Omega = \int_A \vec{\omega}\, \vec{n}\, dA = \omega_z \cdot A = \frac{-u_W}{2h} \cdot l \cdot h = -\frac{1}{2} u_W \cdot l = \frac{1}{2}\, \Gamma$$

13.1

Ein Wirbelsturm hat folgende Geschwindigkeitsverteilung:

$$v_\Theta(r) = \begin{cases} \omega\, r & r \leq r_0 \\ \dfrac{\omega\, r_0^2}{r} & r > r_0 \end{cases} \qquad v_r = 0$$

$$r_0 = 10\ m \qquad \omega = 10\ \frac{1}{s} \qquad H = 100\ m \qquad \rho = 1,25\ kg/m^3$$

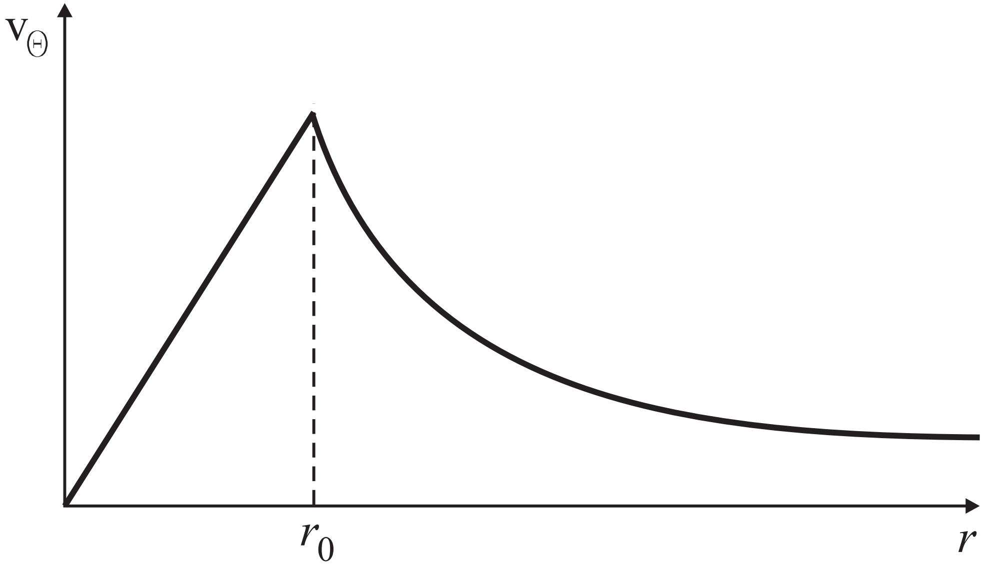
a) Skizzieren Sie $v_\Theta(r)$!

b) Bestimmen Sie die Zirkulation auf einem Kreis um den Ursprung für $r < r_0, r = r_0$ und $r > r_0$!

c) Zeigen Sie, dass für $r > r_0$ die Strömung drehungsfrei ist!

d) Wie gross ist die kinetische Energie innerhalb eines Zylinders mit dem Radius $R = 2\ r_0$ und Höhe H?

a)

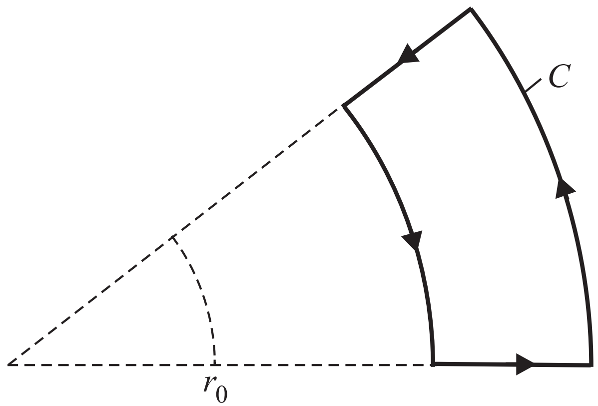


b)

$$\Gamma = \oint\limits_C \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int\limits_0^{2\pi} v_\Theta(r)\, r\, d\,\Theta = \begin{cases} 2\pi\ \omega\ r^2 & r \leq r_0 \\ 2\pi\ \omega\ r_0^2 & r > r_0 \end{cases}$$

c)

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0$$



$$\vec{\omega} = 0$$

d)

$$E = \int_0^{2r_0} \frac{\rho}{2} v_\Theta^2 \, H \, 2\pi \, r \, d\,r =$$

$$\pi \, \rho \, H \, \omega^2 \, r_0^4 \, (0,25 + \ln 2) = 3,7 \cdot 10^8 \, Nm$$

Potentialtheorie

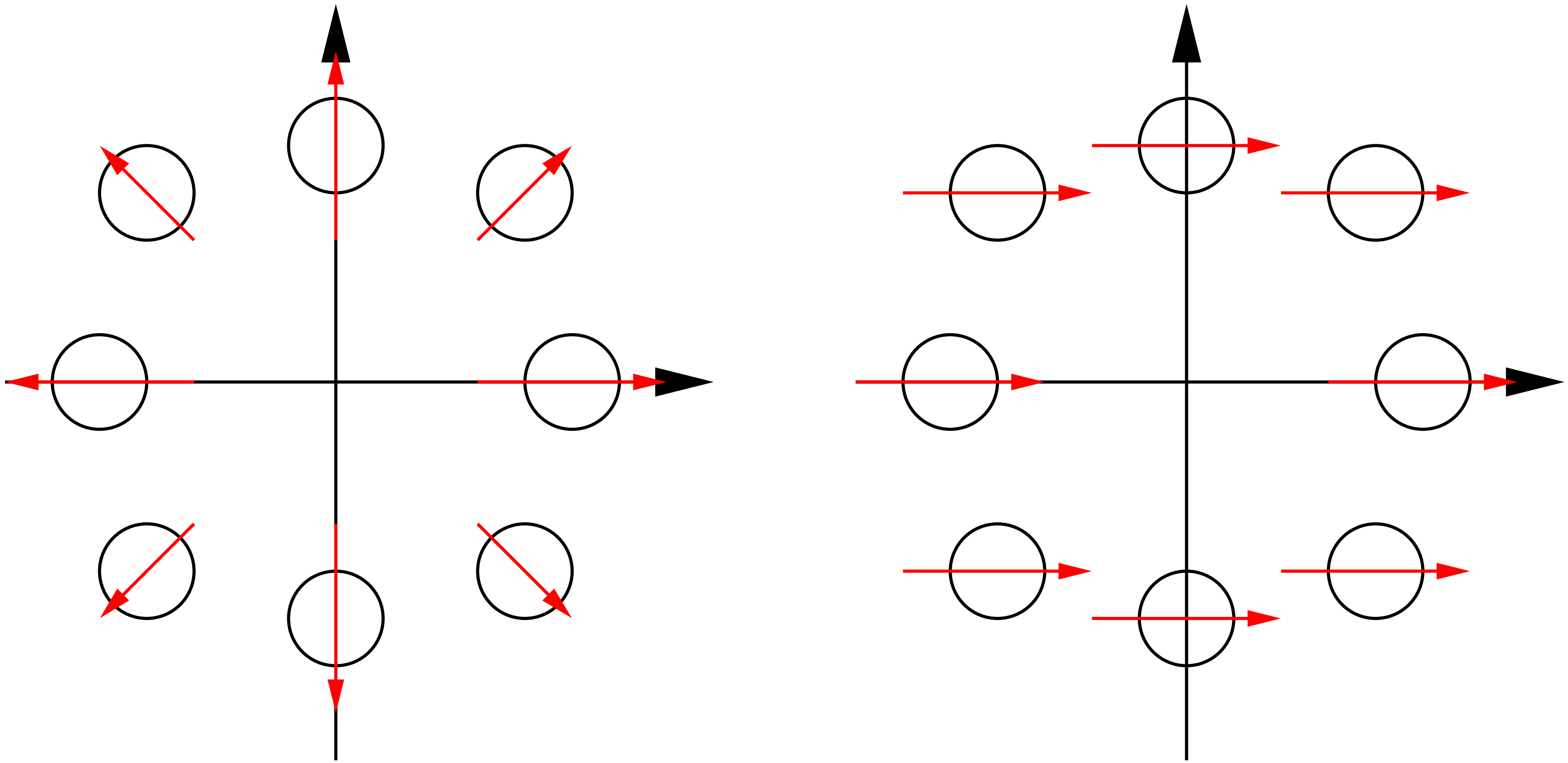
Annahmen: reibungsfrei, drehungsfrei
2-dimensional (eben)
inkompressibel, stationäre Strömung

drehungsfrei: $\vec{\omega} = \vec{0}$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\text{rot}\,\vec{v} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix}$$

2-dimensionale Strömung $\omega_x = \omega_y = 0$

$$\rightarrow \omega_z = \frac{1}{2}(v_x - u_y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$



drehungsbehaftet **drehungsfrei**

Aufgabe 4.1: rot(grad f) = $\vec{0}$

Potentialtheorie

Wenn $\omega_z = 0$ $\rightarrow$ es existiert eine Funktion Φ mit der Eigenschaft

$$\vec{v} = \nabla \underbrace{\Phi}_{\text{Potential}} \rightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ Kontinuität (2-d, stationär, inkompressibel)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nabla \cdot \vec{v} \rightarrow \boxed{\nabla^2 \Phi = \Delta \Phi = 0}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0}$$

lineare Differentialgleichung

$\longrightarrow$ das Prinzip der Superposition ist anwendbar

Wenn Φ_1, Φ_2 Lösungen der Gleichung sind, dann sind auch $C_1 \cdot \Phi_1$, $C_2 \cdot \Phi_2$ und $C_1 \cdot \Phi_1 + C_2 \cdot \Phi_2$ Lösungen der Gleichung

Stromfunktion : $u = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y};\ v = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$ erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\omega = 0 \quad \boxed{\nabla^2 \Psi = \Delta \Psi = 0}$$

$\Phi_x = \Psi_y\,; \Phi_y = -\Psi_x$ $\longrightarrow$ Linien mit konstantem Φ und Ψ stehen senkrecht aufeinander

Potentialtheorie

$\Phi =$ konst $\longrightarrow$ Potentiallinien

$\Psi =$ konst $\longrightarrow$ Stromlinien

Φ und Ψ werden verwendet, um Strömungsfelder und Strömungen um Körper zu beschreiben

Die Kontur wird durch eine besondere Stromlinie repräsentiert.

$\longrightarrow$ Der Geschwindigkeitsvektor ist <u>parallel</u> zur Wand

<u>Aber</u>: Stokes'sche Haftbedingung kann nicht erfüllt werden (reibungsfrei und drehungsfrei)

$\longrightarrow$ Widerstandskräfte und Schubspannungen können nicht berechnet werden

Potentialtheorie

- komplexe Zahlen

$$z = x + i\,y = r\,e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$$

$$x = r\cos\varphi \qquad\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\longleftrightarrow$$

$$y = r\sin\varphi \qquad\qquad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

- komplexe Geschwindigkeit

$$w = u + i\,v$$

- konjugiert komplexe Geschwindigkeit

$$\bar{w} = u - i\,v$$

komplexe Potentialfunktion

komplexe Stromfunktion

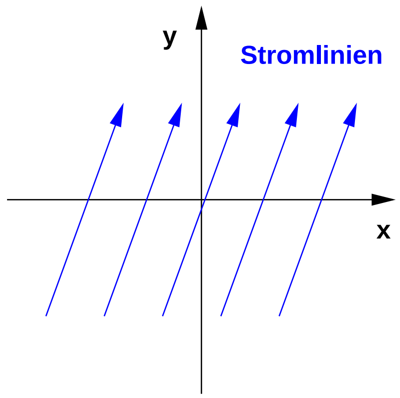
$$F(z) = \int \bar{w}\, dz \; = \; \Phi(x,y) \; + \; i\, \Psi(x,y)$$

$\longrightarrow$ Laplacegleichung $$\boxed{\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right) \; + \; i \left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}\right) = 0}$$

$$\bar{w} = u - iv = \frac{dF}{dz}$$

Singularitäten

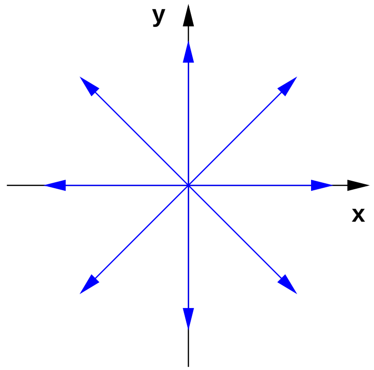
Parallelströmung: $F(z) = (u_\infty - i\, v_\infty)\, z$

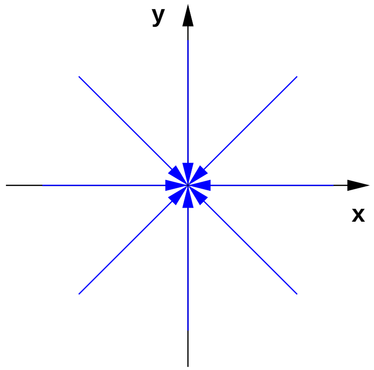


$$\Phi = u_\infty x \, + \, v_\infty y \qquad\qquad \Psi = u_\infty y \, - \, v_\infty x$$

$$u = u_\infty \qquad\qquad v = v_\infty$$

Quelle, Senke: $F(z) = \dfrac{E}{2\pi} \ln z$





$$\Phi = \frac{E}{2\pi} \ln r \qquad\qquad \Psi = \frac{E}{2\pi} \varphi$$

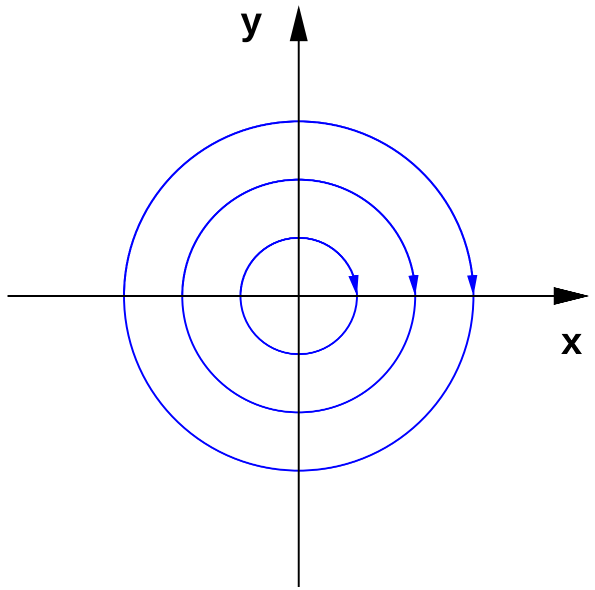
$$u = \frac{E}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad\qquad v = \frac{E}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Singularitäten

Potentialwirbel: $F(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} i \, \ln z$

$$\Phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \Psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \qquad v = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

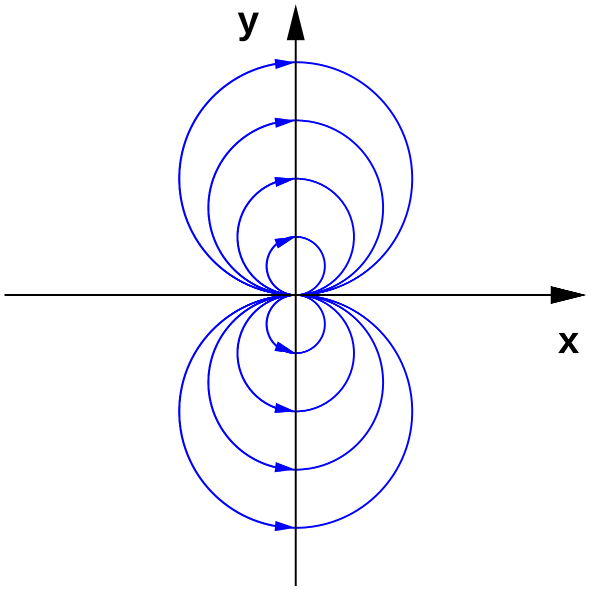


Singularitäten

Dipol: $F(z) = \dfrac{m}{z}$

$$\Phi = \frac{mx}{x^2 + y^2} \qquad \Psi = -\frac{my}{x^2 + y^2}$$

$$u = m\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \qquad v = -m\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

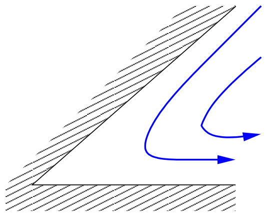


Singularitäten

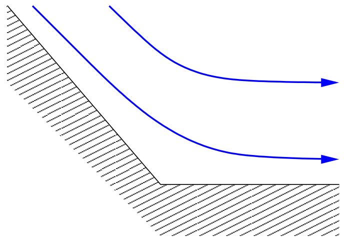
Eckenströmung: $F(z) = \dfrac{a}{n} z^n \qquad (n \in \mathbf{R},\ a \in \mathbf{C})$

$$\Phi = \frac{a}{n} r^n \cos n\varphi \qquad\qquad \Psi = \frac{a}{n} r^n \sin n\varphi$$

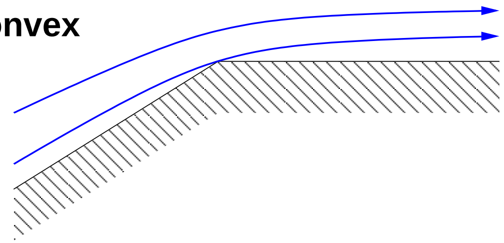
spitzer Winkel



konkav



konvex

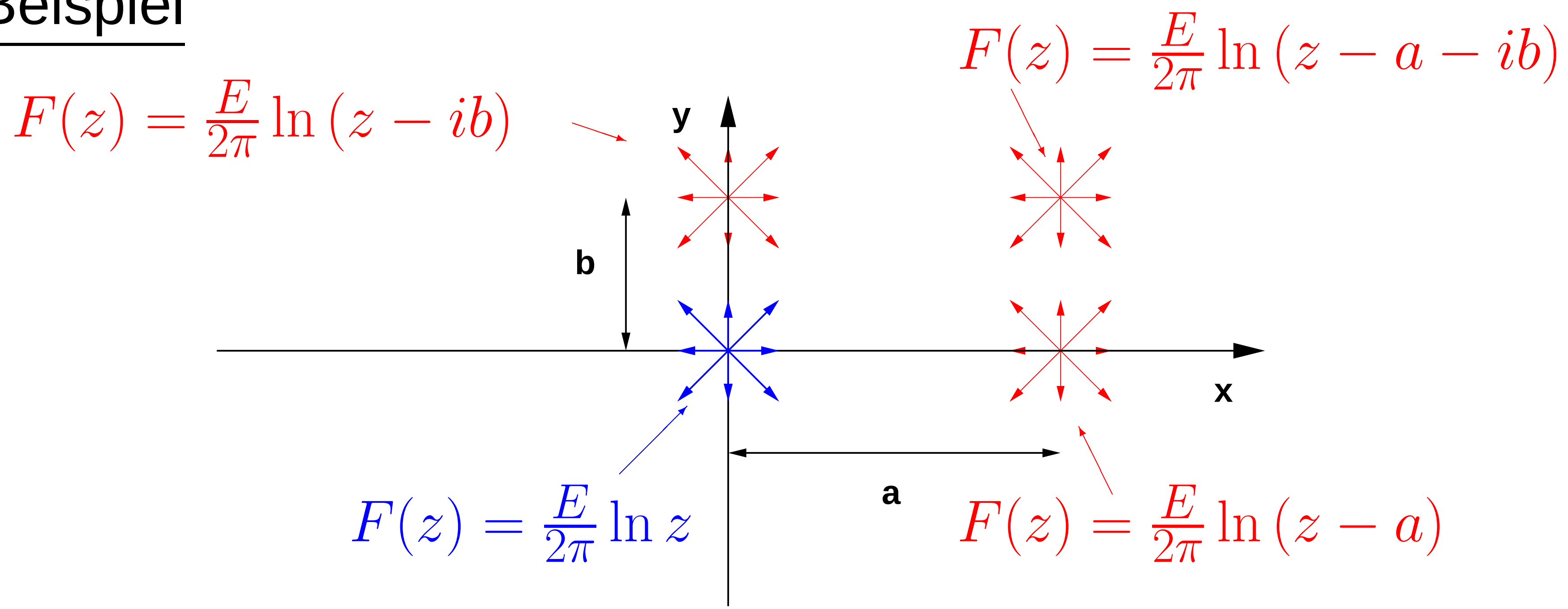


Singularitäten

Singularitäten haben ihr Zentrum im Ursprung des Koordinatensystems

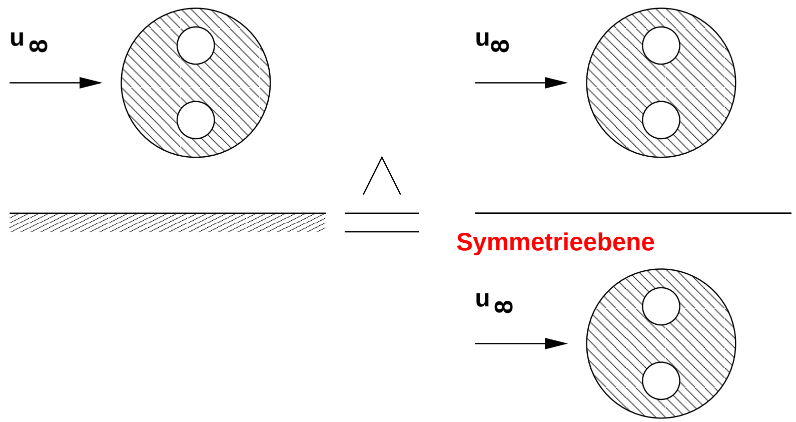
$\longrightarrow$ Verschiebung

<u>Beispiel</u>



Potentialtheorie

- Simulation von Wänden durch Spiegelung



- Normalerweise werden Konturen durch Staupunktstromlinien repräsentiert
  - Lokalisierung des Staupunktes ($u = v = 0$)
  - Berechnung von Ψ im Staupunkt
  - skizzieren der Stromlinien

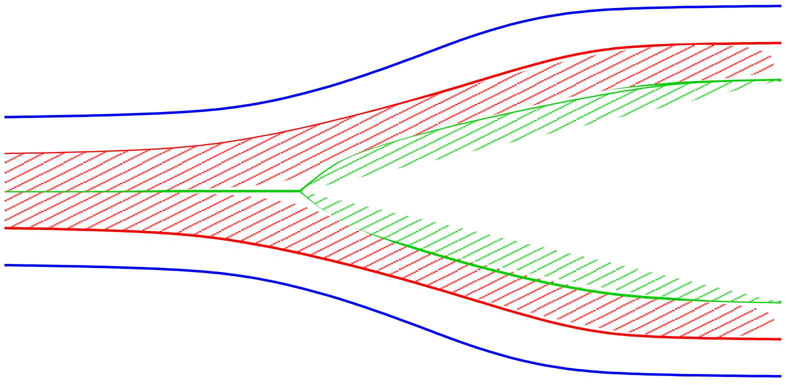
$$\Psi_k(x, y) = \Psi_k(x_s, y_s) = konst.$$

$$\rightarrow y_s = f(x_s)$$

$$\rightarrow r_s = f`(y_s)$$

Potentialtheorie

- Stromlinien schneiden sich nicht
  $\longrightarrow$ jede Stromlinie kann eine Kontur repräsentieren
  dann ist normalerweise $u_w \neq 0$



- Bernoulligleichung ist gültig

$$p_0 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho(u_\infty^2 + v_\infty^2) = p + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2) = konst.$$

  – Berechnung von $c_p = \dfrac{p - p_{\text{ref}}}{\frac{\rho}{2}u_{\text{ref}}^2} = \dfrac{\frac{1}{2}\rho u_{\text{ref}}^2 - \frac{1}{2}\rho\vec{v}^2}{\frac{\rho}{2}u_{\text{ref}}^2} = 1 - \dfrac{\vec{v}^2}{u_{\text{ref}}^2}$

14.5

Eine ebene Strömung wird durch die Stromfunktion $\psi = (\frac{U}{L})xy$ beschrieben. Im Punkt $x_{ref} = 0, y_{ref} = 1\ m$ beträgt der Druck $p_{ref} = 10^5\ N/m^2$.

$$U = 2\ m/s \qquad L = 1\ m \qquad \rho = 10^3\ kg/m^3$$

a) Überprüfen Sie, ob die Strömung ein Potential besitzt.

Bestimmen Sie

b) die Staupunkte, den Druckbeiwert und die Isotachen,

c) Geschwindigkeit und Druck für $x_1 = 2m, y_1 = 2m$,

d) die Koordinaten eines Teilchens, das zur Zeit $t = 0$ den Punkt x_1, y_1 durchläuft, für die Zeit $t = 0.5s$,

e) die Druckdifferenz zwischen diesen beiden Punkten.

f) Skizzieren Sie die Stromlinien.

14.5

a) Gegeben: Stromfunktion $\Psi = \frac{U}{L}xy$

Φ existiert, wenn $\vec{\omega} = \vec{0}$

ebene Strömung $\rightarrow$ 2-dimensional $\rightarrow$ $\omega_x = \omega_y = 0$

$$\rightarrow \omega_z = \frac{1}{2}(v_x - u_y) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} u = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y} = \dfrac{U}{L}x \rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \\[2em] v = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = -\dfrac{U}{L}y \rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{array}\right\} \qquad \omega_z = 0$$

14.5

$\longrightarrow$ die Strömung ist reibungsfrei und ein Potential existiert

Φ existiert $\longrightarrow$ Berechnung von Φ

$$1.)\ u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \longrightarrow \Phi = \int u\, dx \ + \ f_1(y) + C_1$$

$$2.)\ v = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \longrightarrow \Phi = \int v\, dy \ + \ f_2(x) + C_2$$

$$1.)\ \Phi(x, y) = \int \frac{U}{L} x dx + f_1(y) + C_1$$

$$2.)\ \Phi(x, y) = \int -\frac{U}{L} y dy + f_2(x) + C_2$$

$$1.)\ \Phi(x,y) = \frac{U}{L}\frac{x^2}{2} + f_1(y) + C_1$$

$$2.)\ \Phi(x,y) = -\frac{U}{L}\frac{y^2}{2} + f_2(x) + C_2$$

Vergleich von 1.) und 2.)

$$\underbrace{\frac{U}{L}\frac{x^2}{2}} + \underbrace{f_1(y)} + C_1 = -\underbrace{\frac{U}{L}\frac{y^2}{2}} + \underbrace{f_2(x)} + C_2$$

$$f_1(y) = -\frac{U}{L}\frac{y^2}{2}; \qquad f_2(x) = \frac{U}{L}\frac{x^2}{2}; \qquad C_1 = C_2 = C$$

$$\rightarrow \Phi = \frac{U}{2L}(x^2 - y^2) + C$$

komplexes Potential $F(z)$

$$
\begin{aligned}
F(z) &= F(x+iy) = \Phi(x,y) + i\Psi(x,y) \\
&= \frac{U}{2L}(x^2 - y^2) + i\frac{U}{L}xy \\
&= \frac{U}{2L}(x^2 + 2ixy - y^2) \\
&= \frac{U}{2L}z^2
\end{aligned}
$$

Skizze des Strömungsfeldes

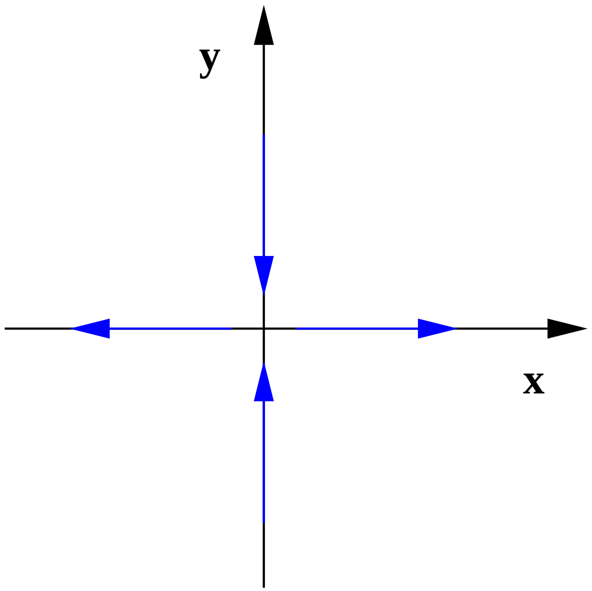
- Staupunkte $\rightarrow$ Staupunktstromlinie
- asymptotische Stromlinien
  $x, y \rightarrow \infty\,;\; x, y \rightarrow 0$
- Strömungsrichtung

Staupunkte: $\vec{v} = \vec{0} \,:\; u = v = 0$

$$u = \frac{U}{L}x\,,\; v = -\frac{U}{L}y \rightarrow (x_s, y_s) = (0, 0)$$

Außerdem: $u = 0$ auf der y-Achse

$v = 0$ auf der x-Achse



$\Psi = konst.$

$$\Psi = \frac{U}{L} xy = konst.$$

$$\rightarrow \; y = \frac{L}{U} konst. \frac{1}{x} = \frac{C}{x} \text{ für } x \neq 0$$

$$x = \frac{L}{U} konst. \frac{1}{y} = \frac{C}{y} \text{ für } y \neq 0$$

$\rightarrow$ Hyperbel

Stromlinien: $\Psi = konst.$

$$\Psi = \frac{U}{L}xy = konst.$$

$$\rightarrow y = \frac{L}{U}konst.\frac{1}{x} = \frac{C}{x} \text{ fr } x \neq 0$$

$$x = \frac{L}{U}konst.\frac{1}{y} = \frac{C}{y} \text{ fr } y \neq 0$$

$\rightarrow$ Hyperbel

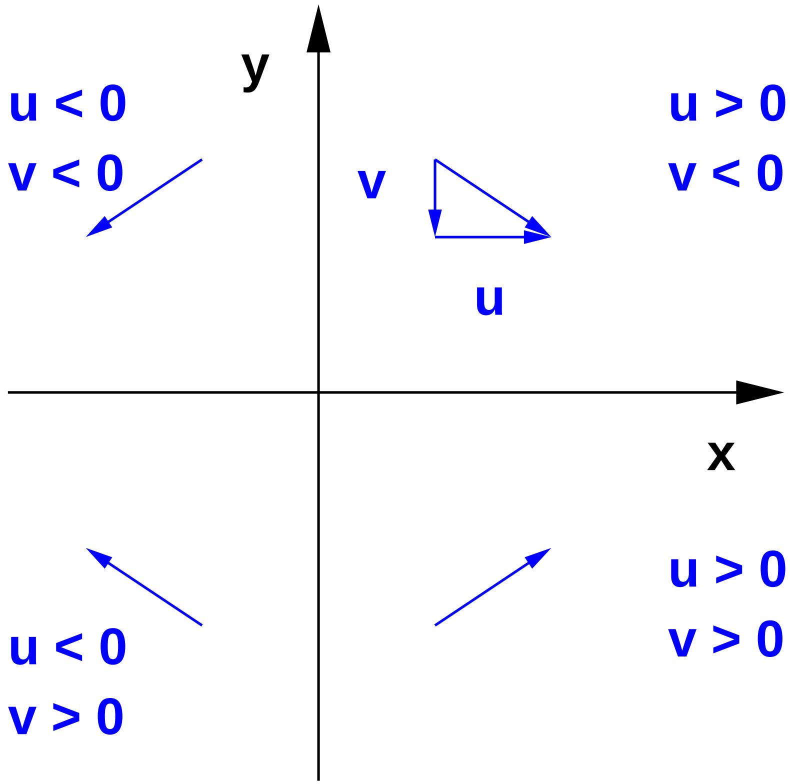
Staupunktstromlinie

$$\Psi_{sp} = \frac{U}{L}x_{sp}y_{sp} = 0 \quad | \quad \text{problemabhängig}$$

$$\Psi = 0 \rightarrow \qquad x = 0 \text{ oder } y = 0$$

$\longrightarrow$ x-Achse und y-Achse sind Staupunktstromlinien

<u>Strömungsrichtung</u> $u = \dfrac{U}{L}x\,,\; v = -\dfrac{U}{L}y$



Druckkoeffizient

$$c_p = \frac{p - p_{\text{ref}}}{\frac{\rho}{2} v_{\text{ref}}^2} = 1 - \frac{\vec{v}^2}{\vec{v}_{\text{ref}}^2} = 1 - \frac{u^2 + v^2}{u_{\text{ref}}^2 + v_{\text{ref}}^2}$$

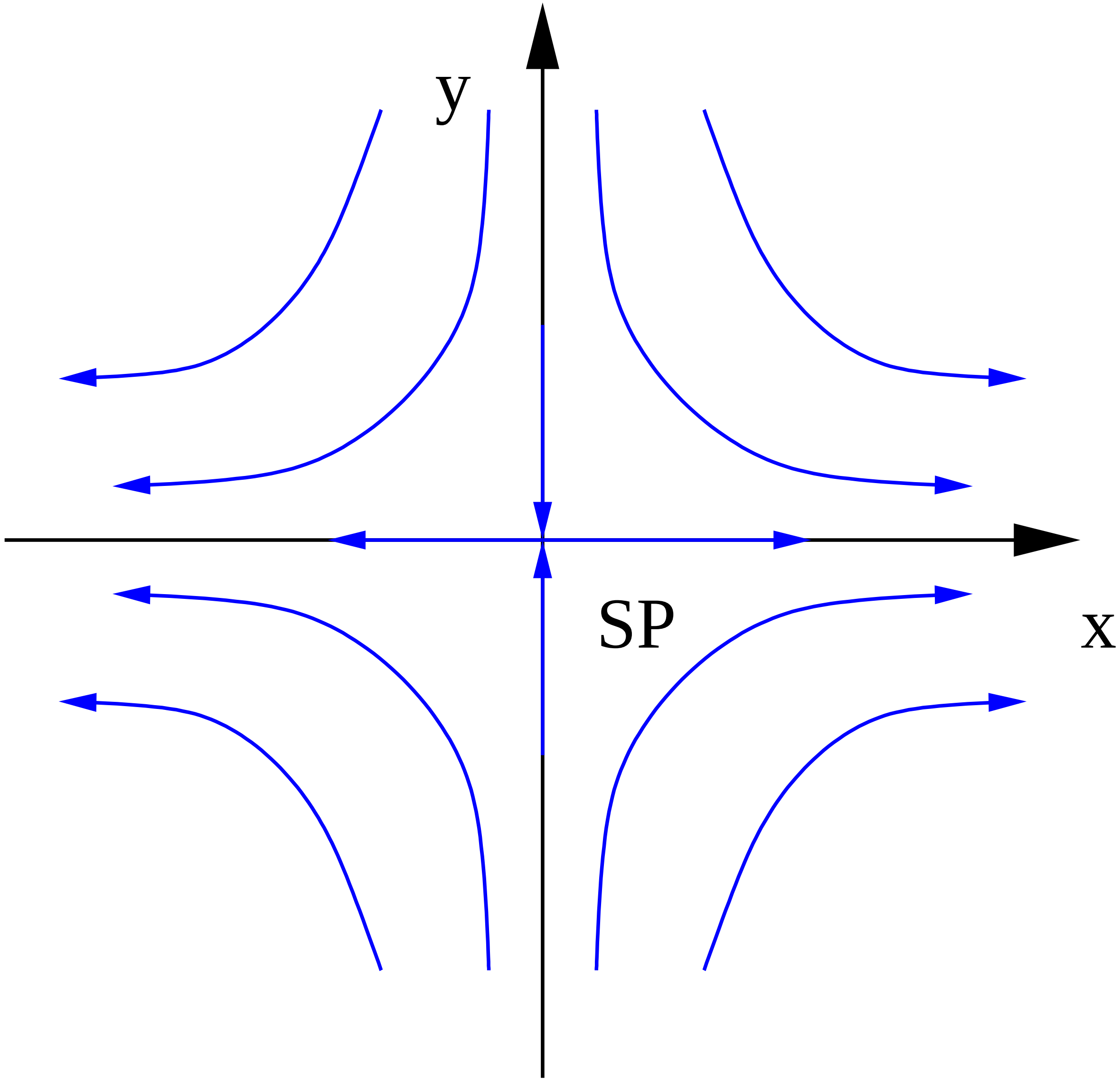
$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{U}{L} x \\[2em] v &= -\frac{U}{L} y \end{aligned}\right\} c_p = 1 - \frac{x^2 + y^2}{x_{\text{ref}}^2 + y_{\text{ref}}^2}$$

Linien konstanter Geschwindigkeit

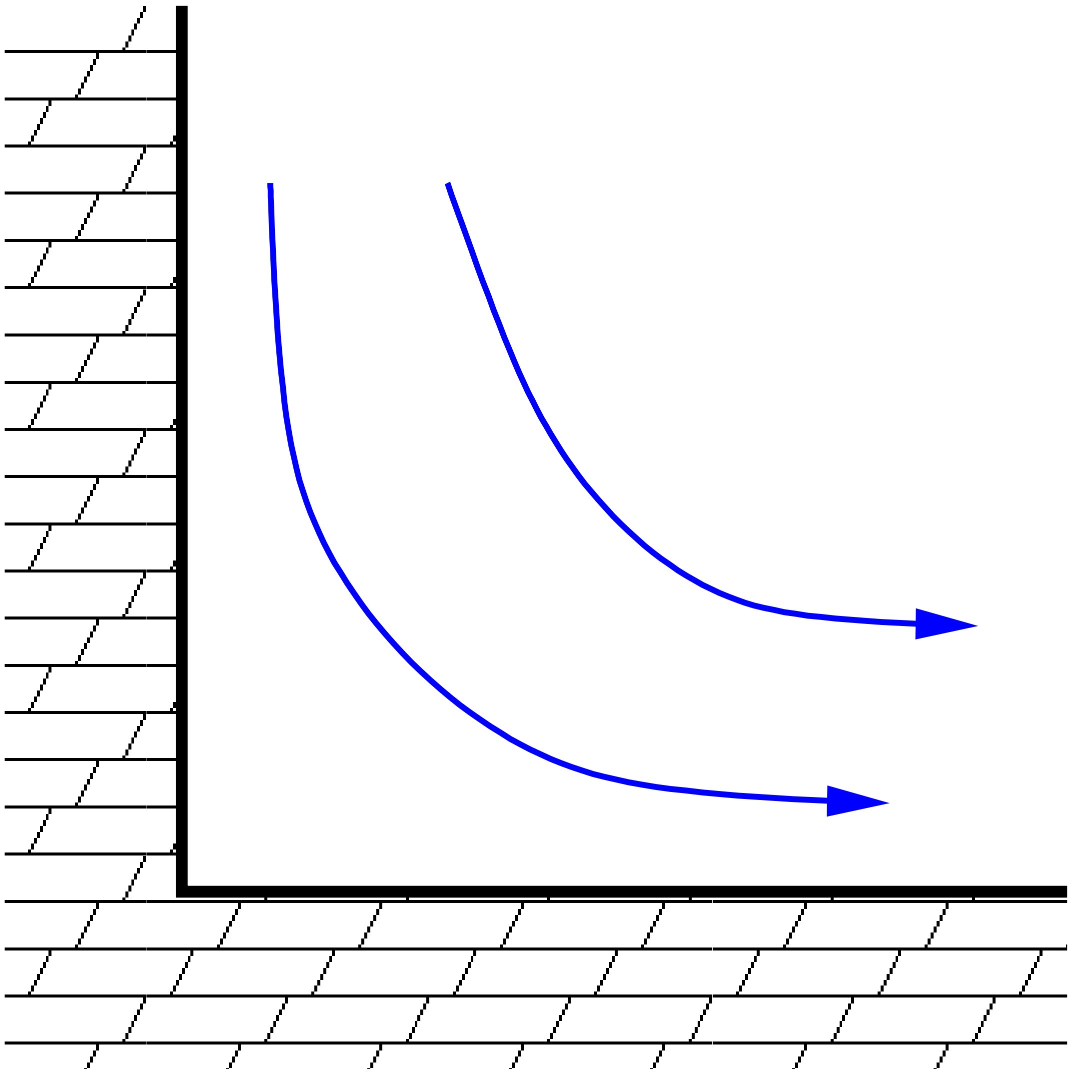
$$|\bar{v}| = \sqrt{u^2 + v^2} = const.$$

$$= \sqrt{\left(\frac{U}{L}x\right)^2 + \left(-\frac{U}{L}y\right)^2} \rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{L\vec{v}}{U}\right)^2$$

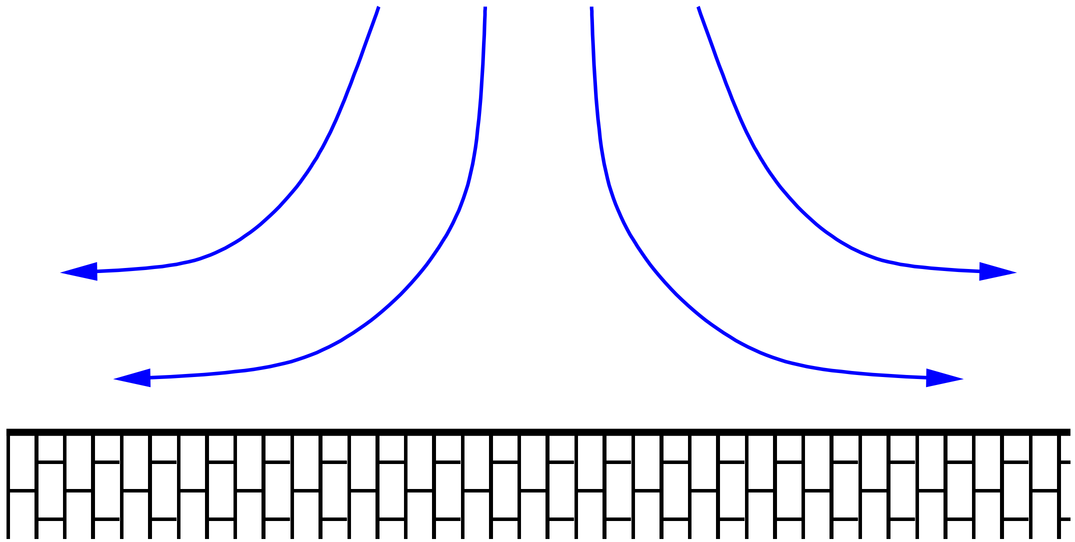
Kreise mit dem Radius $R = \dfrac{L\vec{v}}{U}$


y
SP
x

90°-Eckenströmung

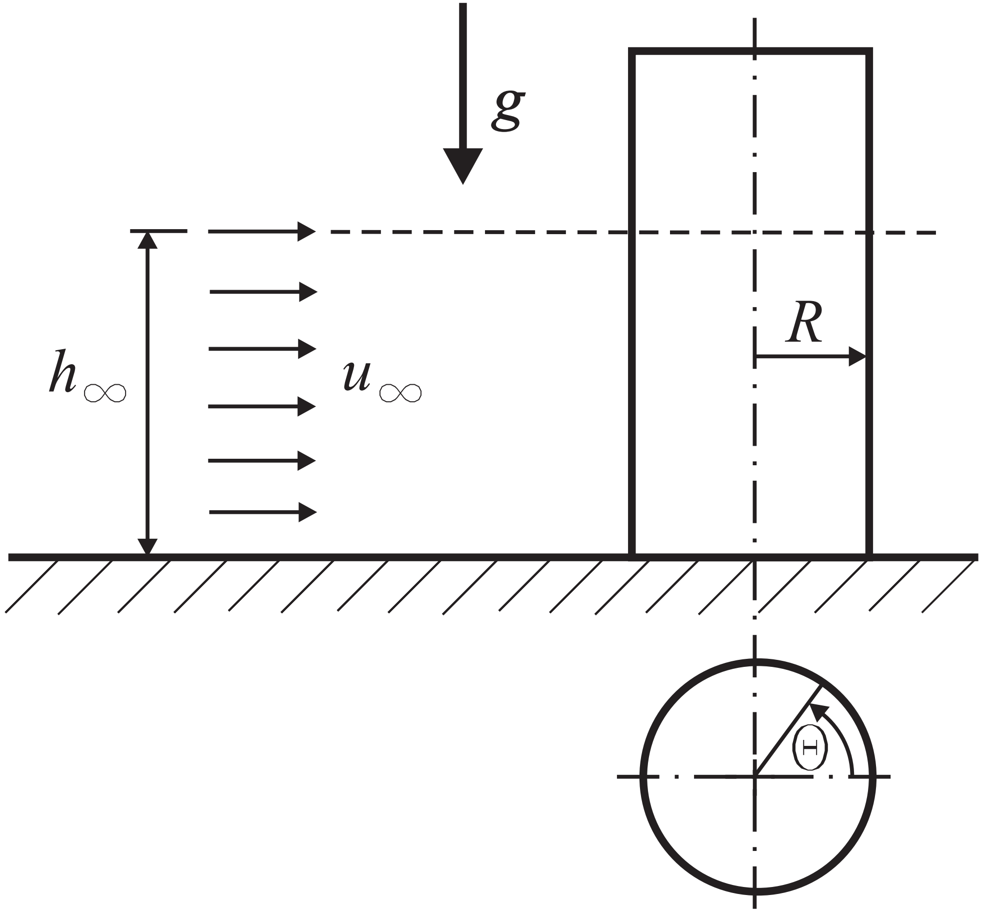


ebene Staupunktströmung



14.8

Ein Brückenpfeiler mit kreisförmigem Querschnitt wird mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt. Weit vor dem Pfeiler beträgt die Wassertiefe h_∞.



14.8

$$u_\infty = 1\ m/s \qquad h_\infty = 6\ m \qquad R = 2$$

$$m \qquad \rho = 10^3\ kg/m^3 \qquad g = 10\ m/s^2$$

Bestimmen Sie

a) die Höhe des Wasserspiegels an der Pfeilerwand als Funktion von θ,
b) die Höhe des Wasserspiegels in den Staupunkten,
c) die geringste Wassertiefe über Grund.

Hinweis: Nehmen Sie an, daß die Strömung eben ist.

a) Kreiszylinder: Dipol + Parallelströmung

$$F(z) = u_\infty z + \frac{M}{2\pi z} = u_\infty z + \frac{R^2 u_\infty}{z}$$

$$\rho g h_\infty + \frac{\rho}{2} u_\infty^2 = \rho g h(\theta) + \frac{\rho}{2} \vec{v}^2$$

$$v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\left(u_\infty + \frac{R^2 u_\infty}{r^2} \right) \sin\theta$$

$$r = R : \vec{v}^2 = v_\theta^2 = 4 u_\infty^2 \sin^2\theta$$

$$h(\theta) - h_\infty = \frac{u_\infty^2}{2g}(1 - 4\sin^2\theta)$$

14.8

b) Staupunkte: $\theta = 0$ und $\theta = \pi$

$$h = h_\infty + \frac{u_\infty^2}{2g} = 6.05\ m$$

c)

$$\theta_{min} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$h_{min} = h_\infty - \frac{3u_\infty^2}{2g} = 5.85\ m$$

14.12

Gegeben ist die Stromfunktion $\psi(x,y)$ für die Strömung eines inkomressiblen Fluids durch die skizzierte ebene Düse.

$$\psi(x,y) = \frac{y}{h(x)} u_\infty L$$

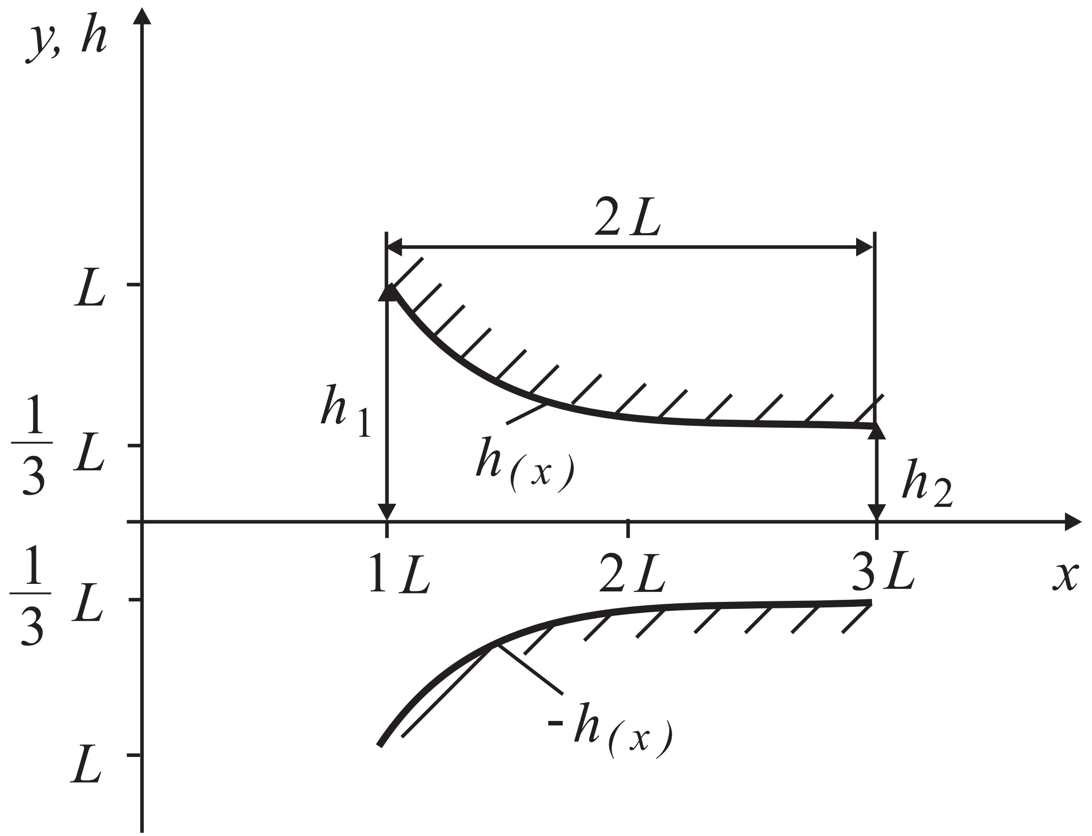
Gegeben: $u_\infty,\ L,\ B,\ h_1 = L,\ h_2 = \frac{1}{3}L$

a) Bestimmen Sie den Verlauf der oberen und unteren Düsenkontur $h(x)$ so, dass die Strömung als Potentialströmung dargestellt werden kann.

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeitsverteilung $u(x,y)$ und $v(x,y)$.

c) Bestimmen Sie den Volumenstrom durch die Düse mit der Breite B.

14.12



14.12

a)

Voraussetzung: $\omega = 0 \rightarrow \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = 0$

$$\frac{\partial^2\psi(x,y)}{\partial y^2} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(yu_\infty L \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{h(x)}\right)\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-yu_\infty L \frac{h'(x)}{h^2(x)}\right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{h'(x)}{h^2(x)}\right) = 0$$

2 $\times$ integriert: $-\dfrac{1}{h(x)} = C_1 x + C_2$

14.12

R.B.:

$$x = L, \quad h = L \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{L} = C_1 L + C_2$$

$$x = 3L, \quad h = \frac{1}{3}L \quad \Longrightarrow \quad -\frac{3}{L} = 3C_1 L + C_2$$

$$\Longrightarrow \quad C_2 = 0, \quad C_1 = -\frac{1}{L^2} \quad \Longrightarrow \quad h(x) = \frac{L^2}{x}$$

b)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \psi = \frac{u_\infty}{L} x y$$

$$u = u_\infty \frac{x}{L}; \quad v = -u_\infty \frac{y}{L}$$

14.12

c)

$$\dot{V} = \psi_{(y=h)} - \psi_{(y=-h)}|_{x=L}$$

$$\dot{V} = (h_1 + h_1)Bu_\infty$$
$$\dot{V} = 2U_\infty LB$$

Gegeben ist die Stromfunktion $\psi = \psi_1 + \psi_2$

mit $\psi_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$

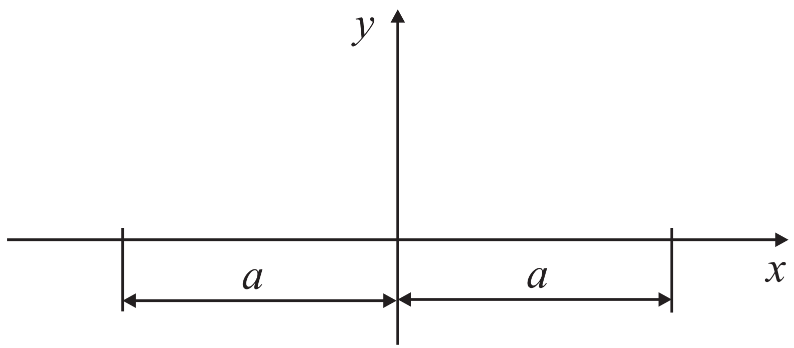
$\psi_2 = -\frac{2\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$

Gegeben: $a, \; \Gamma > 0$

Bestimmen Sie

a) die Koordinaten des Staupunktes.

b) den Druckbeiwert auf der x-Achse $c_p(x, y = 0)$ so, dass im Koordinatenursprung $c_p = 0$ gilt.



a) Bedingung für den Staupunkt: $u = 0, v = 0$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{y}{(x-a)^2+y^2} + \frac{2y}{(x+a)^2+y^2}\right)$$

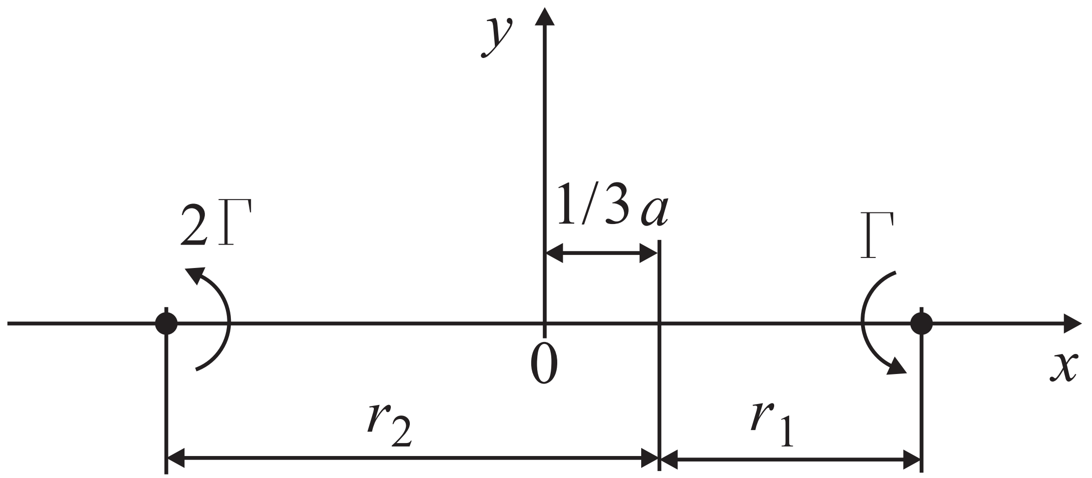
$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi}y\left(\frac{1}{(x-a)^2+y^2} + \frac{2}{(x+a)^2+y^2}\right) = 0 \quad \text{wenn } y = 0$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{x-a}{(x-a)^2+y^2} + \frac{2(x+a)}{(x+a)^2+y^2}\right)$$

für $y = 0:$ $\quad v = \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x+a}\right) = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{3x-a}{x^2-a^2} \quad \star)$

$v = 0$, wenn $3x - a = 0 \quad \rightarrow$ Staupunkt: $x_s = \frac{a}{3}, \quad y_s = 0$

alternativ:



$$v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} : v_{\theta_1} = v_{\theta_2} \longrightarrow \frac{\Gamma}{2\pi r_1} = \frac{2\Gamma}{2\pi r_2} \longrightarrow r_2 = 2r_1$$

$$2a = r_1 + r_2 \longrightarrow 2a = 3r_1 \longrightarrow r_1 = \frac{2}{3}a \longrightarrow x_s = \frac{a}{3}$$

b)

$$c_p(x, y = 0) = 1 - \frac{u^2 + v^2}{u^2_{(0,0)} + v^2_{(0,0)}}$$ mit $u = 0$ für $y = 0$.

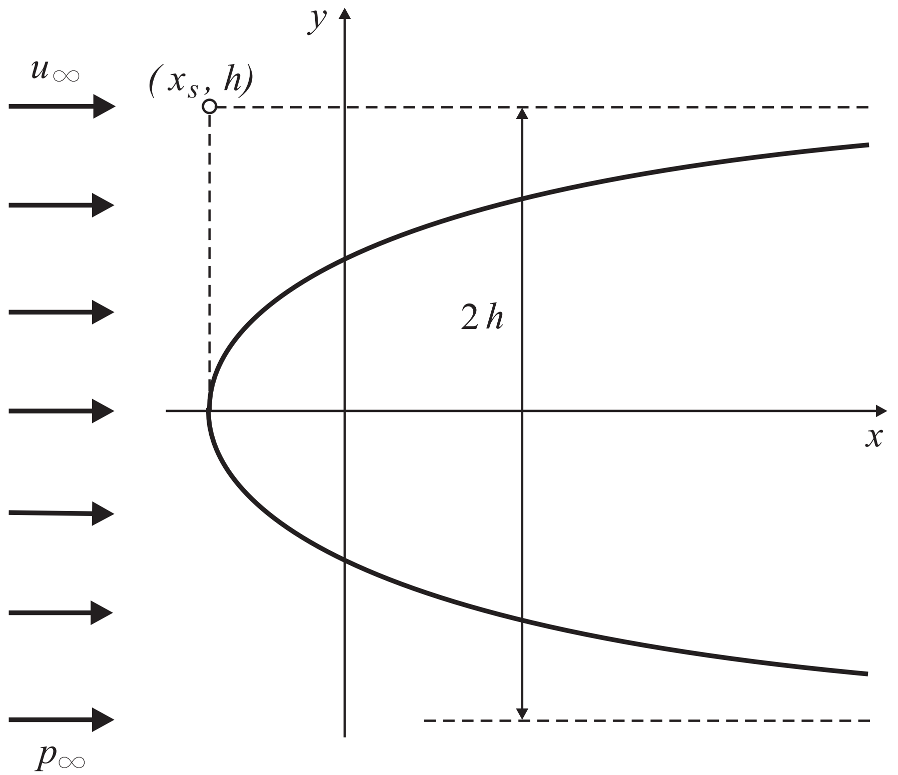
$\Longrightarrow c_p(x, y = 0) = 1 - \dfrac{v^2}{v^2_{(0,0)}}$, $v_{(0,0)} = \dfrac{\Gamma}{2\pi}\dfrac{1}{a}$ (siehe $\star$) d.h. $c_{p_{(0,0)}} = 0$

mit $\star$) $c_p(x, y = 0) = 1 - \left(\dfrac{\dfrac{3x - a}{x^2 - a^2}}{\dfrac{1}{a}}\right)^2$

$\Longrightarrow c_p(x, y = 0) = 1 - \left(\dfrac{3xa - a^2}{x^2 - a^2}\right)^2$ für $x \neq a, -a$

14.6

Ein ebener Halbkörper mit der Breite $2h$ wird mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt.



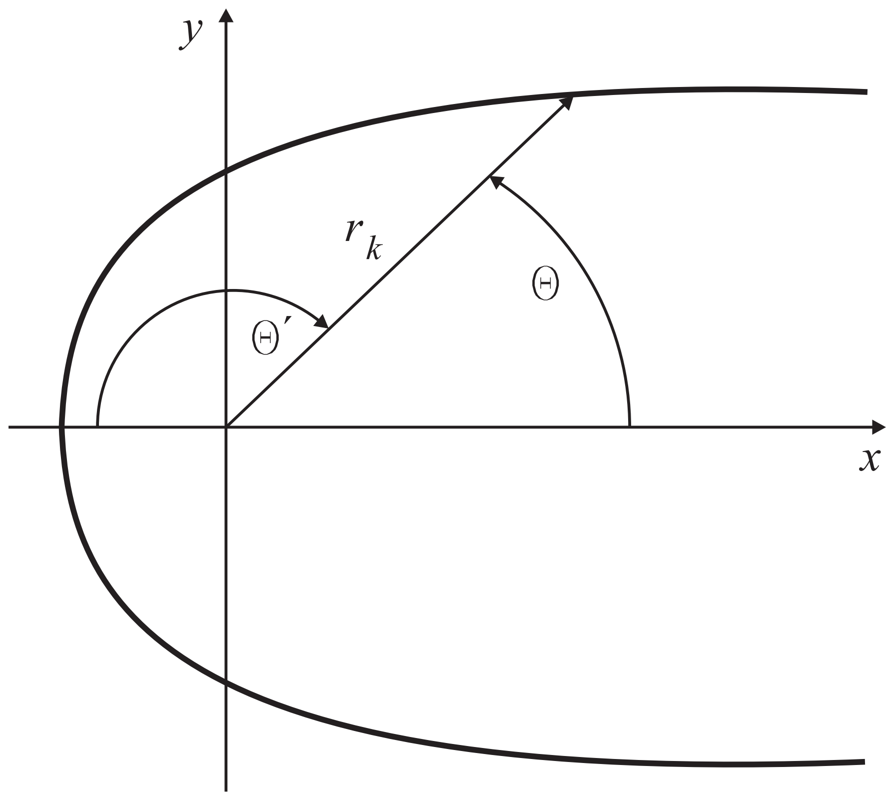
Gegeben: $u_\infty,\ p_\infty,\ h$

14.6

Bestimmen Sie:

a) den Staupunkt und die Geschwindigkeit im Punkt $x = x_s,\ y = h$,
b) die Kontur des Halbkörpers,
c) die Druckverteilung auf der Kontur,
d) die Isobaren,
e) die Kurve, auf der der Druck um $\frac{\rho}{4}u_\infty^2$ größer ist als der Druck p_∞ in der Anströmung,
f) die Isotachen,
g) das Gebiet, in dem die Geschwindigkeitskomponente v größer ist als $\frac{u_\infty}{2}$,
h) die Kurve, auf der die Stromlinien unter 45^o geneigt sind,
i) die maximale Verzögerung, die ein auf der x-Achse strömendes Teilche n zwischen $x = -\infty$ und dem Staupunkt erfährt!

14.6



a)

$$\psi = u_\infty y + \frac{E}{2\pi}\theta + c = u_\infty \left[y + \frac{h}{\pi} \arctan\left[\frac{y}{x}\right]\right] + c$$

14.6

$$u = u_\infty \left[1 + \frac{h}{\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \right]$$

$$v = u_\infty \frac{h}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Staupunkt: $u = v = 0: \quad x_s = -\frac{h}{\pi}, y_s = 0$

$$u(x_s, h) = u_\infty \frac{\pi^2}{1 + \pi^2}$$

$$v(x_s, h) = u_\infty \frac{\pi}{1 + \pi^2}$$

b) Kontur: Stromlinie durch den Staupunkt

$$r_k = \frac{h}{\pi}\frac{\pi-\theta}{\sin\theta} = \frac{h}{\pi}\frac{\theta'}{\sin\theta} \quad \text{mit} \quad \theta' = \pi - \theta$$

c)

$$c_p = 1 - \frac{u^2+v^2}{u_\infty^2} = -\frac{h}{\pi}\frac{2x+\frac{h}{\pi}}{x^2+y^2}$$

$$c_{pk} = \frac{\sin(2\theta')}{\theta'} - \left(\frac{\sin\theta'}{\theta'}\right)^2$$

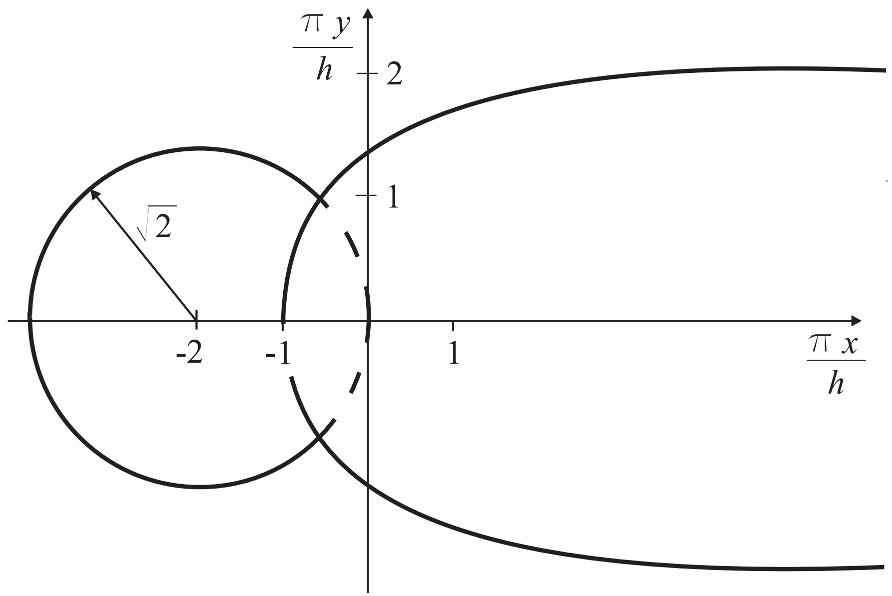
d)

$$c_p = konst: \quad \left[x + \frac{h}{\pi c_p}\right]^2 + y^2 = (1-c_p)\left(\frac{h}{\pi c_p}\right)^2$$

Kreise um $\left(-\frac{h}{\pi c_p}, 0\right)$ mit Radius $\frac{h\sqrt{1-c_p}}{\pi c_p}$

e)

$$c_p = \frac{1}{2}: \qquad \left(x + \frac{2h}{\pi}\right)^2 + y^2 = 2\left(\frac{h}{\pi}\right)^2$$



f)

$$\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{u_\infty} = k$$

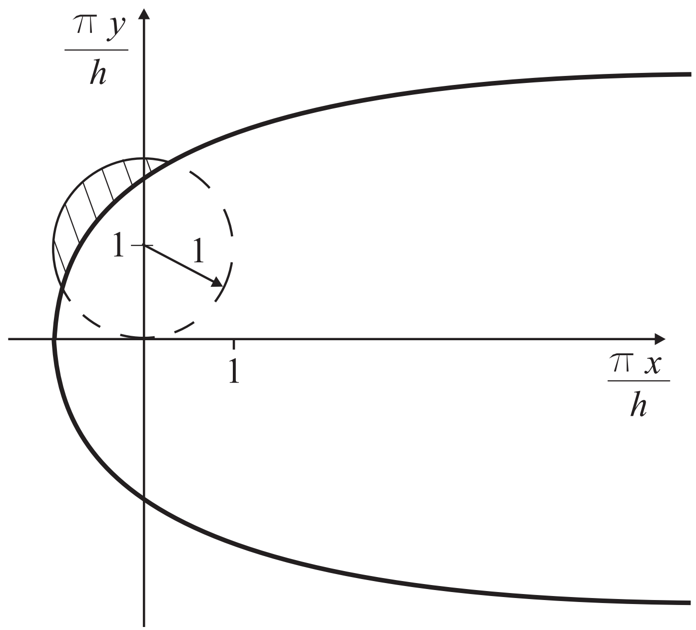
$$\left(x - \frac{\frac{h}{\pi}}{k^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\frac{kh}{\pi}}{k^2-1}\right)^2$$

Kreise um $\left(\frac{h}{\pi(k^2-1)}, 0\right)$ mit Radius $\frac{kh}{\pi(k^2-1)}$

g)

$$v = u_\infty \frac{h}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} > \frac{u_\infty}{2}$$

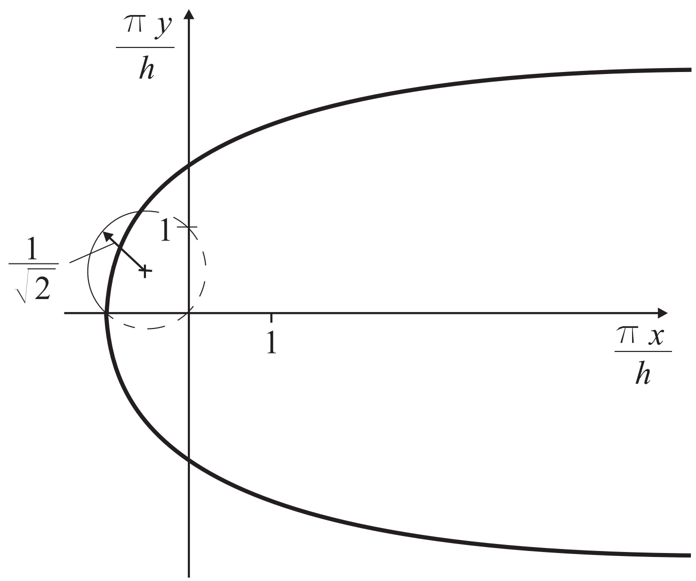
$$x^2 + \left(y - \frac{h}{\pi} \right)^2 < \left(\frac{h}{\pi} \right)^2$$



h)

$$\tan\alpha = \frac{v}{u} = 1$$

$$\left(x + \frac{h}{2\pi}\right)^2 + \left(y - \frac{h}{2\pi}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{h}{\pi}\right)^2$$



14.6

i) Beschleunigung auf der x-Achse:

$$b = \frac{du}{dt} = u\frac{\partial u}{\partial x} = -u_\infty \frac{h}{\pi}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{h}{\pi}\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\frac{db}{dx} = 0 : \quad x_{max} = -\frac{3}{2}\frac{h}{\pi}$$

$$b_{max} = -\frac{4}{27}\frac{\pi}{h}u_\infty^2$$

14.4

Gegeben ist die komplexe Stromfunktion

$$F(z) = \frac{2}{3}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}}\, z^{\frac{3}{2}} + \frac{E}{2\pi}\ln(z)$$

Gegeben: $L,\ u_\infty$

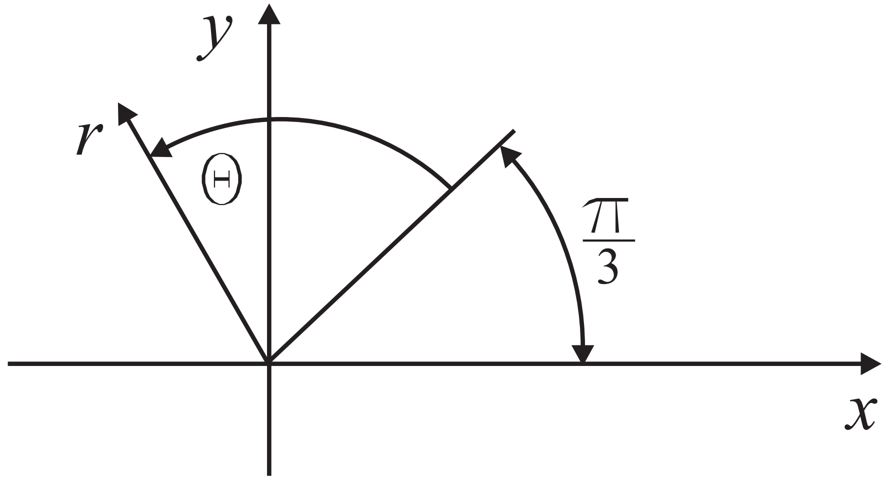
Bestimmen Sie:

a) das Potential $\phi(r,\theta)$ und die Stromfunktion $\psi(r,\theta)$.
b) die Geschwindigkeitskomponenten v_r, v_θ.
c) die Konstante E so, daß bei $(x = -L, y = 0)$ ein Staupunkt entsteht,
d) die Gleichung der Kontur $r_k(\theta)$.

Hinweise:

$$z = x' + iy' = re^{i\theta}$$

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$



14.4

a)

$$F(z) = \frac{2}{3}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}} z^{3/2} + \frac{E}{2\pi} \ln z$$

$$= \frac{2}{3}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}} r^{3/2} e^{i3/2\theta} + \frac{E}{2\pi} \left(\ln r + \ln e^{i\theta}\right)$$

$$\Phi(r,\theta) = \Re(F(z)) = \frac{2}{3}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}} r^{3/2} \cos\frac{3}{2}\theta + \frac{E}{2\pi} \ln r$$

$$\Psi(r,\theta) = \Im(F(z)) = \frac{2}{3}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}} r^{3/2} \sin\frac{3}{2}\theta + \frac{E}{2\pi}\theta$$

b)

$$v_r(r,\theta) = \frac{\partial\Phi}{\partial r} = u_\infty\sqrt{\frac{r}{L}}\cos\frac{3}{2}\theta + \frac{E}{2\pi r}$$

$$v_\theta(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = -u_\infty\sqrt{\frac{r}{L}}\sin\frac{3}{2}\theta$$

c) Staupunkt bei $(x=-L,\ y=0) \to (r=L,\ \theta=\frac{2}{3}\pi)$

$$v_\theta = -u_\infty\sqrt{\frac{r}{L}}\underbrace{\sin\pi}_{=0}$$

$$v_r = u_\infty\sqrt{\frac{r}{L}}\underbrace{\cos\pi}_{=-1} + \frac{E}{2\pi L} = 0 \to E = 2\pi u_\infty L$$

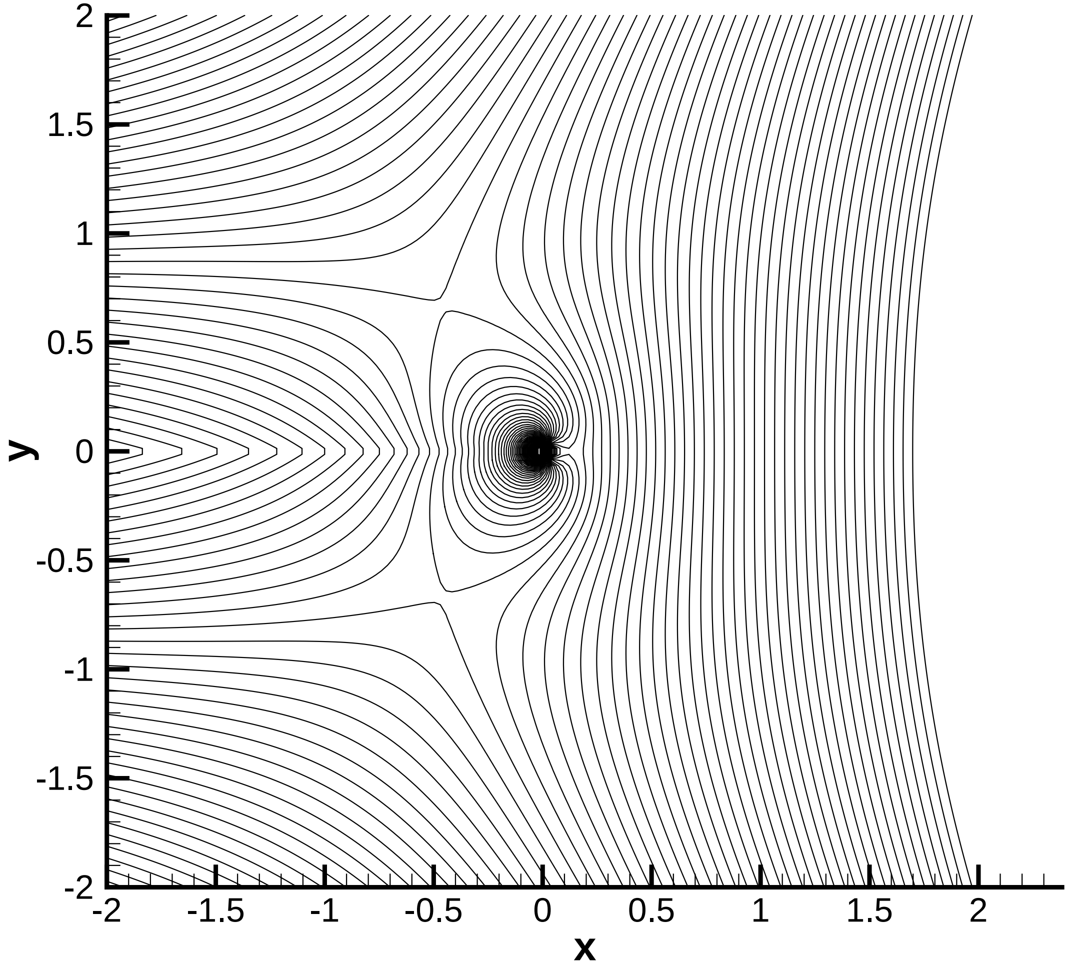
d)

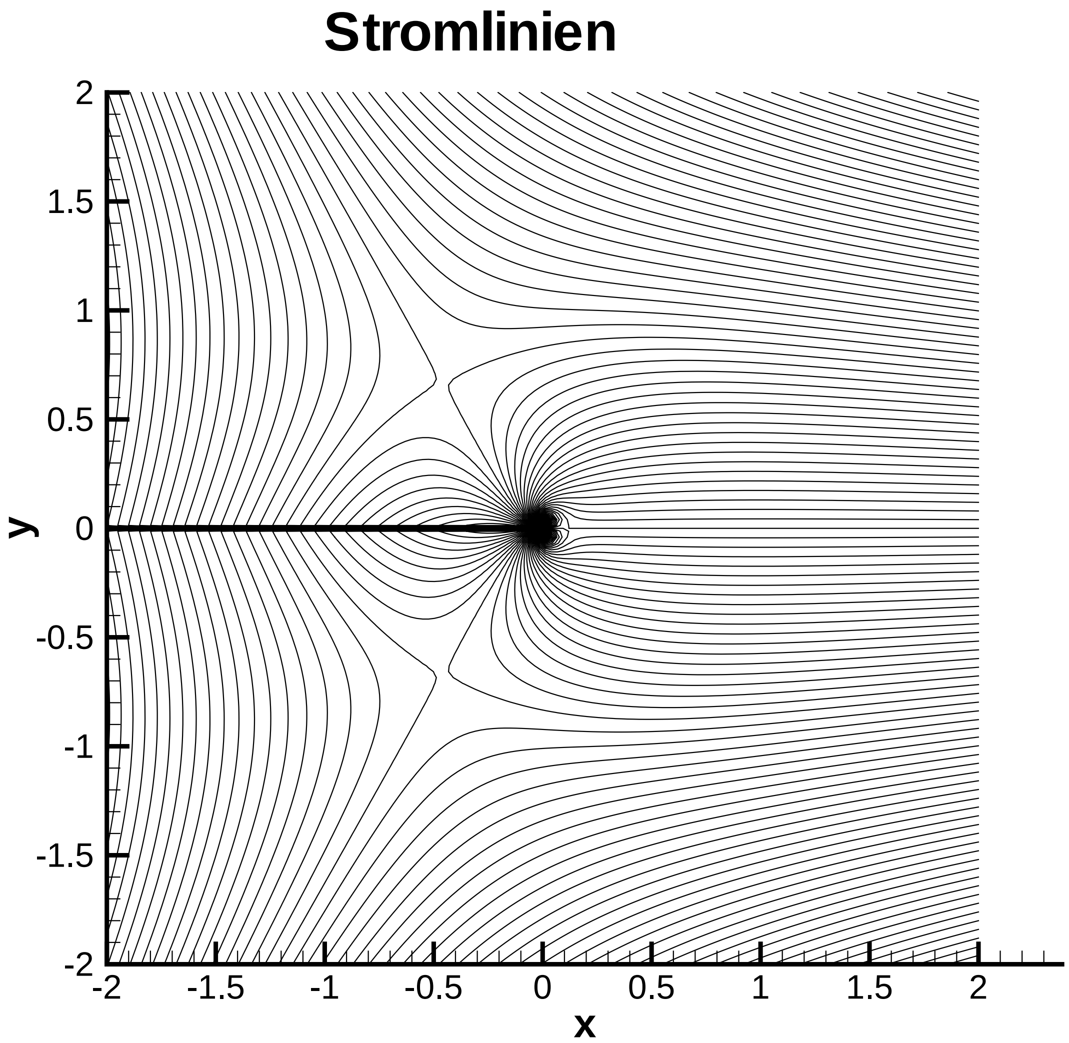
$$\Psi_{Sp} = \frac{E}{2\pi}\frac{2}{3}\pi = \frac{E}{3} = \frac{2}{3}\pi u_\infty L = \Psi_K$$

$$\frac{2}{3}\pi u_\infty L = \frac{2}{3}\frac{u_\infty}{\sqrt{L}} r^{3/2} \sin\frac{3}{2}\theta + \frac{E}{2\pi}\theta$$

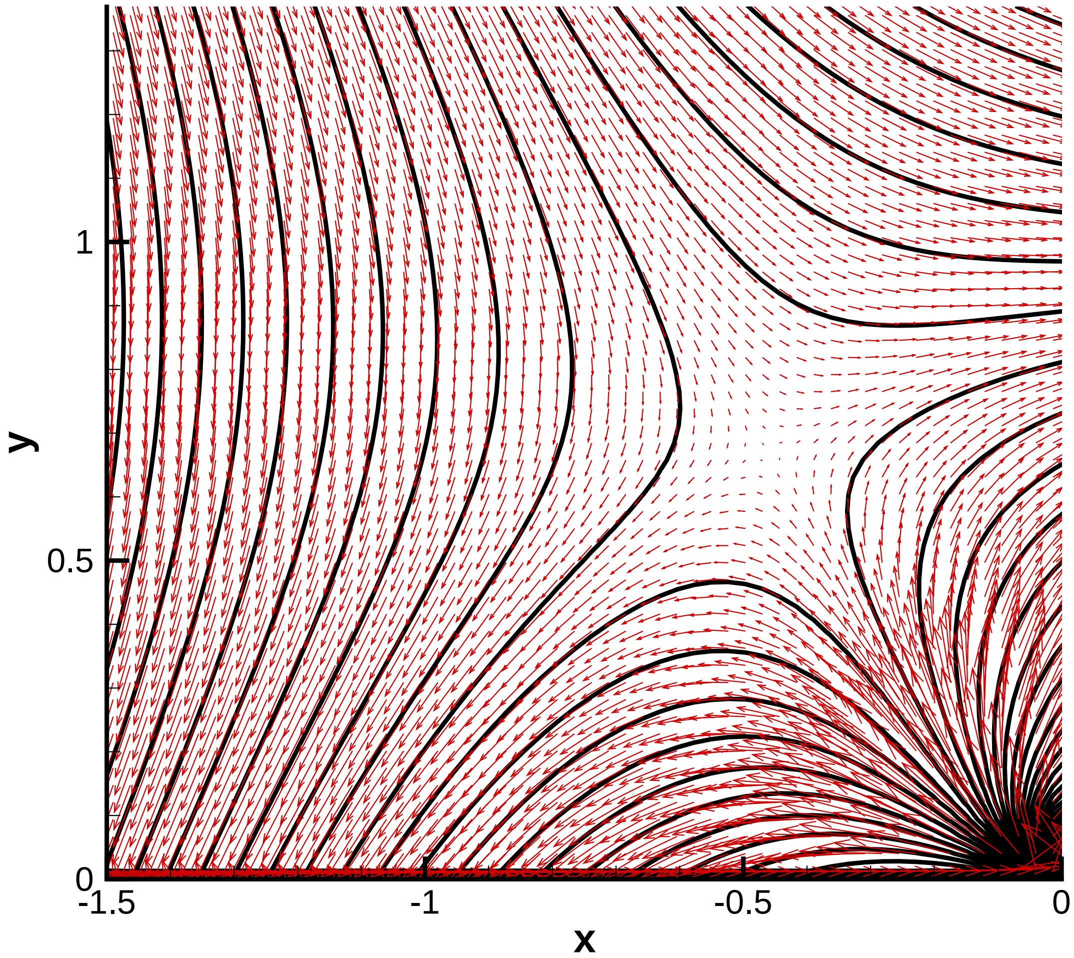
$$\rightarrow r_K(\theta) = L\left(\frac{\pi - \frac{3}{2}\theta}{\sin\frac{3}{2}\theta}\right)^{2/3}$$

Potentiallinien





Stromlinien
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
y
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
x



y
1
0.5
0
-1.5
-1
-0.5
0
x